КОНЕЧНО-ЧАСТОТНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

А. Г. Александров

Московский Государственный Институт Стали и Сплавов (Технологический Университет), Первомайская 7, Электросталь, 144000, Московская область, Россия.
E-mail: misis@elsite.ru

1. Введение

В последние два десятилетия разработано несколько методов идентификации линейных объектов при неизвестных ограниченных возмущениях.

Первая группа методов базируется, в частности, на методе наименьших квадратов [1], [2] и методе рекуррентных целевых неравенств [3]. Точность идентификации, достигаемая этими методами, ограничена и зависит от реализовавшегося возмущения.

Вторая группа методов, называемая частотными, использует испытательный сигнал в виде суммы гармоник [4], что открывает возможность получить любую желаемую точность идентификации. В работах [5], [6] классический частотный подход [7] развивается на случай неустойчивых объектов путём умножения гармонического испытательного воздействия на $e^{\lambda t}$ ($\lambda > 0$). При этом доказана сходимость процесса идентификации. Эти результаты были развиты в работах [5], [8] на случай дискретных объектов.

Однако, экспоненциально возрастающий испытательный сигнал трудно реализовать, если вход объекта ограничен. Для асимптотически устойчивых объектов можно принять $\lambda = 0$. Последнее может нарушить сходимость идентификации, (например, если частота возмущения совпадает с одной из частот испытательного сигнала) и поэтому, необходимо найти класс допустимых внешних возмущений, при которых сходимость не нарушается.

В настоящей работе построен алгоритм частотной идентификации дискретных объектов и определён класс возмущений асимптотически устойчивых объектов, для которых этот алгоритм сходится при ограниченном входе объекта.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретный объект, описываемый уравнением

$$\begin{gathered} y(k) + d_1 y(k-1) + \ldots + d_n(k-n) = \\ = k_1 u(k-1) + \ldots + k_n u(k-n) + f(k-1), \\ (k = 1,2\ldots) \end{gathered} \qquad (1)$$

где $y(k)$ - выход объекта, измеряемый в момент времени kh (h - интервал дискретности измерений), $u(k)$ - управляемый вход, $f(k)$ - неизвестное ограниченное внешнее возмущение:

$$|f(k)| \le f^*, (k = 1,2,\ldots) \qquad (2)$$

где f^* - число, коэффициенты $d_i, k_i (i = \overline{1,n})$ - неизвестные числа, n - известно.

Управляемый вход представляет собой испытательный сигнал

$$u(k) = z_0^k \sum_{i=1}^{n} p_i \sin \omega_i hk \qquad (3)$$

в котором z_0, p_i, ω_i $(i = \overline{1,n})$ - заданные положительные числа, p_i, $(i = \overline{1,n})$ - амплитуды, ω_i $(i = \overline{1,n})$ - испытательные частоты, удовлетворяющие условиям

$$0 < \omega_i h < \pi, \quad \omega_i \ne \omega_j, \quad (i \ne j,\ i, j = \overline{1,n}) \qquad (4)$$

Кроме того, будем полагать, что испытательные частоты кратны базовой частоте ω_σ: $\omega_i = c_i \omega_\sigma$ $(i = \overline{1,n}$, где c_i - целые числа $(c_1 < c_2, \ldots, < c_n)$, при этом период максимальной испытательной частоты $T_m = \dfrac{2\pi}{c_n \omega_\sigma}$ кратен h.

Предполагается, что объект (1) полностью управляем и, если он неустойчив, то известна оценка z_0 степени его неустойчивости z^*, где $z^* = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$, а z_i $(i = \overline{1,n})$ - корни полинома $d(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_n z^{-n}$.

Задача идентификации состоит в определении оценок $\hat{d}_i, \hat{k}_i (i = \overline{1,n})$ коэффициентов объекта таких, чтобы выполнялись требования

$$|d_i - \hat{d}_i| \le \varepsilon_i^d, |k_i - \hat{k}_i| \le \varepsilon_i^k \qquad (i = \overline{1,n}) \quad (5)$$

в которых $\varepsilon_i^d, \varepsilon_i^k (i = \overline{1,n})$ - заданные числа.

3. Частотные параметры объекта

Определение 3.1 [5] Набор $2n$ чисел

$$a_i = \operatorname{Re} \omega(z_0 e^{-j\omega_i h}), \beta_i = \operatorname{Im} \omega(z_0 e^{-j\omega_i h}), \qquad (6)$$
$$z_0 > z^*, (i = \overline{1,n}),$$

где $\omega(z^{-1}) = \dfrac{k(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \dfrac{k_1 z^{-1} + ... + k_n z^{-n}}{1 + d_1 z^{-1} + ... + d_n z^{-n}}$ – передаточная функция объекта, называется частотными параметрами объекта (1).

Метод экспериментального определения оценок $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i (i = \overline{1,n})$ заключается в следующем. Приложим к объекту испытательное воздействие (3) и подадим его выход после умножения на z_0^{-k} на входы фильтра Фурье

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i(\delta) = \frac{2}{p_i \delta} \sum_{k=\delta_F}^{\delta_F + \delta} y(k) z_0^{-k} \sin \omega_i hk$$
$$(i = \overline{1,n})$$
$$\hat{\beta}_i = \beta_i(\delta) = \frac{2}{p_i \delta} \sum_{k=\delta_F}^{\delta_F + \delta} y(k) z_0^{-k} \cos \omega_i hk \tag{7}$$

где $\delta_F\ h$ - момент начала фильтрации, δh - время фильтрации, *delta* =1,2,.... Далее будем полагать, что δh кратно базовому периоду $T_\sigma = \dfrac{2\pi}{\omega_\sigma}$. Это означает, что $\delta = l\tau_\sigma$, где l=1,2,…; $\tau_\sigma = \dfrac{T_\sigma}{h}$. Кроме того, далее $\delta_F = \tau_\sigma$.

Теорема 3.1 Оценки (7) частотных параметров сходятся к истинным значениям при любых ограниченных внешних возмущениях:

$$\lim_{\delta \to \infty} \alpha_i(\delta) = \alpha_i, \quad \lim_{\delta \to \infty} \beta_i(\delta) = \beta_i, \quad (i = \overline{1,n}) \tag{8}$$

Доказательство Выход объекта (1) можно представить как

$$y(k) = y^u(k) + ae^u(k) + y^0(k) + y^j(k), \quad (k = 1,2,...), \tag{9}$$

где вынужденные колебания

$$y^u(k) = z_0^k \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\alpha_i \sin \omega_i hk + \beta_i \cos \omega_i hk\right]$$
$$(k = 1,2,...), \tag{10}$$

$ae^u(k)$ - сопровождающая $y^u(k)$ составляющая, $y^0(k)$ вызвана начальными условиями, $y^f(k)$ возбуждается внешним возмущением.

Подставляя выражения (9) и (10) в (7), получим структуру ошибок фильтрации

$$\alpha_i(\delta) - \alpha_i = e_i^{\alpha ae}(\delta) + e_i^{\alpha 0}(\delta) + e_i^{\alpha f}(\delta)$$
$$\beta_i(\delta) - \beta_i = e_i^{\beta ae}(\delta) + e_i^{\beta 0}(\delta) + e_i^{\beta f}(\delta)$$
$$(i = \overline{1,n}, \delta = 1,2,...) \tag{11}$$

в которой компоненты e_i с соответствующими верхними индексами вызваны составляющими $ae^u(k)$, $y^0(k)$ и $y^f(k)$ соответственно.

Покажем, что каждая из этих компонент является исчезающей функцией при $\delta \to \infty$. Преобразуем уравнение (1) к форме Коши

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + mf(k),$$
$$y(k) = d^T x(k), (k = 1,2,...) \tag{12}$$

где *x(k)* - n-мерный вектор состояний объекта (1), *A* - матрица, b, m и d - n-мерные вектора.

Положим *u(k)* = 0 и ограничимся случаем различных собственных чисел матрицы $A(z_i \neq z_j, i \neq j, i = \overline{1,n})$. Тогда, используя неособое преобразование $\tilde{x}(k) = Tx(k)$, представим систему (12) как

$$\tilde{x}_i(k+1) = z_i \tilde{x}_i(k) + \tilde{m}_i f(k), y(k) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i \tilde{x}_i(k),$$
$$(i = \overline{1,n}). \tag{13}$$

Нетрудно записать решение этой системы

$$\tilde{x}(k) = z_i^k \tilde{x}_i(0) + \tilde{m}_i \sum_{\tau=0}^{k-1} z^{k-\tau-1} f(\tau) =$$
$$= z_i^k \tilde{x}_i(0) + \tilde{m}_i \sum_{\gamma=0}^{k-1} z_i^\gamma f(k-1-\gamma), \ (k = 1,2,...) \tag{14}$$

Из выражений (13), (14) получим оценку

$$\left|y^f(k)\right| = \left|\sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \tilde{d}_i \tilde{m}_i z_i^\gamma f(k-1-\gamma)\right| \leq$$
$$\leq f^* \sum_{\gamma=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \left|\tilde{d}_i \tilde{m}_i\right| \left|z_i^\gamma\right| \leq p \sum_{\gamma=0}^{k-1} (z^*)^\gamma \tag{15}$$
$$(k = 1,2,...)$$

где $p = \sum_{i=0}^{n} \left|\tilde{d}_i \tilde{m}_i\right|$.

Учитывая очевидное соотношение

$$\sum_{\gamma=0}^{k-1} c^\gamma = \frac{1-c^k}{1-c} \tag{16}$$

и выражение для ошибок фильтрации

$$e_i^{\alpha f}(\delta) = \frac{2}{\rho_i \delta} \sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta} y^f(k) z_0^{-k} \sin \omega_i hk (i = \overline{1,n}) \tag{17}$$

получим, используя (15),

$$\left|e_i^{\alpha f}\right| \leq \frac{2p}{\rho_i \delta} \sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta} \frac{1-(z^*)^k}{1-z^*} z_0^{-k} =$$
$$= \frac{2p}{\rho_i \delta (1-z^*)} \left(\sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta} r^k - \sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta} r_1^k\right) \tag{18}$$

где $r = \dfrac{1}{z_0}$, $r_1 = \dfrac{z^*}{z_0}$.

Учитывая, что $r < 1$ и $r_1 < 1$, и используя соотношение (16), которое при $\gamma \neq 0$ имеет вид

$$\sum_{\gamma=\gamma_1}^{\gamma_2-1} c^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{\gamma_2-1} c^\gamma - \sum_{\gamma=0}^{\gamma_1-1} c^\gamma = \frac{1-c^{\gamma_2}}{1-c} - \frac{1-c^{\gamma_1}}{1-c},$$

заключаем, что

$$\lim_{\delta\to\infty} e_i^{\alpha f}(\delta) = 0, \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{19}$$

Доказательство аналогичных свойств для $e_i^{\alpha 0}(\delta)$ и $e_i^{\alpha ae}(\delta)$ $(i = \overline{1,n})$, а также для ошибок фильтрации $\beta_i(\delta)$ $(i = \overline{1,n})$, аналогично описанному и, таким образом, теорема доказана. Отметим, что её доказательство на основе *z* – преобразования и теоремы вычетов получено в работе [8].

4. Частотные уравнения и алгоритм идентификации.

Сформируем тождество Безу

$$d(q)\overline{k}(q) - k(q)\overline{d}(q) = k(q), \quad q = z^{-1}, \tag{20}$$

где искомые полиномы

$$\overline{k}(q) = \overline{k}_i q + ... + \overline{k}_n q^n, \ \overline{d}(q) = \overline{d}_1 q + ... + \overline{d}_n q^n \tag{21}$$

Это тождество имеет единственное решение

$$\overline{d}_i = d_i, \ \overline{k}_i = k_i \quad (i = \overline{1,n}) \tag{22}$$

Разделим тождество (20) на $d(q)$, положим $q_i = z_0 e^{-j\omega_i h}$ и, учитывал выражение (6), получим следующую систему *2n* уравнений

$$\overline{k}(z_0 e^{-j\omega_i h}) - (\alpha_i + j\beta_i)\overline{d}(z_0 e^{-j\omega_i h}) = \alpha_i + j\beta_i$$

$$(i = \overline{1,n}) \tag{23}$$

Теорема 4.1 [8] Если объект (1) полностью управляем, а испытательные частоты удовлетворяют условиям (4), то система линейных алгебраических уравнений (23) имеет единственное решение (22).

Заменяя в этой системе частотные параметры их оценками, запишем её в более подробной форме [8] как

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[z_0^{\nu}\cos\nu\omega_i h\right]\hat{k}_{\nu} -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\left[\hat{\alpha}_i\cos\nu\omega_i h + \hat{\beta}_i\sin\nu\omega_i h\right]z_0^{\nu}\hat{d}_{\nu} = \hat{\alpha}_i$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\left[z_0^{\nu}\sin\nu\omega_i h\right]\hat{k}_{\nu} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left[\hat{\alpha}_i\sin\nu\omega_i h - \hat{\beta}_i\cos\nu\omega_i h\right]z_0^{\nu}\hat{d}_{\nu} = \hat{\beta}_i$$

$$(i = \overline{1,n}) \tag{24}$$

где $\hat{d}_i$, $\hat{k}_i$ $(i = \overline{1,n})$ оценки коэффициентов объекта (1).

Уравнения (24) называются частотными уравнениями идентификации.

Из теоремы 3.1. следует, что для любых сколь угодно малых чисел ε_i^d и ε_i^k $(i = \overline{1,n})$ существует время фильтрации, начиная с которого выполняются условия (5). Его нижняя оценка получается на основе необходимых условий сходимости идентификации. Действительно, решая уравнения (24) и используя оценки частотных параметров, измеряемых в моменты времени $\delta_F + \delta = l\tau_\sigma$, где l = 2,3,…,, получим оценки $d_i(l\tau_\sigma)$, $k_i(l\tau_\sigma)$ $(i = \overline{1,n},\ l = 2,3,\ldots)$. Используя эти оценки, проверим необходимые условия сходимости

$$\left|d_i(l\tau_\sigma) - d_i\left[(l+1)\tau_\sigma\right]\right| \le \varepsilon_i^d,$$

$$\left|k_i(l\tau_\sigma) - k_i\left[(l+1)\tau_\sigma\right]\right| \le \varepsilon_i^k$$

$$(i = \overline{1,n},\ l = 2,3,\ldots) \tag{25}$$

Алгоритм 4.1 (алгоритм конечно-частотной идентификации) состоит из следующих операций:

- приложить выход объекта (1), возбуждённого испытательным сигналом (3) к входу фильтра Фурье (7);
- измерить выходы этого фильтра в моменты времени $\delta_F + \delta = l\tau_\sigma$, $(l = 2,3,\ldots)$;
- решить для каждого из этих моментов частотные уравнения (24), где $\hat{\alpha}_i = \alpha_i(l\tau_\sigma)$, $\hat{\beta}_i = \beta_i(l\tau_\sigma)$ и найти оценки коэффициентов объекта (1) $d_i(l\tau_\sigma)$, $k_i(l\tau_\sigma)$ $i = \overline{1,n},\ l = 2,3,\ldots;$
- определить число *l** путём проверки необходимых условий (25) для каждого *l* (*l* = 2,3,…).

Для подтверждения полученной модели путём косвенной проверки выполнения требований (5), где $\hat{d}_i = d_i(l^*\tau_\sigma)$, $\hat{k}_i = k_i(l^*\tau_\sigma)$, применимы, почти без изменения, алгоритмы подтверждения моделей непрерывных объектов, предложенные в [9].

5. Асимптотически устойчивый объект с ограниченным входом

Управляемый вход объекта $u(k)$ $(k = 1,2,...)$ обычно ограничен некоторой известной величиной u^*:

$$|u(k)| \le u^* \quad (k = 1,2,...) \tag{26}$$

В этом случае время фильтрации ограничено числом δ^{**}, которое определяется моментом, когда испытательный сигнал (3) достигает границы u^*. Если обозначить $\rho = \max\{\rho_1,...,\rho_n\}$, то из (3) и (26) следует, что

$$\delta^{**} \le \frac{1}{\lg z_0} \quad \lg\frac{u^*}{\rho n} \tag{27}$$

Если $\delta^{**} \le l^*\tau_\sigma$, то требуемая точность идентификации (5) не достижима.

Пусть объект (1) асимптотически устойчив. В этом случае можно принять в выражении (3) для испытательного сигнала

$$z_0 = 1 \tag{28}$$

и выбрать его амплитуды ρ_i из условий

$$\rho_i \le \frac{u^*}{n} \quad (i = \overline{1,n}) \tag{29}$$

которые обеспечивают выполнение требований (26).

Однако, при $z_0 = 1$ свойства (8) оценок частотных параметров могут нарушаться. Например, это может случиться, если возмущение является гармонической функцией $f(k) = a\sin\omega_i hk$ с частотой ω_i, совпадающей с частотой испытательного сигнала.

В связи с этим необходимо определить класс функций возмущения, для которого сохраняются свойства (8).

Подадим естественный $(u(k) = 0)$ выход объекта $\bar{y}(k) = y^0(k) + y^f(k)$ на входы фильтра Фурье и получим функции

$$l_i^\alpha(\delta) = \frac{2}{\rho_i\delta}\sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta}\bar{y}(k)\sin\omega_i hk$$

$$(i = \overline{1,n}) \qquad (30)$$

$$l_i^\beta(\delta) = \frac{2}{\rho_i\delta}\sum_{k=\delta_F}^{\delta_F+\delta}\bar{y}(k)\cos\omega_i hk$$

Определение 5.1 Возмущение $f(k)$ $(k = 1,2,...)$ называется ФФ-фильтруемым (фильтруемым фильтром Фурье) на заданном наборе испытательных частот ω_i $(i = \overline{1,n})$, если существует время фильтрации δ^{***} такое, что выполняются неравенства

$$\left|l_i^\alpha(\delta)\right| \le \varepsilon_i^\alpha,\ \left|l_i^\beta(\delta)\right| \le \varepsilon_i^\beta,\ (i = \overline{1,n}),\ \delta \ge \delta^{***} \qquad (31)$$

в которых ε_i^α и ε_i^β - заданные числа.

Если это возмущение таково, что

$$\lim_{\delta\to\infty} l_i^\alpha(\delta) = \lim_{\delta\to\infty} l_i^\beta(\delta) = 0 \qquad (32)$$

то, оно называется строго ФФ-фильтруемым.

Очевидно, что ФФ-фильтруемость легко проверяется экспериментально.
Чтобы убедиться, что ФФ-фильтруемые возмущения существуют, рассмотрим класс функций

$$f(k) = \sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i\sin\omega_i^f hk,\quad (k = 1,2,...) \qquad (33)$$

где n_1, α_i и ω_i^f $(i = \overline{1,n_1})$ - неизвестные числа. В рассматриваемом случае выход объекта $\bar{y}(k)$ может быть представлен, как $\bar{y}(k) = y_b^f(k) + ae^f(k)$, где вынужденная составляющая

$$y_b^f(k) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i(\alpha_i^f\sin\omega_i^f hk + \beta_i^f\cos\omega_i^f hk)$$

в которой α_i^f, β_i^f $(i = \overline{1,n_1})$ - некоторые числа, а сопровождающая составляющая $ae^f(k)$ - исчезающая функция $(\lim_{k\to\infty} ae^f(k) = 0)$

Если частоты возмущения (33) и испытательного сигнала (3) не совпадают: $\omega_i^f \ne \omega_j$ $(i = \overline{1,n_1}, j = \overline{1,n})$, то легко проверить, что условие (32) выполняется и, следовательно, возмущение (33) - строго ФФ-фильтруемо. Если хотя бы одна частота возмущения совпадает с испытательной, например, $\omega_1^f = \omega_1$, тогда (33) ФФ-фильтруемо при условии

$$\frac{1}{\rho_1}\left|a_1\alpha_1^f\right| \le \varepsilon_1^\alpha,\quad \frac{1}{\rho_1}\left|a_1\beta_1^f\right| \le \varepsilon_1^\beta \qquad (34)$$

Утверждение 5.1 Если возмущение строго ФФ-фильтруемо, то оценки частотных параметров обладают свойством (8).

Доказательство. Сравнивая выражения (30) и (17) при $z_0 = 1$ и учитывая асимптотическую устойчивость объекта, которая означает, что $\lim_{k\to\infty} y^0(k) = 0$, заключаем, используя (11) и (32), что $\lim_{\delta\to\infty} e^{\alpha f}(\delta) = \lim_{\delta\to\infty} e^{\beta f}(\delta) = 0$ $(i = \overline{1,n})$ и поэтому выполняется (8).

Литература

[1] Wahlberg, Bo., and L. Ljung (1992). *"Hard Frequency-Domain Model Error Bounds from Least-Square Like Identification Techniques". IEEE Trans. of Autom. Control*, Vol. 37, no 7, p.p. 900-912.

[2] Milanese, M. (1994). *"Properties of least squares estimates in set member ship identification". 10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints,* Copenhagen. Vol. 2, p.p. 97-102.

[3] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. *"Адаптивное управление динамическими объектами"*. М., Наука, 1981.

[4] Эйкхофф П. *"Основы идентификации систем управления"*. М., Наука, 1975.

[5] Александров А.Г. *"Метод частотных параметров"*. А и Т, 1989, №12, с.3-15.

[6] Alexandrov, A.G. (1994). *"Finite-frequency Method of Identification". 10th IFAG Symposium on System Identification*. Preprints, Vol. 2.

[7] Pintelon, R., P. Guillaumc, Y. Rolain, J. Scboukens (1994). *"Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency domain - A survey". IEEE Trans, on Autom. Cont.*, Vol. 39, no 11, November.

[8] Александров В.А. *"Цифровое управление неопределённым объектом по измерениям частотных параметров"*. Канд. диссертация, ИСА РАН, 1995.

[9] Alexandrov, A.G. (1996). *"Finite-Frequency Identification: Model Validation and Bounded Test Signal". 13th World Congress of IFAC San-Francisco, USA, Preprints.* Vol. I, p.p. 393-398.

[10] Graebe, S.F. (1993). *"Robust and adaptive control of an unknown plant: A benchmark of new format". 12th world congress of IFAC Sydney*, Vol. 3, p.p. 165-170.