ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ НА ОСНОВЕ LQ- И H∞-ОПТИМИЗАЦИИ

А.Г. Александров, В.Н. Честнов
ИПУ РАН, г. Москва
alex7@ipu.rssi.ru, vnchest@rambler.ru

Введение

В работе предложены процедуры синтеза линейных многомерных систем заданной точности при действии ограниченных детерминированных кусочно-непрерывных внешних возмущений, разложимых в ряд Фурье, сумма абсолютных значений амплитуд гармоник которых ограничена известным числом (для каждой компоненты возмущения). Точность оценивается максимумом отклонения каждой регулируемой переменной объекта управления от нуля в установившемся режиме. В качестве математического инструментария используются процедуры LQ- и H_∞-оптимизации. Решение опирается на частотные матричные неравенства для передаточной матрицы замкнутой системы (от внешнего возмущения к регулируемым переменным), которые имеют место для данных процедур синтеза. Приведены аналитические выражения для выбора коэффициентов весовых матриц соответствующих квадратичных функционалов оптимизации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейный стационарный объект, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad z = C_1 x, \quad y = C_2 x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта, $u \in R^m$ – вектор управления, $z \in R^{m_1}$ – вектор регулируемых переменных, $y \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных, $w \in R^\mu$ – вектор внешних неизмеряемых возмущений. Постоянные числовые матрицы A, B_1, B_2, C_1, C_2 известны. Пара матриц (A, B_2) предполагается управляемой, а пары (C_1, A) и (C_2, A) – наблюдаемыми.

Компоненты вектора внешних возмущений кусочно-непрерывные функции, разложимые в ряд Фурье (с неизвестными амплитудами w_{ik}, начальными фазами ψ_{ik} и частотами ω_k). Предполагается, что сумма модулей амплитуд каждой компоненты внешнего возмущения ограничена (w_i^* – заданные числа)

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \cdot \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \;\; i = \overline{1, \mu}, \;\; \sum_{k=1}^{\infty} |w_{ik}| \le w_i^*, \quad i = \overline{1, \mu}. \tag{2}$$

В качестве регулятора будем рассматривать линейную стационарную систему, описываемую уравнениями состояния

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \;\; u = C_c x_c + D_c y, \tag{3}$$

где $x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора, а A_c, B_c, C_c, D_c – неизвестные матрицы регулятора.

Определим установившиеся ошибки по регулируемым переменным и установившиеся значения управлений соотношениями

$$z_{i,st} = \lim_{t\to\infty} \sup |z_i(t)|, \; i = \overline{1, m_1}, \; u_{i,st} = \lim_{t\to\infty} \sup |u_i(t)|, \; i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор такой, что ошибки регулирования замкнутой системы (1), (3) при действии возмущений из класса (2) удовлетворяли требованиям $z_{i,st} \le z_i^*$, $i = \overline{1, m_1}$, где z_i^* – заданные положительные числа.

2. Вспомогательные результаты

Рассмотрим случай измеряемого вектора состояния ($C_2 = I$, I – единичная матрица), когда управления и внешние возмущения приложены в одной точке ($B_1 = B_2$, $\mu = m$, $m_2 = n$). Тогда уравнения объекта (1) можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = Ax + B_2(w + u), \quad z = C_1 x, \quad y = x. \tag{5}$$

Известно [1], что для объекта (5) закон управления

$$u = Kx, \quad K = -R^{-1}B_2^T P, \tag{6}$$

где симметрическая неотрицательно определенная матрица $P = P^T \ge 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^T P + PA - PB_2R^{-1}B_2^T P = -C_1^T QC_1, \tag{7}$$

доставляет минимум квадратичному функционалу качества $J = \min\limits_u \int_0^\infty (z^T Qz + u^T Ru)dt$ (при $w=0$ в (5)), где Q и R – симметрические положительно определенные весовые матрицы, выбираемые проектировщиком.

Определим передаточные матрицы замкнутой LQ-оптимальной системы (5), (6), (7)

$$T_{uw}(s) = K(sI - A_{cl})^{-1}B_2, \; T_{zw}(s) = C_1(sI - A_{cl})^{-1}B_2, \; A_{cl} = A + B_2K, \tag{8}$$

первая из которых связывает вектор управляющих воздействий u, а вторая – вектор регулируемых переменных z с вектором внешних возмущений w. Имеет место [1]

Теорема 1. Передаточные матрицы (8) оптимальной системы (5)-(7) удовлетворяют следующим матричным неравенствам:

$$T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) \le R, \;\; T_{uw}^T(-j\omega)T_{uw}(j\omega) \le 4I, \quad R = rI, \;\; r > 0, \quad \omega \in [0, \infty). \tag{9}$$

Если симметрическая неотрицательно определенная матрица $P = P^T \ge 0$ закона управления (6) для объекта (1) удовлетворяет матричному уравнению Лурье-Риккати [2]

$$A^T P + PA\text{-}PB_2R^{-1}B_2^T P + \gamma^{-2}PB_1B_1^T P = -C_1^T QC_1, \tag{10}$$

то закон управления (6) является оптимальным в смысле следующего минимаксного квадратичного функционала H_∞-оптимизации $J = \min\limits_u \max\limits_w \int_0^\infty (z^T Qz + u^T Ru - \gamma^2 w^T w)dt$, где минимум берется по всем $u \in L_2[0,\infty)$, а максимум по всем $w \in L_2[0,\infty)$, γ – заданное или минимизируемое число.

Поскольку у объекта (1) в общем случае $B_1 \ne B_2$, то переопределим передаточные матрицы замкнутой системы (1), (6), (10)

$$T_{uw}(s) = K(sI - A_{cl})^{-1}B_1, \; T_{zw}(s) = C_1(sI - A_{cl})^{-1}B_1, \tag{11}$$

которые связывают внешнее возмущение w с вектором управления u и вектором регулируемых переменных z соответственно. Имеет место [3]

Теорема 2. Передаточные матрицы (11) оптимальной системы (1), (6), (10) удовлетворяют частотному матричному неравенству:

$$T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) + T_{uw}^T(-j\omega)RT_{uw}(j\omega) \le \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty). \tag{12}$$

3. Основная лемма

Сформулируем теперь важное утверждение, на котором базируются главные утверждения работы.

Пусть $T_{\overline{zw}}$ – произвольная ($r \times k$) устойчивая передаточная матрица, связывающая некоторый вектор выходных переменных $\bar{z}$ с вектором входных воздействий $\overline{w}$ из класса (2) (с заменой размерности μ на *k*) $\bar{z} = T_{\overline{zw}}(j\omega)\overline{w}$, которая удовлетворяет частотному матричному неравенству $T_{\overline{zw}}^{T}(-j\omega)\overline{Q}T_{\overline{zw}}(j\omega) \le \overline{R}, \quad \omega \in [0, \infty)$.

Здесь $\overline{Q} = \mathrm{diag}[\bar{q}_1, \bar{q}_2, ..., \bar{q}_r]$ и $\overline{R} = \mathrm{diag}[\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_k]$ – некоторые положительно определенные диагональные матрицы соответствующих размеров.

Лемма 1. Пусть выполнено частотное неравенство $T_{\overline{zw}}^{T}(-j\omega)\overline{Q}T_{\overline{zw}}(j\omega) \le \overline{R}$, $\omega \in [0, \infty)$. Тогда установившиеся значения выходных переменных устойчивой системы $\bar{z} = T_{\overline{zw}}(j\omega)\overline{w}$ при действии входного сигнала из класса (2) удовлетворяют неравенствам $\sqrt{\bar{q}_i}\,\bar{z}_{i,st} \le \sum_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k}} \sqrt{\bar{r}_j}\,\overline{w}_j^{*}$ $(i = \overline{1, r})$, где $\overline{w}_j^{*}$ – границы компонент внешних возмущений из правых частей аналогов вторых неравенств (2) для возмущения $\overline{w}$.

4. Синтез регуляторов по состоянию

Целью этого раздела является решение задачи 1, когда полный вектор состояния доступен измерению, а для построения регулятора используются техники *LQ* и H_∞-оптимизации. Все утверждения этого раздела работы являются прямыми следствиями частотных неравенств раздела 2.

Для регуляторов по состоянию на основе процедур *LQ*-оптимизации справедливо следующее утверждение

Теорема 3. Установившиеся значения регулируемых переменных (ошибок регулирования) системы (5)-(7) при действии кусочно-непрерывных возмущений (2) в случае диагональных весовых матриц *Q* и *R* квадратичного критерия качества и установившиеся значения управляющих воздействий при фиксированных *R=rI*, *r>0* и *Q>0* (необязательно диагональной) ограничены соотношениями:

$$\sqrt{q_i}\, z_{i,st} \le \sum_{j}^{\mu} \sqrt{r_j}\, w_j^{*} \quad (i = \overline{1, m_1}),\ u_{i,st} \le 2\sum_{j}^{\mu} w_j^{*}\ (i = \overline{1, m}),$$

где q_i и r_j – элементы диагональных весовых матриц *Q* и *R*, w_j^{*} границы компонент внешних возмущений из правых частей вторых неравенств (2)).

Следствие 1. Закон управления (6), (7) разрешает задачу 1 для объекта (5), если элементы диагональных весовых матриц *Q* и *R* квадратичного критерия качества удовлетворяют условиям

$$q_i = (\sum_{j}^{\mu} w_j^{*})^2 \Big/ \left(z_i^{*}\right)^2 \quad (i = \overline{1, m_1}),\ \ r_j = 1 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Действительно, в силу следствия 1 из первого неравенства теоремы 1 вытекает неравенство $z_{st,i} \big/ z_i^{*} \le 1$, откуда следует условие задачи 1.

Подчеркнем, что закон управления (6), (7) и $u_{i,st} \le 2\sum_{j}^{\mu} w_j^{*}$ $(i = \overline{1, m})$, позволяет обеспечить сколь угодно высокую точность управления (числа z_i^{*} - любые), независимо от частот ω_k внешнего возмущения $w_i(t)$ из (2). Кроме того, очевидно, что любая из переменных состояния (в этом случае $z = x$ $(C_1 = I,\ m_1 = n)$) может быть сделана сколь угодно малой в установившемся режиме, если внешние возмущения и управления приложены в одной точке ($B_1 = B_2$).

Рассмотрим регуляторы по состоянию, построенных на основе процедур H_∞-оптимизации.

Из неравенства (12) вытекают очевидные неравенства

$$T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) \le \gamma^2 I,\quad T_{uw}^T(-j\omega)RT_{uw}(j\omega) \le \gamma^2 I,\ \ \omega \in [0,\infty). \tag{13}$$

Из этих неравенств, с учетом леммы 1, придем к следующему результату.

Теорема 4. Установившиеся значения регулируемых переменных (ошибок регулирования) системы (1), (6), (10) при действии кусочно-непрерывных возмущений (2), (3) в случае диагональной весовой матрицы Q минимаксного квадратичного функционала H_∞-оптимизации и установившиеся значения управляющих воздействий при диагональной весовой матрице R удовлетворяют неравенствам

$$\sqrt{q_i}\, z_{i,st} \le \gamma \sum\nolimits_j^\mu w_j^*,\ i = \overline{1, m_1},\ \ \sqrt{r_i}\, u_{i,st} \le \gamma \sum\nolimits_j^\mu w_j^*,\ \ i = \overline{1, m},$$

где q_i и r_j – элементы диагональных весовых матриц Q и R, w_j^* – границы компонент внешних возмущений из правых частей вторых неравенств (2).

Следствие 2. Если элементы диагональных весовых матриц Q и R минимаксного квадратичного функционала H_∞-оптимизации удовлетворяют условиям

$$q_i = \left(\sum\nolimits_j^\mu w_j^*\right)^2 \Big/ \left(z_i^*\right)^2\ \ (i = \overline{1, m_1}),\ \ r_i = \left(\sum\nolimits_j^\mu w_j^*\right)^2 \Big/ \left(u_i^*\right)^2\ \ (i = \overline{1, m}),$$

то закон управления (6), (10) обеспечивает выполнение неравенств: $z_{i,st} \le \gamma z_i^*$ $(i = \overline{1, m_1})$, $u_{i,st} \le \gamma u_i^*$ $(i = \overline{1, m})$. Очевидно, если $\gamma \le 1$, то задача 1 решена.

Предложенная техника легко обобщается на случай регуляторов по измеряемому выходу.

Эффективность предложенного метода синтеза регуляторов продемонстрирована на примере построения регулятора электромеханической системы.

Литература

1. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур *LQ*-оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 83-95.
2. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Autom. Contr. 1989. Vol. AC-34, No. 8. P. 831-846.
3. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности II. Применение процедур H_∞-оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1998. № 8. С. 124-138.