А. Г. Александров, д-р физ.-мат. наук

(Московский государственный институт стали и сплавов (технологический университет))

Конечно - частотная идентификация: определение границ испытательных частот[1]

Испытательный гармонический сигнал является основой метода конечно-частотной идентификации. Задание частот этого сигнала затруднено, так как они должны выбираться из диапазона собственных частот объекта, которые определяются коэффициентами объекта, подлежащими идентификации.
Предлагаются алгоритмы экспериментального определения границ собственных частот объекта.

1 Введение

Задача идентификации линейного объекта при неизвестных ограниченных возмущениях исследуется в нескольких направлениях, в числе которых метод рекурентных целевых неравенств [1] и различные варианты метода наименьших квадратов [2], [3]. Их алгоритмы используют выход объекта, который содержит две неопределенные компоненты: первая их них зависит от неизвестных коэффициентов объекта, вторая – от неизвестного возмущения. Последнее приводит к тому, что точность идентификации ограничена в принципе и зависит от реализовавшегося возмущения.

В методе конечно-частотной идентификации [4], [5] используется испытательный сигнал, который позволяет разделить упомянутые компоненты и получить необходимую точность идентификации, если возмущение удовлетворяет экспериментально проверяемым условиям ФФ - фильтруемости [5].

Традиционный частотный подход также подразумевает использование испытательного сигнала. Однако, в нём предполагается, что ошибки измерения частотных характеристик либо отсутствуют [6], либо они являются случайными числами [7], некоррелированными для различных испытательных частот. При этих условиях трудно определить класс возмущений и помех измерений, для которых этот подход дает желаемую точность идентификации.

При традиционном частотном подходе число испытательных частот должно быть бесконечно велико. Эта величина в конечно-частотном методе миниальна и равна размерности пространства состояний объекта, что приводит к проблеме выбора испытательных частот. Интуитивно ясно, что они должны выбираться из диапазона частот, на которых логарифмическая амплитудно - частотная характеристика объекта имеет изломы. Эти изломы определяются неизвестными коэффициентами объекта. Поэтому возникает задача определения границ этого диапазона.

[1]Статья является расширенным вариантом доклада [11] на третьей Азиатской конференции по автоматическому управлению в г. Шанхае (КНР).

2 Метод конечно-частотной идентификации. Устойчивые объекты

Рассмотрим полностью управляемый и асимптотически устойчивый объект, описываемый уравнением

$$d_n y^{(n)} + \cdots + d_1 \dot{y} + y = k_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + k_1 \dot{u} + k_0 u + f, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход, $u(t)$ – управляемый вход, $y^{(i)}$, $u^{(j)}$ $\left(i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,\gamma}\right)$ – производные этих функций, $f(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение. Коэффициенты d_i и k_j $(i=\overline{1,n} \;\; j=\overline{0,\gamma})$ – неизвестные числа, n и γ – известны, $\gamma < n$.

Задача идентификации состоит в том, чтобы найти оценки $\hat{d}_i$ и $\hat{k}_j$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ $\left(j = \overline{0,\gamma}\right)$ коэффициентов объекта такие, чтобы ошибки идентификации $\Delta d_i = d_i - \hat{d}_i$, $\Delta k_i = k_i - \hat{k}_i$ удовлетворяли требованиям

$$|\Delta d_i| \leq \varepsilon_i^d, \;\; |\Delta k_j| \leq \varepsilon_j^k, \;\; (\, i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{0,\gamma}) \tag{2}$$

в которых ε_i^d and ε_j^k $(i=\overline{1,n}\,,\; j=\overline{0,\gamma})$ – заданные числа.

Опишем метод конечно-частотной идентификации [4], [5], решающей эту задачу.

Набор $2n$ чисел

$$\alpha_k = \operatorname{Re} w(j\omega_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im} w(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где

$$w(s) = \frac{k_\gamma s^\gamma + \cdots + k_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + 1}. \tag{4}$$

называется *частотными параметрами* [8].

Их оценки можно определить экспериментально следующим образом: обьект (1) возбудим испытательным сигналом

$$u = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k (t - t_0), \qquad t \geq t_0, \tag{5}$$

в котором амплитуды ρ_k $(k = \overline{1,n})$ и испытательные частоты ω_k $(k = \overline{1,n})$ – заданные положительные числа. Будем полагать, что испытательные частоты кратны базовой частоте ω_b : $\omega_i = n_i \cdot \omega_b$, где n_i $(i = \overline{1,n})$ – целые числа. Выход объекта, возбужденного испытательным сигналом (5) прикладывается к фильтру Фурье:

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} y(t) \sin \omega_k (t - t_0) dt, \;\; \hat{\beta}_k = \beta_k(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} y(t) \cos \omega_k (t - t_0) dt \quad k = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где τ – время фильтрации, кратное базовому периоду $T_b = \dfrac{2\pi}{\omega_b}$.

Чтобы сформулировать условия сходимости оценок $\alpha_k(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ $(k = \overline{1,n})$ к истинным значениям, введем функции фильтруемости

$$\ell_k^{\alpha}(\tau)=\frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\bar{y}(t)\sin\omega_k(t-t_0)dt,\quad \ell_k^{\beta}(\tau)=\frac{2}{\rho_k\tau}\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\bar{y}(t)\cos\omega_k(t-t_0)dt\quad (k=\overline{1,n}) \tag{7}$$

в которых $\bar{y}(t)$ – "естественый" выход объекта, когда испытательный сигнал (5) отсутствует $(u(t)=0)$.

Утверждение 2.1. [4] Если возмущение $f(t)$ таково, что, начиная с некоторого момента $\tau=\tau^*$, выполняются условия

$$|\ell_k^{\alpha}(\tau)|\le\varepsilon_k^{\alpha},\quad \left|\ell_k^{\beta}(\tau)\right|\le\varepsilon_k^{\beta},\quad \tau\ge\bar{\tau},\quad k=\overline{1,n} \tag{8}$$

то существует момент времени фильтрации $\tau=\bar{\tau}^*>\tau^*$ такой, что ошибки фильтрации $\Delta\alpha_k(\tau)=\hat{\alpha}_k-\alpha_k$, $\Delta\beta_k(\tau)=\hat{\beta}_k-\beta_k$ удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta\alpha_k(\tau)|\le\varepsilon_k^{\alpha},\quad |\Delta\beta_k(\tau)|\le\varepsilon_k^{\beta},\quad k=\overline{1,n},\quad \tau>\bar{\tau}^*, \tag{9}$$

■

Возмущение, удовлетворяющее условиям (8) называется [4] *ФФ-фильтруемым.*

Это возмущение называется *строго ФФ - фильтруемым*, если $\lim\limits_{t\to\infty}\ell_k^{\alpha}(\tau)=\lim\limits_{t\to\infty}\ell_k^{\beta}(\tau)=0$, $(k=\overline{1,n})$. В этом случае ошибки фильтрации обладают свойством

$$\lim_{t\to\infty}\Delta\alpha_k(\tau)=\lim_{t\to\infty}\Delta\beta_k(\tau)=0. \tag{10}$$

Используя оценки частотных параметров можно найти оценки коэффициентов объекта. Действительно, из тождества $w(s)=\dfrac{k(s)}{d(s)}$ и выражений (3) следует система алгебраических линейных уравнений

$$\hat{k}(s_k)-(\alpha_k+j\beta_k)\hat{\bar{d}}(s_k)=\alpha_k+j\beta_k\quad (k=\overline{1,n}) \tag{11}$$

где $\hat{\bar{d}}(s)=\hat{d}(s)-1=\hat{d}_ns^n+\dots+\hat{d}_1s$, $\hat{k}(s)=\hat{k}_{\gamma}s^{\gamma}+\dots+\hat{k}_0$, $s_k=jw_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$

Утверждение 2.2 [8] Если объект (1) полностью управляем, то система (11) имеет единственное решение $\hat{d}_i=d_i$, $\hat{k}_j=k_j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,\gamma}$ и оно не зависит от выбора испытательных частот ω_i $(\omega_i\ne\omega_j\ (i\ne j),\ \omega_i\ne 0\ \ i=\overline{1,n})$. ■

Заменяя в уравнениях (11) частотные параметры α_k и β_k $k=\overline{1,n}$ их оценками, получим частотные уравнения идентификации

$$\hat{k}(s_k)-(\hat{\alpha}_k+j\hat{\beta}_k)\hat{\bar{d}}(s_k)=\hat{\alpha}_k+j\hat{\beta}_k\quad (k=\overline{1,n}). \tag{12}$$

Время идентификации (длительность фильтрации) $\tau=qT_b$ $(q=1,2,\dots)$ определяется, используя следующие необходимые условия сходимости идентификации

$$\begin{array}{l} |d_i(qT_b)-d_i[(q-1)T_b]|\le\varepsilon_i^d|d_i(qT_b)|\quad i=\overline{1,n},\\ |k_j(qT_b)-k_j[(q-1)T_b]|\le\varepsilon_j^k|k_j(qT_b)|\quad j=\overline{0,\gamma}\end{array}\quad q=1,2,\dots. \tag{13}$$

Алгоритм 2.1 (конечно-частотной идентификации) [4] состоит из следующих операций:

а) приложить выход объекта (1), возбужденного испытательным сигналом (5), ко входу фильтра Фурье (6),

б) измерить выходы фильтра Фурье в моменты qT_b ($q=1,2,\dots$),

в) решить для каждого $\tau = qT_b$ $(q = 1,2\dots)$ частотные уравнения (12) где $\hat{\alpha}_k = \alpha_k(qT_b)$, $\hat{\beta}_k=\beta_k(qT_b)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и найти оценки $d_i(qT_b)$, $k_j(qT_b)$ $(i=\overline{1,n}\ \ j=\overline{0,\gamma})$ коэффициентов объекта.

г) проверять необходимые условия (13) для каждого q , до тех пор, пока эти условия не выполнятся для некоторого $q=q_1$. ■

Чтобы убедиться, что оценки $d_i(q_1T_b)$ и $k_j(q_1T_b)$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{0,\gamma})$ удовлетворяют требованиям (2) используются частотные методы подтверждения модели [4].

3 Постановка задачи

В описанном алгоритме идентификации предполагается, что амплитуды и частоты испытательного сигнала (5) заданы. Однако их задание является сложной задачей. Так, точность идентификации зависит от выбора испытательных частот. Это связано с тем, что в частотных уравнениях (12) используются оценки частотных параметров вместо их истинных значений. Амплитуды испытательного сигнала определяются из условий "малости возбуждения", которое означает, что испытательное воздействие не должно сильно изменять естественный выход – $\bar{y}(t)$ – объекта. Эти условия имеют вид

$$|y(t)-\bar{y}(t)\leq \varepsilon_y, \qquad t\geq t_0 \tag{14}$$

где ε_y – заданное число.

Переходя к более точному описанию проблемы выбора испытательных частот, представим передаточную функцию объекта (1), где $k_0\neq 0$, как

$$w(s)=k\frac{\prod\limits_{i=1}^{p_3}(\check{T}_i s+1)\prod\limits_{i=1}^{p_4}(\check{\tilde{T}}_i^{\,2}s^2+2\check{\tilde{T}}_i s+1)}{\prod\limits_{i=1}^{p_1}(\bar{T}_i s+1)\prod\limits_{i=1}^{p_2}(\bar{\tilde{T}}_i^{\,2}s^2+2\bar{\tilde{T}}_i s+1)} \tag{15}$$

Пусть постоянные времени этих функций расположены в порядке убывания

$$\bar{T}_1>\bar{T}_2>\dots>\bar{T}_{p_1},\quad \bar{\tilde{T}}_1>\bar{\tilde{T}}_2>\dots>\bar{\tilde{T}}_{p_2},\quad |\check{T}_1|>|\check{T}_2|>\dots>|\check{T}_{p_3}|,\quad |\check{\tilde{T}}_1|>|\check{\tilde{T}}_2|>\dots>|\check{\tilde{T}}_{p_4}| \tag{16}$$

Определение 3.1 Числа

$$\bar{\omega}_i=\frac{1}{\bar{T}_i}\ \ (i=\overline{1,p_1}),\ \ \bar{\tilde{\omega}}_i=\frac{1}{\bar{\tilde{T}}_i}\ \ (i=\overline{1,p_2}),\ \ \check{\omega}_i=\frac{1}{|\check{T}_i|}\ \ (i=\overline{1,p_3}),\ \ \check{\tilde{\omega}}_i=\frac{1}{|\check{\tilde{T}}_i|}\ \ (i=\overline{1,p_4}) \tag{17}$$

называются *собственными частотами* объекта. ■

Если построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) объекта, то собственные частоты – это частоты, на которых эта ЛАЧХ имеет изломы.

Частоты $\omega_{н} = \min\left\{ \bar{\omega}_1,\ \bar{\bar{\omega}}_1,\ \check{\omega}_1,\ \check{\check{\omega}}_1 \right\}$, $\omega_{в} = \max\left\{ \bar{\omega}_{p_1},\ \bar{\bar{\omega}}_{p_2},\ \check{\omega}_{p_3},\ \check{\check{\omega}}_{p_4} \right\}$ называются *нижней* и *верхней границами* собственных частот, а интервал $[\omega_{н}, \omega_{в}]$ называется диапазоном собственных частот.

Интуитивно ясно что испытательные частоты должны выбираються из диапазона собственных частот. Более того, можно строго доказать, что, если испытательные частоты выбираются вне этого диапазона, то сколь угодно малые ошибки фильтрации могут приводить к нарушению требования (3) к точности идентификации. Поэтому проблема выбора испытательных частот сводится к следующей задаче.

Задача 3.1 Найти экспериментальный метод оценки верхней и нижней границ собственных частот объекта. ■

4 Нижняя граница испытательных частот

Нижняя граница определяется максимальной постоянной времени передаточной функции (15) и возможны следующие случаи $\omega_{н} = \bar{T}_1^{-1}$, $\omega_{н} = \bar{\bar{T}}_1^{\,-1}$, $\omega_{н} = |\check{T}_1|^{-1}$, $\omega_{н} = |\check{\check{T}}_1|^{-1}$. Рассмотрим, для простоты, только первый случай и для нахождения оценки $\omega_{н}$ проделаем следующие операции.

Эксперимент 4.1. Объект (1) возбудим испытательным сигналом

$$u(t) = \rho_1 \sin \omega_1 (t - t_0), \tag{18}$$

где $\omega_1 = \omega_1^{[1]}$ – достаточно малое число, выход объекта приложим ко входу фильтра Фурье (6) при $n=1$ и вычислим функцию

$$T_{н}(\omega_1,\ \tau) = -\frac{\beta_1(\tau)}{\omega_1 \alpha_1(\tau)}. \tag{19}$$

■

Утверждение 4.1 Функция (19) имеет следующую структуру

$$T_{н}(\omega_1,\ \tau) = T_{н} + \varepsilon_{н}(\omega_1, \tau), \tag{20}$$

где число

$$T_{н} = \bar{T}_1 + \sum_{i=2}^{p_1} \bar{T}_i + \sum_{i=1}^{p_2} 2\bar{\bar{T}}_i \bar{\bar{\zeta}}_i - \sum_{i=1}^{p_3} \check{T}_i - \sum_{i=1}^{p_4} 2\check{\check{T}}_i \check{\check{\zeta}}_i \tag{21}$$

а функция $\varepsilon_{н}(\omega_1, \tau)$ такова, что, если возмущение $f(t)$ строго ФФ-фильтруемо, то для любого сколь угодно малого заданного числа $\varepsilon_{н}^*$ существует достаточно малая частота ω_1 и достаточно большое время фильтрации τ^* такие, что

$$|\varepsilon_{н}(\omega_1,\ \tau)| \leq \varepsilon_{н}^*, \qquad \tau \geq \tau^* \tag{22}$$

Если $f(t)$ просто ФФ-фильтруемо, то число $\varepsilon_{н}^*$ зависит от чисел ε_k^α и ε_k^β $(k = \overline{1,n})$. ■

Доказательство этого утверждения приведено в приложении.

Из выражения (21) следует что ошибка оценивания $\varDelta T_1 = \bar{T}_1 - T_{\text{н}}$ тем меньше, чем больше $\bar{T}_1$ по сравнению с остальными постоянными времени передаточной функции (15).

Итак, искомая оценка нижней границы

$$\hat{\omega}_{\text{н}} = T_{\text{н}}^{-1}(\omega_1, \tau^*). \tag{23}$$

Для того, чтобы проверить малость ω_1 эксперимент 4.1 повторяется для $\omega_1 = \omega_1^{[2]} = \omega_1^{[1]}/2$ и вычисляется число $T_{\text{н}}(\omega_1^{[2]}, \tau^*)$. Если

$$\left| T_{\text{н}}(\omega_1^{[1]}, \tau^*) - T_{\text{н}}(\omega_1^{[2]}, \tau^*) \right| \leq \delta_T \left| T_{\text{н}}(\omega_1^{[2]}, \tau^*) \right| \tag{24}$$

где δ_T – заданное достаточно малое число, то $\hat{\omega}_{\text{н}} = \left[T_{\text{н}} \left(\omega_1^{[2]},\ \tau^* \right) \right]^{-1}$. Если условия (24) не выполняются, то эксперимент повторяется для $\omega_1 = \omega_1^{[3]} = \omega_1^{[2]}/2$ и т.д. Эти эксперименты должны дополнятся проверкой условий (8) ФФ-фильтруемости при $n=1$ и амплитуда ρ_1 находится из условия "малости возбуждения" (14).

5 Верхняя граница испытательных частот

Эта граница определяется минимальной постоянной времени передаточной функции (15). Возможны следующие случаи $\omega_{\text{в}} = \left(\bar{T}_{p_1} \right)^{-1}$, $\omega_{\text{в}} = \left(\bar{\tilde{T}}_{p_2} \right)^{-1}$, $\omega_{\text{в}} = \left(\check{T}_{p_3} \right)^{-1}$, $\omega_{\text{в}} = \left(\check{\tilde{T}}_{p_4} \right)^{-1}$. Рассмотрим первый случай.

Эксперимент 5.1 Возбудим объект (1) испытательным сигналом (18), где $\omega_1 = \omega_1^{[1]}$ – достаточно большое число, выход объекта приключим к фильтру Фурье (6) при $n=1$ и вычислим функции

$$T_{\text{в}}(\omega_1, \tau) = \frac{\alpha_1(\tau)}{\omega_1 \beta_1(\tau)}, \quad \text{если} (n - \gamma) - \text{четное число}, \tag{25}$$

$$\bar{T}_{\text{в}}(\omega_1, \tau) = -\frac{\beta_1(\tau)}{\omega_1 \beta_1(\tau)}, \quad \text{если} (n - \gamma) - \text{нечетное число}. \tag{26}$$

■

Утверждение 5.1 Функции $T_{\text{в}}(\omega_1,\tau)$ и $\bar{T}_{\text{в}}(\omega_1,\tau)$имеют структуру

$$T_{\text{в}}(\omega_1,\ \tau) = \hat{\omega}_{\text{в}}^{-1} + \varepsilon_{\text{в}}(\omega_1, \tau), \quad \bar{T}_{\text{в}}(\omega_1,\ \tau) = \hat{\omega}_{\text{в}}^{-1} + \bar{\varepsilon}_{\text{в}}(\omega_1, \tau), \tag{27}$$

в которой число

$$\hat{\omega}_{\text{в}} = \left(\bar{T}_{p_1} \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{p_1 - 1} \left(\bar{T}_i \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{p_2} 2\bar{\tilde{\zeta}}_i \left(\bar{\tilde{T}}_i \right)^{-1} - \sum_{i=1}^{p_3} \left(\check{T}_i \right)^{-1} - \sum_{i=1}^{p_4} 2\check{\tilde{\zeta}}_i \left(\check{\tilde{T}}_i \right)^{-1}, \tag{28}$$

а функции $\varepsilon_{\text{в}}(\omega_1, \tau)$ и $\bar{\varepsilon}_{\text{в}}(\omega_1, \tau)$ таковы, что если возмущение $f(t)$ строго ФФ - фильтруемо, то для любого сколь угодно малого заданного числа $\varepsilon_{\text{в}}^*$ существует достаточно большие частота ω_1 и время фильтрации τ^* такие, что

$$|\varepsilon_{\text{в}}(\omega_1, \tau)| \leq \varepsilon_{\text{в}}^*, \quad |\bar{\varepsilon}_{\text{в}}(\omega_1, \tau)| \leq \varepsilon_{\text{в}}^*, \quad \tau \geq \tau^*. \tag{29}$$

Если $f(t)$ просто ФФ-фильтруемо, то число $\varepsilon_{\text{в}}^{*}$ зависит от чисел ε_k^{α} и ε_k^{β} $(k=\overline{1,n})$. ■

Доказательство приведено в приложении.

Из выражения (28) следует, что ошибка $\Delta\omega_{\text{в}}=\omega_{\text{в}}-\hat{\omega}_{\text{в}}$ тем меньше, чем меньше постоянная времени $\bar{T}_{p_1}$ по сравнению с остальными постоянными времени передаточной функции (15).

Итак, искомая оценка верхней границы собственных частот объекта

$$\hat{\omega}_{\text{в}}=T_{\text{в}}^{-1}(\omega_1,\tau^*) \quad \text{либо} \quad \hat{\omega}_{\text{в}}=\bar{T}_{\text{в}}^{-1}(\omega_1,\tau^*) \tag{30}$$

Для того чтобы проверить, что частота ω_1 достаточно велика, эксперимент 5.1 повторяется для $\omega_1=\omega_1^{[2]}=2\omega_1^{[1]}$, и числа (25) или (26) сравниваются с числами, полученными при $\omega_1=\omega_1^{[2]}$. При этих экспериментах должны проверяться условия (8) и (14).

6 Неустойчивые объекты и помехи измерения

Рассмотрим случай, когда объект (1) неустойчив. Положительное число $s^*=\max\{\mathrm{Re}\, s_1,\ldots,\mathrm{Re}\, s_n\}$ где $s_i=(\overline{1,n})$ – корни полинома $d(s)$, называется *степенью неустойчивости объекта.* Пусть известна верхняя оценка C_0 этого числа, которая может быть найдена экспериментально.

Введем положительное число $\lambda\geq C_0$ $(C_0>s^*>0)$ и создадим физическое устройство, называемое $(-\lambda)$-блоком, которое умножает выход объекта $y(t)$ на функцию $e^{-\lambda(t-t_0)}$. Выход этого блока

$$\tilde{y}(t)=y(t)e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{31}$$

Очевидно, что объект с $(-\lambda)$-блоком асимптотически устойчив. Однако, если его возбудить испытательным сигналом (5), то реакция $\tilde{y}(t)$ будет, как и реакция на начальные условия, затухать, $(\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{y}(t)=0)$. В связи с этим дополним объект $(+\lambda)$-блоком, который умножает входной сигнал (5) на функцию $e^{\lambda(t-t_0)}$ и следовательно, входом объекта (1) служит [9] сигнал

$$\tilde{u}=u(t)e^{\lambda(t-t_0)} \tag{32}$$

В результате получим систему, состоящую из объекта (1), $(-\lambda)$ и $(+\lambda)$ - блоков, входом которой по прежнему является $u(t)$, а выходом служит $\tilde{y}(t)$.

Найдем ее передаточную функцию $\tilde{w}(s)=\tilde{y}(s)/u(s)$. Для этого разделим уравнение (1) на d_n и запишем его в форме Коши

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\tilde{u}+\boldsymbol{m}f, \quad y=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \tag{33}$$

где матрица A размером $n\times n$ и n-мерные вектора-столбцы $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{c}$ ("T" – символ транспонирования) строятся по коэффициентам d_i $(i=\overline{1,n})$ и k_i $(i=\overline{0,\gamma})$.

Введем вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}e^{-\lambda(t-t_0)}$. Тогда, с учетом обозначений (31) и (32) и выражения $\dot{\boldsymbol{x}}=\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}e^{\lambda(t-t_0)}+\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda e^{\lambda(t-t_0)}$ получим уравнения

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=(A-\lambda E)\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{b}u+\boldsymbol{m}e^{-\lambda(t-t_0)}f, \quad \tilde{y}=\boldsymbol{c}^T\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{34}$$

где E – еденичная матрица.

Соответствующая им передаточная функция

$$\begin{gathered}\tilde{w}(s)=\frac{\tilde{y}(s)}{u(s)}=\boldsymbol{c}^T\left[E(s+\lambda)-A\right]^{-1}\boldsymbol{b}=\\ =w(s+\lambda)=\frac{k(s+\lambda)}{d(s+\lambda)}=\frac{\tilde{k}(s)}{\tilde{d}(s)}=\frac{\tilde{k}_\gamma s^\gamma+\cdots+\tilde{k}_1 s+\tilde{k}_0}{s^n+\tilde{d}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\tilde{d}_1 s+\tilde{d}_0}\end{gathered} \tag{35}$$

Корни $\tilde{s}_i$ $(i=\overline{1,n})$ полинома $\tilde{d}(s)$ – левые. Действительно, так как $d(s_i)=0$ $(i=\overline{1,n})$, то корнями полинома $\tilde{d}(s)=d(s+\lambda)$ являются корни $\tilde{s}_i=-\lambda+s_i$ $(i=\overline{1,n})$. Из определения числа λ следует, что $\operatorname{Re}\tilde{s}_i<0$.

Таким образом, рассматриваемая система является неким асимптотически устойчивым "объектом", описываемым уравнением (34) и имеющим передаточную функцию (35).

Алгоритм идентификации этого "объекта" (когда испытательные частоты заданы) совпадает с алгоритмом (2.1), если в операции (a) заменить объект (1) объектом (34), а в фильтре Фурье (6) $y(t)$ заменить на $\tilde{y}(t)$. При этом, как показано в [9], ошибки фильтрации обладают свойством (10). Это означает, что возмущение $\tilde{f}(t)=e^{-\lambda(t-t_0}f(t)$ строго ФФ-фильтруемо. В результате операции (в) получим оценки $\tilde{d}_i(qT_b)$ и $\tilde{k}_j(qT_b)$ $(i=\overline{1,n})$, $(j=\overline{0,\gamma})$, используя которые вычислим искомые коэффициенты $d_i(qT_b)$ и $k_j(qT_b)$ $(i=\overline{1,n})$, $(j=\overline{0,\gamma})$, которые однозначно вычисляются по формулам, получаемым из равенств $\tilde{d}(s)=d(s+\lambda)$ и $\tilde{k}(s)=k(s+\lambda)$.

Переходя к задаче 3.1 для неустойчивых объектов, можно формально уточнить определение 3.1 собственных частот объекта, заменив в (17) постоянные времени $\tilde{T}_i$ и $\tilde{\tilde{T}}_j$ $(i=1,p_1)$, $(j=1,p_2)$ их модулями. Однако, поскольку идентифицируются (путем решения частотных уравнений (12)) коэффициенты передаточной функции (35), то определение 3.1 следует относить к этой передаточной функции.

Оценки нижней и верхней границ собственных частот "объекта" (34) находятся по формулам (23) и (30), используя результаты экспериментов 4.1 и 5.1, в которых объект (1) заменен "объектом" (34), а в фильтре Фурье (6) $y(t)$ заменено на $\tilde{y}(t)$.

Примечание 6.1 Решение задачи 3.1 для неустойчивых объектов часто затруднено из-за ограничений

$$|\tilde{u}(t)|\le\tilde{u}^*,\quad |y(t)|\le y^* \tag{36}$$

где $\tilde{u}^*$ и y^* – заданные числа, характеризующие допустимые значения входа и выхода объекта (1). Неравенства (36), ограничивают длительность экспериментов 4.1 и 5.1 и может случиться так, что время τ^* в выражениях (23) и (30) не достижимо. ■

Рассмотрим теперь случай, когда выход объекта (1) измеряется с шумом. В этом случае уравнения (1) дополняются выражением

$$\check{y}=y+\eta$$

где $\check{y}(t)$ – измеряемый выход, $\eta(t)$ – шум измерений, который, как и возмущение $f(t)$, является неизвестной, ограниченной функцией ($|\eta(t)|\le\eta^*$, где η^* – некоторое число).

Нетрудно показать, что алгоритм 2.1 и решение задачи 3.1 сохраняются, если в интегралах (6) и (7) заменить $y(t)$ на $\check{y}(t)$, а $\bar{y}(t)$ на $[\bar{y}(t)+\eta(t)]$.

7 Пример

Рассмотрим полностью управляемый асимптотически устойчивый объект, описываемый уравнением

$$d_3 \dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + y = k_1\dot{u} + k_0 u + f \tag{37}$$

с неизвестными коэффициентами и неизвестным ограниченным возмущением.

Задача состоит в определении оценок границ собственных частот.

Примечание 7.1 Испытуемый объект (37) описывается уравнением

$$0,2 \dddot{y} + 1,24\ddot{y} + 5,24\dot{y} + y = -0,4\dot{u} + k_0 u + f, \tag{38}$$

в котором возмущение

$$f(t) = a \ \mathrm{sign}\left[\sin\omega^f t\right] \tag{39}$$

где $a = 5$, а ω^f случайное число из интервала из интервала [3,5], изменяющееся каждый период на $\dfrac{2\pi}{\omega^f}$.

Объект (38) имеет передаточную функцию

$$w(s) = \frac{25(-0,4s+1)}{(5s+1)(s^2+6s+25)} \tag{40}$$

из хорошо известного примера [10].

Из (40) следует, что $\omega_{\text{н}} = 0.2$, $\omega_{\text{в}} = 5$. ■

Используя пакет АДАПЛАБ, были осуществлены следующие численные эксперименты.

Эксперимент 4.1 Объект (37) был возбужден испытательным сигналом $u(t) = 0.03\sin\omega_1 t$.

При $\omega_1 = \omega_1^{[1]} = 0.05$ и $\tau^{[1]} = 3750$ было получено $T_{\text{н}}(\omega_1^{[1]}, \tau^{[1]}) = 5.27$. При $\omega_1 = \omega_1^{[2]} = 0.0135$ и $\tau^{[2]} = 4800$ – значение $T_{\text{н}}(\omega_1^{[2]}, \tau^{[2]}) = 4.8$ и следовательно, оценка нижней границы $\hat{\omega}_{\text{н}} = 0.208$.

Эксперимент 5.1 Объект (37) был возбужден сигналом

$$u(t) = 1\sin\omega_1 t.$$

При $\omega_1 = \omega_1^{[1]} = 20$ и $\tau^{[1]} = 6.28$ было получено $T_{\text{в}}(\omega_1^{[1]}, \tau^{[1]}) = 0.095$. При $\omega_1 = \omega_1^{[2]} = 74$ $\tau^{[2]} = 3.14$ – значение $T_{\text{в}}(\omega_1^{[2]}, \tau^{[2]}) = 0.106$ и следовательно $\hat{\omega}_{\text{в}} = 9.4$.

Литература

[1] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.,* "Адаптивное управление динамическими объектами". *М.: Наука*, 1981.

[2] *Wahlberg, Bo., and L. Ljung.* "Hard Frequency-Domain Model Error Bounds from Least-Square Like Identification Techniques". *IEEE Trans. of Autom. Control* 1992, Vol. **37**, no **7**, p.p. 900-912.

[3] *Milanese, M.*. “Properties of least squares estimates in set member ship identification”. *10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints*, Copenhagen. 1994, Vol. **2**, p.p. 97-102.

[4] *Alexandrov, A.G.* “Finite-frequency identification and model validation of stable plant”. *14th World Congress of IFAC.* Preprints, Beijing, China, 1999, Vol. **H**, p.p. 295-301.

[5] *Александров А.Г.* ”Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении”, // *AuT, 2000*, 4, с.106-116.

[6] *Кардашов А.А., Корнюшин Л.В.* ”Определение параметров системы по экспериментальным заданным частотным характеристикам”. // *AuT*, 4, 1958, с.с. 335-345.

[7] *Pintelon, R., P. Guillaume, Y. Rolain and J. Schoukens* “Parametric Identification of Transfer Functions in the Frequency domain – A survey”. *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol. **39**, no **11**, November. 1994.

[8] *Александров А.Г.* “Метод частотных параметров”. // *AuT*, 1989, 12, с. 3-15.

[9] *Александров А.Г.* ”Частотное адаптивное управление. I” // *AuT*, 1994, 12, с.93-104.

[10] *Graebe, S.F.*. “Robust and adaptive control of an unknown plant: A benchmark of new format”. *12th World congress of IFAC Sydney*, 1993, Vol. III, p.p. 165-170.

[11] *Alexandrov A.G.* ”Finite-Frequency Identification: choice of Test Frequencies”, *Abstract of Proceedings of the* 3^{th} *Asian Control Conference*, July 4-7 2000, Shanghai, China, p. 324, *Proceedings of the* 3^{th} *Asian Control Conference*, p. 1703-1708 (on CD-ROM ISBN 7-900033-85-8 only).

Приложение

П.1. Доказательство утверждения 4.1

Идея подхода подхода к доказательству утверждения заключается в следующем: запишем передаточную функцию объекта (1) как

$$w(s) = \frac{1}{\bar{T}_1 s + 1} w_{un}(s), \tag{П.1}$$

где $w_{un}(s)$ передаточная функция, которая содержит оставшиеся постоянные времени и коэффициент k. Если объект (1) возбудить испытательным сигналом (18) с малой частотой ω_1 ($\omega_1 < \omega_н$), тогда его выход описывается достаточно точно уравнением

$$T_н \dot{y} + y = k_m u, \tag{П.2}$$

где постоянная времени $T_н$ близка к $\bar{T}_1$

Используя эту идею, найдем зависимость $T_н$ от постоянных времени объекта (1).

Частотные уравнения (12) для идентификации модели (П.2) имеют вид

$$k_m - (\hat{\alpha}_1 + j\hat{\beta}_1) T_н j\omega_1 = \hat{\alpha}_1 + j\hat{\beta}_1. \tag{П.3}$$

Это уравнение можно записать как систему

$$k_m + \omega_1 \hat{\beta}_1 T_{\text{н}} = \hat{\alpha}_1, \quad -\omega_1 \hat{\alpha}_1 T_{\text{н}} = \hat{\beta}_1,$$

и второе уравнение этой системы дает функцию (19).

Теперь используя передаточную функцию (15), найдем следующее выражение для частотных параметров (3)

$$\alpha_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{r_2} \ell_{2q}\omega_k^{2q}}{\sum\limits_{q=0}^{n} m_{2q}\omega_k^{2q}}, \quad \beta_k = \frac{\sum\limits_{q=0}^{r_1} \ell_{2q+1}\omega_k^{2q+1}}{\sum\limits_{q=0}^{n} m_{2q}\omega_k^{2q}} \qquad k = \overline{1,n}, \tag{П.4}$$

где $\ell_0 = k_0$, $\ell_1 = k_1 - k_0 d_1$, $\ell_2 = -k_2 d_0 + k_1 d_1 - k_0 d_2$, $\ldots$. Коэффициенты k_0 , k_1 , d_0 , $\ldots$ связанны с постоянными времени как

$$k_1 = \left(\sum_{i=1}^{p_3} \check{T}_1 + \sum_{i=1}^{p_4} 2\check{\check{T}}_i\check{\check{\xi}}_i\right) k, \quad d_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \bar{T}_i + \sum_{i=1}^{p_2} 2\bar{\bar{T}}_i\bar{\bar{\xi}}_i \quad k_0 = k \tag{П.5}$$

Представим

$$\alpha_1 = \alpha_1^{\text{н}} + \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1), \quad \beta_1 = \beta_1^{\text{н}} + \varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1), \tag{П.6}$$

где

$$\alpha_1^{\text{н}} = \ell_0, \quad \beta_1^{\text{н}} = \ell_1\omega_1. \tag{П.7}$$

Нетрудно проверить, что, используя (П.4) функции $\varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)$ и $\varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1)$ можно записать как

$$\varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1) = \omega_1^3 \varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1), \quad \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1) = \omega_1^2 \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1) \tag{П.8}$$

где $\varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)$ и $\varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1)$ ограниченные функции при $\omega_1 < \omega_{\text{н}}$.

Если обозначить $\delta_\alpha(\tau) = (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1)/\alpha_1$, $\delta_\beta(\tau) = (\hat{\beta}_1 - \beta_1)/\beta_1$ то оценки частотных параметров представляются в виде

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1[1+\delta_\alpha(\tau)] = [\alpha_1^{\text{н}} + \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)][1+\delta_\alpha(\tau)], \;\; \hat{\beta}_1 = \beta_1[1+\delta_\beta(\tau)] = [\beta_1^{\text{н}} + \varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1)][1+\delta_\beta(\tau)]. \tag{П.9}$$

Подставляя эти выражения в формулу (19), получим соотношение (20)

$$T_\ell(\omega_1, \tau) = -\frac{\beta_1^{\text{н}}}{\omega_1 \alpha_1^{\text{н}}} + \varepsilon_T^{\text{н}}(\omega_1, \tau), \tag{П.10}$$

в котором

$$\varepsilon_T^{\text{н}}(\omega_1,\tau) = -\frac{\beta_1^{\text{н}}\delta_\beta(\tau) + \varepsilon_\beta^{\text{н}}(\omega_1)[1+\delta_\beta(\tau)]}{\omega_1[\alpha_1^{\text{н}} + \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)][1+\delta_\alpha(\tau)]} + \frac{\beta_1^{\text{н}}}{\alpha_1^{\text{н}}}\,\frac{\{\alpha_1^{\text{н}}\delta_\alpha(\tau) + \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)[1+\delta_\alpha(\tau)]\}}{\omega_1[\alpha_1^{\text{н}} + \varepsilon_\alpha^{\text{н}}(\omega_1)][1+\delta_\alpha(\tau)]} \tag{П.11}$$

Используя (П.7) в первое слагаемое суммы (П.10) запишем как

$$T_{\text{н}} = -\frac{\ell_1}{\ell_0} = -\frac{k_1 - k_0 d_1}{k_0} = d_1 - \frac{k_1}{k_0}. \tag{П.12}$$

Отсюда с учётом (П.5) следует формула (21).

Неравенство (22) следует из (П.11), если учесть (9), (10) и (П.8).

П.2. Доказательство утверждения 5.1

Если объект (1) возбудить сигналом (18) с достаточно большой частотой ω_1 $(\omega_1 > \omega_в)$, тогда его выход достаточно точно описывается уравнением

$$T_в y^{(n-\gamma)} + y^{(n-\gamma-1)} = k_m u. \tag{П.13}$$

Частотные уравнения (12) для идентификации модели (П.13) имеют вид

$$k_m - (\hat{\alpha}_1 + j\hat{\beta}_1) T_в (j\omega_1)^{n-\gamma} = (\hat{\alpha}_1 + j\hat{\beta}_1)(j\omega_1)^{n-\gamma-1}. \tag{П.14}$$

Пусть, для простоты, $(n - \gamma)$ – чётное число, тогда уравнения для мнимой части (П.14) записываются как

$$-(-1)^{\frac{n-\gamma}{2}} \hat{\beta}_1 \omega_1^{n-\gamma} T_в = (-1)^{\frac{n-\gamma-2}{2}} \hat{\alpha}_1 \omega_1^{n-\gamma-1}, \tag{П.15}$$

Отсюда следует формула (25).

Представим оценки частотных параметров как

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1[1+\delta_\alpha(\tau)] = [\alpha_1^в + \varepsilon_\alpha^в(\omega_1)]\,[1+\delta_\alpha(\tau)],\ \hat{\beta}_1 = \beta_1[1+\delta_\beta(\tau)] = \left[\beta_1^в + \varepsilon_\beta^в(\omega_1)\right][1+\delta_\beta(\tau)], \tag{П.16}$$

где $\alpha_1^в = \dfrac{\ell_{2r_2}\omega_1^{2r_2}}{m(\omega_1)}$, $\varepsilon_\alpha^в(\omega_1) = \dfrac{\sum\limits_{q=0}^{r_2-1} \ell_{2q}\omega_1^{2q}}{m(\omega_1)}$, $\beta_1^в = \dfrac{\ell_{2r_1+1}\omega_1^{2r_1+1}}{m(\omega_1)}$, $\varepsilon_\beta^в(\omega_1) = \dfrac{\sum\limits_{q=0}^{r_1-1} \ell_{2q+1}\omega_1^{2q+1}}{m(\omega_1)}$,

$$m(\omega_1) = \sum_{q=0}^{n} m_{2q}\omega_1^{2q}, \quad r_2 = r_1 + 1. \tag{П.17}$$

Подставляя (П.16) и (П.17) в формулу (25) получим структуру (27) где

$$\hat{\omega}_в^{-1} = \frac{\alpha_1^в}{\omega_1\beta_1^в} = \frac{l_{2r_2}}{l_{2r_1+1}} = \frac{k_\gamma d_n}{-k_{\gamma-1}d_n + k_\gamma d_{n-1}},$$

Используя связь коэффициентов d_n, d_{n-1}, k_γ, $k_{\gamma-1}$ с постоянными времени получим (28). Доказательство неравенства (29) аналогично доказательству выражения (22), так как (12) ошибки аппроксимации обладают свойствами $\varepsilon_\alpha^в = \omega_1^{-2}\bar{\varepsilon}_\alpha^в(\omega_1)$, $\varepsilon_\beta^в = \omega_1^{-2}\bar{\varepsilon}_\beta^в(\omega_1)$, где $\bar{\varepsilon}_\alpha^в(\omega_1)$ и $\bar{\varepsilon}_\beta^в(\omega_1)$ ограниченные функции, когда $\omega_1 > \omega_в$.

Дом. адрес:
144003, Московская обл., г.Электросталь, ул.Корешкова, дом 6, кв. 16.
тел. (дом.): 8-(257)-4-49-21 Александров А.Г.