# КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ: САМОНАСТРОЙКА ИСПЫТАТЕЛЬНОГО СИГНАЛА

Александров А.Г.

В работе предлагается алгоритм самонастройки амплитуд и частот испытательных гармоник в процессе идентификации. Приводится пример, демонстрирующий эффективность предложенного алгоритма.

## 1 Введение

Процесс идентификации одномерного линейного объекта протекает при двух входах: измеряемом и неизмеряемом. Неизмеряемый вход – это неизвестное внешнее возмущение. Измеряемый вход может быть управляемым либо неуправляемым. Управляемый вход называется испытательным (тестовым) сигналом. Испытательный сигнал определяется (строится) до начала идентификации (на этапе планирования эксперимента [1]) на основе априорной информации о параметрах объекта и внешнем возмущении. Вид испытательного сигнала существенно влияет на точность и длительность идентификации.

При идентификации с помощью метода наименьших квадратов (МНК) предполагается, что внешнее возмущение – случайный процесс типа ««белый шум»», и испытательный сигнал строится исходя из знаний о параметрах объекта. В методе инструментальных переменных [1] и при использовании рандомизированных алгоритмов идентификации [2] внешнее возмущение – почти произвольная функция, и поэтому на испытательный сигнал накладывается дополнительное ограничение: он должен быть некоррелирован с внешним возмущением. Это условие трудно выполнить априори, так как внешнее возмущение неизвестно и неизмеряемо.

В методе конечно-частотной идентификации [3] испытательный сигнал имеет определённую структуру: это сумма гармоник, число которых не превышает размерность вектора пространства состояний объекта. Его некоррелированность с внешним возмущением проверяется в процессе идентификации, если амплитуды и частоты испытательных гармоник известны. Интуитивно ясно, что испытательные частоты нужно выбирать из диапазона частот, в котором логарифмическая амплитудно-частотная характеристика объекта имеет изломы. Эти изломы определяются неизвестными параметрами объекта. В работе [4] предложен метод экспериментальной оценки (в процессе идентификации) границ этого диапазона, что даёт возможность построить алгоритм самонастройки амплитуд и частот испытательных гармоник в процессе идентификации, который и предлагается в настоящей работе.

Статья построена следующим образом. Вначале описывается метод конечно-частотной идентификации. Затем (в разделе 3) формулируются задачи самонастройки амплитуд и частот испытательного сигнала. В разделе 4 показано, что, если испытательные частоты выбираются вне указанного в [4] диапазона частот, то точность идентификации может быть низкой. Разделы 5 и 6 посвящены алгоритмам самонастройки испытательного сигнала. Пример раздела 7 показывает эффективность этих алгоритмов.

# 2 Метод конечно-частотной идентификации

## 2.1 Задача идентификации

Рассмотрим полностью управляемый объект, описываемый уравнением

$$d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + k_1 \dot{u} + k_0 u + f, \quad t \geq t_0, \tag{2.1}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход; $u(t)$ – управляемый вход; $y^{(i)}$, $u^{(j)}$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,\gamma}\right)$ – производные этих функций; $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение. Коэффициенты $d_i$, $k_j$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$ – неизвестные числа ( $d_0 = 1$, если не оговорено противное, $k_0 \neq 0$ ), $n$ и $\gamma$ – известны, $\gamma < n$.

Начальные условия $y^{(i)}(t_0)$ и возмущение $f(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left| y^{(i)}(t_0) \right| \leq \varepsilon_0 \quad i = \overline{0, n-1}, \qquad |f(t)| \leq f^*, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon_0$ и $f^*$ – некоторые числа.

Задача идентификации состоит в том, чтобы найти оценки $\hat{d}_i$, $\hat{k}_j$ $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{0,\gamma}\right)$ коэффициентов объекта, такие, чтобы относительные ошибки идентификации удовлетворяли требованиям

$$\hat{d}_i \div d_i \leq \varepsilon_i^d, \quad \hat{k}_j \div k_j \leq \varepsilon_j^k \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{0,\gamma}, \tag{2.3}$$

в которых $\varepsilon_i^d$ и $\varepsilon_j^k$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$ – заданные числа, а ««$\div$»» – символ отношения: $a \div b = |a - b|/|b|$ если $b \neq 0$ либо $a \div b = |a|$ если $b = 0$.

## 2.2 Частотные параметры

Конечно-частотная идентификация опирается на понятие частотных параметров [3], которые определяются как набор $2n$ чисел

$$\alpha_k = \operatorname{Re} w(s_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im} w(s_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

где $w(s) = k(s)/d(s)$ – передаточная функция объекта, $s_k = \lambda + \jmath\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $\lambda > C_0 > s^* > 0$, $s^* = \max\{\operatorname{Re} s_1^*, \operatorname{Re} s_2^*, \ldots, \operatorname{Re} s_n^*\}$ – степень неустойчивости объекта, $s_k^*$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – корни полинома $d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_1 s + 1$, $C_0$ – верхняя оценка степени неустойчивости (для асимптотически устойчивых объектов можно принимать $\lambda = 0$ ).

Оценки $\hat{\alpha}_k$ и $\hat{\beta}_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ частотных параметров находятся экспериментально. В случае асимптотически устойчивого объекта он возбуждается испытательным сигналом

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k (t - t_0), \quad t \geq t_0, \tag{2.5}$$

амплитуды $\rho_k$ и испытательные частоты $\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ которого – заданные положительные числа; $\omega_k$ кратны базовой частоте $\omega_б$: $\omega_k = n_k\omega_б$, где $n_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – целые числа.

Выход объекта, возбуждённого испытательным сигналом (2.5), прикладывается к фильтру Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \alpha_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\sin\omega_k(t-t_0)\,dt \\ \hat{\beta}_k &= \beta_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)\cos\omega_k(t-t_0)\,dt \end{aligned} \qquad k=\overline{1,n}, \tag{2.6}$$

где $t_F$ – момент начала фильтрации $t_F \geq t_0$; $\tau$ – время фильтрации, которое кратно базовому периоду $T_б = 2\pi/\omega_б$ и поэтому $\tau = qT_б$ $(q=1,2,\dots)$; $t_F - t_0$ – время, по истечении которого можно пренебречь влиянием начальных условий.

Чтобы сформулировать для асимптотически устойчивых объектов условия сходимости оценок к истинным значениям, введём функции фильтруемости [6]:

$$\ell_k^\alpha(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} \bar{y}(t)\sin\omega_k(t-t_0)dt, \quad \ell_k^\beta(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} \bar{y}(t)\cos\omega_k(t-t_0)dt \quad k=\overline{1,n}, \tag{2.7}$$

в которых $\bar{y}(t)$ – ««естественный»» выход объекта, когда испытательный сигнал отсутствует $[\,u(t)=0\,]$.

**Утверждение 1 [5]** *Если возмущение $f(t)$ таково, что, начиная с некоторого момента $\tau=\tau^*$, выполняются условия*

$$|\ell_k^\alpha(\tau)| \leq \varepsilon_k^\alpha, \quad \left|\ell_k^\beta(\tau)\right| \leq \varepsilon_k^\beta \quad k=\overline{1,n}, \quad \tau \geq \tau^*, \tag{2.8}$$

*в которых $\varepsilon_k^\alpha$ и $\varepsilon_k^\beta$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – заданные числа, то существует момент $\tau=\tau^{**}\geq\tau^*$ такой, что ошибки фильтрации $\Delta\alpha_k(\tau)=\hat{\alpha}_k-\alpha_k$ и $\Delta\beta_k(\tau)=\hat{\beta}_k-\beta_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ удовлетворяют неравенствам*

$$|\Delta\alpha_k(\tau)| \leq \varepsilon_k^\alpha, \quad |\Delta\beta_k(\tau)| \leq \varepsilon_k^\beta \quad k=\overline{1,n}, \quad \tau \geq \tau^{**}. \tag{2.9}$$

Возмущение, удовлетворяющее условиям (2.8), называется [6] ФФ-фильтруемым на заданном наборе испытательных частот.

Если объект неустойчив, то он возбуждается испытательным сигналом

$$u(t) = e^{\lambda(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\sin\omega_k(t-t_0), \quad t\geq t_0, \tag{2.10}$$

а оценки его частотных параметров находятся как выходы модифицированного фильтра Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \alpha_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\sin\omega_k(t-t_0)\,dt \\ \hat{\beta}_k &= \beta_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\cos\omega_k(t-t_0)\,dt \end{aligned} \qquad k=\overline{1,n}. \tag{2.11}$$

**Утверждение 2 [3]** *Оценки (2.11) сходятся к частотным параметрам (2.4) при любых ограниченных возмущениях:*

$$\lim_{\tau\to\infty}\alpha_k(\tau)=\alpha_k, \quad \lim_{\tau\to\infty}\beta_k(\tau)=\beta_k.$$

## 2.3 Частотные уравнения и алгоритм идентификации

Используя оценки частотных параметров, можно найти оценки коэффициентов объекта. Действительно, из тождества $w(s) = k(s)/d(s)$ и выражений (2.4) следует система линейных алгебраических уравнений

$$k(s_k) - (\alpha_k + \jmath\beta_k)d^*(s_k) = \alpha_k + \jmath\beta_k \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.12}$$

где $d^*(s) = d(s) - 1 = d_n s^n + \dots + d_1 s$ и $k(s) = k_\gamma s^\gamma + \dots + k_1 s + k_0$.

**Утверждение 3 [3], [4]** *При полностью управляемом объекте, система (2.12) имеет единственное решение:* $d_i$ *и* $k_j$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$*, не зависящее от выбора* $\lambda$ *и* $\omega_k$ $\left[\omega_k \neq 0 \ \left(k = \overline{1,n}\right),\ \ |\omega_i| \neq |\omega_j|\ (i \neq j)\right]$.

Заменяя в уравнениях (2.12) $\alpha_k$ и $\beta_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ их оценками, получим частотные уравнения идентификации [4]

$$\hat{k}(s_k) - \left(\hat{\alpha}_k + \jmath\hat{\beta}_k\right)\hat{d}^*(s_k) = \hat{\alpha}_k + \jmath\hat{\beta}_k \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.13}$$

Для $s_k = \jmath\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ эти уравнения приведены в приложении П.1.

Длительность фильтрации $\tau^* = q^* T_б$ определяется [5] из следующих необходимых условий сходимости идентификации: $q^*$ – положительное целое число, такое, что для любого целого $q \geq q^*$

$$d_i[(q-1)T_б] \div d_i(qT_б) \leq \varepsilon_i^d, \quad k_j[(q-1)T_б] \div k_j(qT_б) \leq \varepsilon_j^k \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{0,\gamma}. \tag{2.14}$$

**Алгоритм 1 (конечно-частотной идентификации)** состоит из операций: приложить к объекту (2.1) испытательный сигнал (2.5) либо (2.10); измерить выходы фильтра Фурье (2.6) либо (2.11) в момент времени $\tau = qT_б$ $(q = 1, 2, \dots)$; решить частотные уравнения (2.13) для каждого из этих моментов и найти оценки $d_i(qT_б)$, $k_j(qT_б)$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$; проверять необходимые условия (2.14) для каждого $q$, до тех пор, пока эти условия не выполнятся для некоторого $q = q^*$. ■

Чтобы проверить, что оценки $\hat{d}_i = d_i(q^* T_б)$ и $\hat{k}_j = k_j(q^* T_б)$ $\left(i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$ удовлетворяют требованиям (2.3), используются частотные методы подтверждения модели [7].

**Примечание 1** Идентификация неустойчивых объектов затруднена из-за ограниченного входа объекта:

$$|u(t)| \leq u^*, \tag{2.15}$$

где $u^*$ – заданное число.

Неравенство (2.15) ограничивает время идентификации $\delta = \tau$ числом

$$\delta_в \leq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{u^*}{\rho_{\max} n}, \tag{2.16}$$

где $\rho_{\max} = \max\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$.

Если цель идентификации (2.3) не достигается за время $\delta_в$, то испытательный сигнал формируем [6] как выход стабилизирующей обратной связи, описываемой уравнением

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0 y + v, \tag{2.17}$$

в котором числа $g_i$, $r_i$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ находятся из тождества Безу

$$\hat{d}(s)g(s)-\hat{k}(s)r(s)=\psi(s), \tag{2.18}$$

где $\hat{d}(s)=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{d}_i s^i$, $\hat{k}(s)=\sum\limits_{i=0}^{\gamma}\hat{k}_i s^i$; $\hat{d}_i$, $\hat{k}_j$ $\left(i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{0,\gamma}\right)$ – оценки коэффициентов объекта, получаемые как решения частотных уравнений (2.13) при $\hat{\alpha}_k=\alpha_k(\delta_в)$ и $\hat{\beta}_k=\beta_k(\delta_в)$; $\psi(s)$ – заданный гурвицев полином степени $2n-1$; $v(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\sin\omega_k(t-t_0)$.

Если характеристический полином $\varphi(s)=d(s)g(s)-k(s)r(s)$ системы (2.1), (2.17) – гурвицев, то, прикладывая выход системы (2.1), (2.17) к фильтру Фурье (2.6), получим оценки её частотных параметров, используя которые можно вычислить [7] оценки частотных параметров объекта. ■

**Примечание 2** Метод конечно-частотной идентификации не изменяется, когда выход объекта измеряется с шумом. В этом случае уравнения (2.1) дополняются выражением

$$\check{y}=y+\eta, \tag{2.19}$$

где $\check{y}(t)$ – измеряемый выход; $\eta(t)$ – шум измерений, который, как и возмущение $f(t)$, является неизвестной, ограниченной функцией: $|\eta(t)|\le\eta^*$, где $\eta^*$ – некоторое число. В интегралах (2.6) и (2.11) $y(t)$ в этом случае заменяется на $\check{y}(t)$, а в (2.7) – $\bar{y}(t)$ заменяется на $\check{\bar{y}}(t)$. ■

# 3 Постановка задачи

В описанном методе идентификации предполагается, что параметры испытательных сигналов (2.5) и (2.10) (амплитуды и частоты, а также число $\lambda$) заданы. Из утверждений 1 и 2, а также непрерывной зависимости решений частотных уравнений (2.13) от малых изменений их коэффициентов и правых частей следует, что существует время фильтрации $\tau$, для которого выполняются требования (2.3) к точности идентификации. Это время зависит от начальных условий, функции $f(t)$ и параметров испытательного сигнала. При априорном задании амплитуд и частот испытательного сигнала время фильтрации может оказаться недопустимо большим с практической точки зрения, а поэтому необходима настройка этих параметров в процессе идентификации.

Рассмотрим вначале задачу выбора испытательных частот. В соответствии с утверждением 2 результат идентификации не зависит от этих частот, если частотные параметры точно известны. Однако ошибки фильтрации приводят к зависимости оценок коэффициентов объекта от выбора испытательных частот. Это объясняется тем, что частотные уравнения (2.13), которые трансформируют ошибки фильтрации в ошибки идентификации, имеют коэффициенты, явно и неявно зависящие от $\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Для исследования влияния выбора испытательных частот будем использовать максимальные значения относительных ошибок фильтрации и идентификации:

$$\eta_{\alpha\beta}=\max\left\{\hat{\alpha}_1\div\alpha_1,\,\hat{\alpha}_2\div\alpha_2,\,\dots,\,\hat{\alpha}_n\div\alpha_n;\ \hat{\beta}_1\div\beta_1,\,\hat{\beta}_2\div\beta_2,\,\dots,\,\hat{\beta}_n\div\beta_n\right\}, \tag{3.1}$$

$$\eta_{dk}=\max\left\{\hat{d}_1\div d_1,\,\hat{d}_2\div d_2,\,\dots,\,\hat{d}_n\div d_n;\ \hat{k}_1\div k_1,\,\hat{k}_2\div k_2,\,\dots,\,\hat{k}_\gamma\div k_\gamma\right\}. \tag{3.2}$$

**Определение 1** *Коэффициентом чувствительности ошибок идентификации к ошибкам фильтрации называется число (обусловленности)*

$$K_\eta = \frac{\eta_{dk}}{\eta_{\alpha\beta}}. \tag{3.3}$$

**Задача 1** *Исследовать зависимость коэффициента чувствительности от испытательных частот, найти диапазоны частот с высоким коэффициентом чувствительности и построить алгоритм самонастройки испытательных частот вне этих диапазонов.*

Выбор амплитуд испытательного сигнала (при заданных испытательных частотах и показателе экспоненты $\lambda$) осложнён следующими противоречивыми требованиями. С одной стороны, ошибки фильтрации обратно пропорциональны амплитудам $\rho_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ и поэтому последние должны выбираться максимально возможными. С другой стороны, составляющая выхода объекта, возбуждённая испытательным сигналом, должна быть достаточно малой частью ««естественного»» выхода $\bar{y}(t)$. Поэтому амплитуды $\rho_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ выбираются максимально возможными при условии

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon_y, \quad t \geq t_F, \tag{3.4}$$

в котором $\varepsilon_y$ – заданное число. Это условие называется [6] условием ««малости возбуждения»» объекта испытательным сигналом. Наряду с условием (3.4) ниже будет использоваться и более ««мягкое»» условие ««малости возбуждения»»

$$\max_{t \geq t_F} |y(t)| \div \max_{t \geq t_F} |\bar{y}(t)| \leq \varepsilon_y. \tag{3.5}$$

Показатель экспоненты $\lambda$ в испытательном сигнале (2.10), используемом в процессе идентификации неустойчивого объекта, должен удовлетворять условию $\lambda > s^*$, в котором $s^*$ – неизвестное число.

**Задача 2** *Найти алгоритм самонастройки амплитуд $\rho_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ испытательного сигнала, при котором выполняется условие малости возбуждения (3.4), а для неустойчивых объектов найти также показатель экспоненты $\lambda > s^*$.*

**Примечание 3** В следующих двух разделах приводится решение задачи 1 для асимптотически устойчивого объекта. Покажем, что это решение полностью распространяется на неустойчивые объекты. Обозначим

$$\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \tilde{u}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k (t - t_0). \tag{3.6}$$

Тогда, в соответствии с (2.10), имеем $u(t) = \tilde{u}(t)e^{\lambda(t-t_0)}$. Введём следующее

**Определение 2** *Преобразованным объектом называется объект, входом которого является сигнал $\tilde{u}(t)$, а выходом – измеряемый сигнал $\tilde{y}(t)$.*

Структурная схема этого объекта приведена на рис. 1.

$$\xrightarrow{\tilde{u}} \boxed{e^{\lambda(t-t_0)}} \xrightarrow{u} \boxed{w(s)} \xrightarrow{y} \boxed{e^{-\lambda(t-t_0)}} \xrightarrow{\tilde{y}}$$

Рис. 1. Преобразованный объект.

Найдём его передаточную функцию

$$\begin{aligned}\tilde{w}(s)=\frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{u}(s)}=\frac{\pounds\{\tilde{y}(t)\}}{\pounds\{\tilde{u}(t)\}}=\frac{\pounds\{y(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\}}{\pounds\{u(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\}}=\frac{y(s+\lambda)}{u(s+\lambda)}=\\ = w(s+\lambda)=\frac{k(s+\lambda)}{d(s+\lambda)}=\frac{\tilde{k}(s)}{\tilde{d}(s)}=\frac{\tilde{k}_\gamma s^\gamma+\cdots+\tilde{k}_1 s+\tilde{k}_0}{s^n+\tilde{d}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\tilde{d}_1 s+\tilde{d}_0}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Преобразованный объект асимптотически устойчив. Действительно, так как $d(s_i)=0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, то корнями полинома $\tilde{d}(s)=d(s+\lambda)$ являются корни $\tilde{s}_i=-\lambda+s_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. По определению числа $\lambda$, $\mathrm{Re}\,\tilde{s}_i<0$.

Оценками частотных параметров преобразованного объекта являются выходы фильтра Фурье (2.6). Этот фильтр с учётом первого из обозначений (3.6) совпадает с фильтром (2.11). Оценки коэффициентов $\tilde{d}_i$, $\tilde{k}_j$ $\left(i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,\gamma}\right)$ преобразованного объекта находятся путём решения частотных уравнений (2.13) при $s_k=\jmath\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, а искомые оценки коэффициентов $d_i$ и $k_j$ $\left(i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,\gamma}\right)$ однозначно вычисляются по формулам, которые нетрудно получить из равенств $\tilde{d}(s)=d(s+\lambda)$, $\tilde{k}(s)=k(s+\lambda)$.
■

# 4 Частотные диапазоны

Передаточную функцию асимптотически устойчивого объекта (2.1)

$$w(s)=\frac{k(s)}{d(s)}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{\gamma}k_j s^j}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}d_i s^i} \tag{4.1}$$

при $k_0\neq 0$ представим в виде

$$w(s)=k_0\frac{\prod\limits_{i=1}^{\breve{p}}\left(\check{T}_i s+1\right)\prod\limits_{i=1}^{\breve{p}}\left(\breve{T}_i^2 s^2+2\breve{T}_i\breve{\xi}_i s+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{\bar{p}}\left(\bar{T}_i s+1\right)\prod\limits_{i=1}^{\tilde{p}}\left(\tilde{T}_i^2 s^2+2\tilde{T}_i\tilde{\xi}_i s+1\right)}. \tag{4.2}$$

Будем полагать, что постоянные времени различны и упорядочены следующим образом:

$$\bar{T}_1\ >\ \bar{T}_2\ >\cdots>\ \bar{T}_{\bar{p}}\,,\qquad \tilde{T}_1\ >\ \tilde{T}_2\ >\cdots>\ \tilde{T}_{\tilde{p}}\,; \tag{4.3}$$

$$|\check{T}_1|>|\check{T}_2|>\cdots>|\check{T}_{\check{p}}|,\qquad |\breve{T}_1|>|\breve{T}_2|>\cdots>|\breve{T}_{\breve{p}}|. \tag{4.4}$$

**Определение 3** *Частоты*

$$\bar{\omega}_i=\frac{1}{\bar{T}_i}\quad i=\overline{1,\bar{p}},\quad \tilde{\omega}_i=\frac{1}{\tilde{T}_i}\quad i=\overline{1,\tilde{p}},\quad \check{\omega}_i=\frac{1}{|\check{T}_i|}\quad i=\overline{1,\check{p}},\quad \breve{\omega}_i=\frac{1}{|\breve{T}_i|}\quad i=\overline{1,\breve{p}}, \tag{4.5}$$

*называются собственными частотами объекта.*

Нижние и верхние границы собственных частот обозначим как

$$\omega_н=\min\{\,\bar{\omega}_1,\ \tilde{\omega}_1,\ \check{\omega}_1,\ \breve{\omega}_1\,\}\quad \text{и}\quad \omega_в=\max\{\,\bar{\omega}_{\bar{p}},\ \tilde{\omega}_{\tilde{p}},\ \check{\omega}_{\check{p}},\ \breve{\omega}_{\breve{p}}\,\}. \tag{4.6}$$

**Определение 4** *Диапазоны $\Omega_н$ и $\Omega_в$ называются диапазонами низких $(0, \omega_н)$ и высоких $(\omega_в, \infty)$ частот соответственно, а диапазон $\Omega$ – диапазоном собственных частот $[\omega_н, \omega_в]$ объекта.*

Частотные параметры объекта (2.1) выразим через коэффициенты передаточной функции (4.1) (вывод соотношений приведён в приложении П.2)

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} l_{2q}\omega_k^{2q}}{\sum\limits_{q=0}^{n} m_q\omega_k^{2q}}, \quad \beta_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{\left\{\frac{n+\gamma}{2}\right\}-1} l_{2q+1}\omega_k^{2q+1}}{\sum\limits_{q=0}^{n} m_q\omega_k^{2q}} \quad k=\overline{1,n}, \tag{4.7}$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – ближайшие к $\cdot$ целые числа, такие что $[\cdot] \le \cdot \le \{\cdot\}$,

$$\begin{aligned}
l_{2q} &= \sum_{\sigma_q^\alpha}(-1)^{i+q}d_ik_j \quad & \sigma_q^\alpha &= \Big\{\, i,j \;:\; i+j=2q \quad\;\;, \; i=\overline{0,n},\; j=\overline{0,\gamma}\,\Big\},\\
l_{2q+1} &= \sum_{\sigma_q^\beta}(-1)^{i+q}d_ik_j \quad & \sigma_q^\beta &= \Big\{\, i,j \;:\; i+j=2q+1, \; i=\overline{0,n},\; j=\overline{0,\gamma}\,\Big\},\\
m_q &= \sum_{\sigma_q}(-1)^{i+q}d_id_j \quad & \sigma_q &= \Big\{\, i,j \;:\; i+j=2q \quad\;\;, \; i=\overline{0,n},\; j=\overline{0,n}\,\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

**Утверждение 4** *Всегда существует набор испытательных частот $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, строго ФФ-фильтруемое внешнее возмущение $|f(t)| \le f^*$ и время фильтрации $\tau^* > \tau^{**}$ (где $\tau^{**}$ – любое, сколь угодно большое число), такие, что коэффициент чувствительности превышает любое заданное положительное число $K_\eta^*$ :*

$$K_\eta > K_\eta^*. \tag{4.9}$$

Для доказательства утверждения 4 аппроксимируем частотные параметры (4.7) функциями

$$\alpha_k^н = l_0, \quad \beta_k^н = \sum_{q=0}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1} l_{2q+1}\omega_k^{2q+1} \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.10}$$

Из структуры (4.7) очевидно следующее

**Свойство 1** *Для любого сколь угодно малого числа $\delta_н > 0$ всегда существует такой набор испытательных частот $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, что*

$$\alpha_k^н \div \alpha_k < \delta_н, \quad \beta_k^н \div \beta_k < \delta_н \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

Оценки частотных параметров представим в виде

$$\begin{aligned}
\hat\alpha_k &= \alpha_k(\tau) = \alpha_k + \Delta\alpha_k(\tau) = \alpha_k^н + \varepsilon_\alpha^н(\omega_k) + \Delta\alpha_k(\tau), \;\text{ где }\; \varepsilon_\alpha^н(\omega_k) = \alpha_k - \alpha_k^н,\\
\hat\beta_k &= \beta_k(\tau) = \beta_k + \Delta\beta_k(\tau) = \beta_k^н + \varepsilon_\beta^н(\omega_k) + \Delta\beta_k(\tau), \;\text{ где }\; \varepsilon_\beta^н(\omega_k) = \beta_k - \beta_k^н,
\end{aligned} \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.12}$$

**Лемма 1** *Всегда существуют испытательные частоты $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, строго ФФ-фильтруемое внешнее возмущение $|f(t)| \le f^*$ и время фильтрации $\tau^* > \tau^{**}$ (где $\tau^{**}$ – любое заданное сколь угодно большое число), такие, что*

$$\varepsilon_\alpha^н(\omega_k) = -\Delta\alpha_k(\tau^*), \quad \varepsilon_\beta^н(\omega_k) = -\Delta\beta_k(\tau^*) \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.13}$$

**Свойство 2** *Если выполняются равенства (4.13), то оценки частотных параметров объекта (2.1) имеют вид*

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_k^{н}, \quad \hat{\beta}_k = \beta_k^{н} \quad k = \overline{1, n}. \tag{4.14}$$

*Для таких значений частотных параметров решение частотных уравнений (2.13) единственно, и при этом*

$$\hat{d}_i = 0 \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.15}$$

Доказательство свойства 1 приведено в приложении П.3, леммы 1 – в приложении П.4 и свойства 2 – в приложении П.5.

Убедимся в справедливости свойства 2 при $n = 2$. Частотные уравнения (2.13) имеют в этом случае вид

$$\hat{k}_0 + \jmath\omega_k\hat{k}_1 - (\hat{\alpha}_k + \jmath\hat{\beta}_k)(\jmath\omega_k\hat{d}_1 - \omega_k^2\hat{d}_2) = \hat{\alpha}_k + \jmath\hat{\beta}_k \quad k = \overline{1, 2}. \tag{4.16}$$

Подставляя сюда $\hat{\alpha}_k = l_0$ и $\hat{\beta}_k = l_1\omega_k$ $\left(k = \overline{1, 2}\right)$, получим систему

$$\hat{k}_0 + l_1\omega_k^2\hat{d}_1 + l_0\omega_k^2\hat{d}_2 = l_0, \quad \hat{k}_1 - l_0\hat{d}_1 + l_1\omega_k^2\hat{d}_2 = l_1 \quad k = \overline{1, 2}, \tag{4.17}$$

которая имеет очевидное решение $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 = 0$, $\hat{k}_0 = l_0$, $\hat{k}_1 = l_1$. Это решение единственно, так как определитель, составленный из коэффициентов системы (4.17) равен $[l_1(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)]^2 \neq 0$.

**Доказательство утверждения 4.** Пусть задано сколь угодно большое число $K_\eta^*$. Примем

$$\delta_н = \frac{1}{K_\eta^*} \tag{4.18}$$

и найдём частоты $\omega_k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$, при которых выполняются неравенства (4.11).

Равенства (4.15) означают, что

$$\eta_{dk} \geq 1. \tag{4.19}$$

С другой стороны, из свойства 1 и равенств (4.18) и (4.14) следует, что

$$\eta_{\alpha\beta} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \hat{\alpha}_k \div \alpha_k \, , \, \hat{\beta}_k \div \beta_k \right\} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \alpha_k^{н} \div \alpha_k \, , \, \beta_k^{н} \div \beta_k \right\} < \delta_н = \frac{1}{K_\eta^*}. \tag{4.20}$$

Подставляя (4.19) и (4.20) в (3.3), получим неравенство (4.9):

$$K_\eta = \frac{\eta_{dk}}{\eta_{\alpha\beta}} \geq \frac{1}{\eta_{\alpha\beta}} > K_\eta^*. \qquad \blacksquare \tag{4.21}$$

**Утверждение 5** *Всегда существует набор испытательных частот* $\omega_k \in \Omega_в$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$, *строго ФФ-фильтруемое внешнее возмущение* $|f(t)| \leq f^*$ *и время фильтрации* $\tau^* > \tau^{**}$ *(где* $\tau^{**}$ *– любое заданное сколь угодно большое число), такие, что частотные уравнения (2.13) несовместны. Решения задачи идентификации в этом случае не существует.*

Для доказательства утверждения 5 аппроксимируем (полагая для простоты, что $n$ – чётное и $\gamma = n - 1$) частотные параметры (4.7) функциями

$$\alpha_k^{в} = \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\omega_k^{2(q-n)}, \quad \beta_k^{в} = \bar{l}_{2n-1}\omega_k^{-1} \quad k = \overline{1, n}, \tag{4.22}$$

где $\bar{l}_\bullet = l_\bullet / m_n$.

**Свойство 3** *Для любого сколь угодно малого числа $\delta_{в} > 0$ всегда существует такой набор испытательных частот $\omega_k \in \Omega_{в}$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, что*

$$\alpha_k^{в} \div \alpha_k < \delta_{в}, \quad \beta_k^{в} \div \beta_k < \delta_{в} \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.23}$$

Оценки частотных параметров представим в виде

$$\begin{array}{l} \hat{\alpha}_k = \alpha_k(\tau) = \alpha_k + \Delta\alpha_k(\tau) = \alpha_k^{в} + \varepsilon_\alpha^{в}(\omega_k) + \Delta\alpha_k(\tau), \text{ где } \varepsilon_\alpha^{в}(\omega_k) = \alpha_k - \alpha_k^{в}, \\ \hat{\beta}_k = \beta_k(\tau) = \beta_k + \Delta\beta_k(\tau) = \beta_k^{в} + \varepsilon_\beta^{в}(\omega_k) + \Delta\beta_k(\tau), \text{ где } \varepsilon_\beta^{в}(\omega_k) = \beta_k - \beta_k^{в}, \end{array} \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.24}$$

**Лемма 2** *Всегда существуют испытательные частоты $\omega_k \in \Omega_{в}$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, строго ФФ-фильтруемое внешнее возмущение $|f(t)| \leq f^*$ и время фильтрации $\tau^* > \tau^{**}$ (где $\tau^{**}$ – любое заданное сколь угодно большое число), такие, что*

$$\varepsilon_\alpha^{в}(\omega_k) = -\Delta\alpha_k(\tau^*), \quad \varepsilon_\beta^{в}(\omega_k) = -\Delta\beta_k(\tau^*) \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.25}$$

**Свойство 4** *Если оценки частотных параметров объекта (2.1) имеют вид*

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_k^{в}, \quad \hat{\beta}_k = \beta_k^{в} \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.26}$$

*то частотные уравнения (2.13) несовместны.*

Доказательство свойства 3 приведено в приложении П.6, свойства 4 – в приложении П.7. Доказательство леммы 2 проводится аналогично приведённому в приложении П.4.

Убедимся в справедливости свойства 4 при $n = 2$. В этом случае $\hat{\alpha}_k = \bar{l}_2\omega_k^{-2}$ и $\hat{\beta}_k = \bar{l}_3\omega_k^{-1}$ $\left(k = \overline{1,2}\right)$. Подставляя эти оценки в частотные уравнения (4.16), получим систему

$$\omega_k^2\hat{k}_0 + \omega_k^2\bar{l}_3\hat{d}_1 + \omega_k^2\bar{l}_2\hat{d}_2 = \bar{l}_2, \quad \omega_k^2\hat{k}_1 - \bar{l}_2\hat{d}_1 + \omega_k^2\bar{l}_3\hat{d}_2 = \bar{l}_3 \quad k = \overline{1,2}. \tag{4.27}$$

Поделим первое уравнение (4.27) на $\omega_k^2$ и выпишем для каждой частоты отдельно

$$\hat{k}_0 + \bar{l}_3\hat{d}_1 + \bar{l}_2\hat{d}_2 = \bar{l}_2/\omega_1^2, \quad \hat{k}_0 + \bar{l}_3\hat{d}_1 + \bar{l}_2\hat{d}_2 = \bar{l}_2/\omega_2^2. \tag{4.28}$$

Уравнения (4.28) будут совместны только в том случае, если $\omega_1 = \omega_2$. Однако по определению испытательных частот: $\omega_i \neq \omega_j$ для $i \neq j$ $\left(i,j = \overline{1,n}\right)$. Таким образом, система (4.27) *несовместна*, что и требовалось показать.

**Доказательство утверждения 5.** Примем

$$\delta_{в} = \eta^*, \tag{4.29}$$

где $\eta^* > 0$ – заданное число, и найдём частоты $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, при которых выполняются неравенства (4.23).

Из соотношений (4.29), (4.23) и (4.26) следует, что

$$\eta_{\alpha\beta} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \hat{\alpha}_k \div \alpha_k \,, \hat{\beta}_k \div \beta_k \right\} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \alpha_k^{в} \div \alpha_k \,, \beta_k^{в} \div \beta_k \right\} < \delta_{в} = \eta^*, \tag{4.30}$$

т.е. при сколь угодно малых отклонениях $\eta_{\alpha\beta} < \eta^*$ оценок частотных параметров от истинных, определённых на частотах $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, имеет место свойство 4. ■

# 5 Оценка границ испытательных частот

## 5.1 Существо подхода

Утверждения 4 и 5 подтверждают интуитивно ясное положение, что испытательные частоты должны выбираться из диапазона собственных частот. Это означает, что

$$\omega_{н} \leq \omega_k \leq \omega_{в} \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.1}$$

Поэтому необходимо найти оценки $\hat{\omega}_{н}$ и $\hat{\omega}_{в}$ границ диапазона $\Omega$ собственных частот.

Подход к решению этой задачи состоит в следующем. Представим передаточную функцию (4.2) объекта (2.1) в виде следующего произведения элементарных звеньев:

$$w(s) = w_0(s) \prod_{i=1}^{\bar{p}} \bar{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\tilde{p}} \tilde{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\check{p}} \check{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\breve{p}} \breve{w}_i(s). \tag{5.2}$$

Для определения левой границы используем оператор $s_{н} = s$, который породит набор: $w_0(s_{н}) = k_0$, $\bar{w}_i(s_{н}) = \dfrac{1}{\bar{T}_i s_{н} + 1}$, $\tilde{w}_i(s_{н}) = \dfrac{1}{\tilde{T}_i^2 s_{н}^2 + 2\tilde{T}_i \tilde{\xi}_i s_{н} + 1}$, $\check{w}_i(s_{н}) = \check{T}_i s_{н} + 1$ и $\breve{w}_i(s_{н}) = \breve{T}_i^2 s_{н}^2 + 2\breve{T}_i \breve{\xi}_i s_{н} + 1$ элементарных звеньев (5.2).

Для определения правой границы используем оператор $s_{в} = 1/s$, соответственно порождающий набор: $w_0(s_{в}) = æ_0 s_{в}^{n-\gamma}$, $\bar{w}_i(s_{в}) = \dfrac{1}{\bar{\mathcal{T}}_i s_{в} + 1}$, $\tilde{w}_i(s_{в}) = \dfrac{1}{\tilde{\mathcal{T}}_i^2 s_{в}^2 + 2\tilde{\mathcal{T}}_i \tilde{\xi}_i s_{в} + 1}$, $\check{w}_i(s_{в}) = \check{\mathcal{T}}_i s_{в} + 1$ и $\breve{w}_i(s_{в}) = \breve{\mathcal{T}}_i^2 s_{в}^2 + 2\breve{\mathcal{T}}_i \breve{\xi}_i s_{в} + 1$, элементарных звеньев (5.2), в которых $\bar{\mathcal{T}}_i = 1/\bar{T}_i$ $\left(i = \overline{1, \bar{p}}\right)$, $\tilde{\mathcal{T}}_i = 1/\tilde{T}_i$ $\left(i = \overline{1, \tilde{p}}\right)$, $\check{\mathcal{T}}_i = 1/\check{T}_i$ $\left(i = \overline{1, \check{p}}\right)$, $\breve{\mathcal{T}}_i = 1/\breve{T}_i$ $\left(i = \overline{1, \breve{p}}\right)$ и $æ_0 = k_0 \prod_{i=1}^{\check{p}} \check{T}_i \prod_{i=1}^{\breve{p}} \breve{T}_i^2 \Big/ \prod_{i=1}^{\bar{p}} \bar{T}_i \Big/ \prod_{i=1}^{\tilde{p}} \tilde{T}_i^2$.

Выделим звено с максимальной постоянной времени: $T_{н} = \max\left\{ \bar{T}_1,\ \tilde{T}_1,\ |\check{T}_1|,\ |\breve{T}_1| \right\}$ для определения $\omega_{н} = 1/T_{н}$ левой, и $\mathcal{T}_{в} = \max\left\{ \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}},\ \tilde{\mathcal{T}}_{\tilde{p}},\ |\check{\mathcal{T}}_{\check{p}}|,\ |\breve{\mathcal{T}}_{\breve{p}}| \right\}$ для $\omega_{в} = \mathcal{T}_{в}$ правой границ испытательных частот соответственно. Передаточную функцию (5.2) представим в виде произведения

$$w(s) = w_{м}(s) w_{\partial}(s) \tag{5.3}$$

передаточных функций эвристической модели – $w_{м}(s)$ и немоделируемой динамики – $w_{\partial}(s)$. Так, например, при $T_{н} = \bar{T}_1$ и/или $\mathcal{T}_{в} = \bar{\mathcal{T}}_1$

$$w_{м}(s) = w_0(s)\bar{w}_1(s), \quad w_{\partial}(s) = \prod_{i=2}^{\bar{p}} \bar{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\tilde{p}} \tilde{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\check{p}} \check{w}_i(s) \prod_{i=1}^{\breve{p}} \breve{w}_i(s). \tag{5.4}$$

Эвристическая модель в общем случае примет вид

$$d_{n_{м}}^{м} y^{(n_{м})} + d_{n_{м}-1}^{м} y^{(n_{м}-1)} + \cdots + d_{n'_{м}}^{м} y^{(n'_{м})} = k_{\gamma_{м}}^{м} u^{(\gamma_{м})} + k_{\gamma_{м}-1}^{м} u^{(\gamma_{м}-1)} + \cdots + k_{\gamma'_{м}}^{м} u^{(\gamma'_{м})}, \tag{5.5}$$

где $0 \leq n'_{м} \leq n_{м} \leq n$ и $0 \leq \gamma'_{м} \leq \gamma_{м} \leq \gamma$, а $d_i^{м}$ и $k_j^{м}$ $\left(i = \overline{n'_{м}, n_{м}},\quad j = \overline{\gamma'_{м}, \gamma_{м}}\right)$ – неизвестные коэффициенты. Они находятся из решения частотных уравнений (2.13) по выходам $\alpha_k(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ $\left(k = \overline{1, n_{м} - n'_{м}}\right)$ фильтра Фурье (2.6), если объект (2.1) возбудить испытательным сигналом

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n_{м} - n'_{м}} \rho_k \sin \omega_k (t - t_0), \quad t \geq t_0. \tag{5.6}$$

Испытательные частоты $\omega_k$ $\left(k=\overline{1, n_м - n'_м}\right)$ при этом выбираются так, чтобы на функции $\alpha_k(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ $\left(k=\overline{1, n_м - n'_м}\right)$ мало влияли постоянные времени передаточной функции $w_\partial(s)$.

## 5.2 Оценивание левой границы

Левая граница $\omega_н$ определяется максимальной постоянной времени передаточной функции (4.2). Поэтому в соответствии с (4.5) и (4.6) возможны следующие случаи:

$$\text{(а)}\quad \omega_н=\frac{1}{\bar T_1},\quad \text{(б)}\quad \omega_н=\frac{1}{\tilde T_1},\quad \text{(в)}\quad \omega_н=\frac{1}{|\check T_1|},\quad \text{(г)}\quad \omega_н=\frac{1}{|\breve T_1|}. \tag{5.7}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением случая (а). Исследование остальных случаев во многом аналогично. Эвристическая модель (5.5) в этом случае примет вид

$$T^н_м \dot y + y = k^н_м u. \tag{5.8}$$

Возбудим объект (2.1) испытательным сигналом

$$u(t)=\rho\sin\omega(t-t_0),\quad \omega<\omega_н,\quad t\ge t_0, \tag{5.9}$$

и, используя выходы $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ фильтра Фурье (2.6) найдём, как решение уравнений (2.13) при $n=1$, функцию

$$T^н_м(\tau)=-\frac{\beta(\tau)}{\omega\alpha(\tau)}. \tag{5.10}$$

**Утверждение 6** *Функция $T^н_м(\tau)$ имеет следующую структуру*

$$T^н_м(\tau)=T^н_м+\varepsilon^н_м(\omega,\,\tau), \tag{5.11}$$

*в которой число*

$$T^н_м=\bar T_1+\sum_{i=2}^{\bar p}\bar T_i+2\sum_{i=1}^{\tilde p}\tilde T_i\tilde\xi_i-\sum_{i=1}^{\check p}\check T_i-2\sum_{i=1}^{\breve p}\breve T_i\breve\xi_i, \tag{5.12}$$

*а функция $\varepsilon^н_м(\omega,\,\tau)$ такова, что для любого заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon^*_н$ всегда существует достаточно малая частота $\omega<\omega_н$ и достаточно большое время фильтрации $\tau^*$, что*

$$|\varepsilon^н_м(\omega,\,\tau)|\le\varepsilon^*_н,\quad \tau\ge\tau^*. \tag{5.13}$$

Доказательство утверждения приведено в работе [5]. Из выражения (5.12) следует, что ошибка оценивания $\bar T_1$, определяемая как $T^н_м-\bar T_1$, будет тем меньше, чем больше постоянная времени $\bar T_1$ по сравнению с остальными постоянными времени передаточной функции (4.2), и, таким образом, искомая оценка левой границы собственных частот

$$\hat\omega_н=\frac{1}{T^н_м}. \tag{5.14}$$

**Примечание 4** Если имеет место случай (б) ($\tilde T_1$ является максимальной постоянной времени объекта) и при этом $\tilde\xi_1$ достаточно велика $(0.3\le\tilde\xi_1\le 1)$, то формула (5.12) может быть использована для определения $\tilde T_1$. Если $\tilde\xi_1$ мало, то объект возбуждается испытательным сигналом $u=\rho_1\sin\omega_1(t-t_0)+\rho_2\sin\omega_2(t-t_0)$, в котором $\omega_1,\omega_2<\omega_н$, используется эвристическая модель $T^{2н}_м\ddot y+2T^н_м\xi^н_м\dot y+y=k^н_м u$ и исследуется функция $T^{2н}_м(\tau)$ и т.д. ■

## 5.3 Оценивание правой границы

Правая граница $\omega_{\text{в}}$ определяется минимальной постоянной времени передаточной функции (4.2). Поэтому в соответствии с (4.5) и (4.6) возможны следующие случаи:

$$\text{(а)}\quad \omega_{\text{в}} = \frac{1}{\bar{T}_{\bar{p}}},\quad \text{(б)}\quad \omega_{\text{в}} = \frac{1}{\tilde{T}_{\tilde{p}}},\quad \text{(в)}\quad \omega_{\text{в}} = \frac{1}{|\check{T}_{\check{p}}|},\quad \text{(г)}\quad \omega_{\text{в}} = \frac{1}{|\check{T}_{\check{p}}|}. \tag{5.15}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением случая (а). Исследование остальных случаев во многом аналогично. Эвристическая модель (5.5) в этом случае примет вид

$$T_{\text{м}}^{\text{в}} y^{(n-\gamma)} + y^{(n-\gamma-1)} = k_{\text{м}}^{\text{в}} u. \tag{5.16}$$

Возбудим объект (2.1) испытательным сигналом

$$u(t) = \rho \sin\omega(t - t_0),\quad \omega > \omega_{\text{в}},\quad t \geq t_0, \tag{5.17}$$

и, используя выходы $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$ фильтра Фурье (2.6) найдём, как решение уравнений (2.13), функцию

$$T_{\text{м}}^{\text{в}}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\tau)}{\omega\beta(\tau)}, & \text{если } n-\gamma \text{ – чётное}, \\ -\dfrac{\beta(\tau)}{\omega\alpha(\tau)}, & \text{если } n-\gamma \text{ – нечётное}. \end{cases} \tag{5.18}$$

**Утверждение 7** *Функция* $\mathcal{T}_{\text{м}}^{\text{в}}(\tau) = [T_{\text{м}}^{\text{в}}(\tau)]^{-1}$ *имеет следующую структуру:*

$$\mathcal{T}_{\text{м}}^{\text{в}}(\tau) = \omega_{\text{м}}^{\text{в}} + \varepsilon_{\text{м}}^{\text{в}}(\omega,\, \tau), \tag{5.19}$$

*в которой число*

$$\omega_{\text{м}}^{\text{в}} = \frac{1}{\bar{T}_{\bar{p}}} + \sum_{i=1}^{\bar{p}-1} \frac{1}{\bar{T}_i} + 2\sum_{i=1}^{\tilde{p}} \frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{T}_i} - \sum_{i=1}^{\check{p}} \frac{1}{\check{T}_i} - 2\sum_{i=1}^{\check{p}} \frac{\check{\xi}_i}{\check{T}_i}, \tag{5.20}$$

*а функция* $\varepsilon_{\text{м}}^{\text{в}}(\omega,\, \tau)$ *такова, что для любого заданного сколь угодно малого числа* $\varepsilon_{\text{в}}^{*}$ *всегда существует достаточно большая частота* $\omega > \omega_{\text{в}}$ *и достаточно большое время фильтрации* $\tau^{*}$*, что*

$$|\varepsilon_{\text{м}}^{\text{в}}(\omega,\, \tau)| \leq \varepsilon_{\text{в}}^{*},\quad \tau \geq \tau^{*}. \tag{5.21}$$

Доказательство утверждения приведено в работе [5]. Из выражения (5.20) следует, что ошибка оценивания $\bar{T}_{\bar{p}}$, определяемая как $\omega_{\text{м}}^{\text{в}} - 1/\bar{T}_{\bar{p}}$, будет тем меньше (число $\hat{\omega}_{\text{в}}$ будет тем ближе к величине правой границы), чем меньше постоянная времени $\bar{T}_{\bar{p}}$ по сравнению с остальными постоянными времени передаточной функции (4.2), и, таким образом, искомая оценка правой границы собственных частот

$$\hat{\omega}_{\text{в}} = \omega_{\text{м}}^{\text{в}}. \tag{5.22}$$

**Примечание 5** Если имеет место случай (б) ($\tilde{T}_{\tilde{p}}$ является минимальной постоянной времени объекта) и при этом $\tilde{\xi}_{\tilde{p}}$ достаточно велика $(0.3 \leq \tilde{\xi}_{\tilde{p}} \leq 1)$, то формула (5.20) может быть использована для определения $\tilde{T}_{\tilde{p}}$. Если $\tilde{\xi}_{\tilde{p}}$ мало, то объект возбуждается испытательным сигналом $u = \rho_1 \sin\omega_1(t - t_0) + \rho_2 \sin\omega_2(t - t_0)$, в котором $\omega_1, \omega_2 > \omega_{\text{в}}$, используется эвристическая модель $T_{\text{м}}^{2\text{в}} y^{(n-\gamma)} + 2T_{\text{м}}^{\text{в}}\xi_{\text{м}}^{\text{в}} y^{(n-\gamma-1)} + y^{(n-\gamma-2)} = k_{\text{м}}^{\text{в}} u$ и исследуется функция $\mathcal{T}_{\text{м}}^{2\text{в}}(\tau)$ и т.д. ∎

# 6 Алгоритмы настройки

Процесс идентификации состоит из двух этапов: *самонастройки испытательного сигнала* и *идентификации*. Самонастройка состоит из серии $N$ экспериментов, поставленных во временны́х интервалах $\left[t_b^{[i]},\, t_e^{[i]}\right)$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Интервал $\left[t_b^{[i]},\, t_e^{[i]}\right)$ далее будем называть $i$-ым. Интервалы самонастройки при $u(t)=0$ будем называть *интервалами-паузами*, а при $u(t)\neq 0$ – *интервалами-испытаниями*. Переменную $t\in\left[t_b^{[i]},\, t_e^{[i]}\right)$ будем обозначать как $t^{[i]}$, а произвольную функцию $q(t^{[i]})$ – через $q^{[i]}(t)$.

## 6.1 Самонастройка амплитуд

Введём ограничение на свойства возмущения $f(t)$, при котором может быть проверено экспериментально требование ««малости возбуждения»» (3.4).

**Определение 5** *Два интервала –* $i$*-й и* $i+1$*-й* $(i\in[1,N-1])$ *называются смежными, если они примыкают друг к другу:* $t_e^{[i]}=t_b^{[i+1]}$ *и имеют одинаковую длительность:* $t_e^{[i]}-t_b^{[i]}=t_e^{[i+1]}-t_b^{[i+1]}$.

**Определение 6** *Возмущение* $f(t)$ *называется смежно-стационарным, если разности выхода объекта (2.1) на двух смежных интервалах-паузах заданной длительности* $\bar\tau>t_F$ *удовлетворяют неравенству*

$$\left|\bar y^{[i]}(t)-\bar y^{[i+1]}(t)\right|\leq\bar\varepsilon_y,\quad t^{[i+1]}=t^{[i]}+\bar\tau\quad i\in[1,N-1],\tag{6.1}$$

*либо более мягкому условию*

$$\max_{t_b^{[i]}+t_F\leq t\leq t_e^{[i]}}|\bar y(t)|\div\max_{t_b^{[i+1]}+t_F\leq t\leq t_e^{[i+1]}}|\bar y(t)|\leq\bar\varepsilon_y\quad i\in[1,N-1].\tag{6.2}$$

*Здесь* $\bar\varepsilon_y$ *– заданное число,* $\bar\varepsilon_y\leq\varepsilon_y$.

Далее будем полагать, что возмущение $f(t)$ смежно-стационарно.

Представим амплитуды испытательного сигнала (2.10) как $\rho_k=\rho\bar\rho_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, где $\bar\rho_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – заданные положительные числа (весовые коэффициенты амплитуд). Очевидно, что цель (3.4) самонастройки амплитуды $\rho$ испытательного сигнала с заданными весовыми коэффициентами $\bar\rho_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ амплитуд при заданных испытательных частотах $\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и показателе экспоненты $\lambda$ достигается на основе следующего алгоритма.

**Алгоритм 2 (самонастройки амплитуд для асимптотически устойчивого объекта)**

(а) Проверить (на первых двух интервалах-паузах $(i=1,2)$ с априори заданной длительностью $\bar\tau$) выполнение условия (6.2) ««смежной стационарности»».

(б) На третьем интервале (интервале-испытании) приложить к объекту (2.1) испытательный сигнал (2.5) с заданной начальной амплитудой $\rho^{[3]}$ $\left(\rho_k^{[3]}=\rho^{[3]}\bar\rho_k,\ k=\overline{1,n}\right)$ и проверить выполнение требования (3.5) ««малости возбуждения»», которое имеет вид

$$\max_{t_b^{[2]}+t_F\leq t\leq t_e^{[2]}}|\bar y(t)|\div\max_{t_b^{[3]}+t_F\leq t\leq t_e^{[3]}}|y(t)|\leq\varepsilon_y.\tag{6.3}$$

(в) Если неравенство (6.3) нарушается – уменьшаем амплитуду (полагая на следующем интервале $\rho^{[4]}$ меньше $\rho^{[3]}$ и т.д.), до тех пор пока это неравенство не выполнится.

(г) Если неравенство (6.3) выполняется – увеличиваем амплитуду (полагая на следующем интервале $\rho^{[4]}$ больше $\rho^{[3]}$ и т.д.), до тех пор пока это неравенство не нарушится при некотором $\rho^{[i]}$, и тогда следует принять $\rho = \rho^{[i-1]}$ $\left(i = \overline{4, N}\right)$. ■

Алгоритм самонастройки амплитуд испытательного сигнала (2.10) для неустойчивых объектов отличается от алгоритма 2 следующим: в операции (а) используется условие (6.1), а в операции (б) – неравенство $\left|\bar{y}^{[2]}(t) - y^{[3]}(t)\right| \leq \varepsilon_y$, (где $y^{[3]}(t)$ – выход объекта на третьем интервале, в котором амплитуда $\rho^{[3]} = u^*$), а операция (г) – отсутствует.

## 6.2 Самонастройка испытательных частот

Самонастройка испытательных частот начинается с оценки их границ. Для этого объект возбуждается сигналами (5.9), (5.17) и на основе неравенств (2.8) определяется время фильтрации $\tau$. В этих неравенствах, описывающих свойство ФФ-фильтруемости внешнего возмущения, трудно априори задать числа $\varepsilon_k^\alpha$ и $\varepsilon_k^\beta$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. В этом отношении более удобными являются следующие условия ФФ-фильтруемости:

$$|\ell_k^\alpha(\tau)|/|\alpha_k(\tau)| \leq \bar{\varepsilon}_k^\alpha, \quad |\ell_k^\beta(\tau)|/|\beta_k(\tau)| \leq \bar{\varepsilon}_k^\beta, \quad k = \overline{1, n}, \quad \tau \geq \tau^*, \tag{6.4}$$

где $\bar{\varepsilon}_k^\alpha$ и $\bar{\varepsilon}_k^\beta$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ – заданные достаточно малые числа, характеризующие относительные значения функции фильтруемости.

Для целей самонастройки испытательных частот неравенства (6.4) можно заменить условиями для концов интервалов

$$\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i]})\right| / \left|\alpha_k(t_e^{[i]})\right| \leq \bar{\varepsilon}_k^\alpha, \quad \left|\ell_k^\beta(t_e^{[i]})\right| / \left|\beta_k(t_e^{[i]})\right| \leq \bar{\varepsilon}_k^\beta, \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, N}. \tag{6.5}$$

Для их экспериментальной проверки рассмотрим неравенства

$$\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i]})\right| / \left|\alpha_k(t_e^{[i+1]})\right| \leq \bar{\varepsilon}_k^\alpha, \quad \left|\ell_k^\beta(t_e^{[i]})\right| / \left|\beta_k(t_e^{[i+1]})\right| \leq \bar{\varepsilon}_k^\beta, \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{6.6}$$

которые близки к (6.5), если возмущение $f(t)$ является смежно ФФ-фильтруемым.

**Определение 7** *Возмущение $f(t)$ называется **смежно ФФ-фильтруемым**, если функции фильтруемости удовлетворяют условиям*

$$\frac{\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i]}) - \ell_k^\alpha(t_e^{[i+1]})\right|}{\left|\alpha_k(t_e^{[i+1]})\right|} \leq \varepsilon \bar{\varepsilon}_k^\alpha, \quad \frac{\left|\ell_k^\beta(t_e^{[i]}) - \ell_k^\beta(t_e^{[i+1]})\right|}{\left|\beta_k(t_e^{[i+1]})\right|} \leq \varepsilon \bar{\varepsilon}_k^\beta, \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{6.7}$$

*где $\varepsilon$ – заданное достаточно малое число.*

Чтобы убедиться в близости неравенств (6.5) и (6.6) для смежно ФФ-фильтруемого возмущения, запишем

$$\frac{\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i+1]})\right|}{\left|\alpha_k(t_e^{[i+1]})\right|} \leq \frac{\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i+1]}) - \ell_k^\alpha(t_e^{[i]})\right|}{\left|\alpha_k(t_e^{[i+1]})\right|} + \frac{\left|\ell_k^\alpha(t_e^{[i]})\right|}{\left|\alpha_k(t_e^{[i+1]})\right|} \leq (\varepsilon + 1)\bar{\varepsilon}_k^\alpha, \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, N-1},$$

и таким образом, из неравенств (6.6) следуют (с точностью до $\varepsilon$) неравенства (6.5).

Для экспериментальной проверки условий (6.7) смежной ФФ-фильтруемости будем использовать выражения

$$\alpha_k(t_e^{[i]}) \div \alpha_k(t_e^{[i+1]}) \leq \varepsilon\bar{\varepsilon}_k^{\alpha}, \quad \beta_k(t_e^{[i]}) \div \beta_k(t_e^{[i+1]}) \leq \varepsilon\bar{\varepsilon}_k^{\beta}, \quad k=\overline{1,n} \quad i=\overline{1,N-1}, \qquad (6.8)$$

которые, с точностью до некоторых малых чисел, совпадают с (6.7). Действительно, в работе [6] показано, что $\alpha_k(t) = \alpha_k + \ell_k^{\alpha}(t) + e_k^{\alpha}(t)$, $\beta_k(t) = \beta_k + \ell_k^{\beta}(t) + e_k^{\beta}(t)$, где $\lim\limits_{t\to\infty} e_k^{\alpha}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} e_k^{\beta}(t) = 0$.

**Алгоритм 3 (самонастройки испытательных частот для асимптотически устойчивого объекта)** состоит из следующих операций:

1. Найти оценку левой (нижней) границы испытательных частот, выполняя следующие подоперации:

   (а) Найти амплитуду $\rho = \rho^{[1]}$, используя алгоритм 2, испытательного сигнала

   $$u(t) = \rho^{[1]} \sin \omega_{н}^{[1]}(t-t_0), \qquad (6.9)$$

   в котором $\omega_{н}^{[1]}$ – заданная достаточно малая частота. Полагаем в алгоритме 2

   $$\bar{\tau} = qT_{б}^{[1]}, \qquad (6.10)$$

   где $T_{б}^{[1]} = \dfrac{2\pi}{\omega_{н}^{[1]}}$, $q$ – заданное число.

   (б) Определить время фильтрации $\tau_{н}^{[1]}$ из условий (6.6) ФФ-фильтруемости внешнего возмущения, путём измерения выходов фильтров (2.7) при $n=1$, $\omega_1 = \omega_{н}^{[1]}$ в моменты времени $t_e^{[2i-1]} = t^* + T_{б}^{[1]}(2i-1)$, $t_e^{[2i]} = t_e^{[2i-1]} + T_{б}^{[1]}$ $\left(i=\overline{1,N_1}\right)$ где $t^*$ – момент окончания подоперации (а), $N_1$ – номер пары интервалов, в которые выполняются условия (6.6). Таким образом, $\tau_{н}^{[1]} = 2N_1T_{б}^{[1]}$.

   **Примечание 6** Может случиться, что числа $\tau_{н}^{[1]}$, для которого выполняются условия (6.6), не существует. Это означает, что возмущение $f(t)$ не является ФФ-фильтруемым на частоте $\omega_{н}^{[1]}$. В этом случае нужно изменять $\omega_{н}^{[1]}$ до тех пор, пока не будет найдено $\tau_{н}^{[1]}$. ■

   (в) Проверить условия (6.8) смежной ФФ-фильтруемости и условия (5.13) сходимости оценки нижней границы испытательных частот. Для этой цели измеряется выход фильтров (2.6) при $\tau = \tau_{н}^{[1]}$ и $\tau = \tau_{н}^{[1]} + T_{б}^{[1]}$ и проверяются неравенства (6.8), а затем вычисляются по формуле (5.10) значения $T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]})$ и $T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]} + T_{б}^{[1]})$ и проверяется необходимое условие сходимости по времени фильтрации

   $$T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]}) \div T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]} + T_{б}^{[1]}) \leq \varepsilon_T, \qquad (6.11)$$

   где $\varepsilon_T$ – заданное достаточно малое число.

   Если это условие не выполняется, то процесс фильтрации продолжается и $\bar{\tau}_{н}^{[1]} = \tau_{н}^{[1]} + qT_{б}^{[1]}$, где $q = 2, 3, \ldots$, и проверяются неравенства

   $$T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]} + (q-1)T_{б}^{[1]}) \div T_{м}^{н}(\tau_{н}^{[1]} + qT_{б}^{[1]}) \leq \varepsilon_T. \qquad (6.12)$$

   Пусть при некотором $q = q^{[1]}$ эти условия выполнены, тогда проверяются (при $i = q^{[1]}$) требования (6.6) и (6.8) фильтруемости внешнего возмущения.

**Примечание 7** При выполнении подопераций (б) и (в) необходимо проверять условие (6.3) малости возбуждения и при их нарушении использовать алгоритм 2 для настройки амплитуды испытательного сигнала (6.9). ■

2. Повторить операцию 1 при $\omega_н^{[2]} = \omega_н^{[1]}/2$, найти число $T_м^н(\bar\tau_н^{[2]})$, где $\bar\tau_н^{[2]} = \tau_н^{[2]} + q^{[2]}T_б^{[2]}$ и проверить необходимое условие сходимости по испытательной частоте

$$T_м^н(\bar\tau_н^{[1]}) \div T_м^н(\bar\tau_н^{[2]}) \le \varepsilon_\omega, \tag{6.13}$$

где $\varepsilon_\omega$ – заданное, достаточно малое число. Если это условие выполняется, то оценка левой границы $\hat\omega_м = [T_м^н(\bar\tau_н^{[2]})]^{-1}$.

В противном случае возвращаемся к операции 1, полагая $\omega_н^{[3]} = \omega_н^{[2]}/2$, и т.д.

3. Найти оценку правой (верхней) границы испытательных частот, повторяя операцию 1, где $\omega_в^{[3]}$ – достаточно большое число (например, $\omega_в^{[3]} = 10^3\hat\omega_н$). Необходимое условие сходимости, аналогичное (6.12), имеет вид

$$T_м^в(\tau_в^{[3]} + (q-1)T_б^{[3]}) \div T_м^в(\tau_в^{[3]} + qT_б^{[3]}) \le \varepsilon_T. \tag{6.14}$$

Пусть при $q = q^{[3]}$ это условие выполняется.

4. Повторить операцию 3, полагая $\omega_в^{[4]} = 2\omega_в^{[3]}$, и найти число $T_м^в(\bar\tau_в^{[4]})$, где $\bar\tau_в^{[4]} = \tau_в^{[4]} + q^{[4]}T_б^{[4]}$, и проверить условие

$$T_м^в(\bar\tau_в^{[3]}) \div T_м^в(\bar\tau_в^{[4]}) \le \varepsilon_\omega, \tag{6.15}$$

где $\bar\tau_в^{[3]} = \tau_в^{[3]} + q^{[3]}T_б^{[3]}$.

Если это условие выполняется, то

$$\hat\omega_в = [T_м^в(\bar\tau_в^{[4]})]^{-1}. \tag{6.16}$$

В противном случае возвратиться к операции 3, полагая $\omega_в^{[5]} = 2\omega_в^{[4]}$, и т.д.

5. Вычислить испытательные частоты

$$\omega_1 = \hat\omega_н, \quad \omega_k = n_k\hat\omega_н \quad k = \overline{2,n}, \tag{6.17}$$

где $n_k$ $\left(k = \overline{2,n}\right)$ – числа, являющиеся целой частью отношений частот

$$n_k = \left[\frac{\tilde{\hat\omega}_k}{\hat\omega_н}\right] \quad k = \overline{2,n}, \tag{6.18}$$

где $\lg\tilde{\hat\omega}_k = \lg\hat\omega_н + \dfrac{\lg\hat\omega_в - \lg\hat\omega_н}{n-1}(k-1)$ $\left(k = \overline{2,n}\right)$.

6. Задаваясь весовыми коэффициентами $\bar\rho_k$ амплитуд $\rho_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, приложить к объекту (2.1) испытательный сигнал (2.5) и определить амплитуду $\rho = \rho^{[1]}$ на основе алгоритма 2.

7. Повторить операцию 1 при $\omega_k = \omega_k^{[1]}$ и $\rho_k = \rho^{[1]}\bar\rho_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Если при достаточно большом $\tau$ хотя бы одно из $n$ условий (6.5) нарушается, например $\mu$-е, то возвратиться к операции 5, полагая $n_\mu := n_\mu + 1 \ne n_{\mu+1}$ либо $n_\mu := n_\mu - 1 \ne n_{\mu-1}$ и т.д.

8. Используя алгоритм 1, идентифицировать объект (2.1) и убедиться, что его собственные частоты находятся в интервале $[\hat{\omega}_н, \hat{\omega}_в]$. Если это условие нарушается, то возвратиться к пункту 1 и уменьшить в два раза параметры $\varepsilon_T$, $\varepsilon_\omega$, $\varepsilon_k^\alpha$ и $\varepsilon_k^\beta$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, и т.д.

**Примечание 8** Уточнение весовых коэффициентов амплитуд

$$\bar{\rho}_k = \left(\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2\right)^{-1/2} \quad k = \overline{1,n} \tag{6.19}$$

осуществляется по результатам операции 8 алгоритма 3. Соотношение (6.19) получается из слагаемого

$$y^u(t) = \rho \sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \sqrt{\hat{\alpha}_k^2 + \hat{\beta}_k^2} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{6.20}$$

выхода объекта (2.1), порождаемого испытательным сигналом (2.5), и обеспечивает нормировку функций фильтруемости. В самом деле, если принять (6.19), то амплитуды различных испытательных гармоник в компоненте $y^u(t)$ будут близки. ■

## 6.3 Самонастройка показателя экспоненты

Самонастройка испытательных частот для идентификации неустойчивого объекта осуществляется на основе алгоритма 3, в котором, в соответствии с примечанием 3, следует заменить $u(t)$ на $\tilde{u}(t)$ и $y(t)$ на $\tilde{y}(t)$. При этом должно быть известно значение показателя $\lambda$. Его можно задать априори, если принять $\lambda$ достаточно большим числом. В этом случае, в соответствии с (2.16), время идентификации может оказаться недопустимо малым. Поэтому необходимо настроить число $\lambda$ достаточно близко к неизвестному числу $s^*$. Для этой цели используем

**Алгоритм 4 (самонастройки показателя $\boldsymbol{\lambda}$)**

(а) Принять $\lambda = C_0$.

Если оценка степени неустойчивости $C_0$ объекта (2.1) неизвестна, можно принять $\lambda = 1$. Если же информация об устойчивости объекта отсутствует вообще, самонастройку можно начать с $\lambda = 0$ и закончить при устойчивом объекте, либо перейти к $\lambda = 1$ в противном случае.

(б) Возбудить объект (2.1) испытательным сигналом

$$u(t) = \rho e^{\lambda(t-t_0)} \sin \omega(t - t_0), \quad t \geq t_0 \tag{6.21}$$

с некоторой амплитудой $\rho$ и частотой $\omega$. Выход объекта приложить ко входу фильтра Фурье (2.11).

(в) Проверить необходимые условия сходимости оценок частотных параметров

$$|\alpha(\tau) - \alpha(\tau - T_б)| \leq \varepsilon_\lambda^\alpha, \quad |\beta(\tau) - \beta(\tau - T_б)| \leq \varepsilon_\lambda^\beta, \quad \tau \geq \tau^* \tag{6.22}$$

объекта (2.1), в которых $\varepsilon_\lambda^\alpha$ и $\varepsilon_\lambda^\beta$ – заданные достаточно малые числа. Если они нарушаются, вернуться к операции (б) и повторять её, удваивая каждый раз значение $\lambda := 2\lambda$ до тех пор, пока эти условия не выполнятся. Если же эти условия выполняются, повторять операцию (б) с $\lambda := \lambda/2$ до тех пор, пока не будет найдено минимальное значение $\lambda$, при котором условия (6.22) выполняются.

Пусть $\lambda_н$ – значение $\lambda$, такое, что при $\lambda < \lambda_н$ условия (6.22) нарушаются, а $\lambda_в$ – значение, такое, что при $\lambda > \lambda_в$ они выполняются.

(г) Проверить выполнение условия

$$\lambda_в - \lambda_н \leq \varepsilon_\lambda, \tag{6.23}$$

где $\varepsilon_\lambda$ – заданное число, характеризующее точность самонастройки показателя экспоненты. Если оно выполняется, т.е. если $\lambda_в$ достаточно близка к $s^*$, принять $\lambda = \lambda_в$. В противном случае методом половинного деления сужать интервал $[\,\lambda_н,\, \lambda_в\,]$ до выполнения условия (6.23), т.е. при значении $\lambda = \dfrac{\lambda_н + \lambda_в}{2}$ выполнять операцию (б), присваивать $\lambda_н = \lambda$, если условия (6.22) нарушаются, либо $\lambda_в = \lambda$ если они выполняются, и затем переходить к операции (г). ■

**Утверждение 8** *Если $\lambda < s^*$, то всегда существует момент времени $\tau = \tau^*_\lambda$, начиная с которого условия (6.22) нарушаются.*

Доказательство утверждения приведено в приложении П.8.

# 7 Пример

Рассмотрим полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый уравнением

$$d_3 \dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + y = k_1\dot{u} + k_0 u + f, \tag{7.1}$$

с неизвестными коэффициентами и неизвестным ограниченным возмущением.

**Задача 3** *Найти амплитуды и частоты испытательного сигнала (2.5), при которых выполняются условия малости возбуждения (3.5) с $\delta_y = 0.4$ и ФФ-фильтруемости возмущения так, чтобы ошибки идентификации удовлетворяли требованиям*

$$\hat{d}_i \div d_i \leq 0.2 \quad i = \overline{1,3}, \quad \hat{k}_j \div k_j \leq 0.2 \quad j = \overline{0,1}. \tag{7.2}$$

**Примечание 9** Истинный объект описывается уравнением

$$0.2 \dddot{y} + 1.24\ddot{y} + 5.24\dot{y} + y = -0.4\dot{u} + u + f, \tag{7.3}$$

где $f(t) = 5\,\mathrm{sign}\sin 2.1t$. Его передаточная функция

$$w(s) = \frac{25(-0.4s + 1)}{(5s + 1)(s^2 + 6s + 25)}$$

взята из часто используемого примера [9]. ■

В пакете АДАПЛАБ [10] были проведены численные эксперименты над объектом (7.3). Настройка испытательного сигнала осуществлялась при следующих параметрах алгоритмов 2 и 3: $\delta_y = 0.5$, $\varepsilon_\omega = \varepsilon_T = 0.2$; $\bar\rho_1 = 1$, $\bar\rho_2 = 10$, $\bar\rho_3 = 100$.

Опишем результаты численных экспериментов для каждой операции алгоритма 3.

1. При частоте $\omega_{н}^{[1]} = 0.05$ и времени фильтрации $\tau_{н}^{[1]} = 3\,750$ с. на основе алгоритма 2 была определена допустимая амплитуда $\rho_{н}^{[1]} = 0.03$. Для этих значений амплитуды и частоты было получено значение $T_{м}^{н}(\bar{\tau}_{н}^{[1]}) = 5.27$.

2. При частоте $\omega_{н}^{[2]} = 0.0135$ и времени фильтрации $\tau_{н}^{[2]} = 4\,800$ с. была определена допустимая амплитуда $\rho_{н}^{[2]} = 0.03$ и получено значение $T_{м}^{н}(\bar{\tau}_{н}^{[2]}) = 4.8$ и, таким образом, искомая нижняя граница испытательных частот $\boxed{\hat{\omega}_{н} = 0.208}$.

3. При частоте $\omega_{в}^{[3]} = 20$ и времени фильтрации $\tau_{в}^{[3]} = 6.28$ с. была определена допустимая амплитуда $\rho_{в}^{[3]} = 1$ и получено значение $T_{м}^{в}(\bar{\tau}_{в}^{[3]}) = 0.095$.

4. При частоте $\omega_{в}^{[4]} = 74$ и времени фильтрации $\tau_{в}^{[4]} = 3.14$ с. была определена допустимая амплитуда и получено значение $T_{м}^{в}(\bar{\tau}_{в}^{[4]}) = 0.106$ и, таким образом, искомая верхняя граница испытательных частот $\boxed{\hat{\omega}_{в} = 9.4}$.

5. Принимаем следующие значения испытательных частот: $\omega_1 = 0.208$, $\omega_2 = 4.16$ и $\omega_3 = 8.32$. Прикладывая к объекту (7.3) испытательный сигнал: $u(t) = u^* \cdot (\sin 0.208t + 10 \sin 4.16t + 100 \sin 8.32t)$, определяем амплитуду $\rho$ на основе алгоритма 2.

6. Используя алгоритм 1 были получены следующие значения оценок частотных параметров:
$$\begin{array}{ll} \hat{\alpha}_1 = 0.408, & \hat{\beta}_1 = -0.447; \\ \hat{\alpha}_2 = -0.67 \cdot 10^{-1}, & \hat{\beta}_2 = -0.159 \cdot 10^{-2}; \\ \hat{\alpha}_3 = 0.22 \cdot 10^{-5}, & \hat{\beta}_3 = 0.27 \cdot 10^{-1}; \end{array}$$
по которым были идентифицированы коэффициенты объекта (7.3):
$$\hat{d}_3 = 0.162, \quad \hat{d}_2 = 1.03, \quad \hat{d}_1 = 4.23;$$
$$\hat{k}_1 = -0.335, \quad \hat{k}_0 = 0.78.$$

*Автор благодарен Ю.Ф. Орлову за внимательное прочтение рукописи и ряд полезных предложений, которые были учтены.*

## П.1 Матричная форма частотных уравнений

Уравнения (2.13) при $s_k = \jmath\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и $\gamma = n-1$ примут вид[1]

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\jmath\omega_k)^i k_i - (\alpha_k + \jmath\beta_k)\sum_{i=1}^{n}(\jmath\omega_k)^i d_i = \alpha_k + \jmath\beta_k \quad k=\overline{1,n}. \tag{П.1}$$

Последние можно представить в виде системы с вещественными коэффициентами

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1}(-1)^i\omega_k^{2i}\,k_{2i} - \alpha_k\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i\,\omega_k^{2i}\,d_{2i} - \beta_k\sum\limits_{i=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}}(-1)^i\omega_k^{2i-1}d_{2i-1} = \alpha_k \\ \sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(-1)^i\omega_k^{2i+1}k_{2i+1} - \alpha_k\sum\limits_{i=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}}(-1)^{i-1}\omega_k^{2i-1}d_{2i-1} - \beta_k\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i\omega_k^{2i}\,d_{2i} = \beta_k \end{array} \quad k=\overline{1,n}, \tag{П.2}$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – ближайшие к $\cdot$ целые числа, такие что $[\cdot] \le \cdot \le \{\cdot\}$.

Введём вектора

$$\boldsymbol{h}^{(i)} = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]}\begin{bmatrix}\omega_1^i\\ \omega_2^i\\ \vdots\\ \omega_n^i\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_\alpha^{(i)} = (-1)^{\left[\frac{i}{2}\right]}\begin{bmatrix}\alpha_1\omega_1^i\\ \alpha_2\omega_2^i\\ \vdots\\ \alpha_n\omega_n^i\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_\beta^{(i)} = (-1)^{\left\{\frac{i}{2}\right\}}\begin{bmatrix}\beta_1\omega_1^i\\ \beta_2\omega_2^i\\ \vdots\\ \beta_n\omega_n^i\end{bmatrix} \quad i=\overline{0,n}, \tag{П.3}$$

и выразим через них систему (П.2):

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1}\boldsymbol{h}^{(2i)}k_{2i} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\boldsymbol{h}_\alpha^{(2i)}d_{2i} - \sum\limits_{i=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}}\boldsymbol{h}_\beta^{(2i-1)}d_{2i-1} = \boldsymbol{h}_\alpha^{(0)}, \\ \sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\boldsymbol{h}^{(2i+1)}k_{2i+1} - \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\boldsymbol{h}_\beta^{(2i)}d_{2i} - \sum\limits_{i=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}}\boldsymbol{h}_\alpha^{(2i-1)}d_{2i-1} = \boldsymbol{h}_\beta^{(0)}. \end{array} \tag{П.4}$$

Чтобы записать эту систему в матричном виде, введём вектор

$$\boldsymbol{z}^T = \left[k_0, k_2, \ldots, k_{2\left\{\frac{n}{2}\right\}-2};\; k_1, k_3, \ldots, k_{2\left[\frac{n}{2}\right]-1};\; d_2, d_4, \ldots, d_{2\left[\frac{n}{2}\right]};\; d_1, d_3, \ldots, d_{2\left\{\frac{n}{2}\right\}-1}\right] \tag{П.5}$$

и матрицу

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \boldsymbol{h}^{(0)} & \boldsymbol{h}^{(2)} & \cdots & \boldsymbol{h}^{\left(2\left\{\frac{n}{2}\right\}-2\right)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{h}_\alpha^{(2)} & -\boldsymbol{h}_\alpha^{(4)} & \cdots & -\boldsymbol{h}_\alpha^{\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)} & -\boldsymbol{h}_\beta^{(1)} & -\boldsymbol{h}_\beta^{(3)} & \cdots & -\boldsymbol{h}_\beta^{\left(2\left\{\frac{n}{2}\right\}-1\right)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{h}^{(1)} & \boldsymbol{h}^{(3)} & \cdots & \boldsymbol{h}^{\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)} & -\boldsymbol{h}_\beta^{(2)} & -\boldsymbol{h}_\beta^{(4)} & \cdots & -\boldsymbol{h}_\beta^{\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)} & -\boldsymbol{h}_\alpha^{(1)} & -\boldsymbol{h}_\alpha^{(3)} & \cdots & -\boldsymbol{h}_\alpha^{\left(2\left\{\frac{n}{2}\right\}-1\right)} \end{array}\right). \tag{П.6}$$

Тогда уравнение (П.4) примет вид

$$M\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_\alpha^{(0)}\\ \boldsymbol{h}_\beta^{(0)}\end{bmatrix}. \tag{П.7}$$

[1]Здесь и далее индекс «« ˆ »» над $d_i$, $k_i$, $\alpha_k$, $\beta_k$, $\boldsymbol{h}_\alpha^{(j)}$, $\boldsymbol{h}_\beta^{(j)}$, $M$ и $\boldsymbol{z}$ для простоты опущен.

## П.2 Связь частотных параметров с коэффициентами передаточной функции объекта

Очевидно, что

$$w(\jmath\omega) = \frac{k_{\Re}(\omega) + \jmath k_{\Im}(\omega)}{d_{\Re}(\omega) + \jmath d_{\Im}(\omega)}, \tag{П.8}$$

где

$$\begin{aligned} d_{\Re}(\omega) &= \operatorname{Re} d(\jmath\omega) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^q \omega^{2q} d_{2q}, \quad d_{\Im}(\omega) = \operatorname{Im} d(\jmath\omega) = \sum_{q=0}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1} (-1)^q \omega^{2q+1} d_{2q+1}; \\ k_{\Re}(\omega) &= \operatorname{Re} k(\jmath\omega) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} (-1)^q \omega^{2q} k_{2q}, \quad k_{\Im}(\omega) = \operatorname{Im} k(\jmath\omega) = \sum_{q=0}^{\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}-1} (-1)^q \omega^{2q+1} d_{2q+1}; \end{aligned} \tag{П.9}$$

а $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – ближайшие к $\cdot$ целые числа, такие, что $[\cdot] \le \cdot \le \{\cdot\}$.

Из (2.4) и (П.8) следует

$$\alpha_k = \frac{k_{\Re}(\omega_k) d_{\Re}(\omega_k) + k_{\Im}(\omega_k) d_{\Im}(\omega_k)}{d^2_{\Re}(\omega_k) + d^2_{\Im}(\omega_k)}, \quad \beta_k = \frac{k_{\Im}(\omega_k) d_{\Re}(\omega_k) - k_{\Re}(\omega_k) d_{\Im}(\omega_k)}{d^2_{\Re}(\omega_k) + d^2_{\Im}(\omega_k)} \quad k = \overline{1, n}. \tag{П.10}$$

Подставляя выражения (П.9) в (П.10) и производя перегруппировку, получим

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} \omega_k^{2q} \sum\limits_{\sigma_q^\alpha} (-1)^{i+q} d_i k_j}{\sum\limits_{q=0}^{n} \omega_k^{2q} \sum\limits_{\sigma_q} (-1)^{i+q} d_i d_j}, \quad \beta_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{\left\{\frac{n+\gamma}{2}\right\}-1} \omega_k^{2q+1} \sum\limits_{\sigma_q^\beta} (-1)^{i+q} d_i k_j}{\sum\limits_{q=0}^{n} \omega_k^{2q} \sum\limits_{\sigma_q} (-1)^{i+q} d_i d_j} \quad k = \overline{1, n},$$

где
$$\begin{aligned} \sigma_q^\alpha &= \left\{ i, j \ : \ i + j = 2q \quad\ \ , \ i = \overline{0, n}, \ j = \overline{0, \gamma} \right\}, \\ \sigma_q^\beta &= \left\{ i, j \ : \ i + j = 2q + 1, \ i = \overline{0, n}, \ j = \overline{0, \gamma} \right\}, \\ \sigma_q &= \left\{ i, j \ : \ i + j = 2q \quad\ \ , \ i = \overline{0, n}, \ j = \overline{0, n} \right\}. \end{aligned}$$

## П.3 Доказательство свойства 1

Из соотношений (П.8) и (П.10) очевидно, что $\alpha_k \ne 0$ и $\beta_k \ne 0$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ для любого набора испытательных частот $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Справедливость же свойства 1 для относительных ошибок фильтрации устанавливается простой подстановкой (4.10) и (4.7) в соотношение (4.11). После несложных преобразований получим, учитывая, что $m_0 = 1$

$$\frac{\alpha_k^н - \alpha_k}{\alpha_k} = \omega_k^2 \left[ \frac{l_0 \sum\limits_{q=1}^{n} m_q \omega_k^{2q-2} - \sum\limits_{q=1}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} l_{2q} \omega_k^{2q-2}}{\sum\limits_{q=0}^{\left[\frac{n+\gamma}{2}\right]} l_{2q} \omega_k^{2q}} \right] \quad k = \overline{1, n}, \tag{П.11}$$

$$\frac{\beta_k^н - \beta_k}{\beta_k} = \omega_k^2 \left[ \frac{\left( \sum\limits_{q=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1} l_{2q+1} \omega_k^{2q-2} \right) \left( 1 + \sum\limits_{q=1}^{n} m_q \omega_k^{2q} \right) - l_1 \sum\limits_{q=1}^{n} m_q \omega_k^{2q-2} - \sum\limits_{q=1}^{\left\{\frac{n+\gamma}{2}\right\}-1} l_{2q+1} \omega_k^{2q-2}}{\sum\limits_{q=0}^{\left\{\frac{n+\gamma}{2}\right\}-1} l_{2q+1} \omega_k^{2q}} \right].$$

Нетрудно видеть, что дробно-рациональные функции в квадратных скобках ограничены для любых $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ если $l_0 \neq 0$ и $l_1 \neq 0$ ( $k_0 \neq 0$ и $k_1 \neq k_0 d_1$ ). Поэтому всегда можно найти (достаточно малые) частоты $\omega_k \in \Omega_н$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, для которых выполняются неравенства (4.11).

## П.4 Доказательство леммы 1

Найдём возмущение, при котором выполняются равенства (4.13). Пусть

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2n}\rho_k^f \sin\omega_k^f(t-t_0), \quad t\geq t_0, \tag{П.12}$$

где $\rho_k^f$ и $\omega_k^f$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ – неизвестные числа, которые будем определять из условия (4.13). При этом будем полагать, что частоты возмущения и испытательного сигнала не совпадают:

$$\omega_i^f \neq \omega_j \quad i=\overline{1,2n} \quad j=\overline{1,n}, \tag{П.13}$$

так как в противном случае нарушается условие (2.8) сходимости идентификации. Кроме того, амплитуда внешнего возмущения (П.12) должна удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{2n}\left|\rho_i^f\right|\leq f^*, \tag{П.14}$$

которого достаточно для выполнения ограничения (2.2).

Найдём связь ошибок фильтрации $\Delta\alpha_k(\tau)$ и $\Delta\beta_k(\tau)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ с функцией $f(t)$.

Нетрудно проверить [6], что

$$\Delta\alpha_k(\tau)=\ell_k^\alpha(\tau), \quad \Delta\beta_k(\tau)=\ell_k^\beta(\tau) \quad k=\overline{1,n}. \tag{П.15}$$

Чтобы найти выражения для $\ell_k^\alpha(\tau)$ и $\ell_k^\beta(\tau)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, построим функцию $\bar{y}(t)$. Запишем уравнение объекта (2.1) при $u=0$ в форме Коши

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\psi}f, \quad \bar{y}=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \tag{П.16}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ – некоторый вектор-столбец.

Решение этого уравнения с учётом (П.12) имеет вид

$$\bar{y}(t)=\boldsymbol{c}^T e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{\phi}+\sum_{k=1}^{2n}\rho_k^f\left[\alpha_k^f\sin\omega_k^f(t-t_0)+\beta_k^f\cos\omega_k^f(t-t_0)\right], \tag{П.17}$$

где $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{x}(t_0)+\sum\limits_{k=1}^{2n}\rho_k^f\omega_k^f(E\omega_k^{f2}+A^2)^{-1}\boldsymbol{\psi}$, $\alpha_k^f=\operatorname{Re}w^f(\jmath\omega_k^f)$, $\beta_k^f=\operatorname{Im}w^f(\jmath\omega_k^f)$ и $w^f(\jmath\omega_k^f)=\boldsymbol{c}^T(\jmath E\omega_k^f-A)^{-1}\boldsymbol{\psi}$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$.

Подставляя (П.17) в функции фильтруемости (2.7), получим

$$\begin{aligned}
\ell_k^\alpha(\tau)&=\frac{2}{\rho_k\tau}\left\{\boldsymbol{c}^T\Theta_k^\alpha(\tau)\boldsymbol{\phi}+\sum_{i=1}^{2n}\rho_i^f\left[\alpha_i^f\theta_{ki}^\alpha(\tau)+\beta_i^f\vartheta_{ki}^\alpha(\tau)\right]\right\},\\
\ell_k^\beta(\tau)&=\frac{2}{\rho_k\tau}\left\{\boldsymbol{c}^T\Theta_k^\beta(\tau)\boldsymbol{\phi}+\sum_{i=1}^{2n}\rho_i^f\left[\alpha_i^f\theta_{ki}^\beta(\tau)+\beta_i^f\vartheta_{ki}^\beta(\tau)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{П.18}$$

где

$$\Theta_k^\alpha(\tau) = e^{A(t_F-t_0)}\Big\{\; A \quad (E\omega_k^2+A^2)^{-1}\Big[e^{A\tau}\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0) - E\sin\omega_k(t_F-t_0)\Big] - $$
$$- E\omega_k(E\omega_k^2+A^2)^{-1}\Big[e^{A\tau}\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0) - E\cos\omega_k(t_F-t_0)\Big]\Big\},$$

$$\theta_{ki}^\alpha(\tau) = \frac{-\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0)\cos\omega_i^f(\tau+t_F-t_0) - \sin\omega_k(t_F-t_0)\cos\omega_i^f(t_F-t_0)\Big] +$$
$$+ \frac{\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\sin\omega_i^f(\tau+t_F-t_0)\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0) - \sin\omega_i^f(t_F-t_0)\cos\omega_k(t_F-t_0)\Big],$$

$$\vartheta_{ki}^\alpha(\tau) = \frac{\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0)\sin\omega_i^f(\tau+t_F-t_0) - \sin\omega_k(t_F-t_0)\sin\omega_i^f(t_F-t_0)\Big] +$$
$$+ \frac{\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\cos\omega_i^f(\tau+t_F-t_0)\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0) - \cos\omega_i^f(t_F-t_0)\cos\omega_k(t_F-t_0)\Big];$$

$$\Theta_k^\beta(\tau) = e^{A(t_F-t_0)}\Big\{\; A \quad (E\omega_k^2+A^2)^{-1}\Big[e^{A\tau}\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0) - E\cos\omega_k(t_F-t_0)\Big] + $$
$$+ E\omega_k(E\omega_k^2+A^2)^{-1}\Big[e^{A\tau}\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0) - E\sin\omega_k(t_F-t_0)\Big]\Big\},$$

$$\theta_{ki}^\beta(\tau) = \frac{-\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0)\cos\omega_i^f(\tau+t_F-t_0) - \cos\omega_k(t_F-t_0)\cos\omega_i^f(t_F-t_0)\Big] +$$
$$+ \frac{-\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\sin\omega_i^f(\tau+t_F-t_0)\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0) - \sin\omega_i^f(t_F-t_0)\sin\omega_k(t_F-t_0)\Big],$$

$$\vartheta_{ki}^\beta(\tau) = \frac{\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\cos\omega_k(\tau+t_F-t_0)\sin\omega_i^f(\tau+t_F-t_0) - \cos\omega_k(t_F-t_0)\sin\omega_i^f(t_F-t_0)\Big] +$$
$$+ \frac{-\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\Big[\cos\omega_i^f(\tau+t_F-t_0)\sin\omega_k(\tau+t_F-t_0) - \cos\omega_i^f(t_F-t_0)\sin\omega_k(t_F-t_0)\Big].$$

Пусть $t_F = t_0$; $\tau^* = \dfrac{2\pi}{\omega_б}q^*$, где $q^*$ – некоторое целое число; $\omega_k = n_k\omega_б$, где $n_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – целые числа. При этих условиях

$$\theta_{ki}^\alpha(\tau^*) = \frac{-\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\sin n_k\omega_б\frac{2\pi}{\omega_б}q^*\right] + \frac{\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\sin\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*\right] = \frac{\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\sin\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*\right],$$
$$\vartheta_{ki}^\alpha(\tau^*) = \frac{\omega_k}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\cos\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*-1\right],$$
$$\theta_{ki}^\beta(\tau^*) = \frac{-\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\cos\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*-1\right],$$
$$\vartheta_{ki}^\beta(\tau^*) = \frac{\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left[\sin\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*\right] \quad k=\overline{1,n} \quad i=\overline{1,2n}.$$

После подстановки (П.15) и (П.18) в (4.13) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения амплитуд $\rho_k^f$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ возмущения (П.12):

$$\sum_{i=1}^{2n} q_{ki}^\alpha(\tau^*)\rho_i^f = -\frac{\varepsilon_\alpha^н(\omega_k)}{\omega_k} - \frac{e_k^\alpha(\tau^*)}{\omega_k}, \quad \sum_{i=1}^{2n} q_{ki}^\beta(\tau^*)\rho_i^f = -\varepsilon_\beta^н(\omega_k) - e_k^\beta(\tau^*) \quad k=\overline{1,n}, \qquad (П.19)$$

где

$$\begin{aligned} q_{ki}^\alpha(\tau^*) &= \frac{2}{\rho_k\tau^*}\left[\alpha_i^f\frac{1}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\sin\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^* + \beta_i^f\frac{1}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left(\cos\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*-1\right)\right] \\ q_{ki}^\beta(\tau^*) &= \frac{2}{\rho_k\tau^*}\left[\alpha_i^f\frac{-\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\left(\cos\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*-1\right) + \beta_i^f\frac{\omega_i^f}{\omega_i^{f\,2}-\omega_k^2}\sin\omega_i^f\frac{2\pi}{\omega_б}q^*\right] \end{aligned} \quad \begin{aligned} k&=\overline{1,n} \\ i&=\overline{1,2n} \end{aligned} \qquad (П.20)$$

а $e_k^\alpha(\tau^*) = \dfrac{2}{\rho_k \tau^*}\boldsymbol{c}^T \Theta_k^\alpha(\tau^*)\boldsymbol{\phi}$ и $e_k^\beta(\tau^*) = \dfrac{2}{\rho_k \tau^*}\boldsymbol{c}^T \Theta_k^\beta(\tau^*)\boldsymbol{\phi}$ – значения (при $\tau = \tau^*$) составляющих выхода фильтра Фурье, вызванных исчезающими функциями, сопровождающими вынужденные колебания.

Рассмотрим матрицу при неизвестных этой системы

$$Q = \left( \begin{array}{cccc} q_{11}^\alpha(\tau^*) & q_{12}^\alpha(\tau^*) & \cdots & q_{1,2n}^\alpha(\tau^*) \\ q_{21}^\alpha(\tau^*) & q_{22}^\alpha(\tau^*) & \cdots & q_{2,2n}^\alpha(\tau^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1}^\alpha(\tau^*) & q_{n2}^\alpha(\tau^*) & \cdots & q_{n,2n}^\alpha(\tau^*) \\ \hline q_{11}^\beta(\tau^*) & q_{12}^\beta(\tau^*) & \cdots & q_{1,2n}^\beta(\tau^*) \\ q_{21}^\beta(\tau^*) & q_{22}^\beta(\tau^*) & \cdots & q_{2,2n}^\beta(\tau^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1}^\beta(\tau^*) & q_{n2}^\beta(\tau^*) & \cdots & q_{n,2n}^\beta(\tau^*) \end{array} \right). \tag{П.21}$$

Выбирая $\omega_i^f > 0$ $\left(i = \overline{1,2n}\right)$ при фиксированных $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, всегда можно обеспечить выполнение условия

$$\det Q \neq 0 \tag{П.22}$$

(заметим, что это условие может нарушаться, и в таком случае достаточно лишь совместности системы (П.19)). Решая эту систему, найдём искомые $\rho_i^f$ $\left(i = \overline{1,2n}\right)$, при которых выполняется равенство (4.13).

При этом может оказаться, что для найденных амплитуд $\rho_i^f$ $\left(i = \overline{1,2n}\right)$ нарушается условие (П.14). Для выполнения этого условия будем уменьшать числа $\dfrac{\varepsilon_\alpha^н(\omega_k)}{\omega_k}$ и $\varepsilon_\beta^н(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ в правых частях уравнений (П.19) путём уменьшения $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Для того чтобы амплитуды $\rho_i^f$ $\left(i = \overline{1,2n}\right)$ уменьшались пропорционально уменьшению правых частей, достаточна независимость матрицы $Q$ от испытательных частот $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Из выражений (П.20) следует, что коэффициенты матрицы $Q$ будут слабо зависеть от $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, если частоты $\omega_i^f$ $\left(i = \overline{1,2n}\right)$ существенно превышают частоты $\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

## П.5 Доказательство свойства 2

Рассмотрим для простоты случай, когда $n$ – чётное. Подставим в (П.2) значения (4.15):

$$\sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \omega_k^{2i} \hat{k}_{2i} = \hat{\alpha}_k, \quad \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \omega_k^{2i+1} \hat{k}_{2i+1} = \hat{\beta}_k \quad k = \overline{1,n}. \tag{П.23}$$

Аппроксимирующие функции (4.10) при чётном $n$ и значениях (4.15) примут вид

$$\alpha_k^н = l_0 = \hat{k}_0, \quad \beta_k^н = \sum_{i=0}^{n/2-1} l_{2i+1}\omega_k^{2i+1} = \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \hat{k}_{2i+1}\omega_k^{2i+1} \quad k = \overline{1,n}. \tag{П.24}$$

Подставляя (П.23) и (П.24) в (4.14), получим

$$\sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \omega_k^{2i} \hat{k}_{2i} = \hat{k}_0, \quad \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \omega_k^{2i+1} \hat{k}_{2i+1} \equiv \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \omega_k^{2i+1} \hat{k}_{2i+1} \quad k = \overline{1,n}. \tag{П.25}$$

На основе первого равенства (П.25) заключаем, что при (4.15) также

$$\hat{k}_{2i} = 0 \quad i = \overline{1, n/2-1}. \tag{П.26}$$

Таким образом, доказано, что решение со значениями (4.15) и (П.26) *существует* для системы (П.2), построенной по аппроксимирующим функциям (4.10). Докажем теперь, что оно является единственным решением этой системы.

По аналогии с (П.3) и (П.6) введём вектора

$$\boldsymbol{h}^{(i)}_{\alpha_н} = \boldsymbol{h}^{(i)}_{\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_н} = l_0 \boldsymbol{h}^{(i)}, \quad \boldsymbol{h}^{(i)}_{\beta_н} = \boldsymbol{h}^{(i)}_{\beta}\Big|_{\beta=\beta_н} = (-1)^i \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1} \boldsymbol{h}^{(2q+1+i)} \quad i = \overline{1, n}, \tag{П.27}$$

и построим по ним матрицу

$$M_н = \begin{pmatrix} \bar{M}_н & 0 & \bar{M}_{\alpha_н} & \tilde{M}_{\beta_н} \\ 0 & \tilde{M}_н & \bar{M}_{\beta_н} & \tilde{M}_{\alpha_н} \end{pmatrix}, \tag{П.28}$$

в которой

$$\begin{aligned}
\bar{M}_н &= \left[ \boldsymbol{h}^{(0)}, \quad \boldsymbol{h}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{h}^{(n-2)} \right]; \\
\tilde{M}_н &= \left[ \boldsymbol{h}^{(1)}, \quad \boldsymbol{h}^{(3)}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{h}^{(n-1)} \right]; \\
\bar{M}_{\alpha_н} &= -\left[ l_0\boldsymbol{h}^{(2)}, \quad l_0\boldsymbol{h}^{(4)}, \quad \ldots, \quad l_0\boldsymbol{h}^{(n)} \right]; \\
\tilde{M}_{\alpha_н} &= -\left[ l_0\boldsymbol{h}^{(1)}, \quad l_0\boldsymbol{h}^{(3)}, \quad \ldots, \quad l_0\boldsymbol{h}^{(n-1)} \right]; \\
\bar{M}_{\beta_н} &= -\left[ \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+3)}, \quad \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+5)}, \quad \ldots, \quad \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+n+1)} \right]; \\
\tilde{M}_{\beta_н} &= \left[ \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+2)}, \quad \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+4)}, \quad \ldots, \quad \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+n)} \right].
\end{aligned} \tag{П.29}$$

Элементарным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \tilde{M}_{\beta_н} \\ \tilde{M}_{\alpha_н} \end{pmatrix} + l_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_н \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{\beta_н} \\ 0 \end{pmatrix}$$

столбцов матрицы (П.28) получим эквивалентную матрицу

$$M^{(1)}_н = \begin{pmatrix} \bar{M}_н & 0 & \bar{M}_{\alpha_н} & \tilde{M}_{\beta_н} \\ 0 & \tilde{M}_н & \bar{M}_{\beta_н} & 0 \end{pmatrix}, \tag{П.30}$$

определитель которой

$$\det M^{(1)}_н = -\det \begin{pmatrix} \bar{M}_н & \tilde{M}_{\beta_н} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \tilde{M}_н & \bar{M}_{\beta_н} \end{pmatrix}. \tag{П.31}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
&\det \left( \bar{M}_н \,\middle|\, \tilde{M}_{\beta_н} \right) = \\
&= \det \left( \boldsymbol{h}^{(0)} \; \boldsymbol{h}^{(2)} \; \cdots \; \boldsymbol{h}^{(n-2)} \,\middle|\, \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+2)} \; \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+4)} \; \cdots \; \sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+n)} \right) = \\
&= \det \left( \boldsymbol{h}^{(0)} \quad \boldsymbol{h}^{(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}^{(n-2)} \,\middle|\, l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(n)} \quad l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(n+2)} \quad \cdots \quad l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(2n-2)} \right) \neq 0.
\end{aligned} \tag{П.32}$$

Последний определитель отличен от нуля как определитель Вандермонда.

Аналогично получим, что

$$\det\left(\ \tilde{M}_{н}\ \middle|\ \bar{M}_{\beta_{н}}\ \right)=$$

$$=\det\left(\ \boldsymbol{h}^{(1)}\ \boldsymbol{h}^{(3)}\ \cdots\ \boldsymbol{h}^{(n-1)}\ \middle|\ -\sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+3)}\ -\sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+5)}\ \cdots\ -\sum_{q=0}^{n/2-1} l_{2q+1}\boldsymbol{h}^{(2q+n+1)}\ \right)=$$

$$=\det\left(\ \boldsymbol{h}^{(1)}\quad \boldsymbol{h}^{(3)}\quad \cdots\quad \boldsymbol{h}^{(n-1)}\ \middle|\ -l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(n+1)}\quad -l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(n+3)}\quad \cdots\quad -l_{n-1}\boldsymbol{h}^{(2n-1)}\ \right)\neq 0. \quad (\text{П}.33)$$

Отсюда следует *единственность* решения со значениями (4.15) и (П.26) системы (П.2), построенной по аппроксимирующим функциям (4.10). ■

Когда $n$ – нечётное, доказательство аналогично. Однако оно значительно сложнее и поэтому опущено. Сложность его вызвана тем, что решение частотных уравнений (П.2) с (4.14) не имеет столь простого вида (П.26). Для доказательства равенства (4.15) формируется матрица $M_{н}^{(2)}$, получаемая из матрицы $M_{н}$ после замены первого столбца блока $\begin{pmatrix} \bar{M}_{\alpha_{н}} \\ \bar{M}_{\beta_{н}} \end{pmatrix}$ столбцом правых частей уравнения (П.7). Доказано, что $\det M_{н}^{(2)}\neq 0$. Затем доказано, что $\det M_{н}\neq 0$. Сложность доказательства последнего связана с тем, что блоки $\begin{pmatrix} \bar{M}_{н} & \tilde{M}_{\beta_{н}} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \tilde{M}_{н} & \bar{M}_{\beta_{н}} \end{pmatrix}$ неквадратные при нечётном $n$. ■

## П.6 Доказательство свойства 3

Из соотношений (П.8) и (П.10) очевидно, что $\alpha_k\neq 0$ и $\beta_k\neq 0$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ для любого набора испытательных частот $\omega_k\in\Omega_{в}$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Справедливость же свойства 3 для относительных ошибок фильтрации устанавливается простой подстановкой (4.22) и (4.7) в соотношение (4.23). После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_k^{в}-\alpha_k}{\alpha_k}&=\frac{1}{\omega_k^2}\left[\frac{\left(\sum\limits_{q=\frac{n}{2}}^{n-1}\frac{l_{2q}}{\omega_k^{2(n-q-1)}}\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{m_q}{\omega_k^{2(n-q-1)}}\right)-m_n\sum\limits_{q=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{l_{2q}}{\omega_k^{2(n-q-2)}}}{m_n\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{l_{2q}}{\omega_k^{2(n-q-1)}}}\right],\\
\frac{\beta_k^{в}-\beta_k}{\beta_k}&=\frac{1}{\omega_k^2}\left[\frac{l_{2n-1}\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{m_q}{\omega_k^{2(n-q-1)}}-m_n\sum\limits_{q=0}^{n-2}\frac{l_{2q+1}}{\omega_k^{2(n-q-2)}}}{m_n\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{l_{2q+1}}{\omega_k^{2(n-q-1)}}}\right]\qquad k=\overline{1,n}.
\end{aligned}\qquad (\text{П}.34)$$

Нетрудно видеть, что дробно-рациональные функции в квадратных скобках ограничены для любых $\omega_k\in\Omega_{в}$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ если $l_{2n-1}\neq 0$ и $l_{2n-2}\neq 0$ ( $d_nk_{n-1}\neq 0$ и $d_nk_{n-2}\neq d_{n-1}k_{n-1}$ ). Поэтому всегда можно найти (достаточно большие) частоты $\omega_k\in\Omega_{в}$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ для которых выполняются неравенства (4.23).

## П.7 Доказательство свойства 4

По аналогии с (П.3) и (П.6) введём вектора

$$\boldsymbol{h}_{\alpha_{в}}^{(i)}=\boldsymbol{h}_{\alpha}^{(i)}\Big|_{\alpha=\alpha_{в}}=\sum_{q=n/2}^{n-1}\bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+i)},\quad \boldsymbol{h}_{\beta_{в}}^{(i)}=\boldsymbol{h}_{\beta}^{(i)}\Big|_{\beta=\beta_{в}}=(-1)^i\bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(i-1)}\quad i=\overline{0,n},\quad (\text{П}.35)$$

и построим по ним матрицу

$$M_б = \begin{pmatrix} \bar{M}_б & 0 & \bar{M}_{\alpha_в} & \tilde{M}_{\beta_в} \\ 0 & \tilde{M}_б & \bar{M}_{\beta_в} & \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.36)$$

в которой

$$\begin{aligned} \bar{M}_б &= \Big[ \quad \boldsymbol{h}^{(0)}, \quad \boldsymbol{h}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{h}^{(n-2)} \Big]; \\ \tilde{M}_б &= \Big[ \quad \boldsymbol{h}^{(1)}, \quad \boldsymbol{h}^{(3)}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{h}^{(n-1)} \Big]; \\ \bar{M}_{\beta_в} &= -\Big[ \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(1)}, \quad \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(3)}, \quad \ldots, \quad \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(n-1)} \Big]; \\ \tilde{M}_{\beta_в} &= \Big[ \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(0)}, \quad \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(n-2)} \Big]; \\ \bar{M}_{\alpha_в} &= -\Bigg[ \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+2)}, \quad \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+4)}, \quad \ldots, \quad \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2q-n)} \Bigg]; \\ \tilde{M}_{\alpha_в} &= -\Bigg[ \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+1)}, \quad \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+3)}, \quad \ldots, \quad \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2q-n-1)} \Bigg]. \end{aligned} \qquad (\text{П}.37)$$

Последний столбец блока $\begin{pmatrix} \bar{M}_{\alpha_в} \\ \bar{M}_{\beta_в} \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{(n)}_{\alpha_в} \\ \boldsymbol{h}^{(n)}_{\beta_в} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(0)} + \bar{l}_{n+2}\boldsymbol{h}^{(2)} + \cdots + \bar{l}_{2n-2}\boldsymbol{h}^{(n-2)} \\ \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(n-1)} \end{bmatrix}. \qquad (\text{П}.38)$$

Нетрудно проверить, что он является линейной комбинацией столбцов блоков $\begin{pmatrix} \bar{M}_б \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_б \end{pmatrix}$, и поэтому

$$\det M_б = 0. \qquad (\text{П}.39)$$

Заменим (П.38) столбцом

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{(0)}_{\alpha_в} \\ \boldsymbol{h}^{(0)}_{\beta_в} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(-n)} + \bar{l}_{n+2}\boldsymbol{h}^{(2-n)} + \cdots + \bar{l}_{2n-2}\boldsymbol{h}^{(-2)} \\ \bar{l}_{2n-1}\boldsymbol{h}^{(-1)} \end{bmatrix} \qquad (\text{П}.40)$$

правых частей уравнения (П.7). Матрицу (П.36) и соответствующие блоки после такой замены обозначим как

$$N_б = \begin{pmatrix} \bar{M}_б & 0 & \bar{N}_{\alpha_в} & \tilde{M}_{\beta_в} \\ 0 & \tilde{M}_б & \bar{N}_{\beta_в} & \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П}.41)$$

Элементарным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \tilde{M}_{\beta_в} \\ \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix} - \bar{l}_{2n-1} \begin{pmatrix} \bar{M}_б \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix}$$

столбцов матрицы (П.41) получим эквивалентную матрицу

$$N^{(1)}_б = \begin{pmatrix} \bar{M}_б & 0 & \bar{N}_{\alpha_в} & 0 \\ 0 & \tilde{M}_б & \bar{N}_{\beta_в} & \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix}, \qquad (\text{П}.42)$$

определитель которой

$$\det N^{(1)}_б = -\det \begin{pmatrix} \bar{M}_б & \bar{N}_{\alpha_в} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \tilde{M}_б & \tilde{M}_{\alpha_в} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П}.43)$$

Нетрудно проверить, что

$$\det\left(\ \bar{M}_{\text{б}}\ \middle|\ \bar{N}_{\alpha_{\text{в}}}\ \right) =$$

$$= \det\left( \boldsymbol{h}^{(0)}\ \ \boldsymbol{h}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{h}^{(n-2)} \middle| -\sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+2)} \cdots -\sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2q-n-2)} \middle| \sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n))} \right) =$$

$$= \det\left(\ \boldsymbol{h}^{(0)}\ \ \boldsymbol{h}^{(2)}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{h}^{(n-2)}\ \middle|\ -\bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(2-n)}\ \ \cdots\ \ -\bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(-2)}\ \middle|\ \bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(-n)}\ \right) \neq 0. \qquad (\text{П}.44)$$

Последний определитель отличен от нуля как определитель Вандермонда.

Аналогично получим, что

$$\det\left(\ \tilde{M}_{\text{б}}\ \middle|\ \tilde{M}_{\alpha_{\text{в}}}\ \right) =$$

$$= \det\left( \boldsymbol{h}^{(1)}\ \boldsymbol{h}^{(3)} \cdots \boldsymbol{h}^{(n-1)} \middle| -\sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+1)}\ -\sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2(q-n)+3)} \cdots -\sum_{q=n/2}^{n-1} \bar{l}_{2q}\boldsymbol{h}^{(2q-n-1)} \right) =$$

$$= \det\left(\ \boldsymbol{h}^{(1)}\ \ \boldsymbol{h}^{(3)}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{h}^{(n-1)}\ \middle|\ -\bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(1-n)}\ \ -\bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(3-n)}\ \ \cdots\ \ -\bar{l}_n\boldsymbol{h}^{(-1)}\ \right) \neq 0. \qquad (\text{П}.45)$$

Неравенства (П.44), (П.45) вместе с равенством (П.39) доказывают свойство 4. ■

## П.8 Доказательство утверждения 8

Запишем уравнение объекта (2.1) в форме Коши

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{\psi}f, \quad y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}. \qquad (\text{П}.46)$$

Решение этого уравнения с учётом (6.21) и (П.12) имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) = \boldsymbol{c}^T e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{\phi} + \rho e^{\lambda(t-t_0)}\left[\alpha\ \ \sin\omega\ \ (t-t_0) + \beta\ \ \cos\omega\ \ (t-t_0)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{2n}\rho_k^f\ \left[\alpha_k^f \sin\omega_k^f(t-t_0) + \beta_k^f\cos\omega_k^f(t-t_0)\right], \end{aligned} \qquad (\text{П}.47)$$

где $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{x}(t_0) + \rho\omega[E\omega^2 + (E\lambda - A)^2]^{-1}\boldsymbol{b} + \sum\limits_{k=1}^{2n}\rho_k^f\omega_k^f(E\omega_k^{2f} + A^2)^{-1}\boldsymbol{\psi}$;

$\alpha\ = \operatorname{Re} w\ (s\ ),\ \ \beta\ = \operatorname{Im} w\ (s\ ),\ \ w\ (s\ ) = \boldsymbol{c}^T(Es\ -A)^{-1}\boldsymbol{b}\ ,\ \ s\ = \lambda + \jmath\omega;$

$\alpha_k^f = \operatorname{Re} w^f(s_k^f),\ \ \beta_k^f = \operatorname{Im} w^f(s_k^f),\ \ w^f(s_k^f) = \boldsymbol{c}^T(Es_k^f - A)^{-1}\boldsymbol{\psi},\ \ s_k^f = \jmath\omega_k^f\ \left(k = \overline{1, 2n}\right).$

Для простоты предположим, что $n \times n$ матрица $A$ имеет различные собственные числа $s_k^* = a_k^* + j\omega_k^*$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Тогда первое слагаемое – $y^*(t) = \boldsymbol{c}^T e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{\phi}$ – выражения (П.47) запишем в виде

$$y^*(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{a_k^*(t-t_0)}[\rho_k^s \sin\omega_k^*(t-t_0) + \rho_k^c\cos\omega_k^*(t-t_0)]. \qquad (\text{П}.48)$$

Подставим его в модифицированный фильтр Фурье (2.11), преобразованный для одной пары оценок частотных параметров к виду

$$\begin{aligned} \alpha^*(\tau) &= \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y^*(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\sin\omega(t-t_0)\,dt, \\ \beta^*(\tau) &= \frac{2}{\rho\tau}\int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} y^*(t)e^{-\lambda(t-t_0)}\cos\omega(t-t_0)\,dt. \end{aligned} \qquad (\text{П}.49)$$

В результате получим

$$\alpha^*(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\sum_{k=1}^{n}\left[\rho_k^s\left(\varrho_k^{ss}\varphi_k^{ss} - \varrho_k^{sc}\varphi_k^{sc} - \varrho_k^{cs}\varphi_k^{cs} + \varrho_k^{cc}\varphi_k^{cc}\right) + \rho_k^c\left(\varrho_k^{ss}\varphi_k^{cs} - \varrho_k^{sc}\varphi_k^{cc} + \varrho_k^{cs}\varphi_k^{ss} - \varrho_k^{cc}\varphi_k^{sc}\right)\right],$$
$$\beta^*(\tau) = \frac{2}{\rho\tau}\sum_{k=1}^{n}\left[\rho_k^s\left(\varrho_k^{ss}\varphi_k^{sc} + \varrho_k^{sc}\varphi_k^{ss} - \varrho_k^{cs}\varphi_k^{cc} - \varrho_k^{cc}\varphi_k^{cs}\right) + \rho_k^c\left(\varrho_k^{ss}\varphi_k^{cc} + \varrho_k^{sc}\varphi_k^{cs} + \varrho_k^{cs}\varphi_k^{sc} + \varrho_k^{cc}\varphi_k^{ss}\right)\right];$$

где

$$\varrho_k^{ss} = (a_k^* - \lambda)\frac{(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} + \omega^2}{[(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} + \omega^2]^2 - (2\omega_k^*\omega)^2}, \quad \varrho_k^{sc} = \omega\frac{(a_k^* - \lambda)^2 - \omega_k^{2*} + \omega^2}{[(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} + \omega^2]^2 - (2\omega_k^*\omega)^2},$$
$$\varrho_k^{cs} = \omega_k^*\frac{(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} - \omega^2}{[(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} + \omega^2]^2 - (2\omega_k^*\omega)^2}, \quad \varrho_k^{cc} = 2\frac{(a_k^* - \lambda)\omega_k^*\omega}{[(a_k^* - \lambda)^2 + \omega_k^{2*} + \omega^2]^2 - (2\omega_k^*\omega)^2};$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{ss} &= e^{(a_k^*-\lambda)(t_F+\tau-t_0)}\sin\omega_k^*(t_F+\tau-t_0)\sin\omega(t_F+\tau-t_0) - \\
&- e^{(a_k^*-\lambda)(t_F-t_0)}\sin\omega_k^*(t_F-t_0)\sin\omega(t_F-t_0),\\
\varphi_k^{sc} &= e^{(a_k^*-\lambda)(t_F+\tau-t_0)}\sin\omega_k^*(t_F+\tau-t_0)\cos\omega(t_F+\tau-t_0) - \\
&- e^{(a_k^*-\lambda)(t_F-t_0)}\sin\omega_k^*(t_F-t_0)\cos\omega(t_F-t_0),\\
\varphi_k^{cs} &= e^{(a_k^*-\lambda)(t_F+\tau-t_0)}\cos\omega_k^*(t_F+\tau-t_0)\sin\omega(t_F+\tau-t_0) - \\
&- e^{(a_k^*-\lambda)(t_F-t_0)}\cos\omega_k^*(t_F-t_0)\sin\omega(t_F-t_0),\\
\varphi_k^{cc} &= e^{(a_k^*-\lambda)(t_F+\tau-t_0)}\cos\omega_k^*(t_F+\tau-t_0)\cos\omega(t_F+\tau-t_0) - \\
&- e^{(a_k^*-\lambda)(t_F-t_0)}\cos\omega_k^*(t_F-t_0)\cos\omega(t_F-t_0).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что функции $\varphi_k^{ss}(\lambda)$, $\varphi_k^{sc}(\lambda)$, $\varphi_k^{cs}(\lambda)$ и $\varphi_k^{cc}(\lambda)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ растут экспоненциально при $0 < \lambda < s^* = \max\{\, a_1^*,\, a_2^*,\, \ldots,\, a_n^*\,\}$, в то время как их сомножители $\varrho_k^{ss}(\lambda)$, $\varrho_k^{sc}(\lambda)$, $\varrho_k^{cs}(\lambda)$ и $\varrho_k^{cc}(\lambda)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ уменьшаются в лучшей степени как $\lambda^{-3}$. Поэтому при $0 < \lambda < s^*$ всегда существует такой момент времени $\tau_\lambda^{**}$, что

$$|\alpha^*(\tau) - \alpha^*(\tau - T_б)| > \varepsilon_\lambda^\alpha, \quad |\beta^*(\tau) - \beta^*(\tau - T_б)| > \varepsilon_\lambda^\beta, \quad \tau > \tau_\lambda^{**}.$$

Так как слагаемые $\alpha^\star(\tau)$ и $\beta^\star(\tau)$ оценок частотных параметров ограничены при $\lambda > 0$, всегда существует такой момент времени $\tau_\lambda^*$, начиная с которого условия (6.22) также нарушаются, что доказывает утверждение 8. ■

# Литература


[1] *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. -М.: Наука. 1991. 432 С.

[2] *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. -М.: Наука. 2003. 291 С.

[3] *Александров А.Г.* Метод частотных параметров // Автоматика и телемеханика. 1989. Т. 50. №12. С. 3-15.

[4] *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик // Известия РАН: ««Теория и системы управления»». 1995. №2. С. 63-71.

[5] *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: границы частот испытательного сигнала // Автоматика и телемеханика. 2001. Т. 62. №11. С. ???-???.

[6] *Александров А.Г.* Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении // Автоматика и телемеханика. 2000. Т. 61. №4. С. 106-116.

[7] *Alexandrov A.G.* Finite-frequency identification: model validation and bounded test signal // 13-th World Congress of IFAC. San-Francisco. USA. Preprints. 1996. V. I. P. 393-398.

[8] *Александров А.Г.* Частотные регуляторы // Автоматика и телемеханика. 1991. Т. 52. №1. С. 22-33.

[9] *Graebe S.F.* Robust and adaptive control of an unknown plant: A benchmark of new format // 12-th World Congress of IFAC. Sydney. Australia. Preprints. 1993. V. III. P. 165-170.

[10] *Орлов Ю.Ф.* Пакет прикладных программ ««АДАПЛАБ»». Часть 1. Частотное адаптивное управление // Сб. научных трудов: ««Частотное управление»». -М.: МИСиС. 1994. С. 71-98.