© 2009 г. А. Г. Александров, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НЕГРУБОСТИ[1]

Исследуются системы с малыми запасами устойчивости по фазе и модулю (негрубые системы). Получены условия для корней и коэффициентов характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой негрубой системы. Используя эти условия найдены границы областей размещения полюсов модального управления, обеспечивающего грубость системы.

1. Введение

В исследованиях по анализу устойчивости систем управления при параметрических возмущениях можно выделить два направления.

В первом направлении, которому посвящена эта работа, используются запасы устойчивости по фазе (φ) и модулю (L) [1], которые определяются на основе параметрически невозмущенной системы. Запасы устойчивости, которые могут быть определены экспериментально, как правило, проверяются при проектировании и испытаниях систем управления [2]. Малые их значения по сравнению с допустимыми ($\varphi \geqslant 45^o, L \geqslant 2$) являются признаком того,что система может потерять устойчивость при малых отклонениях параметров объекта от расчетных значений.

Во втором направлении возмущения описываются заданным множеством возможных значений параметров объекта управления, и если система сохраняет устойчивость при всех параметрах из этого множества, то она называется робастно устойчивой. Часто это множество описывается интервалами возможных значений параметров и ищутся оценки границ этих интервалов. Большое число работ и, в частности, монографии [3-4] посвящены этому направлению. Однако, ответ на вопрос, является ли система робастно устойчивой, сталкивается с серьезными трудностями.

На качественном уровне связь этих направлений выражается в том,что малые запасы устойчивости по сравнению с допустимыми являются признаком того,что интервалы робастной устойчивости пренебрежимо малы по сравнению с номинальными значениями параметров.

В этой работе рассматриваются системы, запасы устойчивости которых меньше допустимых. Такие системы называются негрубыми. Задача состоит в том, чтобы найти соотношения для корней и коэффициентов характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой негрубой системы. Полученные соотношения названы алгебраическими условиями негрубости. Для них найдены границы областей размещения полюсов модального управления, обеспечивающего грубость системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему, описываемую уравнениями

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-08-01177 и грант № 05-01-00114).

$$y^{(n)}+\bar{d}_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+\bar{d}_0 y=\bar{k}_m u^{(m)}+\ldots+\bar{k}_0 u,\ \ m<n, \tag{1}$$

$$u^{(n_c)}+\bar{g}_{n_c-1}u^{(n_c-1)}+\ldots+\bar{g}_0 u=\bar{r}_{m_c}y^{(m_c)}+\ldots+\bar{r}_0 y,\ \ m_c\leqslant n_c, \tag{2}$$

где $y(t)$-измеряемый выход объекта (1), $u(t)$- управление, формируемое регулятором (2), коэффициенты системы имеют вид

$$\begin{gathered}\bar{d}_i=d_i+\Delta d_i,\bar{k}_j=k_j+\Delta k_j,\bar{g}_p=g_p+\Delta g_p,\\ \bar{r}_q=r_q+\Delta r_q,i=\overline{0,n-1},j=\overline{0,m},p=\overline{0,n_c},q=\overline{0,m_c},\end{gathered} \tag{3}$$

где d_i ,k_j ,g_p , r_q ($i=\overline{0,n-1},j=\overline{0,m},p=\overline{0,n_c},q=\overline{0,m_c}$)-известные числа, называемые номинальными (расчетными) значениями коэффициентов системы, Δd_i,Δk_j,Δg_p,Δr_q, $i=\overline{0,n-1},j=\overline{0,m},p=\overline{0,n_c},q=\overline{0,m_c}$ –неизвестные числа (параметрические возмущения).

Параметрически невозмущенная система записывается как

$$d(s)y=k(s)u, \tag{4}$$

$$g(s)u=r(s)y, \tag{5}$$

где $d(s)=s^n+\sum_{i=0}^{n-1}d_is^i$, $k(s)=\sum_{i=0}^{m}k_is^i$, $g(s)=\sum_{i=0}^{n_c}g_is^i$, $r(s)=\sum_{i=0}^{m_c}r_is^i$, s-символ дифференцирования либо символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях. Ее характеристический полином записывается как

$$\psi(s)=d(s)g(s)-k(s)r(s)=s^{n_s}+\sum_{i=0}^{n_s-1}\psi_is^i. \tag{6}$$

Характеристический полином разомкнутой системы, являющийся произведением характеристических полиномов объекта (4) и регулятора (5), имеет вид

$$\varphi(s)=d(s)g(s)=s^{n+n_c}+\sum_{i=0}^{n+n_c-1}\varphi_is^i, \tag{7}$$

а соответствующая передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$w(s)=-\frac{k(s)}{d(s)}\frac{r(s)}{g(s)}. \tag{8}$$

Предполагается, что числитель и знаменатель этой функции не имеют общих корней.

Запасы по фазе и модулю определяются по передаточной функции (8). Их допустимые значения (в частности, $\varphi=45^o,L=2$) получены эмпирически на основе многолетнего опыта проектирования и эксплуатации систем автоматического управления. Они являются неким постулатом теории автоматического управления.

Передаточная функция возвратной разности системы

$$v(s) = [1 + w(s)] = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} \tag{9}$$

служит для определения радиуса (r) запасов устойчивости системы:

$$r^2 = \inf_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} v(-j\omega)v(j\omega). \tag{10}$$

Радиус запасов устойчивости является обобщением понятий запасов устойчивости по фазе и модулю. Так, если $r = 0,75$, то запас по фазе $\varphi = 42°$, запас по модулю $L = 1,75$. При $r = 1$ $\varphi = 60°$, $L = 2$.

Заметим, что выражение (10) дает также "радиус запасов устойчивости" неустойчивой системы, и поэтому далее при использовании этого выражения подразумеваются только асимптотически устойчивые системы.

Определение 1. Система (1),(2) называется негрубой, если для ее радиуса запасов устойчивости выполняется неравенство

$$r < r^*, \tag{11}$$

где $r^* = 0,75$, и грубой, когда

$$r \geqslant r^*. \tag{12}$$

Неравенство (11)является частотным условием негрубости, так как для его проверки необходимы частотные характеристики системы.

Условия для корней и коэффициентов полиномов $\psi(s)$ и $\varphi(s)$, при которых выполняются неравенства (11), будем называть алгебраическими условиями негрубости.

Задача состоит в том, чтобы найти такие условия.

3. Условия негрубости системы

Запишем характеристические полиномы (6),(7) как

(13)
$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{a_1}(s + s_i) \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}(s^2 + 2\xi_i s_i s + s_i^2), \quad s_i > 0, \quad i = \overline{a_1 + 1, a_1 + a_2}, \quad a_1 + 2a_2 = n + n_c,$$

(14)
$$\psi(s) = \prod_{i=1}^{a_3}(s + p_i) \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4}(s^2 + 2\zeta_i p_i s + p_i^2), \quad p_i > 0, \quad i = \overline{a_3 + 1, a_3 + a_4}, \quad a_3 + 2a_4 = n_s,$$

где $\xi_i, i = \overline{a_1 + 1, a_1 + a_2}$, и $\zeta_j, j = \overline{a_3 + 1, a_3 + a_4}$-декременты затухания, абсолютные значения которых меньше единицы.

Корни этих полиномов, обозначаемые как $\tilde{s}_i, i = \overline{1, n + n_c}$ и $\tilde{p}_j, j = \overline{1, n_s}$, имеют вид

$$\begin{gathered} \tilde{s}_i = -s_i, i = \overline{1, a_1}, \\ \tilde{s}_{a_1+2i-1} = (-\xi_{a_1+i} - j\sqrt{1 - \xi_{a_1+i}^2})s_{a_1+i}, \tilde{s}_{a_1+2i} = (-\xi_{a_1+i} + j\sqrt{1 - \xi_{a_1+i}^2})s_{a_1+i}, \\ i = \overline{1, a_2}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\tilde{p}_i = -p_i, i = \overline{1, a_3},$$

(16) $$\tilde{p}_{a_3+2i-1} = (-\zeta_{a_3+i} - j\sqrt{1-\zeta^2_{a_3+i}})p_{a_3+i}, \tilde{p}_{a_3+2i} = (-\zeta_{a_3+i} + j\sqrt{1-\zeta^2_{a_3+i}})p_{a_3+i},$$
$$i = \overline{1, a_4}.$$

Нетрудно видеть, что

(17) $$|\tilde{s}_{a_1+2i-1}| = |\tilde{s}_{a_1+2i}| = |s_{a_1+i}|, (i = \overline{1, a_2}), \quad |\tilde{p}_{a_3+2i-1}| = |\tilde{p}_{a_3+2i}| = |p_{a_3+i}|, i = \overline{1, a_4},$$

Сформируем с учетом выражений (13)-(17) самосопряженную функцию возвратной разности

(18)
$$v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{\varphi(-j\omega)\varphi(j\omega)} = \frac{\prod_{i=1}^{a_3}(\omega^2+p_i^2)\prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4}\left[(\omega^4 - 2p_i^2(1-2\zeta_i^2)\omega^2 + p_i^4\right]}{\prod_{i=1}^{a_1}\left[(\omega^2+s_i^2)\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}(\omega^4 - 2s_i^2(1-2\xi_i^2)\omega^2 + s_i^4\right]}.$$

Рассмотрим системы, у которых степень полинома $\psi(s)$ удовлетворяет неравенству

(19) $$n_s < n + n_c.$$

Такие системы возникают при равенстве коэффициентов при старших степенях полиномов $d(s)g(s)$ и $k(s)r(s)$ выражения для характеристического полинома системы, которые взаимно уничтожаются, что приводит к неравенству (19).

Утверждение 1. Если для степеней характеристических полиномов выполняется неравенство (19), то система (1),(2) является негрубой: $r = 0$.

Доказательство. При условии (19) из выражения (18) следует, что при $\omega = \infty$

(20) $$v(-j\infty)v(j\infty) = 0$$

и поэтому $r = 0$.

Далее будем полагать

(21) $$n_s = n + n_c.$$

Ниже приводятся утверждения 2-5, которые дают достаточные условия негрубости. Это означает, что если ни одно из них не выполняется , то нельзя сделать заключение о грубости или негрубости системы.

Утверждение 2. Если произведение квадратов модулей корней замкнутой системы в r^{*2} раз меньше аналогичного произведения корней разомкнутой системы:

(22) $$\prod_{i=1}^{a_3}\tilde{p_i}^2\prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4}|\tilde{p}_i|^4 < r^{*2}\prod_{i=1}^{a_1}\tilde{s_i}^2\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}|\tilde{s}_i|^4,$$

то система (1),(2) является негрубой: $r < r^*$.

Доказательство. При $\omega = 0$ функция (18) принимает значение

$$|v(j0)|^2 = \frac{\prod_{i=1}^{a_3} p_i^2 \prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4} p_i^4}{\prod_{i=1}^{a_1} s_i^2 \prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2} s_i^4}, \tag{23}$$

которое с учетом равенств (17) доказывает утверждение.

Рассмотрим полиномы с комплексными корнями, входящими в числитель функции (18),

$$q_i(\omega^2) = (\omega^4 - 2p_{a_3+i}^2(1 - 2\zeta_{a_3+i}^2)\omega^2 + p_i^4), \quad i = \overline{1, a_4}. \tag{24}$$

Каждый из этих полиномов достигает минимума на частотах

$$\omega_i = p_{a_3+i}(1 - 2\zeta_{a_3+i}^2)^{1/2}, \quad i = \overline{1, a_4}. \tag{25}$$

В частности, на частоте ω_1

$$|v(j\omega_1)|^2 = \frac{4\zeta_{a_3+1}^2 p_{a_3+1}^4 (1-\zeta_{a_3+1}^2) \prod_{i=1}^{a_3}(\omega_1^2+p_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1}(\omega_1^2+s_i^2)} \frac{\prod_{i=a_3+2}^{a_3+a_4}(\omega_1^4-2p_i^2(1-2\zeta_i^2)\omega_1^2+p_i^4)}{\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}(\omega_1^4-2s_i^2(1-2\xi_i^2)\omega_1^2+s_i^4)}. \tag{26}$$

Из этого выражения следует, что всегда существует число $\zeta_{a_3+1}^*$ такое, что $|v(j\omega_1)| < r^*$. Аналогично находим числа $\zeta_{a_3+i}^*$, $i = \overline{2, a_4}$.

Таким образом доказано следующее.

Утверждение 3. Если характеристические полиномы системы не имеют общих комплексных корней:

$$\tilde{p}_i \neq \tilde{s}_k, k = \overline{a_1 + 1, a_1 + a_2}, i = \overline{a_3 + 1, a_3 + a_4} \tag{27}$$

и для декрементов затухания замкнутой системы выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\zeta_{a_3+i} < \zeta_{a_3+i}^*, \quad i \in \overline{1, a_4}, \tag{28}$$

то система (1),(2) является негрубой: $r < r^*$.

Пусть характеристический полином разомкнутой системы содержит доминирующий коэффициент, который определяется следующим образом.

Определение 2. Коэффициент $\varphi_f, \quad f \in \overline{0, n_s}$ называется доминирующим, если

$$\begin{array}{l} \frac{|\varphi_i|}{|\varphi_f|} \leqslant \eta, \quad \frac{|\psi_j|}{|\varphi_f|} \leqslant \eta, \quad f \in \overline{0, n_s}, \;\; 0 < \eta < 1, \\ i = 0, 1, ..., f-1, f+1, ..., n_s, j = 0, ..., n_s, \end{array} \tag{29}$$

где φ_i и $\psi_i, \quad i = \overline{1, n_s}$- коэффициенты полиномов $\varphi(s) = \sum_0^{n_s} \varphi_i s^i$ и $\psi(s) = \sum_0^{n_s} \psi_i s^i$.

Введем понятие степени доминирования.

Для этого запишем самосопряженные характеристические полиномы.

$$a(\omega^2) = \psi(-j\omega)\psi(j\omega) = \sum_{p=0}^{n_s} a_{2p}\omega^{2p} \;\; , b(\omega^2) = \varphi(-j\omega)\varphi(j\omega) = \sum_{p=0}^{n_s} b_{2p}\omega^{2p}, \tag{30}$$

где

(31)

$$a_{2p} = \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p}\psi_i\psi_j, b_{2p} = \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p}\varphi_i\varphi_j, \quad \sigma_p = \left\{i, j : \;\; i + j = 2p, \;\; i, j = \overline{0, n_s}\right\}.$$

Введем числа

$$c_a = \sum_{0}^{n_s} a_{2p}, \quad c_b = \sum_{0}^{n_s} b_{2p}. \tag{32}$$

Определение 3. Число

$$\rho_f = \frac{c_a}{c_b}, \quad f \in \overline{0, n_s} \tag{33}$$

называется степенью доминирования коэффициента $\varphi_f, \quad f \in \overline{0, n_s}$.

Утверждение 4. Если для степени доминирования коэффициента $\varphi_f, \quad f \in \overline{0, n_s}$ характеристического полинома разомкнутой системы выполняется неравенство

$$\rho_f < r^{*2}, \quad f \in \overline{0, n_s}, \tag{34}$$

то система является негрубой: $r < r^*$.

Доказательство.

Самосопряженная функция возвратной разности с учетом выражений (30) принимает вид

$$v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{\varphi(-j\omega)\varphi(j\omega)} = \frac{\sum_{p=0}^{n_s} a_{2p}\omega^{2p}}{\sum_{p=0}^{n_s} b_{2p}\omega^{2p}}. \tag{35}$$

При $\omega = 1$ получим равенство

$$v(-1j)v(1j) = \frac{c_a}{c_b}. \tag{36}$$

Из определения 3 и неравенства (34) следует

$$v(-1j)v(1j) = \rho_f < r^{*2}. \tag{37}$$

Поэтому $r^2 < r^{*2}$ и, таким образом, утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристический полином разомкнутой системы содержит доминирующий корень.

Утверждение 5. Если корни характеристических полиномов вещественные и удовлетворяют условиям

$$|\tilde{p}_i| > |\tilde{s}_i|, i = \overline{1, n_s - 1}, \quad |\tilde{s}_{n_s}| > |\tilde{p}_{n_s}| > \max(|\tilde{p}_1|, ..., |\tilde{p}_{n_s-1}|) \tag{38}$$

и при этом

$$|\tilde{s}_{n_s}| > \frac{\sqrt{2^{n_s}}|\tilde{p}_{n_s}|}{r^*}, \tag{39}$$

то система (1),(2) является негрубой: $r < r^*$.

Доказательство. Функция (18) записывается для вещественных корней как

$$|v(j\omega)|^2 = \frac{\left(\omega^2 + p_{n_s}^2\right)\prod_{i=1}^{n_s-1}(\omega^2 + p_i^2)}{\left(\omega^2 + s_{n_s}^2\right)\prod_{i=1}^{n_s-1}(\omega^2 + s_i^2)}. \tag{40}$$

При $\omega = p_{n_s}$ эта функция принимает значение

$$|v(jp_{n_s})|^2 = \frac{2p_{n_s}^2\prod_{i=1}^{n_s-1}(p_{n_s}^2 + p_i^2)}{(p_{n_s}^2 + s_{n_s}^2)\prod_{i=1}^{n_s-1}(p_{n_s}^2 + s_i^2)}. \tag{41}$$

Из (38) следуют неравенства

$$\prod_{i=1}^{n_s-1}(p_{n_s}^2 + p_i^2) \leqslant 2^{(n_s-1)}p_{n_s}^{2(n_s-1)},$$

$$\prod_{i=1}^{n_s-1}(p_{n_s}^2 + s_i^2) \geqslant p_{n_s}^{2(n_s-1)},$$

используя которые, получим соотношения

$$|v(jp_{n_s})|^2 \leqslant \frac{2^{n_s}p_{n_s}^2}{p_{n_s}^2 + s_{n_s}^2} \leqslant \frac{2^{n_s}p_{n_s}^2}{s_{n_s}^2}, \tag{42}$$

и тогда неравенство (39) утверждения следует из выражения

$$\frac{2^{n_s}p_{n_s}^2}{s_{n_s}^2} < r^{*2}. \tag{43}$$

4. Свойства систем с регуляторами по состоянию

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему с регулятором по состоянию

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = kx, \tag{44}$$

где $x(t) \in R^n$-измеряемый вектор состояния объекта, матрица A и вектора b и k известны.

Эти уравнения нетрудно представить как следующий частный случай системы (4) и (5):

$$d(s)y = u, \quad u = r(s)y, \tag{45}$$

где $y(t)$-известная линейная функция измеряемого вектора состояний, $d(s) = det(Is - A)$.

Характеристический полином системы и ее передаточная функция имеют вид

$$\psi(s) = \det(Is - A + bk) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1}\psi_i s^i, \quad w(s) = -k(Is - A)^{-1}b, \tag{46}$$

где I- единичная матрица. Они связаны известным выражением

$$\psi(s) = d(s)(1 + w(s)), \tag{47}$$

которое нетрудно получить, если преобразовать уравнения (44) по Лапласу и найти определитель матрицы полученных уравнений, состоящей из четырех блоков.

Самосопряженная функция возвратной разности имеет в рассматриваемом случае, когда $\varphi(s) = d(s)$ и $n_s = n$, вид

$$v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{\psi(-j\omega)\psi(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)}. \tag{48}$$

Определение 4. Если для корней системы и объекта выполняются условия

$$\tilde{p}_i = \tilde{s}_i\alpha, \quad i = \overline{1,n}, \quad \alpha > 0, \tag{49}$$

то будем называть управление по состоянию *замедляющим*, если $\alpha < 1$, и *ускоряющим*, когда $\alpha > 1$. Эти названия связаны с тем, что в случае вещественных, некратных корней характеристических полиномов системы и объекта, параметр α является масштабом времени протекающих в них процессов. Так, при $\alpha < 1$ процессы в системе протекают в α раз медленнее, чем в объекте, а при $\alpha > 1$ –в α раз быстрее.

Свойство 1. Управление по состоянию не может замедлить процессы в объекте с параметром

$$\alpha = (r^*)^{\frac{1}{n_s}} \tag{50}$$

без потери грубости.

Доказательство. Оно является простым следствием утверждения 2. Действительно, подставляя выражения (49) в условие (22), получим условие (50) для параметра α

$$\alpha^{2n_s} \leqslant r^{*2}. \tag{51}$$

Свойство 2. Всегда существует ускоряющее управление по состоянию.

Доказательство. Будем искать вектор k такой, чтобы выполнялось тождество

$$\psi(s) = \mu(s), \tag{52}$$

где $\mu(s)$ -полином степени n с заданными отрицательными корнями:

$$\mu(s) = \prod_{i=1}^{n}(s + m_i), \quad m_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{53}$$

такими, что

$$m_i > |\tilde{s}_i|, i = \overline{1,n}. \tag{54}$$

Выражение (48) принимает при условии (52) вид

$$|v(j\omega)|^2 = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\omega^2 + m_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1}(\omega^2 + s_i^2)\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}(\omega^4 - 2s_i(1 - 2\zeta_i^2)\omega^2 + s_i^4)}. \tag{55}$$

Так как $(\omega^4 - 2s_i(1-2\zeta_i^2)\omega^2 + s_i^4) \leqslant (\omega^4 + s_i^4)$, то для всех ω

$$|v(j\omega)|^2 \geqslant \frac{\prod_{i=1}^n(\omega^2+m_i^2)}{\prod_{i=1}^{a_1}(\omega^2+s_i^2)\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}(\omega^4+s_i^4)} \geqslant 1. \tag{56}$$

Свойство 2 было получено в [6] для случая, когда число комплексных полюсов полинома $\mu(s)$ равно числу комплексных корней характеристического полинома объекта.

Свойство 3. Управление по состоянию не может обеспечить динамику системы, сколь угодно близкую к колебательной границе устойчивости, без потери ее грубости.

Доказательство. Оно следует из утверждения 3.

5. Модальное управление

5.1. Управление по состоянию. Области негрубого модального управления

Рассмотрим систему (44), вектор k которой найден из тождества (52), где $\mu(s) = \sum_i^n \mu_i s^i$- модальный полином с заданными вещественными отрицательными корнями (полюсами, модами) $\tilde{m}_i = -m_i, i = \overline{1,n}$.

Из доказательства свойства 2 следует

Утверждение 6. Для того чтобы система (44) с модальным управлением была грубой, достаточно выбрать полюса модального полинома из условий

$$|\tilde{m}_i| > |\tilde{s}_i|, i = \overline{1,n}. \tag{57}$$

Следствием утверждений 2 и 4 является следующее.

Утверждение 7. Если корни $\tilde{m}_i, \quad i = \overline{1,n}$ модального полинома $\mu(s)$ таковы, что выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{a_3}\tilde{m}_i{}^2\prod_{i=a_3+1}^{a_3+a_4}|\tilde{m}_i|^4 < r^{*2}\prod_{i=1}^{a_1}\tilde{s}_i{}^2\prod_{i=a_1+1}^{a_1+a_2}|\tilde{s}_i|^4,\\ a_1+2a_2 = a_3+2a_4 = n,\end{gathered} \tag{58}$$

либо степень доминирования любого из коэффициентов модального полинома

$$\rho_f < r^{*2}, \tag{59}$$

где

$$\begin{gathered}\rho_f = \tfrac{c_a}{c_b},\ \ f \in \overline{0,n},\ \ c_a = \sum_{p=0}^n\sum_{\sigma_p}(-1)^{i+p}\mu_i\mu_j,\ \ c_b = \sum_{p=0}^n\sum_{\sigma_p}(-1)^{i+p}d_id_j,\\ \sigma_p = \left\{i,j:\ \ i+j=2p,\ \ i,j=\overline{0,n_s}\right\},\end{gathered} \tag{60}$$

то система (1),(2) является негрубой: $r < r^*$.

Неравенства (58) и (60) выделяют области коэффициентов модального полинома, при которых модальное управление приводит к негрубой системе.

5.2. Управление по выходу

Рассмотрим систему (4),(5)

$$d(s)y = k(s)u,\ \ g(s)u = r(s)y, \tag{61}$$

регулятор которой находится с помощью тождества Безу:

$$d(s)g(s) - k(s)r(s) = e(s)\mu(s), \tag{62}$$

где полином $e(s) = \prod_{i=1}^{n}(e_i\eta s + 1)$ служит для обеспечения условия $(m_c \leqslant n_c)$ реализуемости регулятора, $e_i, \;\; i = \overline{1, n-1}$– заданные положительные числа, η–достаточно малое положительное число, такое, что $(e_i\eta)^{-1} > \max(m_1, ..., m_n), \;\; i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим частный случай структуры полинома $k(s)$ объекта, когда $m = 0$.

Утверждение 8. Если полином объекта $k(s) = k_0$, а корни полинома $\mu(s)$ удовлетворяют неравенствам (54), в котором $\tilde{s}_i$ -корни полинома $d(s)$, то существует достаточно малое положительное число η такое, что система (61) является грубой: $r > r^*$.

Доказательство. Самосопряженная функция возвратной разности имеет вид

$$v(-s)v(s) = \frac{e(-s)e(s)\mu(-s)\mu(s)}{g(-s)g(s)d(-s)d(s)} \tag{63}$$

В Приложении доказано следующее свойство тождества Безу: если полином объекта $k(s) = k_0$, а число η достаточно мало, то полином регулятора равен

$$g(s) = e(s) + 0(\eta, s), \tag{64}$$

где $0(\eta, s)$ -полином с коэффициентами, исчезающими вместе с η.

Подставляя это выражение в (63), заключаем на основе свойства 2 о грубости системы.

6. Ограничения полинома, формирующего все множество стабилизирующих регуляторов

Множество всех регуляторов, стабилизирующих объект (1), описывается [3] передаточной функцией

$$w_c(s) = \frac{r^0(s) - d(s)q(s)}{g^0(s) - k(s)q(s)}, \tag{65}$$

в которой полиномы $r^0(s)$ и $g^0(s)$ находятся как решение тождества Безу

$$d(s)g^0(s) - k(s)r^0(s) = \mu(s), \tag{66}$$

где $\mu(s) = \sum_{i=0}^{n_\mu} \mu_i s^i$-полином , чьи корни имеют отрицательные вещественные части, а $q(s) = \sum_{i=0}^{n_q} q_i s^i$ -произвольный полином.

Для этих регуляторов функция возвратной разности имеет вид

$$v(s) = \frac{\mu(s)}{d(s)[g^0(s) - k(s)q(s)]}. \tag{67}$$

Пусть полином $\mu(s)$ задан. Требование грубости системы накладывает следующие ограничения на выбор коэффициентов полинома $q(s)$.

Из утверждения 1 следует ограничение на степень n_q полинома $q(s)$:

$$n_q \leqslant n_\mu - n - m. \tag{68}$$

Утверждение 2 ограничивает величину свободного коэффициента этого полинома:

$$(g_0^0 - k_0 q_0)^2 \leqslant \frac{\mu_0}{r^{*2} d_0^2}. \tag{69}$$

В соответствии с утверждением 5 коэффициенты полинома $q(s)$ не должны быть доминирующими. Для обеспечения этого требования достаточно проверить неравенство $\rho_f > r^{*2}$, в котором степень доминирования ρ_f вычисляется на основе полиномов $\psi(s) = \mu(s)$, а коэффициенты полинома $\varphi(s)$ находятся как коэффициенты знаменателя выражения (67):

$$\varphi_r = \sum\nolimits_{\sigma_1} d_i [g_j^0 - \sum\nolimits_{\sigma_2} k_i q_s], \quad r = \overline{0, n_\mu}, \quad \sigma_1 = \left\{i, j : \quad i + j = r, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n_\mu - n}\right\}, \quad \sigma_2 = \left\{i, s : \quad i + s = j, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, n_q}\right\}. \tag{70}$$

7. Примеры

Рассмотрим два примера негрубого модального управления по состоянию.

Эти примеры показывают , что если выполнено одно из достаточных условий негрубости утверждения 7, то система может терять асимптотическую устойчивость при недопустимо малых относительных изменениях параметров объекта управления (один процент в первом примере и половина процента во втором).

Пример 1 Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + u, \tag{71}$$

где $a_{21} = 2, \quad a_{22} = 1$. Корни его характеристического полинома: $\tilde{s}_1 = -1$, $\tilde{s}_2 = 2$.

Модальный полином с параметрами

$$m_1 = 0,1, \quad m_2 = 0,2 \tag{72}$$

имеет вид

$$\mu(s) = (s + m_1)(s + m_2) = s^2 + 0,3s + 0,02. \tag{73}$$

Нетрудно видеть, что выполняются неравенства (58).

Модальное управление имеет вид

$$u = -2,02x_1 - 1,3x_2. \tag{74}$$

(Запас устойчивости системы (71), (74): $r = 0,0101$.)

Запишем эту систему как

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 - 2x_1 = -1,3\dot{x}_1 - 2,02x_1.$$

Из этого выражения следует, что при параметрических возмущениях объекта, когда его коэффициент a_{21} отличается от расчетного (номинального) значения на 1%:$\bar{a}_{21} = a_{21} + 0.02$, система теряет асимптотическую устойчивость.

Пример 2. Пусть коэффициенты объекта (71) равны:

$$a_{21} = 0,01, \quad a_{22} = 50. \tag{75}$$

Характеристический полином объекта $\varphi(s) = s^2 + 50s + 0,01$.

Модальный полином имеет вид (73).

Нетрудно видеть, что коэффициент $\varphi_1 = 50$ является доминирующим, а степень его доминирования, определяемая по формулам (60), $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-4}$.

Модальное управление

$$u = -0,01x_1 + 49,7x_2. \tag{76}$$

(Запас устойчивости системы (71), (75), (76): $r = 0,0062$.)

Запишем эту систему как

$$\ddot{x_1} + 50\dot{x}_1 + 0,012x_1 = 49,7\dot{x_1} - 0,01x_1.$$

Из этого выражения следует, что при параметрических возмущениях объекта, когда его коэффициент a_{22} отличается от расчетного (номинального) значения на 0.5 %:$\bar{a}_{22} = a_{22} + 0,35$, система теряет асимптотическую устойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойство решений тождества Безу

Введем полином

$$\nu(s) = \prod_{i=1}^{n-1}(e_i\eta s + 1) = \sum_{i=0}^{n-1}\nu_i s^i = \sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{\nu}_i\eta^i s^i, \tag{П.1}$$

в котором коэффициенты $\widetilde{\nu}_i, i = \overline{1, n-1}$определяются заданными числами $e_i, i = \overline{1, n-1}$.

При $m = 0$ тождество (62) принимает вид

$$(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i)\sum_{i=0}^{n-1} g_i s^i - \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i = (\sum_{i=0}^{n-1}\nu_i s^i)(s^n + \sum_{i=0}^{n-1}\mu_i s^i) \tag{П.2}$$

Сравнивая в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях s, получим систему уравнений

(П.3)

$$\sum_{i=0}^{n} d_i g_{n+j-i} = \sum_{i=0}^{n}\mu_i\nu_{n+j-i}, \;\; j = \overline{0, n-1}, \quad r_p = \sum_{i=0}^{n} d_i g_{p-i} - \sum_{i=0}^{n}\mu_i\nu_{n+j-i}, \;\; p = \overline{0, n-1}.$$

Рассмотрим первую подсистему. Нетрудно видеть, что при $j = n-1$:$\sum_{i=0}^{n} d_i g_{2n-1-i} = \sum_{i=0}^{n}\mu_i\nu_{2n-1-i}$ и, следовательно, $g_{n-1} = \nu_{n-1}$;

при $j = n-2$: $g_{n-2} = \nu_{n-2} - \sum_{i=0}^{n} d_i g_{2n-2-i} - \sum_{i=0}^{n} \mu_i \nu_{2n-2-i} = \nu_{n-2} - d_{n-2}\nu_{n-1} + \mu_{n-1}\nu_{n-1}$ и т.д.

Учитывая, что $\nu_i = \widetilde{\nu}_i \eta^i, \ \ i = \overline{0, n-1}$, получим

$$g_0 = 1 + 0_{g0}(\eta), \ \ g_j = \widetilde{\nu}_j \eta^j + 0_{gj}(\eta), \ \ j = \overline{1, n-1}, \tag{П.4}$$

где $\lim_{\eta \to 0} \frac{0_{gj}(\eta)}{\eta^j} = 0, \ \ j = \overline{0, n-1}$.

Аналогично запишем выражения второй подсистемы. При $p = n-1$: $r_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} d_i g_{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n} \mu_i \nu_{n-1-i} = d_{n-1} g_0 - \mu_{n-1}\nu_0 + d_{n-2} g_1 - \mu_{n-2}\nu_1 + d_{n-3} g_2 - \mu_{n-3}\nu_2 + ... + d_0 g_{n-1} - \mu_0 \nu_{n-1}$;

при $p = n-2$: $r_{n-2} = \sum_{i=0}^{n} d_i g_{n-2-i} - \sum_{i=0}^{n} \mu_i \nu_{n-2-i} = d_{n-2} g_0 - \mu_{n-2}\nu_0 + d_{n-3} g_1 - \mu_{n-3}\nu_1 + ... + d_0 g_{n-2} - \mu_0 \nu_{n-2}$, и т.д.

при $p = 0$: $r_0 = d_0 g_0 - \mu_0 \nu_0$.

Из этих выражений следует, что

$$r_i = \widehat{r_i} + 0_{ri}(\eta), \ \ i = \overline{0, n-1}, \tag{П.5}$$

где $\lim_{\eta \to 0} 0_{ri}(\eta) = 0, \ \ i = \overline{0, n-1}$,

и поэтому равенство (64) справедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теории автоматического регулирования./Под ред. В.В.Солодовникова.М.: Машгиз, 1954.

2. *Ольденбургер Р.* Изображение частотных характеристик, стандарты и расчетные критерии // Частотные методы в автоматике. М.: ИЛ, 1957.

3. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и упрваление.М.:Наука, 2002.

4. *Bhattcharyya S.P.,H.Chapellat,L.H.Keel.*Robust Control.The Parametric Approach//Prentice Hall, 1995.

5. *Александров А.Г.* Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления// А и Т, 2007, No 8. с. 4-20.

6. *Честнов В.Н.* Модальное упраление одномерными объектами с учетом заданного радиуса запасов устойчивости // Тр. междунар. науч. конф. "Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения"Саратов: СГТУ,2000, с.159-164.