

ЧАСТОТНО-АДАПТИВНЫЙ РЕГУЛЯТОР: СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА

Резков И.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: fagoth@mail.ru

Ключевые слова: адаптивное управление, частотная идентификация, программное обеспечение

Приводятся два подхода к синтезу динамического регулятора по выходу в задаче частотного адаптивного управления. Метод синтеза регулятора предусматривает обеспечение заданных запасов устойчивости.

1. Введение

Адаптивное управление развивается в нескольких направлениях. Условно можно выделить два крупных подхода: прямой и непрямой метод адаптации. В рамках непрямого метода существует адаптивное управление, основанное на методе конечно-частотной идентификации. Суть его состоит в идентификации частотных характеристик в конечном множестве точек (частот). Это число совпадает с порядком объекта.

Метод конечно-частотного адаптивного управления развивается, например, в работах [1-2]. По полученной (идентифицированной) частотной характеристике объекта синтезируется динамический регулятор. Для этого используется техника, например, LQ-оптимизации. Однако если у объекта недоступны для измерения фазовые переменные, применяют регулятор по выходу. В основе его синтеза лежит регулятор по состоянию, удовлетворяющий заданным требованиям (точность, запасы устойчивости, и т.д.), с применением алгоритма восстановления фазового вектора объекта. При этом регулятор по выходу не обладает свойством оптимальности в смысле первичного функционала, использовавшегося при синтезе регулятора по состоянию, однако свойства его (точность, запасы устойчивости) контролируются в процессе синтеза.

В настоящей работе обсуждаются некоторые вопросы синтеза регулятора в задаче конечно-частотного адаптивного управления, отличающийся от существующего способом восстановления вектора состояния объекта.

2. Метод конечно-частотной идентификации

Опишем вкратце метод конечно-частотной идентификации.

Рассмотрим асимптотически устойчивый объект, описываемый разностным уравнением:

$$(1) \quad y[i+n] + d_{n-1}y[i+n-1] + \dots + d_1y[i+1] + d_0y[i] = k_{n-1}u[i+n-1] + \dots + k_1u[i+1] + k_0u[i] + f(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

где $y(i)$ – измеряемый выход; $u(i)$ – управление, имеющее кусочно-постоянный вид; $f(i)$ – неизвестное ограниченное возмущение:

$$(2) \quad |f(i)| \leq f^*,$$

где f^* – заданное число. Коэффициенты d_m и k_j ($m = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, \gamma}$) – неизвестные числа, n – известное число, i – номер такта.

Уравнение (1) объекта можно записать в форме Коши:

$$(3) \quad \begin{cases} x(i) = Ax(i-1) + bu(i-1) + gf(i-1) \\ y(i) = cx(i) \end{cases}$$

В дальнейшем будем пользоваться как первой формой записи объекта, так и второй.

По окончании адаптации регулятор имеет вид:

$$(4) \quad g_{n-1}u[i+n-1] + \dots + g_1u[i] + g_0u = r_{n-1}y[i+n-1] + \dots + r_1y[i+1] + r_0y[i],$$

и обеспечивает выполнение требования к точности (цель управления):

$$(5) \quad |y(i)| \leq y^*, \quad t \geq t_p,$$

где y^* – заданное число, t_p – время регулирования.

Предполагается, что существует регулятор (3), обеспечивающий достижение цели (4), когда коэффициенты объекта (1) известны.

Для идентификации объекта (1) используется испытательный сигнал $u(ih)$, состоящий из n гармоник. Амплитуды испытательного сигнала определяются ограничениями на выходы и входы объекта, а его частоты должны удовлетворять условию принадлежности к диапазону собственных частот объекта [2].

С объекта снимаются частотные параметры его входа (α_u, β_u) и выхода (α_y, β_y) , по ним вычисляются частотные параметры объекта. Решая так называемые частотные уравнения, представляющие собой линейную систему, находим оценки $\hat{k}$ и $\hat{d}$ коэффициентов передаточной функции:

$$(6) \quad W(z^{-1}) = \frac{k_1 z^{-1} + \dots + k_n z^{-n}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}} = \frac{k(z^{-1})}{1 + d(z^{-1})}.$$

После этого испытание продолжается и через определенное количество интервалов фильтрации N , соответствующее периоду T минимальной испытательной частоты, частотные параметры входа и выхода снимаются вновь, вычисляются оценки частотных параметров объекта, решаются частотные уравнения и находятся оценки $\hat{k}$ и $\hat{d}$ коэффициентов передаточной функции (6). Этот процесс повторяется до тех пор, пока коэффициенты объекта (6) не сойдутся к своим значениям.

3.1 Синтезатор. Существующий подход

Синтезатор находит коэффициенты регулятора (4) так, чтобы выполнялись требования к точности регулирования (5). При этом используются оценки коэффициентов объекта (6).

В основе алгоритма синтезатора лежит решение задачи АКОР (LQ-оптимизации) с функционалом:

$$J = \sum \left\{ x^T(i) Q x(i) + u^2(i) + \varepsilon_1^2 \left[\frac{u(i+1) - u(i)}{h} \right]^2 + \varepsilon_2^2 \left[\frac{u(i+2) - u(i+1)}{h} \right]^2 + \dots + \varepsilon_\varphi^2 \left[\frac{u(i+\varphi) - u(i+\varphi-1)}{h} \right]^2 \right\},$$

где $x(i)$ – вектор переменных состояния идентифицированного объекта (1),

ε_m ($m = \overline{1, \varphi}$) – достаточно малый коэффициент, определяемый [3] из условия реализуемости передаточной функции регулятора.

Функционал минимизируется, и результат находится путем решения уравнения Риккати и прямого алгоритма восстановления [3].

Известно, что заданная точность управления достигается [3] в системе с регулятором по состоянию

$$(7) \quad u(k) = Kx(k),$$

если для синтеза регулятора использовать процедуру LQ-оптимизации с функционалом

$$(8) \quad J = \sum_{i=1}^{\infty} \{ x^T(i) Q x(i) + u^T(i) u(i) \}$$

где **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** – положительно-определенная матрица, в которой коэффициент q определяется по формуле **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** Предполагается, что объект записан в форме Коши, **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** – вектор уравнения выхода.

3.2 Синтезатор. Предлагаемый подход.

Синтез регулятора состоит из следующих этапов:

- Нахождение оптимального управления в форме (7), доставляющего минимум функционалу (8);
- восстановление фазового вектора,
- проверка выполнения цели регулирования, корректировка задачи.

Новый и существующий подход различаются методом синтеза устройства наблюдения [3]. Рассмотрим второй этап синтеза регулятора в рамках предлагаемого подхода.

Из уравнения выхода объекта (3) запишем n уравнений вида:

$$(9) \quad \begin{cases} y(i) = cx(i) \\ y(i-1) = cx(i-1) = c(A^{-1}x(i) - A^{-1}bu(i-1)) \\ y(i-2) = cx(i-2) = c(A^{-2}x(i) - A^{-2}bu(i-1) - A^{-1}bu(i-2)) \\ y(i-3) = cx(i-3) = c(A^{-3}x(i) - A^{-3}bu(i-1) - A^{-2}bu(i-2) - A^{-1}bu(i-3)) \\ \dots \\ y(i-(n-1)) = c(A^{-(n-1)}x(i) - A^{-(n-1)}bu(i-1) - A^{-(n-2)}bu(i-2) - \dots - A^{-1}bu(i-(n-1))) \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \\ \dots \\ y(i-(n-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cA^{-1} \\ cA^{-2} \\ \dots \\ cA^{-(n-1)} \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cA^{-1}b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cA^{-2}b & cA^{-1}b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ cA^{-(n-1)}b & cA^{-(n-2)}b & \dots & cA^{-2}b & cA^{-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(i-1) \\ u(i-2) \\ u(i-3) \\ \dots \\ u(i-n+1) \end{bmatrix}$$

или в матричной форме:

$$(11) \quad L^0 x(i) = l_1 u(i-1) + \dots + l_{n-1} u(i-n+1) + \bar{y}$$

$$\text{где } L^0 = \begin{bmatrix} c \\ cA^{-1} \\ cA^{-2} \\ \dots \\ cA^{-(n-1)} \end{bmatrix}, l_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ cA^{-1}b \\ cA^{-2}b \\ \dots \\ cA^{-(n-1)}b \end{bmatrix}, l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ cA^{-1}b \\ \dots \\ cA^{-(n-2)}b \end{bmatrix}, \dots, l_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ cA^{-1}b \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ y(i-2) \\ \dots \\ y(i-(n-1)) \end{bmatrix}$$

здесь $L^0 \in R^{n \times n}$.

Уравнение (11) примет вид:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ \dots \\ z^{-(n-1)} \end{bmatrix} y(i) = \begin{bmatrix} c \\ cA^{-1} \\ cA^{-2} \\ \dots \\ cA^{-(n-1)} \end{bmatrix} x(i) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cA^{-1}b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ cA^{-2}b & cA^{-1}b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ cA^{-(n-1)}b & cA^{-(n-2)}b & \dots & cA^{-2}b & cA^{-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \\ \dots \\ z^{-(n-1)} \end{bmatrix} u(i),$$

или в матричном виде:

$$(13) \quad \psi(z)y(i) = L^0 x(i) + [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n] \phi(z)u(i)$$

$$\text{где } \psi(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ z^{-2} \\ \dots \\ z^{-(n-1)} \end{bmatrix}, \phi(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} \\ z^{-2} \\ z^{-3} \\ \dots \\ z^{-(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Из (13) следует:

$$(14) \quad x(i) = l(z)u(i) + \lambda(z)y(i),$$

$$\text{где } l(z) = -(L^0)^{-1} [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_{n-1}] \phi(z), \lambda(z) = (L^0)^{-1} \psi(z).$$

Из уравнения (14), в частности, видно, что для построения вектора состояния $x(i)$ используются предыдущие значения $y(i)$ и $u(i)$ (т.к. везде стоит z в отрицательной степени), а это означает, что восстановление вектора состояния по закону (14) физически осуществимо.

Запишем (7) с учетом (14):

$$(15) \quad u(i) = kx(i) = kl(z)u(i) + k\lambda(z)y(i)$$

и уравнение регулятора (15) примет вид:

$$(16) \quad [1 - k \cdot l(z)]u(i) = k\lambda(z)y(i)$$

Передаточная функция регулятора есть:

$$(17) \quad w_{\text{рег}} = \frac{k\lambda(z)}{1 - k \cdot l(z)}$$

Регулятор (17) будем называть Z-обратным. Получившийся регулятор имеет реализуемую структуру, поскольку в передаточной функции порядок числителя и знаменателя равен $(n-1)$, что следует из структуры векторов $\psi(z)$ и $\phi(z)$.

Известны [3] следующие свойства системы с Z-обратным регулятором.

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы и характеристический полином замкнутой системы с регулятором по состоянию (7):

$$(18) \quad w_{\text{раз}}(z) = -k(Ez - A)^{-1}b$$

$$(19) \quad D(z) = |Ez - A| |1 - k(Ez - A)^{-1}b|$$

и системы с регулятором (17):

$$(20) \quad w_{\text{раз}}^*(z) = -[E - kl(z)]^{-1} k\lambda(z)c(Ez - A)^{-1}b = -R(z)c(Ez - A)^{-1}b$$

$$(21) \quad D^*(z) = \begin{vmatrix} Ez - A & -b \\ -k \cdot \lambda(z) \cdot c & E - k \cdot l(z) \end{vmatrix} = |Ez - A| |E - kl(z) - k\lambda(z)c(Ez - A)^{-1}b|$$

Сравним последние четыре выражения, используя для этого тождество

$$(22) \quad (Ez - A)^{-1}b = l(z) + \lambda(z)c(Ez - A)^{-1}b,$$

доказательство которого приведено в [3].

Из (18) получим:

$$(23) \quad w_{\text{раз}}(z) = -kl(z) - k\lambda(z)c(Ez - A)^{-1}b$$

Из (19) получим:

$$(24) \quad D(z) = |Ez - A| |1 - kl(z) - k\lambda(z)c(Ez - A)^{-1}b|$$

отсюда

$$(25) \quad 1 + w_{\text{раз}}^*(z) = [1 - kl(z)][1 + w_{\text{раз}}^*(z)]$$

$$(26) \quad D(z) = D^*(z)$$

Соотношение (25) связывает передаточные функции системы с регулятором по состоянию и по выходу, а равенство (26) говорит о том, что системы с обоими регуляторами будут обладать одинаковыми свойствами устойчивости.

На третьем этапе происходит проверка выполнения цели регулирования (точности).

Для этого систему представим в виде

$$(27) \begin{cases} d(z)y(i) = k(z)u(i) + m(z)f(i) \\ g(z)u(i) = r(z)y(i) \end{cases}$$

и вычислим величину

$$(28) K_{зам} = \left. \frac{d(z)g(z) - k(z)r(z)}{g(z)m(z)} \right|_{z=1}$$

Затем проверяется условие

$$(29) 1.03 \frac{f_{\max}}{y_{\max}} > K_{зам} > 0.97 \frac{f_{\max}}{y_{\max}}$$

Величина $K_{зам}$ может оказаться больше или меньше требуемой, что является нежелательным, поэтому процедура синтеза Z-обратного регулятора повторяется с изменением значения q до тех пор, пока величина $K_{зам}$ окажется принадлежащим интервалу (29).

Наряду с этим, проверяется условие для радиуса запасов устойчивости системы:

$$(30) r = \sqrt{\inf_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w(s)|^2} \geq 0.6$$

Если это условие не выполняется, то величина q изменяется до тех пор, пока не выполнится условие (30). Как правило, если радиус запасов устойчивости мал, то значение q слишком велико, и его нужно уменьшать.

4. Анализ частных случаев.

Анализ осуществлялся в среде *Matlab* с помощью специально разработанных программ *test_u_Kx_AG_41.m*, *akord4.m*, и дополнительных вспомогательных программ, описанных ниже.

Программа *test_u_Kx_AG_41.m*:

- задаёт объект для исследования;
- задаёт параметры возмущения и требуемые условия точности (5);
- находит дискретную модель объекта (1);
- находит Z-обратный регулятор (17) с помощью программы *akord4.m*;
- если нужно, увеличивает значение q для выполнения условия (5) и повторяет синтез регулятора;
- моделирует систему и выводит графики процессов на экран.

Программа *akord4.m*:

- с помощью функции *dare* находит регулятор по состоянию (7);
- с помощью вспомогательной программы *vost_back.m* находит матрицы наблюдателя (14);
- с помощью вспомогательной программы *calc_contr.m* находит вектора коэффициентов передаточной функции регулятора (17);
- вычисляет радиус запасов устойчивости системы и проверяет условие (30);
- если условие (30) не выполняется, корректирует значение q и проводит синтез регулятора до тех пор, пока это условие не выполнится;
- возвращает вектора коэффициентов регулятора и значение q , при котором он был проведен.

Ниже приводятся конкретные примеры, проведенные с помощью описанных программ.

4.1 Минимально-фазовый объект.

Применим описанный подход для минимально-фазового объекта, описываемого дифференциальным уравнением

$$(31) \quad 0.2\ddot{y} + 1.24\dot{y} + 5.24y = 0.4\dot{u} + u + f.$$

Требуется построить дискретный регулятор, подавляющий ограниченное возмущение

$$(32) \quad |f(t)| \leq 1$$

таким образом, чтобы выход объекта был ограниченным

$$(33) \quad |y(t)| \leq 0.025, \quad t > t_p.$$

где t_p – время регулирования.

Дискретная модель объекта (31):

$$(34) \quad w(z) = \frac{9.876 \cdot 10^{-5} z^2 + 1.228 \cdot 10^{-6} z + 9.514 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2.937 z^2 + 2.877 z - 0.9399}, \quad h = 0.01c.$$

Корни числителя объекта: -0.9877 и 0.9753 (объект минимально-фазовый).

Объект приводится к форме Коши (3) с матрицами

$$(35) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9399 \\ 1 & 0 & -2.8772 \\ 0 & 1 & 2.9373 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 673.3 \\ -1370.9 \\ 698.7 \end{bmatrix},$$

$$c = [0.0988 \cdot 10^{-3} \quad 0.2913 \cdot 10^{-3} \quad 0.4764 \cdot 10^{-3}]$$

На первом этапе синтеза Z-обратного регулятора (16) решается задача LQ-оптимизации.

Чтобы выполнялось условие точности регулирования, выберем [3] весовую матрицу следующим образом:

$$f_{\max} = 1, \quad y_{\max} = 0.025,$$

$$Q = c^T q^2 c, \quad q = \frac{f_{\max}}{y_{\max}} = 40$$

Весовые матрицы функционала (8):

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0156 \cdot 10^{-3} & 0.0460 \cdot 10^{-3} & 0.0753 \cdot 10^{-3} \\ 0.0460 \cdot 10^{-3} & 0.1358 \cdot 10^{-3} & 0.2221 \cdot 10^{-3} \\ 0.0753 \cdot 10^{-3} & 0.2221 \cdot 10^{-3} & 0.3632 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$R = 1.$$

Для нахождения матрицы регулятора и решения дискретного уравнения Риккати используется функция *dare* системы *Matlab*.

В результате получаем закон управления по состоянию (7):

$$(36) \quad u(i) = [-0.0837 \quad -0.0867 \quad -0.0896]x(i)$$

Регулятор по состоянию является основой для построения регулятора по выходу.

Для сравнения свойств регуляторов проведем синтез регулятора при другом условии задачи, а именно $y_{\max} = 0.2$.

Проведя те же операции, получим регулятор (7):

$$(37) \quad u(i) = [-1.021 \cdot 10^{-2} \quad -1.0248 \cdot 10^{-2} \quad -1.0278 \cdot 10^{-2}]x(i)$$

Построим теперь регулятор по выходу на основе полученного регулятора по состоянию (36).

На втором этапе синтеза Z-обратного регулятора (16) строится закон восстановления (14) фазовых переменных. Рассмотрим вначале постановку $f_{\max} = 1, \quad y_{\max} = 0.025$.

Получим следующие матрицы:

$$l(z) = \begin{bmatrix} -13380 \cdot z^{-1} - 13217 \cdot z^{-2} \\ 27244 \cdot z^{-1} + 26910 \cdot z^{-2} \\ -13885 \cdot z^{-1} - 13715 \cdot z^{-2} \end{bmatrix} \quad \lambda(z) = \begin{bmatrix} 1.354 - 2.658z^{-1} + 1.305z^{-2} \\ -2.758 + 5.412z^{-1} - 2.658z^{-2} \\ 1.405 - 2.758z^{-1} + 1.354z^{-2} \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

В результате решения задачи синтеза получен Z-обратный регулятор (16):

$$(38) w_{pez}(z) = \frac{-4551z^2 + 8480z - 3967}{z^2 - 0.3658z - 0.4016},$$

передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (38) имеет вид:

$$w_{раз}^*(z) = \frac{0.4495z^4 - 0.8319z^3 - 0.05161z^2 + 0.8117z - 0.3774}{z^5 - 3.303z^4 + 3.55z^3 - 0.8127z^2 - 0.8117z + 0.3774}.$$

Моделирование системы с регулятором по состоянию и с Z-обратным регулятором дает процесс, представленный на рисунке 1.

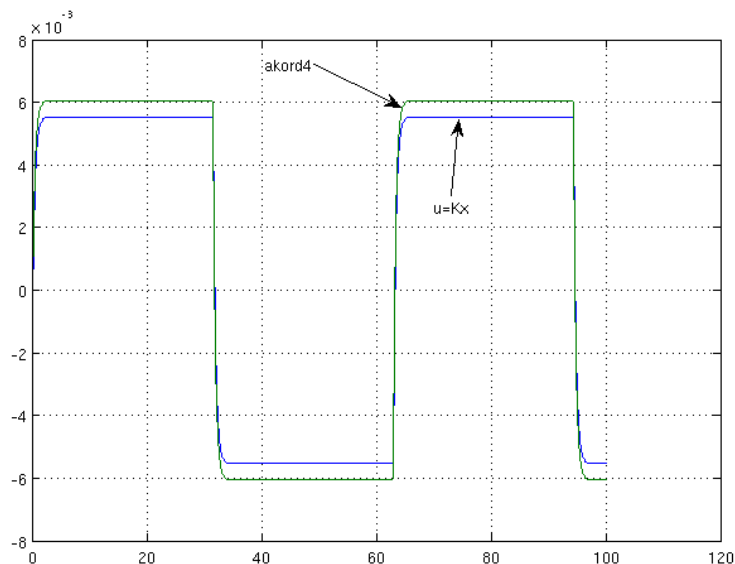


Рис. 1. Графики выхода системы. $q=40$.

Регулятор (38) обладает следующими характеристиками:

- радиус запасов устойчивости 0.812;
- запас по амплитуде 3.2 (10 дБ)
- запас по фазе 72° .
- $K_{зам} = 159$, $y_{max} = 0.006$.

Получившийся регулятор (38) обладает почти в 4 раза повышенной точностью, что не всегда является желательным.

Для достижения цели управления значение q итеративно уменьшается до значения 17.12. Повторяя все этапы синтеза регулятора, получим оптимальный закон регулирования по состоянию (7):

$$(39) u(i) = [-0.0406 \quad -0.0413 \quad -0.0419]x(i)$$

Регулятор по выходу будет иметь вид:

$$(40) w_{pez}(z) = \frac{-3307z^2 + 6277z - 2986}{z^2 - 0.2861z - 0.3023}$$

а передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (40) примет вид:

$$w_{раз}^*(z) = \frac{0.3267z^4 - 0.6159z^3 - 0.0274z^2 + 0.6009z - 0.2841}{z^5 - 3.323z^4 + 3.415z^3 - 0.875z^2 - 0.6009z + 0.2841}.$$

Регулятор (40) обеспечивает следующие характеристики:

- радиус запасов устойчивости 0.89;
- запас по амплитуде 4.1 (12 дБ)
- запас по фазе 104° .
- $K_{зам} = 40.8$, $y_{max} = 0.0245$.

Таким образом, синтезированный регулятор удовлетворяет условиям задачи.

При этом регулятор по состоянию и по выходу отличаются на величины

$$1 - kl(z) = 1 - 0.286z^{-1} - 0.302z^{-2},$$

$$1 - kl(1) = 0.411$$

Повторим синтез Z-обратного регулятора для $y_{\max} = 0.2$.

В результате решения задачи синтеза получен Z-обратный регулятор (16):

$$(41) \quad w_{\text{рег}}(z) = \frac{-1375z^2 + 2645z - 1275}{z^2 - 0.1256z - 0.129}.$$

а передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (41) имеет вид:

$$w_{\text{раз}}^*(z) = \frac{0.1358z^4 - 0.2596z^3 - 0.008164z^2 + 0.2532z - 0.1213}{z^5 - 3.063z^4 + 3.117z^3 - 0.9222z^2 - 0.2532z + 0.1213}.$$

Моделирование системы с регулятором по состоянию и с Z-обратным регулятором дает процесс, представленный на рисунке 2.

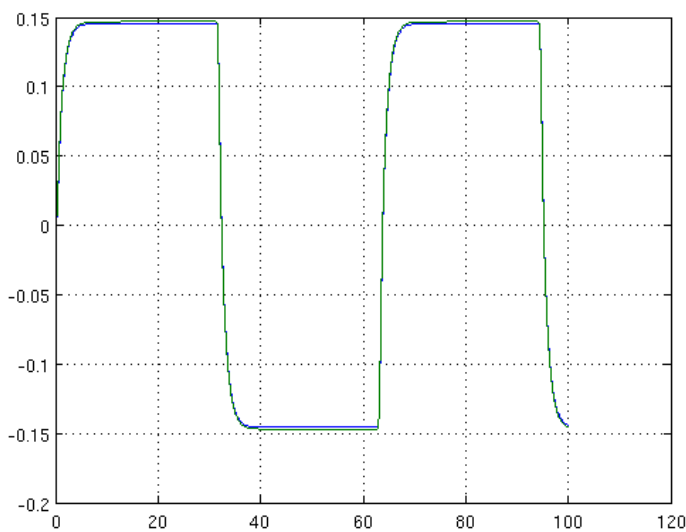


Рис. 2. Графики выхода системы. $q=5$.

Регулятор обладает следующими характеристиками:

- радиус запасов устойчивости 0.984;
- запас по амплитуде 8.5 (18 дБ)
- запас по фазе 123°
- $K_{\text{зам}} = 6.8$, $y_{\max} = 0.147$.

Получившийся регулятор (41) обладает повышенной точностью, что не всегда является желательным.

Для достижения цели управления значение q итеративно уменьшается до значения 3.9. Повторяя все этапы синтеза регулятора, получим оптимальный закон регулирования по состоянию (7):

$$(42) \quad u(i) = [-7.45 \cdot 10^{-3} - 7.47 \cdot 10^{-3} - 7.48 \cdot 10^{-3}]x(i)$$

Регулятор по выходу будет иметь вид:

$$(43) \quad w_{\text{рег}}(z) = \frac{-1076z^2 + 2073z - 1000}{z^2 - 0.0988z - 0.1012}$$

а передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (43) примет вид:

$$w_{\text{раз}}^*(z) = \frac{0.1063z^4 - 0.2034z^3 - 0.0061z^2 + 0.1984z - 0.0951}{z^5 - 3.036z^4 + 3.066z^3 - 0.9268z^2 - 0.1984z + 0.0951}.$$

Регулятор обладает следующими характеристиками:

- радиус запасов устойчивости 0.99;
- запас по амплитуде 10 (20 дБ)
- запас по фазе 120°.
- $K_{зам} = 5.04$, $y_{max} = 0.198$.

Таким образом, синтезированный регулятор удовлетворяет условиям задачи.

При этом регулятор по состоянию и по выходу отличаются на величины

$$1 - kl(z) = 1 - 0.0988z^{-1} - 0.1012z^{-2},$$

$$1 - kl(1) = 0.799.$$

4.2 Неминимально-фазовый объект.

Пусть есть непрерывный объект

$$(44) \quad 0.2\ddot{y} + 1.24\dot{y} + 5.24y = -0.4\dot{u} + u + f$$

Требуется построить дискретный регулятор, подавляющий ограниченное возмущение $|f(t)| \leq 1$ таким образом, чтобы выход объекта был ограниченным $|y(t)| \leq 0.025$.

Дискретная модель объекта (44) имеет вид:

$$(45) \quad w(z) = \frac{-9.712 \cdot 10^{-5} z^2 + 5.235 \cdot 10^{-6} z + 9.674 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2.937z^2 + 2.877z - 0.9399}, \quad h = 0.01c.$$

Корни числителя объекта есть 1.025 и -0.971 (объект неминимально-фазовый).

Объект приводится к форме Коши (3) с матрицами

$$(46) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.939 \\ 1 & 0 & -2.877 \\ 0 & 1 & 2.937 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 186.9 \\ -389.9 \\ 203.9 \end{bmatrix}$$

$$c = [-0.0971 \quad -0.28 \quad -0.4464] \cdot 10^{-3}$$

На первом этапе синтеза Z-обратного регулятора (16) решается задача LQ-оптимизации.

Чтобы выполнялось условие точности регулирования, выберем [3] весовую матрицу следующим образом:

$$q = \frac{f_{max}}{y_{max}} = 40, \quad f_{max} = 1, \quad y_{max} = 0.025$$

$$(47) \quad Q = c^T q^2 c$$

Весовые матрицы функционала (8):

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0151 & 0.0435 & 0.0694 \\ 0.0435 & 0.1255 & 0.2 \\ 0.0694 & 0.2 & 0.3189 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$R = 1.$$

В результате получаем оптимальный закон управления (7):

$$(48) \quad u(i) = [-0.0187 \quad -0.0189 \quad -0.0190]x(i)$$

Регулятор по состоянию (48) является основой для построения регулятора по выходу.

На втором этапе синтеза Z-обратного регулятора (16) строится закон восстановления (14) фазовых переменных. При этом получены следующие матрицы:

$$l(z) = \begin{bmatrix} 3840 \cdot z^{-1} + 3729 \cdot z^{-2} \\ -8008 \cdot z^{-1} - 7778 \cdot z^{-2} \\ 4188 \cdot z^{-1} + 4068 \cdot z^{-2} \end{bmatrix} \quad \lambda(z) = \begin{bmatrix} 3.95 - 7.55z^{-1} + 3.62z^{-2} \\ -8.24 + 15.76z^{-1} - 7.55z^{-2} \\ 4.31 - 8.24z^{-1} + 3.95z^{-2} \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

В результате решения задачи синтеза получен Z-обратный регулятор (16):

$$(49) w_{рег}(z) = \frac{-3312z^2 + 6432z - 3126}{z^2 + 0.3404z + 0.3218}.$$

При этом для обеспечения радиуса запасов устойчивости (30) программой *akord4.m* значение q было итеративно уменьшено до значения 8.235.

Передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (49) имеет вид:

$$w_{раз}^*(z) = \frac{-0.3217z^4 + 0.6421z^3 - 0.0168z^2 - 0.6059z + 0.3024}{z^5 - 2.597z^4 + 2.199z^3 - 0.9056z^2 + 0.6059z - 0.3024}.$$

Моделирование системы с регулятором по состоянию и с Z-обратным регулятором (49) дает следующие процессы:

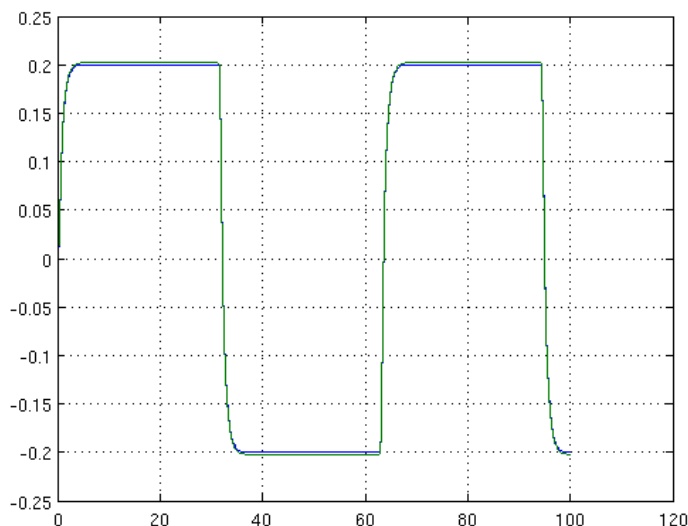


Рис. 3. Графики выхода системы.

Регулятор (49) обеспечивает следующие запасы устойчивости:

- радиус запасов устойчивости 0.60;
- запас по амплитуде 2.14 (6.6 дБ)
- запас по фазе -92°
- $K_{зам} = 4.94$, $y_{max} = 0.20$.

Таким образом, при синтезе с заданным условием точности регулятор не обеспечивает условия (30). Поэтому для неминимально-фазового объекта условия по точности были смягчены. При этом регулятор по состоянию и по выходу отличаются на величины

$$1 - kl(z) = 1 + 1.88z^{-1} + 1.78z^{-2}, \quad 1 - kl(1) = 4.668$$

Повторим синтез Z-обратного регулятора для $y_{max} = 0.2$.

В результате решения задачи синтеза получен Z-обратный регулятор (16):

$$(50) w_{рег}(z) = \frac{-1794z^2 + 3483z - 1693}{z^2 + 0.1844z + 0.1743}.$$

а передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (50) имеет вид:

$$w_{раз}^*(z) = \frac{-0.1742z^4 + 0.3477z^3 - 0.00917z^2 - 0.3281z + 0.1638}{z^5 - 2.753z^4 + 2.51z^3 - 0.9212z^2 + 0.3281z - 0.1638}.$$

Моделирование системы с регулятором по состоянию и с Z-обратным регулятором (50) дает процесс, представленный на рисунке 4.

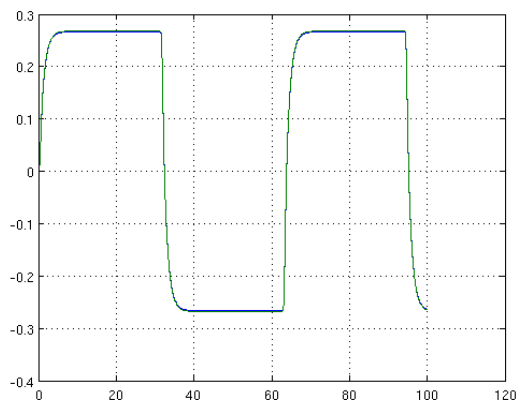


Рис. 4. Графики выхода системы. $q=5$.

Регулятор (50) обеспечивает следующие запасы устойчивости:

- радиус запасов устойчивости 0.736;
- запас по амплитуде 3.8 (11 дБ)
- запас по фазе 99° .
- $K_{зам} = 3.73$, $y_{max} = 0.267$.

Получившийся регулятор (50) не обладает желаемой точностью.

Для достижения цели управления значение q итеративно увеличивается программой *test_u_Kx_AG_41.m* до значения 8.04. Повторяя все этапы синтеза регулятора, получим оптимальный закон регулирования по состоянию (7):

$$(51) \quad u(i) = [-0.102 \quad -0.102 \quad -0.103]x(i)$$

Регулятор по выходу будет иметь вид:

$$(52) \quad w_{pez}(z) = \frac{-3220z^2 + 6252z - 3039}{z^2 + 0.3309z + 0.3128}$$

а передаточная функция разомкнутой системы с регулятором (52) примет вид:

$$w_{раз}^*(z) = \frac{-0.3127z^4 + 0.6241z^3 - 0.0164z^2 - 0.5889z + 0.294}{z^5 - 2.606z^4 + 2.218z^3 - 0.9065z^2 + 0.5889z - 0.294}.$$

Регулятор (52) обладает следующими характеристиками:

- радиус запасов устойчивости 0.60;
- запас по амплитуде 2.56 (8.17 дБ)
- запас по фазе 88° .
- $K_{зам} = 4.88$, $y_{max} = 0.204$.

Таким образом, синтезированный регулятор удовлетворяет условиям задачи по точности и радиусу запасов устойчивости.

При этом регуляторы по состоянию и по выходу отличаются на величины

$$1 - kl(z) = 1 + 0.184z^{-1} + 0.174z^{-2}, \quad 1 - kl(1) = 1.358.$$

Заключение

Приведен алгоритм синтеза Z-обратного регулятора. Приведены численные примеры.

Литература

1. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация: граница частот испытательного сигнала // *АиТ*. 2001. Т. 62. №11.

2. *Александров А.Г.* Конечная частотная идентификация: самонастройка испытательного сигнала // Сб. научных трудов «Робастное управление и частотная идентификация». Электросталь, ЭПИ МИСиС. 2004. С 67-97.
3. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. // М.: Машиностроение, 1986.