А. Г. Александров

ЧАСТОТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Электросталь 2009 г.

Александров А.Г. Частотное управление. Монография. г.Электросталь. 2009. – 635 с.

Аннотация

Книга посвящена новому направлению в автоматическом управлении объектами с неопределёнными параметрами. Оно исходит из частотных параметров объекта, получаемых экспериментально.

Построен метод частотных параметров для синтеза обычных и адаптивных регуляторов, обеспечивающих требуемую точность регулирования и слежения при ограниченных внешних возмущениях.

Изложение теории носит конструктивный характер и завершается процедурами проектирования регуляторов.

Книга предназначена для инженеров и учёных, занимающихся разработкой и исследованием систем автоматического управления.

Содержание

Предисловие **16**
Часть I. Введение в частотное управление **18**
1. Проблемы управления при неопределённых параметрах объекта и частотное управление **20**
1.1. Модели объектов 21
1.1.1. Типы объектов 21
1.1.2. Внешние возмущения и помехи 21
1.1.3. Свойства объектов 22
1.1.4. Границы параметров* 23
1.1.5. Многомерные объекты. Виды объектов 24
1.1.6. Структурные показатели и структурные свойства объектов 25
1.1.7. Регулирование и слежение 26
1.1.8. Переходные и установившиеся процессы 27
1.1.9. Методы синтеза регуляторов и уравнение качества 28
1.2. Частотное управление 32
1.2.1. Управление при неизвестных параметрах объекта 32
1.2.2. Частотнее параметры и их определение 33
1.2.3. Частотный метод идентификации 34
1.2.4. Метод ЛАЧХ 35
1.2.5. Метод частотных параметров 36
1.3. Частотное адаптивное управление 38
1.3.1. Пуск и останов объекта 38
1.3.2. Несамотождественные объекты 40
1.3.3. Структура адаптивного регулятора 40
1.3.4. Алгоритм частотного адаптивного управления 41
1.3.5. Многорежимные самотождественные объекты 43
1.3.6. Многорежимные несамотождественные объекты 44
Приложения к главе 1 . . . . . **46**
1.П. Параметрические возмущения систем автоматического управления **46**
1.П.1. Параметрические возмущения. Их уровни 46
1.П.2. Явление параметрической (аддитивной) компенсации 48
1.П.3. Неявная параметрическая (аддитивная) компенсация 51
1.П.4. Возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезируемых на основе методов пространства состояния 52
1.П.5. Системы с непосредственным устройством восстановления 52
1.П.6. Аналитически сконструированные системы 55

1.П.7. Модальное управление . . . 57
Заключение к главе 1 . . . **58**
2. Метод ЛАЧХ . . . **59**
2.1. Анализ устойчивости . . . 59
2.1.1. Уравнения ««вход-выход»» . . . 59
2.1.2. Анализ по параметрам . . . 60
2.1.3. Анализ по амплитудно-фазовой характеристике . . . 61
2.1.4. Структура передаточной функции . . . 63
2.1.5. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) . . . 64
2.1.6. Анализ по ЛАЧХ и ФЧХ . . . 66
2.2. Грубость . . . 69
2.2.1. Запасы устойчивости . . . 69
2.2.2. Запретная область . . . 70
2.2.3. Радиус запасов устойчивости . . . 71
2.2.4. Структурная грубость . . . 73
2.2.5. Анализ структурно-параметрической грубости* . . . 77
2.3. Синтез корректирующих устройств . . . 78
2.3.1. Постановка задачи . . . 78
2.3.2. Метод ЛАЧХ . . . 82
2.3.3. Анализ системы и уточнение желаемой ЛАЧХ . . . 86
2.3.4. Внешние возмущения . . . 87
2.3.5. Следящие системы . . . 88
Приложения к главе 2 . . . **89**
2.П. Параметрические возмущения и запасы устойчивости . . . **89**
2.П.1. Запасы устойчивости . . . 89
2.П.2. Параметрические возмущения и запасы устойчивости по фазе и модулю . . . 93
2.П.3. Свойства АФЧХ систем с нулевой либо малой степенями грубости . . . 95
2.П.4. Связь показателей качества переходного процесса с частотными характеристиками системы . . . 97
2.П.5. Определение вещественной частотной характеристики по ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы . . . 100
2.П.6. Уточнение желаемой ЛАЧХ . . . 101
Доказательства к главе 2 . . . **103**
2.Д.1. Доказательство утверждения 2.2.1 . . . **104**
Заключение к главе 2 . . . **105**
Часть II. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта . . . **106**

3. Модальное управление ... **107**
3.1. Стабилизация объектов второго вида ... 107
3.1.1. Постановка задачи ... 107
3.1.2. Процедура решения ... 108
3.1.3. Существование решения ... 109
3.1.4. Условия единственности ... 110
3.1.5. Структурное модальное управление ... 112
3.1.6. Реализация структурного управления ... 113
3.2. Регулирование ... 114
3.2.1. Постановка задачи ... 114
3.2.2. Процедура решения ... 115
3.2.3. Уравнение качества при ступенчатых и гармонических возмущениях ... 116
3.2.4. Уравнение качества грубых регуляторов ... 118
3.2.5. ПИД-регулятор* ... 120
3.2.6. Анализ структурной грубости* ... 121
3.3. Слежение ... 123
3.3.1. Постановка задачи ... 123
3.3.2. Последовательное задающее воздействие ... 125
3.3.3. О классической задаче регулирования* ... 126
3.3.4. Принцип разделения ... 127
3.3.5. Параллельное задающее воздействие* ... 129
3.3.6. Последовательно-параллельное задающее воздействие* ... 129
3.3.7. Компенсационная схема (1-ый вариант)* ... 130
3.3.8. Компенсационная схема (2-ой вариант)* ... 132
3.3.9. Влияние внешних возмущений на компенсационную схему* ... 132
3.4. Обратная связь по состоянию ... 133
3.4.1. Постановка задачи ... 133
3.4.2. Каноническая форма ... 134
3.4.3. Построение управления ... 136
3.4.4. Проблема синтеза ... 138
3.4.5. Процедура синтеза ... 139
3.4.6. Следящие системы ... 140
3.4.7. Система с эталонной моделью* ... 141
3.4.8. Анализ структурной грубости* ... 143
Приложения к главе 3 ... **144**
3.П.1. Системы с наблюдателями ... **145**
3.П.1.1. Восстановление (наблюдение) переменных состояния объекта управления ... 145

3.П.1.2. Следящая система с наблюдателем . . . 146
3.П.1.3. Наблюдатель пониженного порядка . . . 147
3.П.1.4. Передаточная функция разомкнутой системы с наблюдателем . . . 148
3.П.1.5. О негрубости систем с наблюдателями . . . 149
3.П.1.6. Описание компенсационной схемы в пространстве состояний . . . 151
3.П.1.7. Компенсационные схемы и системы с наблюдателями . . . 152
3.П.2. Построение уравнения качества . . . 153
3.П.2.1. Постановка задачи . . . 153
3.П.2.2. Выбор корней характеристического полинома . . . 154
3.П.2.3. Оценка максимального отклонения . . . 155
Доказательства к главе 3 . . . 158
3.Д. Доказательства теорем и утверждений . . . 158
3.Д.1. Доказательство теоремы 3.1.1 . . . 158
3.Д.2. Доказательство теоремы 3.1.2 . . . 161
3.Д.3. Доказательство утверждения 3.1.1 . . . 162
3.Д.4. Доказательство теоремы 3.4.1 . . . 163
3.Д.5. Доказательство утверждения 3.П.1 . . . 165
3.Д.6. Доказательство утверждения 3.П.2 . . . 165
3.Д.7. Доказательство утверждения 3.П.3 . . . 166
3.Д.8. Доказательство утверждения 3.П.4 . . . 166
3.Д.9. Доказательство утверждения 3.П.5 . . . 167
Заключение к главе 3 . . . 169
4. Оптимальное управление . . . 171
4.1. Аналитическое конструирование регуляторов . . . 171
4.1.1. Процедура АКОР . . . 171
4.1.2. Критерий обобщённой работы . . . 175
4.1.3. Объекты второго вида . . . 177
4.1.4. Реализуемость . . . 178
4.1.5. Эталонная модель* . . . 180
4.2. Частотные свойства оптимальных систем . . . 182
4.2.1. Условие оптимальности в частотной форме . . . 182
4.2.2. Запасы устойчивости . . . 183
4.2.3. Объекты второго вида . . . 185
4.2.4. Эталонная модель* . . . 186
4.3. Точность и качество . . . 187
4.3.1. Установившиеся ошибки (ступенчатые воздействия) . . . 187
4.3.2. Переходные процессы . . . 189
4.3.3. Время регулирования . . . 191
4.3.4. Гармонические воздействия . . . 193

4.3.5. Показатель колебательности . . . 194
4.3.6. Частота среза (полоса пропускания) . . . 195
4.4. Синтез регуляторов . . . 196
4.4.1. Объекты первого вида . . . 196
4.4.2. Объекты второго вида . . . 201
4.4.3. $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{s}) \neq \mathbf{1}$, $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{s}) \neq \mathbf{1}$. Уравнение качества . . . 203
4.4.4. Ограничение полосы пропускания . . . 205
4.4.5. Следящие системы . . . 206
4.4.6. ПИ-регулятор* . . . 208
4.4.7. Построение структурно-грубых регуляторов* . . . 209
4.4.8. Условия структурной грубости для одного вида структурных возмущений* . . . 210
4.5. Обратная задача АКОР . . . 211
4.5.1. Функционал общего вида . . . 211
4.5.2. Запасы устойчивости . . . 213
4.5.3. Обратная задача . . . 214
4.5.4. Существование решения . . . 215
4.5.5. Процедура . . . 217
4.5.6. Объекты второго вида . . . 220
Доказательства к главе 4 . . . 222
4.Д. Доказательство теорем и утверждений . . . 222
4.Д.1. Доказательство теоремы 4.1.2 . . . 222
4.Д.2. Доказательство теоремы 4.2.1 . . . 226
4.Д.3. Доказательство утверждения 4.2.4 . . . 227
4.Д.4. Доказательство утверждения 4.4.1 . . . 228
4.Д.5. Доказательство утверждения 4.4.3 . . . 229
4.Д.6. Доказательство утверждения 4.4.4 . . . 231
4.Д.7. Доказательство утверждений 4.4.5 и 4.4.6 . . . 232
4.Д.8. Доказательство теоремы 4.5.1 . . . 234
Заключение к главе 4 . . . 237
Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы . . . 239
5. Частотные параметры . . . 240
5.1. Частотная передаточная функция . . . 240
5.1.1. Определения . . . 240
5.1.2. Смещённая частотная передаточная функция . . . 243
5.1.3. Модель системы разомкнутой на входе объекта* . . . 244
5.1.4. Модель системы разомкнутой на входе регулятора* . . . 245
5.1.5. Стабилизированный частотный передаточный вектор . . . 246
5.1.6. Стабилизированная частотная передаточная функция . . . 247

5.2. Частотные параметры (ω-индексы) 248
5.2.1. Реакция на испытательное воздействие 248
5.2.2. Определение частотных параметров ($\boldsymbol{\omega}$-индексов) 250
5.2.3. Стабилизированные $\boldsymbol{\omega}$-индексы (1-й способ вычисления) 252
5.2.4. Частотные параметры входа и выхода при $(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0})$ 253
5.2.5. Частотные параметры входа и выхода при $(\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0})$ 255
5.2.6. Функции перехода к частотным параметрам* 256
5.2.7. Время сходимости к частотным параметрам* 258
5.2.8. Частотные параметры разомкнутой системы* 260
5.3. Фильтр Фурье 261
5.3.1. Схема эксперимента 261
5.3.2. Алгоритм фильтрации 263
5.3.3. Время фильтрации 264
5.3.4. Влияние внешних возмущений и помех 265
5.3.5. Фильтрация при параллельном испытательном воздействии 267
5.3.6. Время фильтрации при внешних возмущениях 269
5.3.7. Учёт ограничений на управление и измерение* 270
5.3.8. Управление генератором 272
5.3.9. Алгоритм с паузами 273
5.3.10. Последовательные пары испытаний 274
5.4. Локальный фильтр* 276
5.4.1. Алгоритм для устойчивых объектов 276
5.4.2. Алгоритм для неустойчивых объектов 277
5.4.3. Сравнение с фильтром Фурье 278
5.4.4. Метод наименьших квадратов 279
5.4.5. Идентификация 281
Приложения к главе 5 282
5.П.1. Формула Коши 282
5.П.1.1. Вид формулы 282
5.П.1.2. Нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (5.П.3) 283
5.П.1.3. Доказательство формулы Коши 284
5.П.2. Дискретные объекты 286
5.П.2.1. Частотные параметры 286
5.П.2.2. Уравнения ««вход-выход»» 287
5.П.2.3. Дискретный фильтр Фурье 289
5.П.2.4. Рекуррентный фильтр Фурье 290
Доказательства к главе 5 291
5.Д. Доказательства теорем и утверждений 291

5.Д.1. Доказательство утверждения 5.2.1 . . . 291
5.Д.2. Доказательство утверждения 5.2.2 . . . 293
5.Д.3. Доказательство теоремы 5.2.1 . . . 294
5.Д.4. Доказательство утверждения 5.3.2 . . . 298
5.Д.5. Доказательство утверждения 5.3.3 . . . 299
5.Д.6. Доказательство утверждения 5.3.4 . . . 300
5.Д.7. Доказательство утверждения 5.4.2 . . . 302
5.Д.8. Доказательство теоремы 5.4.1 . . . 303
5.Д.9. Доказательство утверждения 5.П.1 . . . 304
Заключение к главе 5 . . . 305
6. Частотное модальное управление . . . 307
6.1. Прямое управление . . . 308
6.1.1. Постановка задачи и подход к её решению . . . 308
6.1.2. Алгоритм построения . . . 309
6.1.3. Существование и единственность* . . . 310
6.1.4. Объекты, заданные ω-индексами при $\lambda = 0$ . . . 311
6.1.5. Аналитический синтез регуляторов . . . 312
6.1.6. Следящие системы . . . 314
6.1.7. ПИД-регулятор* . . . 315
6.2. Натурные критерии устойчивости . . . 315
6.2.1. Анализ устойчивости как решение обратной задачи синтеза . . . 315
6.2.2. Уравнение обратной задачи . . . 316
6.2.3. Уравнения частотной обратной задачи . . . 317
6.2.4. Первый критерий устойчивости . . . 318
6.2.5. Анализ устойчивости по стабилизированным ω-индексам . . . 321
6.2.6. Второй критерий устойчивости . . . 322
6.3. Идентификационное управление . . . 324
6.3.1. Постановка задачи идентификации и её решение . . . 324
6.3.2. Неустойчивые объекты . . . 326
6.3.3. Объекты второго вида (частный случай) . . . 327
6.3.4. Объекты второго вида (общий случай) . . . 328
6.3.5. Идентификационное управление . . . 330
Приложения к главе 6 . . . 331
6.П. Прямое управление дискретными объектами . . . 331
6.П.1. Постановка задачи и её решение . . . 331
6.П.2. Объекты с запаздыванием . . . 333
6.П.3. Синтез регуляторов . . . 334
Доказательства к главе 6 . . . 335
6.Д. Доказательство теорем и утверждений . . . 335

6.Д.1. Доказательство теоремы 6.1.1 ... 335
6.Д.2. Доказательство утверждения 6.2.1 ... 338
6.Д.3. Доказательство утверждения 6.2.2 ... 340
6.Д.4. Доказательство утверждения 6.3.1 ... 342
6.Д.5. Доказательство утверждения 6.3.2 ... 346
Заключение к главе 6 ... 347
7. Частотное оптимальное управление ... 348
7.1. АКОР по частотным параметрам ... 348
7.1.1. Постановка задачи ... 348
7.1.2. Критерий обобщённой работы ... 349
7.1.3. Процедура АКОР ... 352
7.1.4. Существование и единственность решения ... 353
7.1.5. Системы с эталонной моделью* ... 355
7.2. Аналитический синтез регуляторов ... 356
7.2.1. Синтез по критерию точности ... 356
7.2.2. Учёт требований к показателям качества ... 357
7.2.3. Следящие системы и системы с эталонной моделью* ... 358
7.2.4. ПИД-регулятор* ... 359
7.3. Анализ устойчивости ... 361
7.3.1. Первый критерий устойчивости (необходимое условие) ... 361
7.3.2. Первый критерий (достаточное условие) ... 363
7.3.3. Второй критерий устойчивости ... 365
7.3.4. Объекты второго вида* ... 368
7.3.5. Погрешности вычислений (инструментальные погрешности) и анализ устойчивости* ... 369
Доказательства к главе 7 ... 370
7.Д Доказательство теорем и утверждений ... 371
7.Д.1 Доказательство теоремы 7.1.1 ... 371
7.Д.2. Доказательство теоремы 7.1.2 ... 373
7.Д.3. Доказательство утверждения 7.1.1 ... 376
7.Д.3.1. Преобразование уравнений ... 376
7.Д.3.2. Преобразование уравнений Ляпунова ... 379
7.Д.3.3. Доказательство совпадения систем уравнений ... 380
7.Д.4. Доказательство утверждения 7.3.1 ... 384
7.Д.5. Доказательство утверждения 7.3.2 ... 384
Заключение к главе 7 ... 385
8. Частотные адаптивные регуляторы ... 386
8.1. Декларативный регулятор ЧДР-1 ... 386
8.1.1. Управление несамотождественными объектами ... 386

8.1.2. Структурная схема . . . 388
8.1.3. Алгоритм препроцессора . . . 389
8.1.4. Неопределённые структурные показатели . . . 391
8.1.5. Свойства . . . 394
8.1.5.1. Время достижения цели управления . . . 394
8.1.5.2. Групповой регулятор. ТЭИ-регулятор . . . 394
8.1.5.3. Процедуральные и декларативные регуляторы. . . . 395
8.1.6. Следящие системы . . . 396
8.1.7. Проблема настройки времени фильтрации . . . 397
8.1.8. Алгоритмы сокращения времени фильтрации . . . 398
8.2. Декларативный регулятор ЧДР-2 и его экспериментальное исследование . . . 399
8.2.1. Алгоритм регулятора . . . 399
8.2.2. Анализатор . . . 402
8.2.3. Описание экспериментальной установки . . . 404
8.2.4. Экспериментальное исследование . . . 404
8.3. Управление многорежимными объектами . . . 408
8.3.1. Объекты с известными моментами изменения режима . . . 408
8.3.2. Частотно-квазистационарные объекты* . . . 409
8.3.3. Частотный адаптивный регулятор ЧАР-3 . . . 410
8.3.4. Объекты с неизвестными моментами изменения режима . . . 411
8.3.5. Объекты первого вида с регулятором ЧАР-4 . . . 412
8.4. Система с эталонной моделью (следящие системы) . . . 413
8.4.1. Структурная схема . . . 413
8.4.2. Первый режим работы объекта . . . 415
8.4.3. Второй режим работы объекта . . . 417
Заключение к главе 8 . . . 418
Часть 4. Многомерные системы . . . 419
9. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта . . . 420
9.1. Модальное управление . . . 420
9.1.1. Постановка задачи . . . 420
9.1.2. Подход к решению . . . 422
9.1.3. Матричное модальное тождество . . . 424
9.1.4. Свойства полиномиальных матриц системы . . . 425
9.1.5. Элиминантная матрица . . . 426
9.1.6. Решение модального тождества . . . 429
9.1.7. Условия реализуемости регулятора . . . 434
9.1.8. Компенсационная схема* . . . 435

9.2. Синтез регуляторов и следящих систем на основе модального тождества 437
9.2.1. Показатели точности и качества 437
9.2.2. Постановка задачи синтеза и уравнение качества 439
9.2.3. Структурное модальное управление 441
9.2.4. Процедура синтеза регулятора 443
9.2.5. Альтернативная процедура синтеза 446
9.2.6. Задача слежения 450
9.2.7. Построение следящих систем при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$ 451
9.2.8. Слежение при $\boldsymbol{v}(t) \neq \boldsymbol{y}_{ж}(t)$ 452
9.2.9. Построение следящих систем при $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}$ 453
9.2.10. Компенсационная схема* 454
9.3. Синтез на базе процедур АКОР 455
9.3.1. Процедура АКОР и условие оптимальности в частотной форме . 455
9.3.2. Точность при ступенчатых внешних возмущениях 456
9.3.3. Точность при гармонических воздействиях 458
9.3.4. Синтез на основе АКОР по критерию обобщённой работы 460
9.3.5. Учёт требований к качеству 461
9.3.6. Следящие системы 464
9.3.7. Объект второго вида 466
9.3.8. Реализуемый регулятор 469
9.3.9. Следящие системы с объектами второго вида при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$. 470
Приложения к главе 9 472
9.П. Приложения 472
9.П.1. Приведение уравнений объекта к канонической форме Лагранжа 472
9.П.1.1. Каноническая форма управляемости 472
9.П.1.2. Построение матриц канонической формы 474
9.П.1.3. Структурная теорема 476
9.П.1.4. Процедура приведения 478
9.П.1.5. Свойства матриц канонической формы 480
9.П.2. Приведение уравнений объекта к форме ««вход-выход»» 481
9.П.2.1. Каноническая форма наблюдаемости 481
9.П.2.2. Дуальные системы и построение матриц канонической формы . 482
9.П.2.3. Процедура приведения 483
9.П.2.4. Столбцово-правильная форма ««вход-выход»» 486
9.П.3. Преобразование уравнений к форме Коши 488
9.П.3.1. Существо подхода 488
9.П.3.2. Преобразование приводимых уравнений 489
9.П.3.3. Преобразование уравнений к приводимой форме 490
9.П.3.4. Построение матрицы $U_L(s)$ 492

9.П.4. Построение уравнения качества . . . 495
9.П.4.1. Постановка задачи . . . 495
Доказательства к главе 9 . . . 496
9.Д. Доказательство теорем и утверждений . . . 497
9.Д.1. Доказательство теоремы 9.1.1 . . . 497
9.Д.2. Доказательство утверждения 9.2.1 . . . 500
9.Д.3. Обоснование утверждения 9.3.1 . . . 501
Заключение к главе 9 . . . 502
10.Анализ грубости* . . . 504
10.1. Передаточные функции и матрицы многомерных систем . . . 504
10.1.1. Частотные передаточные матрицы . . . 504
10.1.2. Обобщённая передаточная функция . . . 508
10.1.3. Передаточная функция многомерной системы разомкнутой по $\boldsymbol{\nu}$-му входу объекта . . . 510
10.1.4. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по $\boldsymbol{\nu}$-му входу объекта (общий случай) . . . 514
10.1.5. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по $\boldsymbol{\mu}$-му входу регулятора . . . 517
10.2. Запасы устойчивости многомерных систем . . . 518
10.2.1. Обобщённые запасы устойчивости . . . 518
10.2.2. Запасы устойчивости на входе объекта и регулятора . . . 521
10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости . . . 523
10.3. Показатели грубости оптимальных систем . . . 525
10.3.1. Границы обобщённых показателей грубости . . . 525
10.3.2. Возможность малых запасов устойчивости на входе регулятора . 526
10.3.3. Возможность малых запасов устойчивости на входе объекта в системах оптимальных в смысле функционалов, содержащих недиагональную матрицу при управлениях . . . 528
10.3.4. Границы запасов устойчивости систем, оптимальных по критерию обобщённой работы . . . 531
Приложения к главе 10 . . . 532
10.П. Матрицы возвратной разности и их сингулярные значения . . . 532
10.П.1. Аддитивные параметрические возмущения . . . 532
10.П.2. Условие низкой чувствительности . . . 534
10.П.3. Чувствительность по регулируемым переменным . . . 536
10.П.4. Анализ грубости на основе матриц возвратной разности . . . 538
10.П.5. Сингулярные значения матриц возвратной разности . . . 541
10.П.6. Границы сингулярных значений матрицы возвратной разности по управлению . . . 543

10.П.7. Критерий обобщённой работы . . . 544
Доказательства к главе 10 . . . 545
10.Д. Доказательство теорем и утверждений . . . 545
10.Д.1. Доказательство утверждения 10.1.1 . . . 545
10.Д.2. Доказательство теоремы 10.3.1 . . . 546
10.Д.3. Доказательство теоремы 10.3.2 . . . 547
10.Д.4. Доказательство теоремы 10.3.3 . . . 550
10.Д.5. Доказательство теоремы 10.3.4 . . . 551
10.Д.6. Доказательство теоремы 10.3.5 . . . 551
Заключение к главе 10 . . . 552
11.Метод частотных параметров . . . 553
11.1. Стабилизация . . . 553
11.1.1. Частотные параметры объектов первого вида . . . 553
11.1.2. Частотные параметры объектов второго вида . . . 555
11.1.3. Частотное модальное управление . . . 556
11.1.4. Частотное оптимальное управление . . . 558
11.1.5. АКОР по критерию обобщённой работы . . . 559
11.1.6. Аналитическое конструирование регуляторов . . . 561
11.1.7. Анализ устойчивости . . . 562
11.2. Регулирование и слежение . . . 564
11.2.1. Постановка задачи . . . 564
11.2.2. Применение частотного модального управления . . . 564
11.2.3. Построение следящих систем . . . 566
11.2.4. Построение следящих систем при $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{m}$ . . . 567
11.2.5. Компенсационная схема* . . . 568
11.2.6. Использование АКОР по критерию обобщённой работы . . . 569
11.3. Адаптивное управление . . . 569
11.3.1. Постановка задачи . . . 569
11.3.2. Декларативный регулятор . . . 570
11.3.3. Анализатор . . . 572
11.3.4. Управление многорежимными объектами . . . 573
11.3.5. Следящая система с эталонной моделью . . . 574
11.3.6. Слежение в первом режиме работы объекта . . . 575
11.3.7. Слежение во втором режиме работы объекта . . . 578
Доказательства к главе 11 . . . 578
11.Д. Доказательство теорем и утверждений . . . 578
11.Д.1. Доказательство теоремы 11.1.1 . . . 578
11.Д.2. Доказательство теоремы 11.1.2 . . . 582
11.Д.3. Доказательство теоремы 11.1.3 . . . 583

11.Д.4. Доказательство утверждения 11.1.1 . . . 585
11.Д.5. Доказательство теоремы 11.1.4 . . . 586
11.Д.6. Доказательство теоремы 11.1.5 . . . 592
Заключение к главе 11 . . . 593
Примечания и литературные указания . . . 595
К части I . . . 595
К главе 1 . . . 597
К главе 2 . . . 598
К части II . . . 599
К главе 3 . . . 600
К главе 4 . . . 601
К части III . . . 603
К главе 5 . . . 603
К главе 6 . . . 603
К главе 7 . . . 604
К главе 8 . . . 604
К части IV . . . 605
К главе 9 . . . 605
К главе 10 . . . 606
К главе 11 . . . 607
Литература . . . 608

Предисловие

В последние годы резко сократилось время проектирования объектов и устройств управления. Это результат использования САПР при проектировании объектов и унифицированных элементов в устройствах управления – измерительных устройств с цифровым выходом, контроллеров, исполнительных устройств с цифровым входом. Такое сокращение приводит к тому, что часто объект и устройство управления готовы в натуре, а математическая модель объекта ещё не создана и, следовательно, нельзя построить алгоритм управления.

Наличие объекта и устройств управления позволяет провести их испытания, результаты которых могут быть использованы для построения алгоритма управления. Это делает актуальной *натурную теорию управления*, исходным для которой служат не математические модели объектов, а результаты их экспериментальных исследований.

Частотное управление – это направление натурной теории управления, когда объект испытывается гармоническими входными сигналами.

В книге рассматриваются системы, которые мало отклоняются от состояния равновесия и поэтому объект описывается линейными дифференциальными уравнениями. Структура и параметры этих уравнений неизвестны, но объект доступен для экспериментирования. Он возбуждается испытательным воздействием, состоящим из конечного числа гармоник (частот). Сигналы с выходов объекта подаются на фильтр Фурье. Каждой из входных гармоник соответствует на выходе фильтра Фурье два числа. Совокупность этих чисел образуют частотные параметры объекта, которые служат исходными данными для синтеза алгоритмов управления.

Книга состоит из четырёх частей. Собственно частотное управление излагается 3-ей и 4-ой частях. Хотя 2-я часть и главы 9, 10 четвёртой части носят подготовительный характер, они имеют самостоятельное значение поскольку содержат важные результаты для синтеза регуляторов (по требованиям к точности управления при ограниченном внешнем возмущении, грубости, а также условиям реализуемости регуляторов) при известных параметрах объекта.

Излагаемая теория частотного управления носит конструктивный характер и может непосредственно использоваться для проектирования.

Стремление выделить конструктивную часть теории привело к тому, что основной текст содержит процедуры синтеза регуляторов, анализа устойчивости систем и экспериментального определения частотных параметров. Развитие этих процедур, анализ грубости и различные преобразования помещены в разделах, помеченных звёздочкой, а также в приложениях к каждой главе, обозначаемых с использованием буквы П. Доказательства утверждений, на которых базируются методы расчёта, приведены в конце соответствующих глав. Они содержат в своих обозначениях букву Д.

Для понимания излагаемого материала необходимо знание стандартного втузовского курса по теории автоматического управления.

Изложение построено так, что оно будет доступно и для математиков. Для этой цели подробно излагаются классические понятия частотной теории регулирования и методы экспериментального определения частотных параметров.

Книга адресована инженерам и учёным, занимающимся разработкой и исследованием современных систем управления.

Первые найдут здесь новые способы построения и методы расчёта регуляторов для объектов с неопределёнными параметрами, вторые – предмет для дальнейшего исследования.

Для того, чтобы не прерывать изложения, в тексте отсутствуют ссылки на литературу. Они приводятся в примечаниях и литературных указаниях в конце книги. Там же помещён список литературы. Он далёк от полноты. Это объясняется тем, что содержание книги касается многих разделов автоматического управления (частотной теории регулирования, фильтрации, оптимального, модального и адаптивного управления, теории чувствительности и т.д.), поэтому библиография отражает лишь направления исследований по автоматическому регулированию, которые имеют прямую связь с содержанием книги.

Часть I. Введение в частотное управление

Объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, полностью характеризуются параметрами (коэффициентами) этих уравнений.

Частотные параметры служат столь же исчерпывающей характеристикой объекта, однако, в отличие от коэффициентов уравнений, они являются непосредственным результатом эксперимента. Число коэффициентов и частотных параметров определяется структурными показателями объекта (числом измеряемых и управляющих переменных, размерностью пространства состояний и т.п.).

Адекватность этих двух видов характеристик даёт основание полагать, что можно построить теорию управления, исходящую из частотных параметров, параллельную обычной теории управления, которая предполагает известными коэффициенты модели объекта. Очертим круг проблем частотного управления, который рассматривается в книге.

1. Анализ устойчивости.

2. Синтез стабилизирующего управления.

3. Синтез регуляторов, обеспечивающих требуемую точность при ограниченных внешних возмущениях.

4. Анализ грубости (чувствительности).

5. Условия реализуемости регулятора.

Третья из этих проблем является центральной и поэтому теория исходящая из частотных параметров, названа теорией частотного управления (теорией построения управления по частотным параметрам).

Цель первой части книги: сформулировать задачи управления при неопределённых (неизвестных) коэффициентах уравнений объекта и описать на качественном уровне подход к их решению. Кроме того, здесь излагается метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАЧХ). Это связано с тем, что значения частотных характеристик могут быть получены из тех же экспериментов, что и частотные параметры. Правда, в отличие от метода частотных параметров, число этих экспериментов, вообще говоря, бесконечно, так как анализ устойчивости и синтез регуляторов в методе ЛАЧХ предполагает, что амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики известны во всём диапазоне частот от нуля до бесконечности.

Последнее явилось причиной применения этого метода для расчёта регуляторов, в основном, для объектов с известными параметрами. Однако, наглядность и эффективность метода ЛАЧХ делает его в определённом смысле образцом прикладных методов, которому можно следовать.

Кроме того, круг задач, решаемых методом ЛАЧХ для таких объектов, оказался столь значимым для практики регулирования (он охватывает указанные выше пять проблем), что при создании новых методов необходимо, как минимум, не сокращать этот круг.

1. Проблемы управления при неопределённых параметрах объекта и частотное управление

Трудности расчёта параметров (коэффициентов модели) объекта, вызванные сокращением сроков их проектирования, – лишь одна из причин их неопределённости.

Существуют более глубокие причины неопределенности параметров объекта, обусловленные его природой.

Одна из них – несамотождественность объекта. Для того, чтобы пояснить её, представим себе интеллектуальный робот, осуществляющий сборку некоторой конструкции. ««Рука»» робота ««берет»» детали конструкции, которые имеют различные веса и моменты инерции. ««Рука»» робота (рассматриваемая как объект в системе управления её движением) описывается, после ««захвата»» детали, дифференциальными уравнениями с параметрами, которые определяются весом и моментом инерции этой детали. Такой объект называется далее *несамотождественным*, так как его параметры принимают непредвиденные значения (поскольку не известны ни вес, ни момент инерции, ни последовательность сборки деталей) для каждого из интервалов времени, начинающихся с момента ««захвата»» детали и заканчивающихся в момент её установки (интервалы ««пуск-останов»»).

Управление несамотождественными объектами должно приспосабливаться (адаптироваться) к параметрам объекта, реализовавшимся на каждом интервале ««пуск-останов»».

Цель этой главы

- описание моделей объектов (с определёнными и неопределёнными параметрами, самотождественных и несамотождественных, однорежимных и многорежимных), целей управления и внешних возмущений.

- формулировка задач регулирования и слежения при неопределённых параметрах объекта.

Эти задачи сопровождаются изложением существа подхода к решению на основе метода частотных параметров. При этом рассматривается простейший случай, когда объект одномерный с одним входом и одним выходом) и асимптотически устойчивый. Это позволяет, во-первых, глубже понять рассматриваемые задачи, а, во-вторых, служит содержательным введением в частотное управление, которое развивается в последующих главах для неустойчивых и многомерных объектов.

1.1. Модели объектов

1.1.1. Типы объектов

Рассмотрим объект управления, возмущённое движение которого описывается в первом приближении уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \tilde{\boldsymbol{m}}f, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{1.1.1}$$

$$y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \tag{1.1.2}$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – n-мерный вектор его переменных состояния, $u(t)$ и $f(t)$ – управление и внешнее возмущение соответственно, $y(t)$ – измеряемая переменная, A – матрица чисел размеров $n \times n$, $\boldsymbol{b}$ и $\tilde{\boldsymbol{m}}$ – n-мерные вектора-столбцы, $\boldsymbol{d}$ – n-мерный вектор-строка. Числа, составляющие эту матрицу и вектора, называются параметрами объекта.

Введём четыре типа моделей объектов (1.1.1), (1.1.2), при этом здесь и далее будем использовать термин ««объект»» и для обозначения уравнений, описывающих его.

Объект типа A – это объект (1.1.1), (1.1.2), в котором матрица A и вектора $\boldsymbol{b}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{d}$ – известны.

Объект типа B – это объект (1.1.1), (1.1.2), где матрица A и вектора $\boldsymbol{b}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{d}$ – неизвестны.

Объект типа C (многорежимный объект с известными параметрами) – описывается на каждом из интервалов времени $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \dots)$ уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A^{(k)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{(k)}u + \tilde{\boldsymbol{m}}^{(k)}f, \\ y &= \boldsymbol{d}^{(k)}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \qquad t_{k-1} \le t < t_k \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.1.3}$$

в которых $A^{(k)}$, $\boldsymbol{b}^{(k)}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}^{(k)}$, $\boldsymbol{d}^{(k)}$ – заданные числовые матрица и вектора. Моменты времени t_k $(k = 1, 2, \dots)$ – переход с режима на режим – заданы.

Объект типа D (многорежимный объект с неизвестными параметрами) – это объект (1.1.3), где матрица $A^{(k)}$ и вектора $\boldsymbol{b}^{(k)}$, $\tilde{\boldsymbol{m}}^{(k)}$, $\boldsymbol{d}^{(k)}$ – неизвестны. Моменты t_k $(k = 1, 2, \dots)$ могут быть как заданными так и неизвестными. К типу D будем относить также объекты (1.1.3) с известными параметрами, но неизвестными моментами t_k $(k = 1, 2, \dots)$ смены режима работы.

1.1.2. Внешние возмущения и помехи

Входящее в (1.1.1) внешнее воздействие $f(t)$ – неизвестная ограниченная функция такая, что

$$|f(t)| \le f^*, \tag{1.1.4}$$

где f^* – заданное число.

Ограничим далее класс $f(t)$ функциями, которые могут быть представлены как сумма конечного числа гармоник

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left(\delta_i^{(1)} \sin \omega_i^f t + \delta_i^{(2)} \cos \omega_i^f t\right), \tag{1.1.5}$$

где $\delta_i^{(1)}$, $\delta_i^{(2)}$, ω_i^f $(i = \overline{1, \mu_1})$ – неизвестные числа.

Представление (1.1.5) можно интерпретировать при $\omega_i = i\omega$ как результат разложения $f(t)$ в ряд Фурье и отбрасывания тех гармоник этого ряда, которые находятся вне полосы пропускания объекта либо системы управления.

Кроме (1.1.5) будем рассматривать также многорежимное внешнее возмущение

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left(\delta_i^{(1)k} \sin \omega_i^{fk} t + \delta_i^{(2)k} \cos \omega_i^{fk} t\right), \quad t_{k-1}^f \le t \le t_k^f \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.1.6}$$

где t_k^f $(k = 1, 2, \dots)$ – моменты изменения режима внешнего возмущения. Числа $\delta_i^{(1)k}$, $\delta_i^{(2)k}$, ω_i^{fk} $(i = \overline{1, \mu_1},\ k = 1, 2, \dots)$ в каждом из режимов неизвестны.

Помехи измерения будем учитывать, записывая соотношение (1.1.2) в виде

$$y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} + æ, \tag{1.1.7}$$

где $æ(t)$ – помеха измерения, которая ограничена известным числом

$$|æ(t)| \le æ^*.$$

Как и внешнее воздействие, будем представлять помеху суммой конечного числа гармоник

$$æ(t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \left(\rho_i^{(1)} \sin \omega_i^{æ} t + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^{æ} t\right), \tag{1.1.8}$$

где $\rho_i^{(1)}$, $\rho_i^{(2)}$, $\omega_i^{æ}$ $(i = \overline{1, \mu_2})$ – неизвестные числа.

Наряду с регулярной помехой будем рассматривать многорежимные помехи, аналогичные (1.1.6).

1.1.3. Свойства объектов

Будем полагать, что объекты обладают свойствами:

1. Все типы объектов полностью управляемы сигналом $u(t)$ и полностью наблюдаемы по сигналам $y(t)$. (Многорежимный объект обладает этими свойствами на каждом из его режимов).

2. Для неустойчивых объектов известны положительные число либо последовательность C_k $(k = 1, 2, \dots)$ такие, что для объекта B выполняется равенство

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) e^{-C_0 t} = \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – решение уравнений (1.1.2), а для объекта D справедливо

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t)e^{-C_k t} = \mathbf{0} \quad k = 1, 2, \dots ,$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – решение (1.1.3).

3. Исполнительные и измерительные устройства регулятора будем относить к объекту управления. Это означает, что уравнения (1.1.1) включают в себя уравнения исполнительных и измерительных устройств и описывают так называемую *неизменяемую часть системы.* Под регулятором будем понимать изменяемую часть системы.

1.1.4. Границы параметров*

Уточним понятие известных и неизвестных параметров объекта. Если неизвестен хотя бы один из элементов матриц или векторов объекта, то он называется *объектом с неизвестными параметрами.*

Когда параметры физического объекта считаются известными, то подразумевается, что они известны с некоторой точностью. Так, например, известная матрица A определяется неравенствами

$$\underline{A} \le A \le \overline{A}, \tag{1.1.9}$$

в которых $\underline{A}$ и $\overline{A}$ – заданные матрицы размеров $n \times n$, определяющие диапазон возможных значений параметров, где $\underline{A}$ – нижняя граница диапазона, а $\overline{A}$ – его верхняя граница. Эти границы определяется технологическими допусками на изготовление устройств объекта, старением этих устройств, погрешностями методов расчёта или идентификации параметров и т.д.

Введём понятие *расчетной матрицы* (матрицы номинальных значений параметров) определив её элементы как центры диапазонов элементов матрицы A. Это означает, что расчётная матрица

$$A^* = \frac{1}{2}\left(\overline{A} + \underline{A}\right). \tag{1.1.10}$$

Тогда можно представить

$$A = A^* \pm \Delta A, \tag{1.1.11}$$

где ΔA – неизвестная матрица, модули элементов которой удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta a_{ij}| \le \varepsilon^*_{ij} \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{1.1.12}$$

в которых числа ε^*_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ – элементы матрицы

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2}\left(\overline{A} - \underline{A}\right). \tag{1.1.13}$$

Когда параметры объекта неизвестны, часто можно дать оценку возможных диапазонов их значений. Тогда, например, для матрицы A можно записать

$$\underline{\tilde{A}} \leq A \leq \overline{\tilde{A}}, \tag{1.1.14}$$

где $\underline{\tilde{A}}$ и $\overline{\tilde{A}}$ – матрицы оценок нижних и верхних границ.

Используя расчётную матрицу $A^* = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\tilde{A}} + \overline{\tilde{A}}\right)$ представим (1.1.14) в виде (1.1.11), где

$$|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}^{**} \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{1.1.15}$$

$$\mathcal{E}^{**} = \frac{1}{2}\left(\underline{\tilde{A}} - \overline{\tilde{A}}\right). \tag{1.1.16}$$

При таком описании параметров объекта становится слабо различимой грань между объектами с известными и неизвестными параметрами, хотя интуитивно ясно, что $\varepsilon_{ij}^{*} < \varepsilon_{ij}^{**}$ $\left(i,j = \overline{1,n}\right)$.

Один из путей строго определения этой грани основан на понятии параметрической грубости систем регулирования, которое приведено в 1.П.

1.1.5. Многомерные объекты. Виды объектов

Объект (1.1.1), (1.1.2) – одномерный, так как измеряемая и управляющая переменные – скаляры. Наряду с такими объектами далее будут рассматриваться многомерные объекты, описываемые уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f} \tag{1.1.17}$$

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x} \tag{1.1.18}$$

в которых – $\boldsymbol{y}(t)$ – r-мерный вектор измеряемых переменных, $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{z}(t)$ – m-мерные вектора управлений и регулируемых переменных, $\boldsymbol{f}(t)$ – μ-мерный вектор возмущений, а B, M, D, L – матрицы размеров $n \times m$, $n \times \mu$, $r \times n$, $m \times n$ – соответственно.

Аналогично описываются многомерные многорежимные объекты

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A^{(k)}\boldsymbol{x} + B^{(k)}\boldsymbol{u} + M^{(k)}\boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{y} &= D^{(k)}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = L^{(k)}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \qquad t_{k-1} \leq t < t_k \quad k = 1,2,\ldots . \tag{1.1.19}$$

Отметим, что в отличие от одномерных систем в многомерных системах вектор $\boldsymbol{z}(t)$ не совпадает с вектором измеряемых переменных. Более того, может случиться так, что ни одна из компонент вектора $\boldsymbol{z}(t)$ не доступна измерению.

Рассмотрим два вида объектов (1.1.17), (1.1.18), которые и будут использоваться далее.

Объекты первого вида, характеризуются равенством

$$M = B, \tag{1.1.20}$$

которое означает, что внешние возмущения прикладываются к объекту в местах приложения управляющих воздействий.

Кроме того, будем полагать также, что

$$D = E_n, \tag{1.1.21}$$

где E_n – единичная матрица размеров $n \times n$, и следовательно все переменные состояния объекта измеряются.

Объекты второго вида, в которых регулируемые переменные совпадают с измеряемыми и тогда

$$D = L, \tag{1.1.22}$$

при этом размерность вектора $\boldsymbol{y}(t)$ совпадает с размерностью вектора $\boldsymbol{u}(t)$.

Выделение этих видов объектов вызвано тем, что даже для объектов типа A лишь для этих видов существуют регуляторы, при которых достигается наперёд заданная точность регулирования при внешних воздействиях (1.1.4).

1.1.6. Структурные показатели и структурные свойства объектов

Объект (1.1.17), (1.1.18) характеризуется наряду с матрицами параметров, размерностями векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{f}$. Эти размерности n, m, r, m и μ соответственно называются *структурными показателями объекта.* Структурные показатели считаются далее, если не оговорено противное, заданными.

Многорежимный объект (1.1.19) может в каждом режиме иметь различные структурные показатели $n^{(k)}$, $m^{(k)}$, $r^{(k)}$, $\mu^{(k)}$.

Часто случается так, что объект с неизвестными параметрами сохраняет свои свойства (управляемость, наблюдаемость, устойчивость и т.п.) при любых значениях параметров из заданного диапазона их возможных значений. Например, объект

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + b_{21}u, \quad y = x_1$$

является асимптотически устоичивим, полностью управляемым, полностью наблюдаемый для любых отрицательных p_{21}, p_{22} и любого не равного нулю числа b_{21}.

Кроме того, в ряде случаев неизвестными являются один или несколько элементов матриц уравнений (1.1.17) или (1.1.19) и значения этих параметров из заданного диапазона не влияют на свойства объекта, которые определяются известными параметрами.

Определение 1.1.1. Свойства объекта, которые не зависят от значений неизвестных его параметров из заданного диапазона, называются *структурными свойствами объекта.* ■

1.1.7. Регулирование и слежение

Среди задач управления выделим задачу регулирования и задачу слежения.

Регулятор, разрешающий задачу управления для объекта (1.1.1), (1.1.2) с известными параметрами (объекта А) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \quad \boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_p^{(0)}, \\ u &= \boldsymbol{d}_p \boldsymbol{x}_p + f_p y, \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

где $\boldsymbol{x}_p(t)$ – n_p-мерный вектор переменных состояния регулятора; A_p – числовая матрица размеров $n_p \times n_p$; $\boldsymbol{b}_p$, $\boldsymbol{d}_p$ – n_p-мерные вектор-столбцы чисел; f_p – число.

Задача 1.1.1 (Задача регулирования объекта А).

Найти параметры регулятора (1.1.23) такие, чтобы, начиная с некоторого момента времени $t_{рег}$ ($t_{рег}$ – время регулирования), выполнялось условие

$$|y(t)| \le y^*, \quad t \ge t_{рег}, \tag{1.1.24}$$

где y^* – заданное положительное число, характеризующее точность (погрешность) регулирования. ■

Неравенство (1.1.24) выражает цель управления. В задачах слежения эта цель имеет вид

$$|y(t) - y_{ж}(t)| \le y^*, \quad t \ge t_{рег}, \tag{1.1.25}$$

где $y_{ж}(t)$ – измеряемая, но априори неизвестная функция, описывающая желаемые движения объекта. Эта функция часто называется *задающим воздействием.*

Регулятор следящих систем будем искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y + \boldsymbol{r}^n y_{ж}, \\ u &= \boldsymbol{d}_p \boldsymbol{x}_p + f_p y, \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

(где $\boldsymbol{r}^n$ – n_p-мерный вектор чисел) либо в форме

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \\ u &= u_p + y_{ж}, \quad u_p = \boldsymbol{d}_p \boldsymbol{x}_p + f_p y. \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Физический смысл форм (1.1.26), (1.1.27) состоит в следующем: в первом случае сигнал $y_{ж}(t)$ поступает на вход регулятора, а втором – он складывается с выходом (u_p) регулятора.

Задача 1.1.2 (Задача слежения).

Найти параметры регуляторов (1.1.26) либо (1.1.27), при которых выполняется целевое условие (1.1.25). ■

В многомерном случае задачи 1.1.1 уравнения искомого регулятора принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + B_p \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{u} &= D_p \boldsymbol{x}_p + F_p \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{z} = L_p \boldsymbol{x}_p. \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

(B_p , D_p , F_p – матрицы размеров $n_p \times r$, $m \times n_p$, $m \times r$), а целевое условие выражается теперь в виде системы неравенств

$$|z_i(t)| \le z_i^* \quad i = \overline{1,n}, \quad t \ge t_{рег}, \tag{1.1.29}$$

в которых z_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – задачные числа, характеризующие точность регулирования по каждой из регулируемых переменных, а $t_{рег} = \max\{t_{1рег}, t_{2рег}, \ldots, t_{mрег}\}$, где $t_{iрег}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – время регулирования по каждой из этих переменных.

Аналогичный вид имеют регуляторы для следящих систем

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + B_p \boldsymbol{y} + R^n \boldsymbol{z}_{ж}, \\ \boldsymbol{u}_z &= D_p \boldsymbol{x}_p + F_p \boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

либо

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p \boldsymbol{x}_p + B_p \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{z}_{ж}, \quad \boldsymbol{u}_p = C_p \boldsymbol{x}_p + F_p \boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

а целевое условие записывается как

$$|z_i(t) - z_{iж}(t)| \le z_i^* \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.1.32}$$

в котором $z_{iж}(t)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – измеряемые функции, описывающие желаемое движение объекта по каждой из регулируемых переменных (задающие воздействия).

1.1.8. Переходные и установившиеся процессы

Часто вводят ограничения на движение системы в период $[0, t_{рег}]$

$$\max_{0 \le t \le t_{\text{рег}}} |y(t)| \le y^*_{перех},$$

где $y^*_{перех}$ – заданное число, и процесс регулирования разбивается на два процесса: установившийся и переходный. Первый из них – это обычный режим работы системы, обусловленный внешними возмущениями. Переходный процесс вызывается начальными условиями и изменением начального состояния системы при возникновении возмущения. По истечении $t_{рег}$ переходные процессы затухают и наступает установившийся режим, характеристикой которого является число y^*. Геометрический образ этих понятий показан в виде некоторых трубок, в которые заключены процессы в системе, на рис. 1.1.1.

Для следящих систем можно записать аналогично

$$\max_{0 \le t \le t_{\text{рег}}} |y(t) - y_{ж}(t)| \le y^*_{перех}.$$

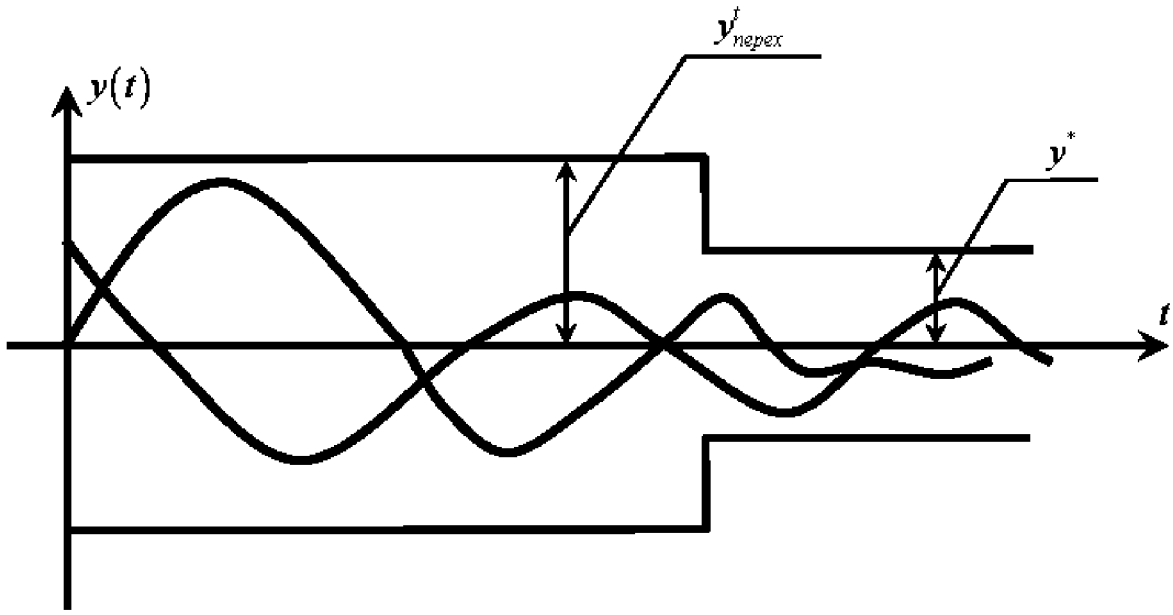

Рис. 1.1.1.

1.1.9. Методы синтеза регуляторов и уравнение качества

Эффективным методом решения задачи 1.1.1 служит хорошо известный метод логарифмических частотных характеристик (метод ЛАЧХ).

Этот метод, приведённый в гл. 2, к сожалению не распространяется на многомерные системы и поэтому далее используются методы аналитического синтеза регуляторов, применимые как для одномерных, так и многомерных систем. К настоящему времени можно выделить два таких метода: метод, основанный на теории *модального управления*, и метод, использующий процедуры *аналитического конструирования регуляторов* (процедуры АКОР).

Эти методы, особенно первый из них, опираются на уравнение качества.

Для его составления запишем уравнения объекта (1.1.1), (1.1.2) и регулятора (1.1.23) в форме ««вход-выход»»

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \tag{1.1.33}$$

$$g(s)u = r(s)y, \tag{1.1.34}$$

где

$$d(s) = \sum_{i=0}^{n} d_i s^{i-1}, \quad b(s) = \sum_{i=0}^{\gamma} b_i s^{i-1}, \quad m(s) = \sum_{i=0}^{\alpha} \tilde{m}_i s^{i-1} \quad (\gamma < n, \ \alpha < n), \tag{1.1.35}$$

$$g(s) = \sum_{i=0}^{n_{\text{р}}} g_i s^{i-1}, \quad r(s) = \sum_{i=0}^{\gamma_{\text{р}}} r_i s^{i-1}, \quad (\gamma_p \le n_p), \tag{1.1.36}$$

s – символ дифференцирования, кроме того он используется далее и как символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях.

Уравнение объекта (1.1.33) нетрудно получить, если преобразовать (1.1.1), (1.1.2) по Лапласу и исключить вектор $\boldsymbol{x}$. Аналогично приходим к уравнению регулятора (1.1.34).

Исключим из уравнений системы (1.1.33), (1.1.34) переменную u и получим

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]y = g(s)m(s)f. \tag{1.1.37}$$

Уравнением качества (неявной эталонной моделью) называется уравнение

$$\psi(s)y_к = g(s)m(s)f, \tag{1.1.38}$$

в котором

$$\psi(s) = \psi_æ s^æ + \psi_{æ-1}s^{æ-1} + \psi_1 s + \psi_0. \tag{1.1.39}$$

Коэффициенты полиномов $\psi(s)$, $g(s)$ выбираются так, чтобы выполнялось целевое условие (1.1.24).

Цель управления формулируется теперь как требование совпадения (при нулевых начальных условиях) решений уравнения (1.1.37) и управления качества

$$y(t) = y_к(t). \tag{1.1.40}$$

Это равенство выполняется, если полиномы $g(s)$ и $r(s)$ регулятора удовлетворяют тождеству

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \psi(s). \tag{1.1.41}$$

Использование неявной эталонной модели (уравнения качества) также как и использование явной (физической) эталонной модели движения объекта, замкнутого регулятором, существенно ограничивает число вариантов регуляторов (1.1.23), при которых достигается цель (1.1.24). Вместе с этим уравнение качества позволяет формализовать требования к времени регулирования, (а если необходимо, то и к перерегулированию) и построить аналитическую процедуру синтеза.

Отметим, что определение полиномов $\psi(s)$ и $g(s)$ в свою очередь является непростой задачей, поскольку необходимо определить их так, чтобы целевое условие (1.1.24) выполнялось для множества функций $f(t)$ вида (1.1.5), удовлетворяющих ограничению (1.1.4). Однако, далее будем полагать, что эта задача решена с учётом ограничений на структуру этих полиномов, которые будут наложены далее.

Пример 1.1.1. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнениями с известными параметрами

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u + f, \quad y = x_1 \tag{1.1.42}$$

где $f(t)$ – ступенчатое возмущение вида

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при} \quad t \geq t_0; \\ 0 & \text{при} \quad t < t_0. \end{cases} \tag{1.1.43}$$

Требуется найти регулятор, при котором, начиная с заданного момента времени $t^*_{рег}$, выполняется требование к точности

$$|y(t)| \leq y^*. \tag{1.1.44}$$

Переходя к решению этой задачи регулирования (задача 1.1.1) с фиксированным временем $t^*_{рег}$, сформируем уравнение качества. Представим уравнение (1.1.42) в форме ««вход-выход»»

$$\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = u + f, \quad d_1 = -a_{22}, \quad d_0 = -a_{21}, \tag{1.1.45}$$

и тогда, полагая пока æ = 2, запишем уравнение качества

$$\left(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right) y_к = f.$$

Запишем полином $\left(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right) = (s + s_1)(s + s_2)$ и выберем корни этого полинома, исходя из требования (1.1.44) к точности

$$s_1 s_2 \geq \frac{\bar{f}}{y^*} \tag{1.1.46}$$

и времени регулирования

$$s_1 \leq \frac{3}{t^*_{рег}}, \quad s_2 > s_1. \tag{1.1.47}$$

Составим тождество (1.1.41)

$$(s^2 + d_1 s + d_0)g(s) - r(s) = s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0, \tag{1.1.48}$$

находим, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s, параметры полиномов $g(s)$ и $r(s)$

$$r_1 = d_1 - \tilde{\psi}_1, \quad r_0 = d_0 - \tilde{\psi}_0, \quad g_0 = 1. \tag{1.1.49}$$

Таким образом, уравнение регулятора имеет вид

$$u = r_1\dot{y} + r_0 y. \tag{1.1.50}$$

Оно содержит ««чистые»» производные измеряемой переменной. Для получения реализуемого регулятора изменим уравнение качества, приняв его как

$$(\tau s + 1)\left(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right) y_к = f, \tag{1.1.51}$$

где τ – постоянная времени – достаточно малое число, удовлетворяющее, в частности, условию

$$\tau < \frac{1}{s_2}. \tag{1.1.52}$$

Тождество (1.1.48) примет теперь вид

$$(s^2 + d_1 s + d_0)(g_1 s + g_0) - (r_1 s + r_0) = (\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0). \qquad (1.1.53)$$

Сравнивая коэффициенты, получим уравнения

$$g_1 = \tau, \quad g_0 = 1 + \tau\tilde{\psi}_1 - \tau d_1, \quad d_1 g_0 - r_1 = \tilde{\psi}_1 + \tau\tilde{\psi}_0 - g_1 d_0, \quad d_0 g_0 - r_0 = \tilde{\psi}_0, \qquad (1.1.54)$$

из которых следует, что при достаточно малых τ уравнение регулятора имеет вид

$$\tau\dot{u} + u = r_1\dot{y} + r_0 y, \qquad (1.1.55)$$

где r_1 и r_0 определяются (1.1.49).

Приведём это уравнение к форме Коши (1.1.23).

Введём переменную $x_{p1} = \tau u - r_1 y$ и запишем (1.1.55) в виде

$$\dot{x}_{p1} = -\frac{1}{\tau}x_{p1} + \left(r_0 - \frac{r_1}{\tau}\right)y, \quad u = \frac{1}{\tau}x_{p1} + \frac{r_1}{\tau}y. \qquad (1.1.56)$$

Этот реализуемый регулятор и разрешает задачу синтеза.

Приведём численное решение задачи синтеза. Пусть имеем следующие параметры объекта, внешнего возмущения, цели управления и времени регулирования

$$a_{21} = -d_0 = -200, \quad a_{22} = -d_1 = -30, \quad \bar{f} = 10, \quad y^* = 0.01, \quad t^*_{рег} = 0.15. \qquad (1.1.57)$$

Определим на основе (1.1.46), (1.1.47), (1.1.52) значения коэффициентов уравнения качества

$$\tilde{\psi}_0 = s_1 s_2 = 10^3, \quad s_1 = 20, \quad s_2 = 50, \quad \tilde{\psi}_1 = 70, \quad \tau = 10^{-2}. \qquad (1.1.58)$$

Решим систему (1.1.54) и получим искомые параметры регулятора

$$g_1 = 10^{-2}, \quad g_0 = 1.4, \qquad r_1 = -36, \quad r_0 = -720. \qquad (1.1.59)$$

Отметим, что величина τ была принята недостаточно малой и поэтому g_0, r_1 и r_0 несколько отличаются от соответствующих значений 1, -40, -800, получаемых на основе (1.1.49).

Кстати, здесь можно пояснить необходимость требования малости числа τ. Дело в том, что уравнение качества (1.1.38) содержит неизвестный (до решения задачи синтеза) полином $g(s)$. Если

$$\psi(s) = (\tau s + 1)\left(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right). \qquad (1.1.60)$$

то, поскольку, при достаточно малых τ,

$$g(s) \approx \tau s + 1, \qquad (1.1.61)$$

запишем уравнение качества как

$$(\tau s+1)\left(s^2+\tilde{\psi}_1 s+\tilde{\psi}_0\right) y_к = (\tau s+1) f.$$

Сократим в нём полином $(\tau s+1)$ и получим уравнение качества

$$\left(s^2+\tilde{\psi}_1 s+\tilde{\psi}_0\right) y_к = f,$$

не содержащее полинома $g(s)$.

В заключение приведём уравнение регулятора

$$g_1\dot{u}+g_0 u = r_1\dot{y}+r_0 y \tag{1.1.62}$$

(где для общности $g_1 \neq \tau$, $g_0 \neq 1$), записанное в форме ««вход-выход»», к форме Коши

$$\dot{x}_{p1} = a_{p11}x_{p1}+b_{p1}y, \tag{1.1.63}$$

$$u = d_{p1}x_{p1}+f_p y, \tag{1.1.64}$$

где, аналогично (1.1.56),

$$a_{p11} = -\frac{g_0}{g_1}, \quad b_{p1} = r_0-\frac{g_0 r_1}{g_1}, \quad d_{p1} = \frac{1}{g_1}, \quad f_p = \frac{r_1}{g_1}. \tag{1.1.65}$$

■

1.2. Частотное управление

1.2.1. Управление при неизвестных параметрах объекта

Рассмотрим объект с неизвестными параметрами (объект типа B). Его можем представить себе некоторым устройством с известными точками приложения управляющего и возмущающего воздействий и точкой выхода. Известна также размерность пространства его состояний и некоторые свойства.

Задача 1.2.1. Задача регулирования объекта B. Найти параметры регулятора (1.1.23) такие, чтобы, начиная с некоторого момента времени t^*, выполнялось требование к точности (1.1.24). ■

Аналогично формулируется задача слежения.

Хорошо известны два пути решения этой задачи: идентификационный и метод ЛАЧХ.

Первый путь заключается в идентификации (определении) неизвестных параметров объекта (1.1.1), (1.1.2) и затем решении задачи 1.1.2.

Среди методов идентификации выделим частотный метод. Это вызвано тем, что неизвестны статистические характеристики случайного внешнего возмущения $f(t)$. Последнее затрудняет применение таких методов идентификации как метод наименьших квадратов и метод стохастической аппроксимации, а неизмеряемость $f(t)$ делает невозможной идентификацию с помощью настраиваемой модели.

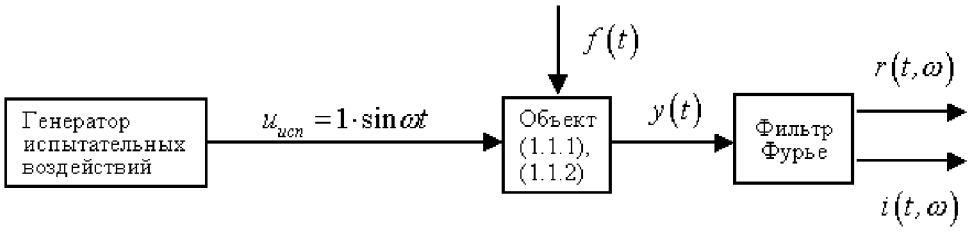

Рис. 1.2.1.

1.2.2. Частотнее параметры и их определение

Частотный метод идентификации содержит два этапа: первый этап – экспериментальное определение частотных параметров, второй этап – вычисление коэффициентов передаточной функции объекта по частотным параметрам.

Дадим формальное определение частотных параметров.

Определение 1.2.1. *Частотными параметрами* объекта (1.1.1), (1.1.2) с передаточной функцией

$$w(s) = \frac{b(s)}{d(s)} \tag{1.2.1}$$

называются $2n$ чисел

$$r^{\lambda}(\omega_k) = \mathrm{Re}w(\lambda + j\omega_k), \quad i^{\lambda}(\omega_k) = \mathrm{Jm}\, w(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.2.2}$$

■

При $\lambda = 0$ частотные параметры являются обычными значениями вещественной и мнимой частей передаточной функции объекта для различных частот ω_1, ω_2, ..., ω_n и обозначаются как

$$r(\omega_k) = \mathrm{Re}w(j\omega_k), \quad i(\omega_k) = \mathrm{Jm}\, w(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.2.3}$$

Структурная схема экспериментальной установки для определения частотных параметров (1.2.3) асимптотически устойчивого объекта (1.1.1), (1.1.2) на рис. 1.2.1.

Эта установка содержит генератор испытательных воздействий $u_{ucn} = 1 \cdot \sin \omega t$, поступающих на вход объекта. Сигнал с объекта $y(t)$ подаётся на фильтр Фурье, выходы которого

$$\hat{r}(t,\omega) = \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} y(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau, \quad \hat{i}(t,\omega) = \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} y(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \tag{1.2.4}$$

Эти функции обладают свойством

$$\lim_{t\to\infty} \hat{r}(t,\omega) = r(\omega), \quad \lim_{t\to\infty} \hat{i}(t,\omega) = i(\omega). \tag{1.2.5}$$

Фиксируя ω, получим, после n экспериментов на различных испытательных частотах ω_1, ω_2, ..., ω_n, параметры $r(\omega_k)$, $i(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

1.2.3. Частотный метод идентификации

Переходя ко второму этапу частотного метода идентификации представим передаточную функцию (1.2.1) при $s = j\omega$ в виде

$$w(j\omega) = \frac{l(\omega) + jv(\omega)}{l_d(\omega) + jv_d(\omega)} = r(\omega) + ji(\omega), \tag{1.2.6}$$

где

$$l(\omega) = \sum_{i=0}^{[\gamma/2]} (-1)^i b_{2i}\omega^{2i}, \qquad v(\omega) = \sum_{i=1}^{[\gamma+1/2]} (-1)^{i-1} b_{2i-1}\omega^{2i-1}; \tag{1.2.7}$$

$$l_d(\omega) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i d_{2i}\omega^{2i}, \qquad v_d(\omega) = \sum_{i=1}^{[n+1/2]} (-1)^{i-1} d_{2i-1}\omega^{2i-1}. \tag{1.2.8}$$

Символ $[\psi]$ означает целую часть ψ.

Из (1.2.6) следует система $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения параметров d_i $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ и b_i $\left(i = \overline{0, \gamma}\right)$

$$l(\omega_k) = l_d(\omega_k)r(\omega_k) - v_d(\omega_k)i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \tag{1.2.9}$$

$$v(\omega_k) = v_d(\omega_k)r(\omega_k) - l_d(\omega_k)i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.2.10}$$

<u>Пример 1.2.1.</u> Пусть параметры b_0, d_1, d_0 передаточной функции объекта (1.1.42)

$$w(s) = \frac{b_0}{s^2 + d_1 s + d_0} \tag{1.2.11}$$

неизвестны и пусть в результате первого этапа частотного метода идентификации экспериментально получены, на частотах

$$w_1 = 10, \quad w_2 = 30, \tag{1.2.12}$$

значения частотных параметров

$$r(\omega_1) = 10^{-3}, \quad r(\omega_2) = -5.4 \cdot 10^{-4}; \qquad i(\omega_1) = -3 \cdot 10^{-3}, \quad i(\omega_2) = -7 \cdot 10^{-4}. \tag{1.2.13}$$

Система (1.2.9), (1.2.10) имеет в рассматриваемом случае вид

$$b_0 = \left(d_0 - \omega_1^2\right) r(\omega_1) - d_1\omega_1 i(\omega_1), \qquad b_0 = \left(d_0 - \omega_2^2\right) r(\omega_2) - d_1\omega_2 i(\omega_2); \tag{1.2.14}$$

$$0 = d_1\omega_1 r(\omega_1) + \left(d_0 - \omega_1^2\right) i(\omega_1), \qquad 0 = d_1\omega_2 r(\omega_2) + \left(d_0 - \omega_2^2\right) i(\omega_2). \tag{1.2.15}$$

Уравнения (1.2.15) не зависят от b_0 и при численных значениях (1.2.12), (1.2.13) записываются как

$$10^{-2} d_1 - 3 \cdot 10^{-3} d_0 = -0.3, \quad -16.2 \cdot 10^{-3} d_1 - 7 \cdot 10^{-4} d_1 = -0.63. \tag{1.2.16}$$

Решим эти уравнения и получим

$$d_1 = 30, \quad d_0 = 200. \tag{1.2.17}$$

Подставляя эти числа в любое из уравнений (1.2.24), заключаем, что $b_0 = 1$. Аналогично можно идентифицировать коэффициент при внешнем возмущении f в (1.1.43). Решим затем систему (1.1.54) и получим искомые коэффициенты (1.1.59) регулятора, разрешающего задачу 1.2.1 для объекта (1.1.42) с неизвестными параметрами. ■

1.2.4. Метод ЛАЧХ

Идентификационный путь решения задачи 1.2.1 сводится к процедуре 1.2.1, которая состоит из операций:

1. экспериментальное определение частотных параметров;
2. идентификация (вычисление коэффициентов передаточной функции объекта);
3. построение уравнения качества;
4. аналитическое определение на основе тождества (1.1.41) коэффициентов передаточной функции регулятора $w_p(s) = \dfrac{r(s)}{g(s)}$ либо параметров уравнения (1.1.23).

■

Второй (неидентификационный) путь решения задачи 1.2.1 основан на методе ЛАЧХ. Для его применения должна быть задана амплитудно-частотная – $a(\omega)$ – и фазо-частотная – $\varphi(\omega)$ характеристики объекта во всём диапазоне частот

$$a(\omega) = |w(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg w(j\omega) \quad 0 \le \omega < \infty. \tag{1.2.18}$$

Если параметры объекта (1.1.1), (1.1.2) известны, то эти функции находятся аналитически. При неизвестных параметрах функции $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ можно получить экспериментально.

Действительно, используя экспериментальную установку, структурная схема которой приведена на рис. 1.2.1., получим (после достаточно большого числа экспериментов с различными испытательными частотами) функции $r(\omega)$ и $i(\omega)$, а затем вычислим

$$a(\omega) = \sqrt{r^2(\omega) + i^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg w(j\omega). \tag{1.2.19}$$

Кроме того, $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ можно получать и непосредственно по результатам эксперимента, если несколько изменить схему установки.

Метод ЛАЧХ является графоаналитическим. Первым его этапом является построение желаемой ЛАЧХ, которая аналогична уравнению качества. Отличие состоит

лишь в том, что уравнение качества задаёт эталонную модель замкнутой системы, а желаемая ЛАЧХ – эталонную модель разомкнутой системы.

Процедура 1.2.2. (Неидентификационный метод решения задачи 1.2.1) состоит из операций:

1. экспериментальное определение $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ при $\omega \in (0, \infty)$;

2. построение желаемой ЛАЧХ;

3. графоаналитическое определение передаточной функции регулятора $w_p(s) = \dfrac{r(s)}{g(s)}$.

■

Сравним изложенные два пути решения задачи 1.2.1. Достоинством первого пути является конечное (n) число экспериментов (конечное число значений частотной передаточной функции объекта), а его недостаток – операция идентификации параметров объекта, которая не вытекает из существа задачи синтеза, Достоинство второго пути – непосредственное (прямое) решение задачи синтеза регулятора по частотным характеристикам. Недостатком здесь является необходимость проведения экспериментов с бесконечно большим числом испытательных частот.

1.2.5. Метод частотных параметров

Рассмотрим теперь третий путь, основанный на *методе частотных параметров*. Этот путь содержит достоинства изложенных двух подходов. Поясним существо метода на примере.

Пример 1.2.2. Пусть в примере 1.1.1 параметры объекта (1.1.42) неизвестны, но экспериментально получены частотные параметры (1.2.13).

Построим уравнение качества, формализующее эту задачу и запишем тождество (1.1.53) для определения параметров регулятора. Разделив его на полином $s^2 + d_1 s + d_0$, получим соотношение

$$(g_1 s + g_0) - (r_1 s + r_0) w(s) = (\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) w(s), \tag{1.2.20}$$

в котором

$$w(s) = \frac{1}{s^2 + d_1 s + d_0}. \tag{1.2.21}$$

Полагая в (1.2.20) $s = j\omega$ и учитывая обозначение (1.2.6), запишем

$$\begin{gathered}(jg_1\omega + g_0) - (jr_1\omega + r_0)[r(\omega) + ji(\omega)] = \\ = \left[\tau(j\omega)^3 + (1 + \tilde{\psi}_1\tau)(j\omega)^2 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)j\omega + \tilde{\psi}_0\right][r(\omega) + ji(\omega)].\end{gathered} \tag{1.2.22}$$

Отсюда следуют соотношения для мнимой и вещественной частей (1.2.22)

$$\omega\, g_1 - r(\omega)\omega\, r_1 - i\,(\omega)\, r_0 = n_1(\omega), \tag{1.2.23}$$

$$g_0 + i\,(\omega)\omega\, r_1 - r(\omega)\, r_0 = n_2(\omega), \tag{1.2.24}$$

где

$$n_1(\omega) = \left[-\tau\omega^3 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)\omega\right] r(\omega) + \left[-(1+\tilde{\psi}_1\tau)\omega^2 + \tilde{\psi}_0\right] i\,(\omega), \tag{1.2.25}$$

$$n_2(\omega) = -\left[-\tau\omega^3 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)\omega\right] i\,(\omega) + \left[-(1+\tilde{\psi}_1\tau)\omega^2 + \tilde{\psi}_0\right] r(\omega). \tag{1.2.26}$$

Положим вначале $\omega = \omega_1$, а затем $\omega = \omega_2$ и получим систему из четырёх линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов g_0, g_1, r_0, r_1 искомой передаточной функции регулятора

$$\omega_1\, g_1 - r(\omega_1)\omega_1\, r_1 - i\,(\omega_1)\, r_0 = n_1(\omega_1), \tag{1.2.27}$$

$$\omega_2\, g_1 - r(\omega_2)\omega_2\, r_1 - i\,(\omega_2)\, r_0 = n_1(\omega_2), \tag{1.2.28}$$

$$g_0 + i\,(\omega_1)\omega_1\, r_1 - r(\omega_1)\, r_0 = n_2(\omega_1), \tag{1.2.29}$$

$$g_0 + i\,(\omega_2)\omega_2\, r_1 - r(\omega_2)\, r_0 = n_2(\omega_2). \tag{1.2.30}$$

Переходя к численному решению, вычислим по формулам (1.2.25), (1.2.26) значения

$$n_1(10) = -1.7, \quad n_1(30) = -0.78; \qquad n_2(10) = 3.2, \quad n_2(30) = 1.78. \tag{1.2.31}$$

Уравнения (1.2.27)-(1.2.30) принимают вид

$$\begin{aligned}
10\, g_1 &- \phantom{16.2 \cdot 10^{-2}}\, r_1 + 3 \cdot 10^{-3}\, r_0 = -1.7\ , \\
30\, g_1 &+ 16.2 \cdot 10^{-2}\, r_1 + 7 \cdot 10^{-4}\, r_0 = -0.78, \\
g_0 &- 3 \cdot 10^{-2}\, r_1 - 10^{-3}\, r_0 = 3.2\ , \\
g_0 &- 2.1 \cdot 10^{-2}\, r_1 + 5.4 \cdot 10^{-4}\, r_0 = 1.78.
\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим

$$g_0 = 1.4, \quad g_1 = 10; \qquad r_0 = -730, \quad r_1 = -36. \tag{1.2.32}$$

Нетрудно видеть, что эти числа совпадают с (1.1.59) для известных параметров объекта. ■

Процедура 1.2.3. **(Решение задачи 1.2.1, основанное на методе частотных параметров)** состоит из операций:

1. экспериментальное определение частотных параметров;
2. построение уравнения качества;
3. аналитическое определение (на основе соотношения вида (1.2.20.)) параметров передаточной функции регулятора.

■

1.3. Частотное адаптивное управление

1.3.1. Пуск и останов объекта

Продолжим рассмотрение задачи 1.2.1, уточнив некоторые свойства объекта. Для этого введем вектор $\boldsymbol{\xi}$, составив его из параметров объекта (1.1.1), (1.1.2), следующим образом

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\ a_{11}\ \cdots\ a_{1n}\ \cdots\ a_{n1}\ \cdots\ a_{nn}\ \middle|\ b_1\ \cdots\ b_n\ \middle|\ \tilde{m}_1\ \cdots\ \tilde{m}_n\ \middle|\ d_1\ \cdots\ d_n\ \right]. \tag{1.3.1}$$

Будем называть его *вектором вариантов*. Аналогично определим *граничные вектора вариантов*

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \left[\ \underline{\tilde{a}}_{11}\ \cdots\ \underline{\tilde{a}}_{1n}\ \cdots\ \underline{\tilde{a}}_{n1}\ \cdots\ \underline{\tilde{a}}_{nn}\ \middle|\ \underline{\tilde{b}}_1\ \cdots\ \underline{\tilde{b}}_n\ \middle|\ \underline{\tilde{\tilde{m}}}_1\ \cdots\ \underline{\tilde{\tilde{m}}}_n\ \middle|\ \underline{\tilde{d}}_1\ \cdots\ \underline{\tilde{d}}_n\ \right], \tag{1.3.2}$$

$$\overline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \left[\ \overline{\tilde{a}}_{11}\ \cdots\ \overline{\tilde{a}}_{1n}\ \cdots\ \overline{\tilde{a}}_{n1}\ \cdots\ \overline{\tilde{a}}_{nn}\ \middle|\ \overline{\tilde{b}}_1\ \cdots\ \overline{\tilde{b}}_n\ \middle|\ \overline{\tilde{\tilde{m}}}_1\ \cdots\ \overline{\tilde{\tilde{m}}}_n\ \middle|\ \overline{\tilde{d}}_1\ \cdots\ \overline{\tilde{d}}_n\ \right], \tag{1.3.3}$$

где, в частности, $\underline{\tilde{a}}_{ij}$ и $\overline{\tilde{a}}_{ij}$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ – элементы матриц $\underline{\tilde{A}}$ и $\overline{\tilde{A}}$ границ диапазонов (1.1.14) возможных значений параметров.

Таким образом,

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \le \boldsymbol{\xi} \le \overline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}. \tag{1.3.4}$$

Граничные вектора $\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}$ и $\overline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}$ описывают множество Ξ возможных значений параметров объекта. Таким образом, объект типа В – это объект (1.1.1), (1.1.2), для которого неизвестен вариант

$$\boldsymbol{\xi} \in \Xi. \tag{1.3.5}$$

Введём понятие пуска и останова физического объекта, математической моделью которого служат уравнения (1.1.1), (1.1.2).

Определение 1.3.1. Модель (1.1.1), (1.1.2) описывает динамику физического объекта от момента начала его работы, называемого *моментом пуска объекта* (t^{nyc}) до момента окончания работы, называемого *моментом останова объекта* (t^{ocm}). Физический объект может допускать однократный либо многократный пуск и останов, и тогда он характеризуется интервалом пуск-останов $[t^{nyc}, t^{ocm}]$ либо совокупностью интервалов $[t_i^{nyc}, t_i^{ocm}]$ $\left(i = \overline{1, \eta}\right)$, где η – число пусков. ■

Так, солнечная система, это система с однократным пуском и интервалом пуск-останов: $[-\infty, \infty]$; ракета, выводящая спутник на орбиту, также система с однократным пуском, а её интервал пуск-останов имеет длину в несколько минут. Космический аппарат многоразового использования – это система с многократными пусками и остановами и она характеризуется совокупностью интервалов пуск-останов.

Приведём ещё пример объекта, для которого понятия пуска и останова также носят буквальный смысл.

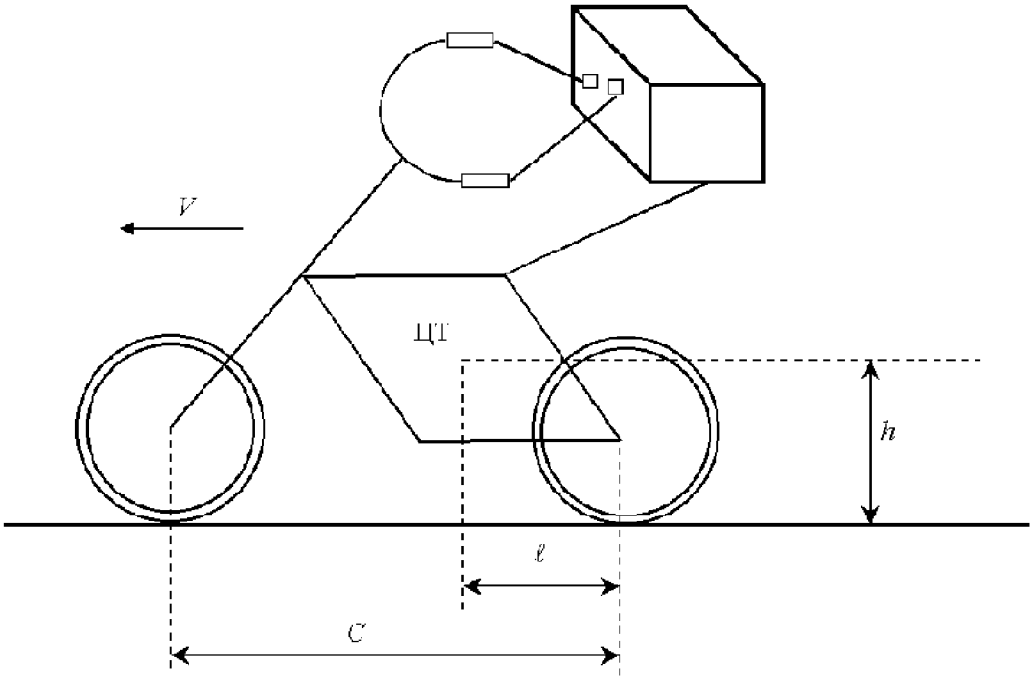

Рис. 1.3.1.

Пример 1.3.1. Рассмотрим объект управления – велосипед в задаче о роботе-велосипедисте, который должен поддерживать равновесие движущегося велосипеда, (см. рис. 1.3.1.).

Велосипед в первом приближении описывается уравнением

$$\ddot{y} - d_0 y = b_1 \dot{u} - b_0 u + f, \tag{1.3.6}$$

где $y(t)$ – угол отклонения рамы велосипеда от вертикальной плоскости (этот угол измеряется датчиком отклонения, выход датчика также будем обозначать $y(t)$), $u(t)$ – угол поворота руля велосипеда, $f(t)$ – внешнее возмущение, параметры

$$d_0 = gh^{-1}, \quad b_1 = lvh^{-1}c^{-1}, \quad b_0 = v^2 h^{-1} c^{-1}. \tag{1.3.7}$$

v – скорость велосипеда; g – ускорение силы тяжести; l , h – координаты центра тяжести; c – база велосипеда.

Пусть ««робот-велосипедист»», предназначенный для выработки сигнала в устройство поворота руля (этот сигнал для сокращения также будем обозначать как $u(t)$), отключён. Осуществим пуск велосипеда, толкнув его вперёд в момент времени t_1^{nyc} . В момент времени t_1^{ocm} велосипед остановится (упадёт). Повторим пуск (поднимем велосипед и снова его толкнём вперёд), возникнет второй интервал $[t_2^{nyc}, t_2^{ocm}]$, отличающийся от первого и т.д. ■

Здесь можно различить две ситуации. Во-первых, когда моменты пуска и останова зависят от экспериментатора и, во-вторых, когда эти моменты зависят от свойств

объекта. Так, в примере 1.3.1 остановы (падения) велосипеда определяются свойствами велосипеда, а не желаниями экспериментатора. Аналогично обстоит дело в случае с ракетой, выводящей спутник на орбиту. Моменты пуска и останова обитаемого корабля многоразового использования определяются экспериментатором.

1.3.2. Несамотождественные объекты

Далее предполагается, что моменты пуска и останова назначаются экспериментатором в каждом из интервалов пуск-останов. Физический объект описывается уравнениями (1.1.1), (1.1.2), которые могут отличаться лишь параметрами объекта. В связи с этим введём определение.

Определение 1.3.2. Физический объект называется *самотождественным* если вектор вариантов $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ остаётся неизменным на всех интервалах пуск-останов, и *несамотождественным*, если хотя бы на одном из этих интервалов имеет место вариант $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, отличный от варианта на других интервалах пуск-останов. ■

Пример 1.3.2. Велосипед, рассмотренный в примере 1.3.1, является самотождественным объектом, если толчок велосипеда вперёд осуществляется с одной и той же силой (скоростью v) при каждом пуске, а останов осуществляется до его падения. Если скорость v (сила толчка) будут различными (так как параметры (1.3.7) зависят от скорости) от пуска к пуску, то это уже несамотождественный объект. ■

До сих пор молчаливо предполагалось, что рассматриваемые в задаче 1.2.1 объекты самотождественны и поэтому использовалась процедура 1.2.2 её решения, которую на физическом уровне можно представить как процедуру 1.3.1.

1. На первом интервале (или нескольких первых интервалах) пуск-останов определяем экспериментально частотные параметры.

2. Вычисляем параметры регулятора.

3. Конструируем регулятор, описываемый уравнениями (1.1.23).

4. Осуществляем рабочий пуск (второй интервал пуск-останов) объекта с регулятором и достигаем через время $t^{рег}$ цели управления.

■

1.3.3. Структура адаптивного регулятора

Если объект несамотождественный, то может случиться так, что на втором интервале пуск-останов реализуется вариант $\boldsymbol{\xi}^{(2)} \in \Xi$ отличный от варианта $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ на первом интервале, и тогда, построенный по данным первого интервала, регулятор не позволит, вообще говоря, достичь цели управления на втором интервале, так как $\boldsymbol{\xi}^{(1)} \neq \boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

В этом случае необходимо осуществлять все операции процедуры 1.3.1 в одном физическом устройстве, называемом *частотным адаптивным регулятором.*

Адаптивный регулятор состоит из регулятора (1.1.23) и *частотного адаптера*, выходом которого являются коэффициенты регулятора (1.1.23).

Частотный адаптер содержит *генератор испытательных воздействий* и *фильтр*, необходимые для реализации первой операции процедуры 1.3.1. Адаптер включает в себя также *синтезатор* для определения коэффициентов регулятора.

Пример 1.3.3. Приведём структурную схему (рис. 1.3.2) системы с адаптивным регулятором для объекта (1.1.42) с неизвестными параметрами.

Запишем уравнения (1.2.4) фильтра Фурье для фиксированных частот ω_1 и ω_2 в дифференциальной форме, которая следует непосредственно из (1.2.4)

$$\dot{x}_{sk} = y \sin \omega_k t, \qquad \dot{x}_{ck} = y \cos \omega_k t \quad k = 1, 2, \tag{1.3.8}$$

$$r(t, \omega_k) = \frac{2}{t - t_0} x_{sk}, \qquad i(t, \omega_k) = \frac{2}{t - t_0} x_{ck} \quad k = 1, 2. \tag{1.3.9}$$

В силу (1.2.5) всегда существует время фильтрации $T_ф$, начиная с которого выполняются неравенства

$$|r(T_ф, \omega_k) - r(\omega_k)| \le \Delta r_k, \quad |i(T_ф, \omega_k) - i(\omega_k)| \le \Delta i_k \quad k = 1, 2, \tag{1.3.10}$$

где Δr_k , Δi_k $(k = 1, 2)$ – наперёд заданные числа, выражающие допустимые погрешности в определении частотных параметров.

По окончании фильтрации решаются уравнения (1.2.27)-(1.2.30), в которые вместо $r(\omega_k)$ и $i(\omega_k)$ следует подставить $r(T_ф, \omega_k)$ и $i(T_ф, \omega_k)$ $(k = 1, 2)$. В результате получим коэффициенты регулятора в форме ««вход-выход»». Затем по формулам (1.1.65) найдём параметры регулятора в форме Коши. Эти параметры передаются из синтезатора в регулятор. Если T_p – время работы синтезатора (время, затрачиваемое на решение уравнений (1.2.27)-(1.2.30) и (1.1.65), то время адаптации

$$t^* = T_ф + T_p + T_{дв}, \tag{1.3.11}$$

где $T_{дв} = T_{рег}$ – время движения объекта (1.1.42) с регулятором (1.1.63), (1.1.64) до момента достижения цели управления.

Отметим, что по истечении времени $T_ф + T_p$ адаптер отключается от регулятора и включается регулятор, что осуществляется с помощью ключей КЛ1 и КЛ2, КЛ3, показанных на рис. 1.3.2. ■

1.3.4. Алгоритм частотного адаптивного управления

Составим из параметров регулятора (1.1.23) вектор

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_p = \left[\begin{array}{ccccccc|ccc|ccc|c} a_{p11} & \cdots & a_{p1n} & \cdots & a_{pn1} & \cdots & a_{pnn} & b_{p1} & \cdots & b_{pn} & d_{p1} & \cdots & d_{pn} & f_p \end{array} \right]', \tag{1.3.12}$$

который будем называть *вектором настраиваемых коэффициентов.*

Компоненты этого вектора определяются $2n$ коэффициентами полиномов $g(s)$ и $r(s)$ регулятора в форме ««вход-выход»». Образуем из них *вектор существенных настраиваемых коэффициентов*

$$\boldsymbol{\xi}_p = \left[\begin{array}{cccc|cccc} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \end{array}\right]', \tag{1.3.13}$$

который в свою очередь выражается через *вектор оценок частотных параметров*

$$\boldsymbol{h}(T_\phi) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} r(T_\phi,\omega_1) & r(T_\phi,\omega_2) & \cdots & r(T_\phi,\omega_n) & i(T_\phi,\omega_1) & i(T_\phi,\omega_2) & \cdots & i(T_\phi,\omega_n) \end{array}\right]', \tag{1.3.14}$$

компоненты которого являются решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{r}(t,\omega_k) = \frac{1}{t-a}[-r(t,\omega_k) + 2y(t)\sin\omega_k t], \quad r(t_0,\omega_k) = r_{0k} \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.3.15}$$

$$\dot{i}(t,\omega_k) = \frac{1}{t-a}[-i(t,\omega_k) + 2y(t)\cos\omega_k t], \quad i(t_0,\omega_k) = i_{0k} \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.3.16}$$

Эти уравнения нетрудно получить если продифференцировать соотношения (1.2.4) и положить $a = t_0 - \varepsilon$, где ε – некоторое положительное число.

Будем полагать, что вектор начальных частотных параметров $\boldsymbol{h}(t_0)$, составленный из начальных условий r_{0k} и i_{0k} $\left(k = \overline{1,n}\right)$ уравнений (1.3.15), (1.3.16) принадлежит некоторому заданному множеству H_0

$$\boldsymbol{h}(t_0) \in H_0. \tag{1.3.17}$$

В качестве множества H_0 можно принять оценки частотных параметров.

Вектора $\boldsymbol{\xi}_p$ и $\boldsymbol{h}(T_\phi)$ связаны соотношением

$$M\boldsymbol{\xi}_p = \bar{\boldsymbol{n}}, \tag{1.3.18}$$

в котором матрица M и вектор $\bar{\boldsymbol{n}}$ составлены из компонент вектора $\boldsymbol{h}(T_\phi)$. Примером системы (1.3.18) служат уравнения (1.2.27)-(1.2.30).

Решим линейное матричное уравнение (1.3.18) и получим

$$\boldsymbol{\xi}_p = M^{-1}\bar{\boldsymbol{n}}. \tag{1.3.19}$$

Структурная схема системы с частотным адаптивным регулятором имеет в общем случае вид, показанный на рис. 1.3.2.

В этой схеме выход регулятора (1.1.23) u обозначен как $u_{упр}$ (u – управляющее), а ключи КЛ1 и КЛ2 отключают адаптер от регулятора после окончания фильтрации (в момент времени $t = T_\phi$) и решения (за время T_p) уравнения (1.3.18) с последующим нормированием вектора $\boldsymbol{\xi}_p$. Ключ КЛ3 включает регулятор.

Определение 1.3.3. Система (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23), (1.3.15) (1.3.16), (1.3.18) называется *адаптивной* по отношению к целевому условию (1.1.24), если для любого варианта $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ и любого $\boldsymbol{h}(t_0) \in H_0$ найдётся такой момент времени t^*, что для всех $t \geq t^*$ выполняется (1.1.24). ■

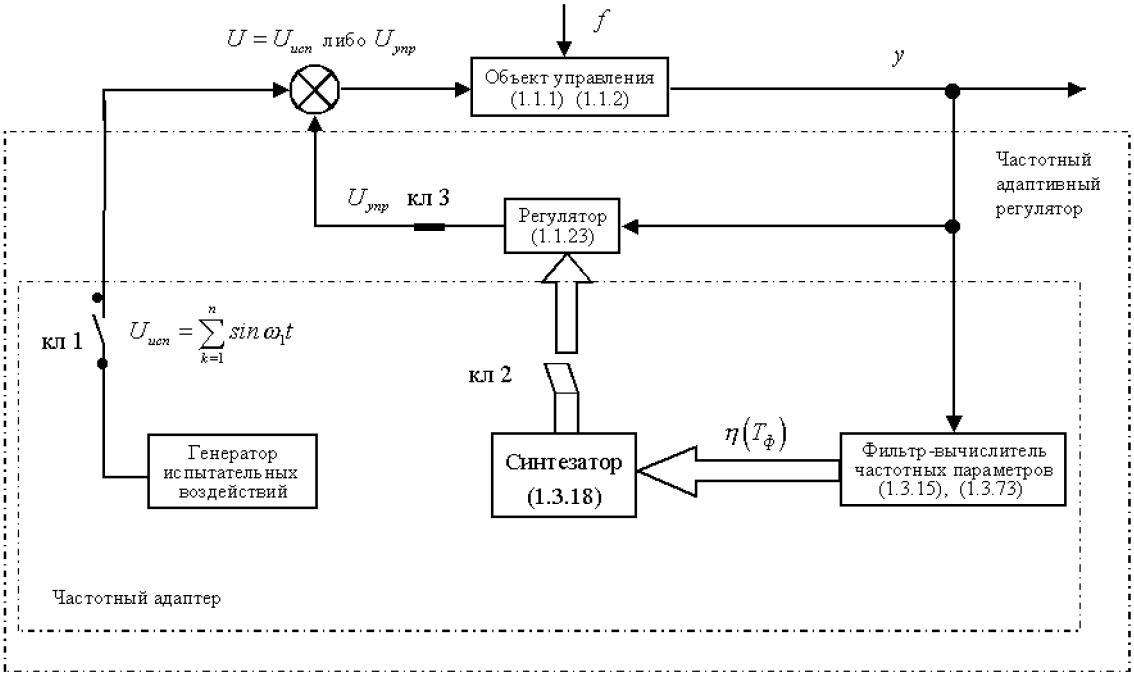

Рис. 1.3.2.

1.3.5. Многорежимные самотождественные объекты

Рассмотрим многорежимный объект (1.1.3) с известными параметрами (объект типа C). Его можно представить себе как многократно запускаемый объект типа A и тогда, записывая регулятор в виде

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p^{(k)}\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p^{(k)}y, \quad \boldsymbol{x}_p(t_k) = \boldsymbol{x}_{pk}^{(0)}, \\ u &= \boldsymbol{d}_p^{(k)}\boldsymbol{x}_p + f_p^{(k)}y, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1.3.20}$$

искать его параметры с помощью известных методов.

При этом в задаче 1.1.1, решаемой для каждого режима, время регулирования $t_{рег}^k$ $(k = 1, 2, \dots)$ должно выбираться из условия

$$t_{рег}^k \le t_k - t_{k-1}. \tag{1.3.21}$$

Переходя к многорежимным объектам с неизвестными параметрами (объектам типа D), введём *вектора режимных вариантов*

$$\boldsymbol{\xi}_t^k = \left\| \boldsymbol{\xi}_t^{k\prime}, t_k \right\|' \in \Xi_t^k \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.3.22}$$

составленные (аналогично (1.3.1)) из параметров объекта (1.1.3) в k-том режиме н момента окончания этого режима.

Граничные вектора $\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_t^k$ и $\overline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_t^k$, являющиеся оценками параметров и времени k-того режима, определяют множества Ξ_t^k возможных значений векторов ξ_t^k $(k = 1, 2, \dots)$.

Рассмотрим случай, когда число режимов конечно и равно æ. Тогда, если интервал

$$[t_0, t_{æ-1}] \in [t^{нус}, t^{ост}] \tag{1.3.23}$$

и многорежимный объект является самотождественным (неизвестные вектора режимных вариантов сохраняются при каждом пуске), то для определения коэффициентов регулятора (1.3.20) можно применить метод частотных параметров, если

$$T_{ф}^{*k} \leq t_k - t_{k-1}, \tag{1.3.24}$$

где $T_{ф}^{*k}$ – предельное время фильтрации (время определения частотных параметров) в k-том режиме.

Неравенство (1.3.24) выделяет множество многорежимных объектов, для которых применим метод частотных параметров.

1.3.6. Многорежимные несамотождественные объекты

Пусть теперь многорежимный объект несамотождественен (неизвестные вектора режимных параметров отличаются при различных пусках объекта). В этом случае естественно использовать частотный адаптивный регулятор, приведённый на рис. 1.3.2. Однако здесь есть ряд особенностей.

Во-первых, частотный адаптер для несамотождественного однорежимного объекта (объекта типа В) отключается (КЛ1 и КЛ2) по окончании фильтрации и расчёта коэффициентов регулятора и с этого момента к объекту подключается регулятор (КЛ3).

Для многорежимного объекта регулятор и адаптер должны работать одновременно, за исключением первого режима, когда сохраняется схема рис. 1.3.2.

Во-вторых, гармоническое испытательное воздействие, поступающее на вход объекта, содержит сигнал $u_{исп} = \sum_{i=1}^{n} \sin \omega_i t$, вырабатываемый генератором испытательных воздействий и гармонические составляющие $u_{упр}^{гарм}$ сигнала $u_{упр}$, снимаемого с выхода регулятора. Поэтому для определения фактического испытательного воздействия

$$u_{исп}^{фак} = u_{исп} + u_{упр}^{гарм} \tag{1.3.25}$$

необходима фильтрация сигнала с выхода регулятора.

В-третьих, поскольку на вход объекта поступает вместо $u_{исп} = \sum_{i=1}^{n} \sin \omega_i t$ сигнал (1.3.25), который можно записать как

$$u_{исп}^{фак} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \sin \omega_i t + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cos \omega_i t, \tag{1.3.26}$$

то выходами фильтра Фурье будут функции

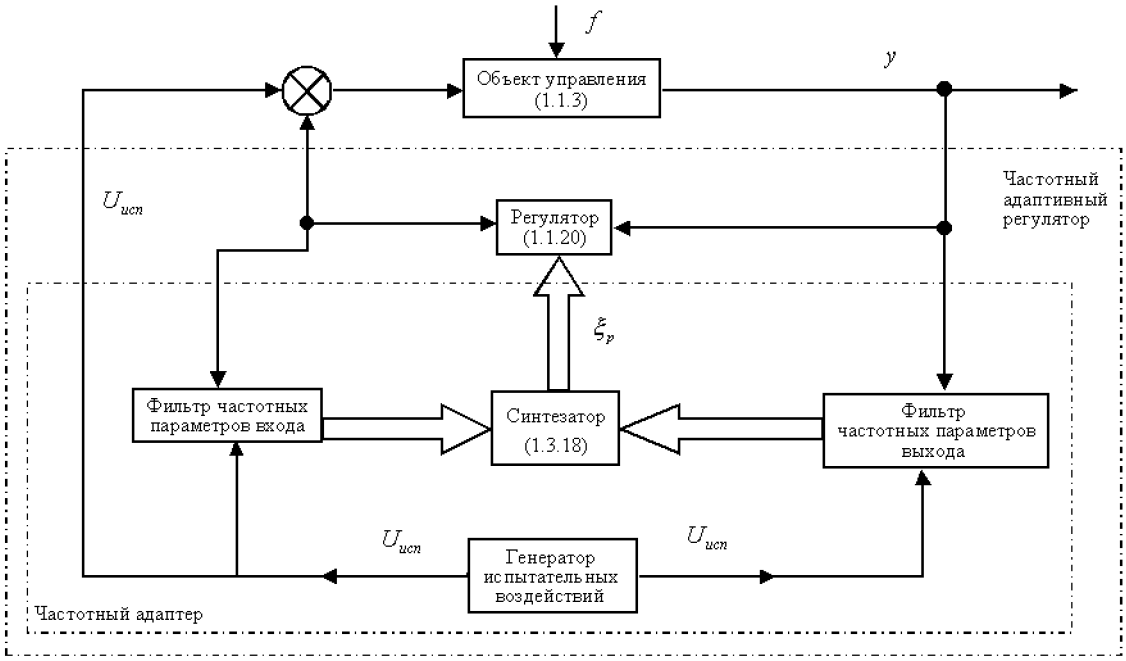

Рис. 1.3.3.

$\hat{\alpha}_i(t)$, $\hat{\beta}_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, обладающие свойствами

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\alpha}_i(t)=\alpha_i,\quad \lim_{t\to\infty}\hat{\beta}_i(t)=\beta_i\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.3.27}$$

Числа α_i и β_i связаны с частотными параметрами $r(\omega_i)$ и $i(\omega_i)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ соотношениями

$$r(\omega_i)=\frac{\nu_i\alpha_i+\gamma_i\beta_i}{\nu_i^2+\gamma_i^2},\quad i(\omega_i)=\frac{\nu_i\beta_i-\gamma_i\alpha_i}{\nu_i^2+\gamma_i^2}\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.3.28}$$

Параметры α_i и β_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ описывают (при достаточно больших t) гармоническую составляющую $y^{зар}(t)$ выхода $y(t)$ объекта

$$y^{зар}(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sin\omega_i t+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cos\omega_i t. \tag{1.3.29}$$

Эти числа зависят как от свойств объекта, так и от параметров ν_i и γ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ испытательного воздействия (1.3.26). Будем называть α_i и β_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *частотными параметрами выхода* объекта, возбуждённого испытательным воздействием (1.3.26) с коэффициентами ν_i и γ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, которые назовём *частотными параметрами входа* объекта.

Структурная схема частотного адаптивного регулятора для многорежимного объекта приведена на рис. 1.3.3.

На этом рисунке $\boldsymbol{\xi}_p^i$ – вектор настраиваемых коэффициентов (1.3.12) в i-том режиме. Для простоты полагаем, что моменты t_k $(k = 1, 2, \dots)$ перехода с режима на режим известны. Сигнал с генератора испытательных воздействий используется в фильтрах входа и выхода объекта для построения функций $y(t)\sin\omega_i t$, $y(t)\cos\omega_i t$ с использованием фактических (а не расчётных) частот, создаваемых генератором.

Фильтры входа и выхода объекта функционируют в соответствии с уравнениями (1.3.15), (1.3.16), где следует заменить $r(t, \omega_i)$ на $\alpha_i(t)$, а $i(t, \omega_i)$ на $\beta_i(t)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, а для фильтров входа – $y(t)$ на $u_{упр}(t)$.

В синтезаторе вычисляются на основе (1.3.28) частотные параметры объекта, решаются уравнения (1.3.18) и формируются вектора $\boldsymbol{\xi}_p^k$ $(k = 1, 2, \dots)$ коэффициентов регулятора.

Приложения к главе 1

1.П. Параметрические возмущения систем автоматического управления

1.П.1. Параметрические возмущения. Их уровни

Далее для простоты будем рассматривать свободное движение системы (1.1.17), (1.1.18), (1.1.28), возбуждённое начальными отклонениями.

Уравнения (1.1.17), (1.1.18), (1.1.28) в этом случае принимают вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 \tag{1.П.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_p^{(0)}. \tag{1.П.2}$$

Начальные отклонения

$$\boldsymbol{x}^{(0)'}\boldsymbol{x}^{(0)} \le \delta^2, \quad \boldsymbol{x}_p^{(0)'}\boldsymbol{x}_p^{(0)} \le \delta_p^2, \tag{1.П.3}$$

где δ и δ_p – заданные числа.

Матрицы A и B объекта (1.П.1) представим как (1.1.11)

$$A = A^* + \Delta A, \quad B = B^* + \Delta B, \tag{1.П.4}$$

где A^* и B^* – известные матрицы чисел, элементы которых называются далее *расчтными* либо *номинальными параметрами*; ΔA и ΔB – неизвестные матрицы, которые называются *параметрическими возмущениями*.

Природа параметрических возмущений может быть различной: это неполное знание программного движения, на основе которого строятся уравнения объекта, изменение параметров при различных пусках объекта, старение его элементов, разброс параметров в пределах технологических допусков.

Можно различить два уровня параметрических возмущений: малый и большой.

Причиной малых параметрических возмущений является разброс параметров объекта в пределах технологических допусков, ««старение»» элементов. Большие параметрические возмущения вызываются существенным изменением режимов работы объекта, малой информацией о программном его движении.

Количественно малые возмущения определим неравенствами

$$|\Delta a_{ij}| < |a^*_{ij}|, \quad |\Delta b_{ik}| < |b^*_{ik}| \quad i,j = \overline{1,n} \quad k = \overline{1,m}, \tag{1.П.5}$$

где a^*_{ij}, b^*_{ik}, Δa_{ij}, Δb_{ik} $\left(i,j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}\right)$ – элементы матриц A^*, B^*, ΔA, ΔB – соответственно.

Большие параметрические возмущения определяются соотношениями

$$|\Delta a_{ij}| \gg |a^*_{ij}|, \quad |\Delta b_{ik}| \gg |b^*_{ik}| \quad i,j = \overline{1,n} \quad k = \overline{1,m}. \tag{1.П.6}$$

Среди малых возмущений выделим *инфинизимальные параметрические возмущения*, которые удовлетворяют условиям

$$|\Delta a_{ij}| < \varepsilon, \quad |\Delta b_{ik}| < \varepsilon \quad i,j = \overline{1,n} \quad k = \overline{1,m}, \tag{1.П.7}$$

где ε – произвольные сколь угодно малые числа, а среди больших параметрических возмущений выделим *параметрические возмущения с интервальной неопределнностью.*

Для этих возмущений

$$\Delta a^*_{ij} \le \Delta a_{ij} \le \Delta a^{**}_{ij}, \quad \Delta b^*_{ik} \le \Delta b_{ik} \le \Delta b^{**}_{ik} \quad i,j = \overline{1,n} \quad k = \overline{1,m}, \tag{1.П.8}$$

где Δa^*_{ij}, Δb^*_{ik} $\left(i,j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа, характеризующие нижнюю границу возможных значений параметров; Δa^{**}_{ij}, Δb^{**}_{ik} $\left(i,j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа – верхние грани значений параметров.

Наряду с системой (1.П.1), (1.П.2) будем рассматривать одномерную систему, в которой $y(t)$ и $u(t)$ являются скалярами $(r = m = 1)$. Одномерная система описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 \tag{1.П.9}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + b_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = d_p\boldsymbol{x}_p + f_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_p^{(0)}. \tag{1.П.10}$$

где $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}'$ – n-мерные вектора; $\boldsymbol{b}_p$, $\boldsymbol{d}'_p$ – n_p-мерные вектора; f_p – число.

Отметим, что не только объект, но и регулятор системы (1.П.1), (1.П.2) подвержен параметрическим возмущениям, вызванным неточной реализацией алгоритма управления (1.П.2), выходом из строя (поломкой) элементов регулятора и т.п. Однако, для простоты изложения ограничимся далее лишь параметрическими возмущениями объекта.

Для анализа устойчивости одномерной системы (1.П.9), (1.П.10) при параметрических возмущениях запишем её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \tag{1.П.11}$$

Это выражение следует из уравнения (1.1.38) если в нём положить $f = 0$.

Представим этот полином в несколько иной форме. Обозначая

$$d^c(s) = d(s)g(s), \quad k(s) = -b(s)r(s) \tag{1.П.12}$$

получим

$$d^u(s) = d^c(s) + k(s). \tag{1.П.13}$$

Полином $d^c(s)$ называется характеристическим полиномом разомкнутой системы (1.П.9),(1.П.10). Его нетрудно получить, если положить в (1.П.9), (1.П.10) $u = 0$ либо $y = 0$. Это означает размыкание системы на входе объекта либо регулятора соответственно. Операция размыкания может быть осуществлена также, если положить $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ либо $\boldsymbol{b}_p = \boldsymbol{0}$ и $f_p = 0$. При этих условиях $d^u(s) = d^c(s)$.

Полиномы, вещественные части корней которых отрицательны, далее будем называть *гурвицевыми полиномами.*

Из структуры полиномов (1.П.12) следует, что

$$d^c(s) = d^c_{n_c} s^{n_c} + d^c_{n_c-1} s^{n_c-1} + \cdots + d^c_1 s + d^c_0, \quad \left(d^c_{n_c} = 1\right) \tag{1.П.14}$$

$$k(s) = k_{n_c} s^{n_c} + k_{n_c-1} s^{n_c-1} + \cdots + k_1 s + k_0, \tag{1.П.15}$$

где

$$n_c = n + n_p. \tag{1.П.16}$$

1.П.2. Явление параметрической (аддитивной) компенсации

Реальные значения коэффициентов полиномов (1.П.14), (1.П.15) представляют собой сумму расчётных значений и параметрических возмущений

$$d^c_i = d^{*c}_i + \Delta d_i, \quad k_i = k^*_i + \Delta k_i \quad i = \overline{1, n_c}, \tag{1.П.17}$$

где числа d^{*c}_i и k^*_i $\left(i = \overline{1, n_c}\right)$ определяются матрицами A^*, A^*_p, векторами $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{b}^*_p$, $\boldsymbol{d}^*$, $\boldsymbol{d}^*_p$ и числом f^*_p, а параметрические возмущения Δd^c_i и Δk_i $\left(i = \overline{1, n_c}\right)$, характеристического полинома замкнутой системы $d^u(s)$ зависят от параметрических возмущений ΔA и $\Delta \boldsymbol{b}$.

Таким образом,

$$d^u(s) = d^{*u}(s) + \Delta d^u(s), \tag{1.П.18}$$

где

$$d^{*u}(s) = d^{*c}(s) + k^*(s) = \sum_{i=0}^{n_c} (d_i^{*c} + k_i^*)\, s^i, \tag{1.П.19}$$

$$\Delta d^u(s) = \Delta d^c(s) + \Delta k(s) = \sum_{i=0}^{n_c} (\Delta d_i^c + \Delta k_i)\, s^i. \tag{1.П.20}$$

Рассмотрим два случая связи коэффициентов полиномов $d^{*c}(s)$ и $k^*(s)$.

1 случай: коэффициенты полиномов $d^{*c}(s)$ и $k^*(s)$ удовлетворяют равенствам

$$k_{n_c-j}^* = -d_{n_c-j}^{*c} \quad j \in \overline{0,\gamma}, \quad \gamma \le n_c. \tag{1.П.21}$$

2 случай: коэффициенты полиномов $d^{*c}(s)$ и $k^*(s)$ связаны соотношениями

$$k_\rho^* = -d_\rho^{*c} + \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0,\alpha}, \quad \alpha \le n_c. \tag{1.П.22}$$

где ε_ρ^* – заданные положительные числа значительно меньше абсолютных значений чисел k_ρ^* и d_ρ^{*c}, $\left(\rho \in \overline{0,\alpha}\right)$.

Это можно записать как

$$\varepsilon_\rho^* \ll \left|k_\rho^*\right|, \left|d_\rho^{*c}\right| \quad \rho \in \overline{0,\alpha}. \tag{1.П.23}$$

Если выполняются равенства (1.П.21), то коэффициенты характеристического полинома

$$d^u(s) = d_{n_c}^u s^{n_c} + d_{n_c-1}^u s^{n_c-1} + \cdots + d_1^u s + d_0^u \tag{1.П.24}$$

имеют вид

$$d_{n_c-j}^u = 0 \quad j \in \overline{0,\gamma}. \tag{1.П.25}$$

Во втором случае коэффициенты

$$d_{n_c-\rho}^u = \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0,\alpha}. \tag{1.П.26}$$

Это означает, что расчётное значение по крайней мере одного из коэффициентов характеристического полинома получается в результате вычитания двух больших по модулю чисел.

Результатом вычитания является малое по величине число.

Параметрические возмущения могут оказаться больше этой разности, что приведёт (при соответствующих знаках параметрических возмущениях) к неустойчивости системы.

Последнее возможно, если

$$\left|\Delta d_\rho^c + \Delta k_\rho\right| > \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0,\alpha}. \tag{1.П.27}$$

В первом случае, когда выполняется (1.П.25), нарушение устойчивости системы может произойти при сколь угодно малых (инфинизимальных) параметрических возмущениях.

Равенства (1.П.21) выражают *явления полной параметрической (аддитивной) компенсации.* Когда имеют место соотношения (1.П.22), (1.П.23) будем говорить о *неполной параметрической (аддитивной) компенсации.*

Изложенное наводит на мысль, что каждая система автоматического регулирования должна характеризоваться некоторым показателем, определяющим допустимое отклонение её параметров от расчётных значений, при которых сохраняется её устойчивость. Такой показатель будем называть *степенью грубости.*

Определение П.1.1. Система автоматического регулирования имеет *нулевую степень грубости*, если сколь угодно малые параметрические возмущения могут привести к потери её асимптотической устойчивости. ■

Определение П.1.2. Система автоматического регулирования имеет *малую степень грубости*, если она может стать неустойчивой при малых (но конечных) параметрических возмущениях. Это определение можно перефразировать так, система имеет малую степень грубости (грубая в ««малом»»), если существуют положительные числа ε^*_{ij} , $\bar{\varepsilon}^*_{ik}$ $\left(i,j=\overline{1,n},\ \ k=\overline{1,m}\right)$, определяющие множество параметрических возмущений как

$$|\Delta a_{ij}| < \varepsilon^*_{ij}, \quad |\Delta b_{ik}| < \bar{\varepsilon}^*_{ik} \quad i,j=\overline{1,n} \quad k=\overline{1,m} \tag{1.П.28}$$

такие, что система сохраняет асимптотическую устойчивость. ■

Определение П.1.3. Если при параметрических возмущениях из заданных интервалов (1.П.8) система является асимптотически устойчивой, то она имеет *большую степень грубости* (грубая в ««большом»»). ■

Определение П.1.4. Если система сохраняет свойство асимптотической устойчивости при любых параметрических возмущениях, то она называется *грубой в ««целом»».* ■

Нетрудно заметить аналогию этих определений с соответствующими определениями теории устойчивости. Так, аналогом систем с нулевой степенью грубости являются неустойчивые системы и поэтому системы с нулевой степенью грубости далее будем называть для простоты *негрубыми системами.* Понятие грубости в ««малом»» аналогично понятие устойчивости в ««малом»», а грубость в ««большом»» – устойчивости в ««большом»» и т.д. Однако, это только аналогия, так как система грубая в ««малом»» может быть устойчивой в ««целом»», что имеет место в рассматриваемых здесь и далее линейных стационарных системах.

Равенство (1.П.21), описывающее явление полной параметрической (аддитивной) компенсации, выступает как *алгебраический критерий нулевой степени грубости*, а соотношения (1.П.22), (1.П.23) – это *алгебраический критерий малой степени грубости.*

1.П.3. Неявная параметрическая (аддитивная) компенсация

Соотношения (1.П.21) и (1.П.23) выражают наличие взаимно-уничтожающихся (либо почти взаимно-уничтожающихся) подобных членов при формировании полинома замкнутой системы $d^u(s)$.

Однако такое взаимное уничтожение подобных членов может происходить и при построении полиномов $b(s)$ и $r(s)$. Такие случаи будем называть явлением *неявной параметрической (аддитивной) компенсации.* Приведём пример такой компенсации.

Пример П.1.1. Пусть объект (1.П.9) описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + 3.01u, \quad \dot{x}_2 = 3x_1 - 10x_2 - 10u; \qquad y = x_1, \tag{1.П.29}$$

а регулятор (1.П.10) имеет вид

$$u = -100y. \tag{1.П.30}$$

На основе формул (2.1.10), (2.1.8) следующей главы построим

$$b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+10 & 3 \\ 3 & s+1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 3.01 \\ -10 \end{bmatrix} = 3.01s + 30.1 - 30 = 3.01s + 0.1; \tag{1.П.31}$$

$$d(s) = \det \begin{pmatrix} s+1 & -3 \\ -3 & s+10 \end{pmatrix} = s^2 + 11s + 1, \quad g(s) = 1, \quad r(s) = -100. \tag{1.П.32}$$

В соответствии с (1.П.12) заключаем, что

$$\begin{aligned} d^c(s) &= d(s) = s^2 + 11s + 1, \quad k(s) = 100(3.01s + 0.1), \\ d^u(s) &= d(s) + k(s) = s^2 + 312s + 11. \end{aligned} \tag{1.П.33}$$

Отсюда следует, что система (1.П.29), (1.П.30) – асимптотически устойчива.

Допустим теперь, что коэффициент 3.01 при управлении в первом из уравнений (1.П.29) отличается от расчётного на 0.6% и составляет 2.99.

Тогда

$$b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+10 & 3 \\ 3 & s+1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.99 \\ -10 \end{bmatrix} = 2.99s + 29.9 - 30 = 2.99s - 0.1,$$

а полином

$$d^u(s) = s^2 + 11s + 1 + 299s - 10 = s^2 + 310 - 10. \tag{1.П.34}$$

Причиной потери устойчивости при малых параметрических возмущениях в этой системе является неявная параметрическая компенсация, которая происходит при построении полинома $b(s)$, так как свободный член этого полинома является результатом вычитания близких по абсолютной величине чисел 30.1 и 30 в (1.П.31). ■

1.П.4. Возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезируемых на основе методов пространства состояния

На первый взгляд может показаться, что параметрическая (аддитивная) компенсация (полная и неполная) – редкое явление, возникающее лишь при специальном (искусственном) подборе параметров объекта и регулятора. В действительности же параметрическая (аддитивная) компенсация часто присуща системам регуляторы которых получены с использованием методов пространства состояний (аналитического конструирования регуляторов, модального управления, систем с устройствами восстановления переменных состояний).

Это объясняется тем, что в постановке задач, решаемых этими методами, не содержится требования грубости синтезируемых на основе этих методов систем. Отметим, кстати, что в классическом методе синтеза – методе ЛАЧХ в косвенной форме содержится требование грубости, как ограничение наименьших запасов устойчивости по фазе и модулю.

Ниже в п. 1.П.5-1.П.7 показана возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезированных на основе процедур АКОР и модального управления. Кроме того, в п. 1.П.6 показано, что эквивалентные (в смысле сохранения характеристического полинома) преобразования системы, связанные с восстановлением (наблюдением) переменных состояния, является неэквивалентными, в смысле грубости исходной и преобразованной систем.

1.П.5. Системы с непосредственным устройством восстановления

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 - a_2 x_1 + b_2 u, \quad \dot{x}_2 = x_3 - a_1 x_1 + b_1 u, \quad \dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 u. \tag{1.П.35}$$

Для этого объекта найдём на основе того или иного метода синтеза регулятор

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \tag{1.П.36}$$

при котором система (1.П.35), (1.П.36) асимптотически устойчива. Пусть реализация этого регулятора затруднена тем, что из трёх переменных состояний, входящих в закон управления (1.П.36), непосредственному измерению доступна лишь переменная x_1.

Таким образом

$$y = x_1. \tag{1.П.37}$$

В связи с этим возникает задача восстановления (наблюдения) переменных состояний x_2 и x_3 по измеряемой переменной y и её производным.

Одна из возможных процедур построения алгоритма восстановления заключается в следующем: дифференцируя (1.П.37) дважды в силу (1.П.35), получим систему алгебраических уравнений, разрешая которую относительно неизвестных x_2 и x_3 получаем алгоритм восстановления. Устройство, построенное на основе этого алгоритма, называется *непосредственным устройством восстановления.*

В рассматриваемом случае

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 - a_2 y + b_2 u, \tag{1.П.38}$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 - a_2\dot{y} + b_2\dot{u} = x_3 - a_1 y + b_1 u - a_2\dot{y} + b_2\dot{u}. \tag{1.П.39}$$

Отсюда следует алгоритм восстановления

$$x_2 = \dot{y} + a_2 y - b_2 u, \quad x_3 = \ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1 y - b_1 u - b_2\dot{u}. \tag{1.П.40}$$

Подставим (1.П.40) в (1.П.36), получим уравнение регулятора

$$g_1\dot{u} + g_0 u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{1.П.41}$$

где

$$g_1 = c_3 b_2, \quad g_0 = 1 + c_2 b_2 + c_3 b_1; \tag{1.П.42}$$

$$r_2 = c_3, \quad r_1 = c_2 + c_3 a_2, \quad r_0 = c_1 + c_2 a_2 + c_3 a_1. \tag{1.П.43}$$

Рассмотрим теперь характеристический полином полученной системы (1.П.35), (1.П.37), (1.П.41). Для удобства построения этого полинома запишем на основе (1.П.35), (1.П.37) уравнение объекта относительно переменной y. Для этого продифференцируем первое уравнение системы (1.П.35) с учётом второго, затем продифференцируем полученное уравнение с учётом третьего уравнения этой системы. Тогда получим уравнение объекта

$$\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u. \tag{1.П.44}$$

Характеристический полином системы (1.П.41), (1.П.44) имеет вид

$$\begin{aligned} d^u(s) &= d_4^u s^4 + d_3^u s^3 + d_2^u s^2 + d_1^u s + d_0^u = \\ &= (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(g_1 s + g_0) - (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)(r_2 s^2 + r_1 s + r_0) = \\ &= (g_1 - b_2 r_2)s^4 + (a_2 g_1 + g_0 - b_1 r_2 - b_2 r_1)s^3 + (a_1 g_1 + a_2 g_0 - \\ &- b_0 r_2 - b_1 r_1 - b_2 r_0)s^2 + (a_0 g_1 + a_1 g_0 - b_0 r_1 - b_1 r_0)s + (a_0 g_0 - b_0 r_0). \end{aligned} \tag{1.П.45}$$

Учитывая (1.П.42), (1.П.43), получим

$$d_4^u = g_1 - b_2 r_2 = c_3 b_2 - b_2 c_3 = 0, \tag{1.П.46}$$

$$d_3^u = a_2 g_1 + g_0 - b_1 r_2 - b_2 r_1 = 1 + c_2 b_2 + c_3 b_1 + c_3 b_2 a_2 - b_2(c_2 + c_3 a_2) - b_1 c_3 = 1. \tag{1.П.47}$$

Из (1.П.46) следует, что система (1.П.41), (1.П.44) обладает нулевой степенью грубости. Эта негрубая система теряет свойство асимптотической устойчивости при сколь угодно малых возмущениях параметра b_2. Действительно, параметр g_1 регулятора (1.П.41) содержит в соответствии с (1.П.43) расчётное значение b_2, а это же число b_2, входящее в $b_2 r_2$ в выражении (1.П.46) – это реализовавшееся в объекте значение этого параметра, которое может отличаться от расчётного. Другими словами b_2 дважды входит в выражение (1.П.46), однако оно реализуется различными устройствами: b_2 из $c_3 b_2$ – в регуляторе, а b_2 в произведении $b_2 c_3$ – в объекте.

Регуляторы вида (1.П.41) часто называют физически нереализуемыми, потому что в правой его части содержатся ««чистые»» производные измеряемой переменной, порядок которых превышает порядок левой части. Это обстоятельство учитывают при синтезе регуляторов и ищут (1.П.36) в виде дифференциального уравнения

$$\tilde{g}_2 \ddot{u} + \tilde{g}_1 \dot{y} + \tilde{g}_0 u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \tag{1.П.48}$$

где $\tilde{g}_i$ $\left(i = \overline{0,2}\right)$ – достаточно малые числа.

Используя алгоритм восстановления (1.П.40), получим на основе (1.П.48) уравнение регулятора

$$\tilde{g}_2 \ddot{u} + (\tilde{g}_1 + g_1)\dot{u} + (\tilde{g}_0 + g_0)u = r_2 \ddot{y} + r_1 \dot{y} + r_0 y, \tag{1.П.49}$$

где g_1, g_0, r_2, r_1, r_0 определяются как и ранее по формулам (1.П.42), (1.П.43).

Характеристический полином системы (1.П.44), (1.П.49)

$$\tilde{d}^u(s) = \tilde{d}^u_4 s^4 + \tilde{d}^u_3 s^3 + \tilde{d}^u_2 s^2 + \tilde{d}^u_1 s + \tilde{d}^u_0, \tag{1.П.50}$$

где

$$\tilde{d}^u_4 = \tilde{g}_1 + c_3 b_2 - b_2 c_3 = \tilde{g}_1, \tag{1.П.51}$$

$$\tilde{d}^u_3 = 1 + c_2 b_2 + c_3 b_1 + g_0 + c_3 b_2 a_2 + \tilde{g}_1 a_2 - b_2(c_2 + c_3 a_2) - b_1 c_3 = 1 + g_0 + \tilde{g}_1 a_2 \tag{1.П.52}$$

Из этих выражений следует, что система (1.П.44), (1.П.49) обладает малой степенью грубости, если

$$|c_3 b_2| \gg \tilde{g}_1 \tag{1.П.53}$$

либо

$$|c_2 b_2 + c_3 b_1 + c_3 b_2 a_2| \gg 1 + \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 a_2. \tag{1.П.54}$$

В заключение приведём уравнение (1.П.49) к виду (1.П.23). В связи с этим введём переменные

$$x_{p1} = \tilde{g}_2 u - r_2 y, \quad x_{p2} = \tilde{g}_2 \dot{u} + (\tilde{g}_1 + g_1)u - r_2 \dot{y} - r_1 y. \tag{1.П.55}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x}_{p1} = x_{p2} + (\tilde{g}_1 + g_1)u - r_1 y. \tag{1.П.56}$$

Подставим второе из выражения (1.П.55) в (1.П.56) и получим

$$\dot{x}_{p2} = -(\tilde{g}_0 + g_0)u + r_0 y. \tag{1.П.57}$$

Исключая из этих уравнений переменную u, получим систему вида (1.1.23)

$$\dot{x}_{p1} = x_{p2} + \frac{\tilde{g}_1 + g_1}{\tilde{g}_2} x_{p1} + \left(\frac{\tilde{g}_1 + g_1}{\tilde{g}_2} r_2 - r_1 \right) y, \tag{1.П.58}$$

$$\dot{x}_{p2} = \frac{\tilde{g}_0 + g_0}{\tilde{g}_2} x_{p1} + \left(\frac{\tilde{g}_0 + g_0}{\tilde{g}_2} r_2 + r_0 \right) y, \tag{1.П.59}$$

$$u = \frac{1}{\tilde{g}_2} x_{p1} + \frac{r_2}{\tilde{g}_2} y. \tag{1.П.60}$$

Совокупность уравнений (1.П.35), (1.П.37), (1.П.58)-(1.П.60) образует систему вида (1.П.1), (1.П.2), которая при условии (1.П.53) либо (1.П.54) обладает малой степенью грубости.

1.П.6. Аналитически сконструированные системы

Рассмотрим следующую задачу об оптимальном управлении: пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\dddot{y} + d_2 \ddot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u. \tag{1.П.61}$$

Требуется определить коэффициенты регулятора

$$\sum_{i=0}^{\gamma_1} g_i u^{(i)} = \sum_{i=0}^{\gamma_2} r_i y^{(i)}, \tag{1.П.62}$$

такие, чтобы система (1.П.61), (1.П.62) была асимптотически устойчивой и на её движениях, возбуждённых произвольными начальными отклонениями

$$y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n0} \tag{1.П.63}$$

минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty \left(q_{11} y^2 + u^2 \right) dt \tag{1.П.64}$$

в котором q_{11} $\left(i = \overline{1,3}\right)$ – заданные положительные числа.

Это хорошо известная задача об аналитическом конструировании регуляторов (задача АКОР).

Опишем её решение на основе уравнений Эйлера-Пуассона классического вариационного исчисления.

Введём в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L = q_{11}y^2 + u^2 + \lambda(t)\left(\dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y - b_2\ddot{u} - b_1\dot{u} - b_0 u\right). \tag{1.П.65}$$

Тогда уравнение Эйлера-Пуассона примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial L}{\partial \dddot{y}} = 0, \tag{1.П.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{u}} = 0, \tag{1.П.67}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{1.П.68}$$

Подставляя в эти уравнения выражение (1.П.65), получим соответственно

$$2q_{11}y - d(-s)\lambda = 0, \quad 2u - b(-s)\lambda = 0, \quad d(s)y = b(s)u, \tag{1.П.69}$$

где

$$d(s) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0, \quad b(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0. \tag{1.П.70}$$

Исключая переменные u, λ получим уравнение для экстремалей вариационной задачи

$$[d(s)d(-s) + q_{11}b(s)b(-s)]y = 0. \tag{1.П.71}$$

Характеристический полином

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + q_{11}b(s)b(-s) \tag{1.П.72}$$

является полиномом чётных степеней s и поэтому его можно представить в форме

$$\Delta(s) = \delta(s)\delta(-s), \tag{1.П.73}$$

где $\delta(s) = s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0$ – полином, корни которого имеют отрицательные вещественные части.

Из условия асимптотической устойчивости следует, что функционал (1.П.64) со связями (1.П.61) достигает минимума на кривых, являющихся решением уравнения

$$(s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0)y = 0. \tag{1.П.74}$$

С другой стороны, характеристический полином системы (1.П.61), (1.П.62) имеет вид

$$\begin{aligned} d^u(s) = {} & (s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)\left(g_{\gamma_1}s^{\gamma_1} + g_{\gamma_1-1}s^{\gamma_1-1} + \dots + g_1 s + g_0\right) - \\ & - \left(\qquad b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right)\left(r_{\gamma_2}s^{\gamma_2} + r_{\gamma_2-1}s^{\gamma_2-1} + \dots + r_1 s + r_0\right). \end{aligned} \tag{1.П.75}$$

Очевидно, что оптимальный регулятор, разрешающий задачу АКОР, должен быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$\delta(s) = d^u(s). \tag{1.П.76}$$

Минимальные значения степеней γ_1 и γ_2, при которых это равенство может быть достигнуто, равны соответственно 1 и 2, таким образом регулятор имеет вид

$$g_1\dot{u} + g_0 u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{1.П.77}$$

а его параметры определяются на основе (1.П.76) путём сравнивания коэффициентов при одинаковых степенях

$$g_1 - b_2 r_2 = 0, \quad d_2 g_1 + g_0 - b_1 r_2 - b_2 r_1 = 1, \quad d_0 g_0 - b_0 r_0 = \delta_0, \tag{1.П.78}$$

$$d_1 g_1 + d_2 g_0 - b_0 r_2 - b_1 r_1 - b_2 r_0 = \delta_2, \quad d_0 g_1 + d_1 g_0 - b_0 r_1 - b_1 r_0 = \delta_1. \tag{1.П.79}$$

Решая эту систему из почти линейных алгебраических уравнений, получим искомые параметры регулятора (1.П.77).

Нетрудно заметить, что оптимальная в смысле функционала (1.П.64) система (1.П.61), (1.П.77) является негрубой.

Действительно, из структуры этой системы следует, что её характеристический полином является полиномом четвёртой степени. Однако, первое из уравнений (1.П.78) означает, что коэффициент при s^4 равен нулю.

1.П.7. Модальное управление

Приведём простой численный пример, показывающий как возникает явление неполной аддитивной компенсации при построении модального управления.

Пример П.1.7. Пусть имеется объект регулирования, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + 150\dot{y} + 0.4y = u. \tag{1.П.80}$$

Требуется найти управление, при котором корни характеристического уравнения системы регулирования были равны

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -0.5.$$

В соответствии с процедурой построения модального управления строим желаемый характеристический полином системы

$$d^u(s) = (s+1)(s+0.5) \tag{1.П.81}$$

и вычитаем из него характеристический полином объекта (1.П.80)

$$d^u(s) - d(s) = (s^2 + 1.5s + 0.5) - (s^2 + 150s + 0.4) = -148.5s + 0.1. \tag{1.П.82}$$

Тогда искомое управление

$$u = 148.5\dot{y} - 0.1y. \tag{1.П.83}$$

Очевидно, что при этом управлении корни характеристического полинома удовлетворяют требованию (1.П.81).

В рассматриваемом случае $d^c(s) = d(s)$, $k(s) = -148.5s + 0.1$.

Нетрудно видеть, что система (1.П.80), (1.П.83) обладает малой степенью грубости, так как

$$d_1 + k_1 = 150 - 148.5 = 1.5 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \ll |d_1|, |k_1|. \tag{1.П.84}$$

Выражения (1.П.84) означают, что если параметры d_1 объекта (либо параметры k_1 регулятора) реализованы с погрешностью 1.2%, то это может привести к неустойчивой работе системы. Убедимся, что малая степень грубости системы (1.П.80), (1.П.83) сохраняется и при реализуемой структуре уравнения (1.П.83).

Действительно, реализуемое уравнение регулятора имеет вид

$$g_1\dot{u} + u = -148.5\dot{y} + 0.1y, \tag{1.П.85}$$

где g_1 – достаточно малое число.

Характеристический полином системы (1.П.80), (1.П.85)

$$\begin{aligned} d^u(s) &= (s^2 + 150s + 0.4)(g_1 s + 1) - 148.5s + 0.1 = \\ &= g_1 s^3 + (150g_1 + 1)s^2 + (0.4g_1 + 150 - 148.5)s + (0.4 + 0.1). \end{aligned} \tag{1.П.86}$$

Число g_1 выбирается так, чтобы два корня этого полинома были близки к (1.П.81), а третий был значительно больше каждого из значений (1.П.81). При этих условиях g_1 должно быть значительно меньше 1, тогда, как видно из (1.П.86), явление неполной аддитивной компенсации сохраняется. ■

Заключение к главе 1

Подытожим содержание этой главы.

1. Введены виды объектов [объекты первого (1.1.20), (1.1.21) и второго (1.1.22) видов], определены цели управления (1.1.29) и (1.1.32) и внешние возмущения (1.1.5), для которых здесь и далее строится частотное управление.

2. Сформулирована задача 1.2.1 управления при неопределённых параметрах объекта и предложен подход к её решению на основе метода частотных параметров.

3. Введены понятия (определение 1.3.2) самотождественных и несамотождественных объектов. Для несамотождественных объектов предложен подход к формированию алгоритмов частотного адаптивного управления, использующий метод частотных параметров.

4. (П) Введены понятия степеней грубости систем автоматического управления и показано, что системы, синтезируемые с помощью методов пространства состояний, могут обладать малой степенью грубости.

2. Метод ЛАЧХ

Метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик уже пятое десятилетие служит основным орудием инженера при проектировании регуляторов для одномерных объектов с известными параметрами.

Это объясняется тем, что он в наглядной форме позволяет для многих случаев ответить на вопрос: как построить регулятор, который обеспечивает требования к

- точности (установившимся ошибкам),
- качеству (времени регулирования, перерегулированию),
- грубости (запасам устойчивости),
- реализуемости,
- сложности (размерности n_p вектора пространства состояний регулятора).

Предмет этой главы составляет следующее:

Во-первых, частотные показатели параметрической и структурной грубости, которые не используются в явной форме при постановке задач главы 1, однако регулятор должен обеспечивать необходимую грубость в смысле этих показателей.

Во-вторых, собственно метод ЛАЧХ, который излагается для читателей, не знакомых с классической частотной теорией регулирования. На таких читателей метод ЛАЧХ должен произвести большое впечатление наглядностью и простотой решения сложной задачи синтеза, математическое решение которой не получено до сих пор.

2.1. Анализ устойчивости

2.1.1. Уравнения ««вход-выход»»

Запишем уравнения объекта (1.1.1), (1.1.2) и регулятора (1.1.23) в форме ««вход-выход»», полагая при этом $f(t) = 0$ и $f_p(t) = 0$,

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u, \quad \gamma < n, \tag{2.1.1}$$

$$u^{(n_\mathrm{p})} + g_{n_\mathrm{p}-1}u^{(n_\mathrm{p}-1)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{\gamma_\mathrm{p}}y^{(\gamma_\mathrm{p})} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y, \quad \gamma_p \le n_p \tag{2.1.2}$$

где $y^{(i)}(t)$ – i-я производная $\left(i = \overline{0,n}\right)$ измеряемой переменной, $u^{(k)}(t)$ – k-я производная $\left(k = \overline{0,n_p}\right)$ управления. Начальные условия $y^{(i)}(t_0)$ $\left(i = \overline{0,n-1}\right)$, $u^{(k)}(t_0)$ $\left(k = \overline{0,n_p-1}\right)$ определяются векторами $\boldsymbol{x}(t_0)$ и $\boldsymbol{x}_p(t_0)$.

Если объект и регулятор полностью управляемы и наблюдаемы, то коэффициенты этих уравнений нетрудно получить сравнивая преобразования по Лапласу уравнений (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23), (2.1.1), (2.1.2).

Действительно, преобразуя (2.1.1), (2.1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$d(s)y = b(s)u, \quad g(s)u = r(s)y, \tag{2.1.3}$$

где

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0, \qquad b(s) = b_\gamma s^\gamma + \cdots + b_1 s + b_0, \tag{2.1.4}$$

$$g(s) = s^{n_\text{р}} + g_{n_\text{р}-1}s^{n_\text{р}-1} + \cdots + g_1 s + g_0, \qquad r(s) = \gamma_\rho s^\rho + \cdots + r_1 s + r_0. \tag{2.1.5}$$

С другой стороны, на основе (1.1.1), (1.1.2), (1.1.22) запишем

$$y(s) = \boldsymbol{d}(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}u(s) = \frac{\boldsymbol{d}\widetilde{(Es - A)}\boldsymbol{b}}{d(s)}u(s), \tag{2.1.6}$$

$$u(s) = \boldsymbol{d}_p(Es - A_p)^{-1}\boldsymbol{b}_p u(s) = \frac{\boldsymbol{d}_p\widetilde{(Es - A_p)}\boldsymbol{b}_p}{g(s)}y(s), \tag{2.1.7}$$

где $\widetilde{(Es - A)}$ – матрица, присоединённая к $(Es - A)$. Это означает, что $\widetilde{(Es - A)}(Es - A) = Ed(s)$,

$$d(s) = \det(Es - A). \tag{2.1.8}$$

Аналогично, $\widetilde{(Es - A_p)}$ – матрица, присоединённая к $(Es - A_p)$, а

$$g(s) = \det(Es - A_p). \tag{2.1.9}$$

Таким образом,

$$b(s) = \boldsymbol{d}\widetilde{(Es - A)}\boldsymbol{b}, \quad r(s) = \boldsymbol{d}_p\widetilde{(Es - A_p)}\boldsymbol{b}_p. \tag{2.1.10}$$

2.1.2. Анализ по параметрам

Пусть коэффициенты уравнений (2.1.1), (2.1.2) известны. Для анализа устойчивости сформируем её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \tag{2.1.11}$$

Коэффициенты полинома

$$d^u(s) = s^N + d^u_{N-1}s^{N-1} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0 \tag{2.1.12}$$

выражаются через параметры системы (2.1.1), (2.1.2).

Составим из этих коэффициентов матрицу размеров $N \times N$

$$H = \begin{pmatrix} d^u_{N-1} & d^u_{N-3} & d^u_{N-5} & \cdots & 0 \\ 1 & d^u_{N-2} & d^u_{N-4} & \cdots & 0 \\ 0 & d^u_{N-1} & d^u_{N-3} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & d^u_{N-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d^u_0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.13}$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Гурвица). Для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необходимо и достаточно, чтобы определитель Δ_n матрицы H ($\Delta_n = \det H$) и его диагональные миноры

$$\Delta_1 = d^u_{N-1}, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} d^u_{N-1} & d^u_{N-3} \\ 1 & d^u_{N-2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} d^u_{N-1} & d^u_{N-3} & d^u_{N-5} \\ 1 & d^u_{N-2} & d^u_{N-4} \\ 0 & d^u_{N-1} & d^u_{N-3} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-1} \tag{2.1.14}$$

были положительными. ■

Если все переменные состояния объекта доступны непосредственному измерению, то он описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u. \tag{2.1.15}$$

Регулятор для такого объекта имеет вид

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{2.1.16}$$

где $\boldsymbol{c}$ – n-мерный вектор чисел.

Уравнение (2.1.16) является частным случаем уравнений (1.1.23), когда $n_p = 0$, а число f_p заменяется вектором $\boldsymbol{c}'$. В связи с этим такой регулятор иногда называют безинерционным.

Для суждения об устойчивости системы (2.1.15), (2.1.16) при известных матрице A и векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ сформируем полином

$$d^u(s) = \det(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}') = s^n + d^u_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0, \tag{2.1.17}$$

и используем критерии Гурвица.

2.1.3. Анализ по амплитудно-фазовой характеристике

Передаточная функция разомкнутой системы (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$w_{раз}(s) = -\frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)}. \tag{2.1.18}$$

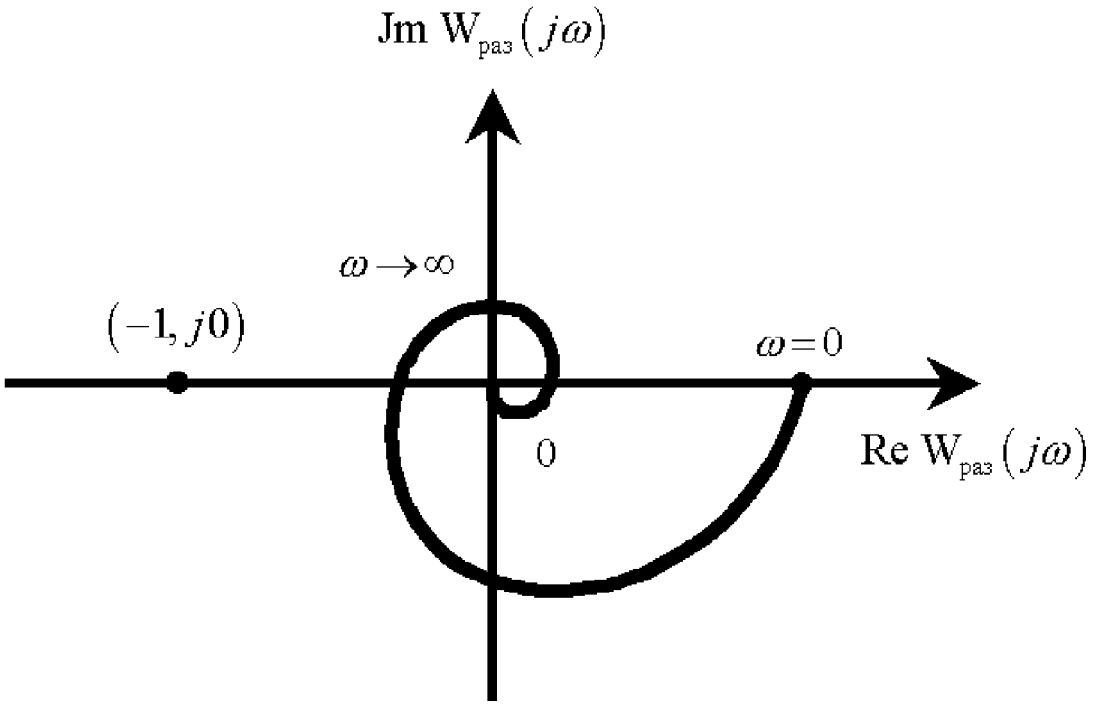

Рис. 2.1.1.

Число (p) корней характеристического полинома $d_c(s) = d(s)g(s)$ разомкнутой системы может быть различным. Будет различать два случая: $p = 0$ (разомкнутая система асимптотически устойчива) и $p \neq 0$ (разомкнутая система неустойчива).

Пусть параметры системы (2.1.1) (2.1.2) неизвестны, а известна частотная передаточная функция $w_{раз}(j\omega)$, полученная экспериментально в диапазоне частот $[0, \infty]$. При $p \neq 0$ для осуществления эксперимента необходимо стабилизирующее управление.

Определение 2.1.1. Амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы (диаграммой Найквиста) называется кривая в плоскости с осью ординат $\mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega)$ и осью абсцисс $\mathrm{Re} w_{раз}(j\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$. ■

На рис. 2.1.1. приведён пример амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Здесь же показана точка, лежащая по оси абсцисс на расстоянии равном 1 слева от начала координат. Далее она называется точкой $(-1, j0)$.

Теорема 2.1.2. (Критерий Найквиста) Если разомкнутая система асимптотически устойчива $(p = 0)$, то для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$. ■

В общем случае $(p \neq 0)$ условие устойчивости замкнутой системы заключается в следующем.

Теорема 2.1.3. Для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необ-

ходимо и достаточно, чтобы при возрастании ω от 0 до ∞ вектор, начинающийся в точке $(-1, j0)$ и скользящий своим концом по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, повернулся вокруг точки $(-1, j0)$ в направлении по часовой стрелке $p/2$ раз. ■

2.1.4. Структура передаточной функции

Представим передаточную функцию (2.1.18)

$$w_{раз}(s) = -\frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{k(s)}{d^c(s)} = \frac{k_\alpha s^\alpha + k_{\alpha-1}s^{\alpha-1} + \dots + k_1 s + k_0}{s^N + d^c_{N-1}s^{N-1} + \dots + d^c_1 s + d^c_0} \tag{2.1.19}$$

как произведение элементарных сомножителей

$$w_{раз}(s) = k\frac{s^q \prod\limits_{i=1}^{\alpha_1}\left(\check{T}_i s \pm 1\right)\prod\limits_{j=1}^{\alpha_2}\left(\hat{T}_j^2 s^2 \pm 2\hat{\xi}_j\hat{T}_j s \pm 1\right)}{s^\nu \prod\limits_{i=1}^{N_1}\left(T_i s \pm 1\right)\prod\limits_{j=1}^{N_2}\left(\tilde{T}_j^2 s^2 \pm 2\tilde{\xi}_j\tilde{T}_j s \pm 1\right)}, \tag{2.1.20}$$

где

$$\alpha = \gamma + \gamma_p, \quad N = n + n_p, \quad \alpha < N, \quad q + \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha, \quad \nu + N_1 + 2N_2 = N, \quad k = k_0/d_0.$$

Далее будем предполагать, что разомкнутая система обладает следующим свойством, которое неявно предполагалось в критерии Найквиста.

Свойство 2.1.1. Постоянные времени $\check{T}_i$, $\hat{T}_j$ $\left(i = \overline{1, \alpha_1},\ j = \overline{1, \alpha_2}\right)$ числителя передаточной функции (2.1.20) не совпадают с постоянными времени T_i, $\tilde{T}_j$ $\left(i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}\right)$ её знаменателя, а число $q = 0$, если $\nu \neq 0$ и $\nu = 0$, если $q \neq 0$, либо $\nu = q = 0$. ■

Другими словами, полагаем, что разомкнутая система полностью управляема и полностью наблюдаема.

Сомножители передаточной функции (2.1.20) называются элементарными (или типовыми) звеньями. Они имеют названия: k – усилительное звено (коэффициент усиления, коэффициент передачи), $1/s$ – интегрирующее, а s – дифференцирующее звенья, $1/(Ts \pm 1)$ – инерционное (апериодическое) звено, $1/(T^2 s^2 \pm 2\xi T s \pm 1)$ – колебательное звено, $Ts \pm 1$ – дифференцирующее звено первого порядка, $T^2 s^2 \pm 2\xi T s \pm 1$ – дифференцирующее звено второго порядка.

Определение 2.1.2. Передаточная функция называется *минимально-фазовой*, если её нули (корни уравнения $k(s) = 0$) и полюса (корни уравнения $d^c(s) = 0$) имеют отрицательные вещественные части. ■

Так, минимально-фазовая передаточная функция (2.1.20) имеет вид

$$w_{раз}(s) = k\frac{\prod\limits_{i=1}^{\alpha_1}\left(\check{T}_i s + 1\right)\prod\limits_{j=1}^{\alpha_2}\left(\hat{T}_j^2 s^2 + 2\hat{\xi}_j\hat{T}_j s + 1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{N_1}\left(T_i s + 1\right)\prod\limits_{j=1}^{N_2}\left(\tilde{T}_j^2 s^2 + 2\tilde{\xi}_j\tilde{T}_j s + 1\right)}, \tag{2.1.21}$$

где $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha$, $N_1 + 2N_2 = N$.

Если передаточная функция имеет хотя бы один нуль или полюс с неотрицательной вещественной частью, то она называется *неминимально-фазовой.*

2.1.5. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ)

Представим частотную передаточную функцию в показательной форме

$$w_{раз}(j\omega) = a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{2.1.22}$$

Определение 2.1.3. *Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой* называется кривая $a(\omega)$, построенная в плоскости о осью ординат $20\lg a(\omega)$ и осью абсцисс $\lg\omega$. Единица измерения и оси ординат – децибел, по оси абсцисс – рад/сек. ■

Утверждение 2.1.1. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика с известной точностью аппроксимируется конечным числом отрезков прямых и колоколообразных линий. ■

Для доказательства утверждения рассмотрим логарифмические амплитудно-частотные – $l(\omega)$ – и фазо-частотные – $\varphi(\omega)$ – характеристики каждого звена. Будем полагать, для простоты, эти звенья минимально-фазовыми.

Усилительное звено

$$l^{(1)}(\omega) = 20\lg k, \quad \varphi^{(1)}(\omega) = 0. \tag{2.1.23}$$

Интегрирующее звено

$$l^{(2)}(\omega) = -20\lg a, \quad \varphi^{(2)}(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \tag{2.1.24}$$

Эти характеристики приведены на рис. 2.1.2.

Нетрудно видеть, что ЛАЧХ интегрирующего звена имеет наклон $-20 дб/дек$.

Дифференцирующее звено

$$l^{(3)}(\omega) = 20\lg\omega, \quad \varphi^{(3)}(\omega) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.1.25}$$

ЛАЧХ этого звена имеет наклон $20 дб/дек$.

Инерционное (апериодическое) звено

$$l^{(4)}(\omega) = 20\lg\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, \quad \varphi^{(4)}(\omega) = -\operatorname{arctg}\omega T. \tag{2.1.26}$$

ЛАЧХ этого звена показана на рис. 2.1.3. пунктиром, который при $\omega T > 1$ и $\omega T < 1$ сливается со сплошными линиями. Таким образом, ЛАЧХ инерционного звена с известной точностью аппроксимируется двумя отрезками прямых.

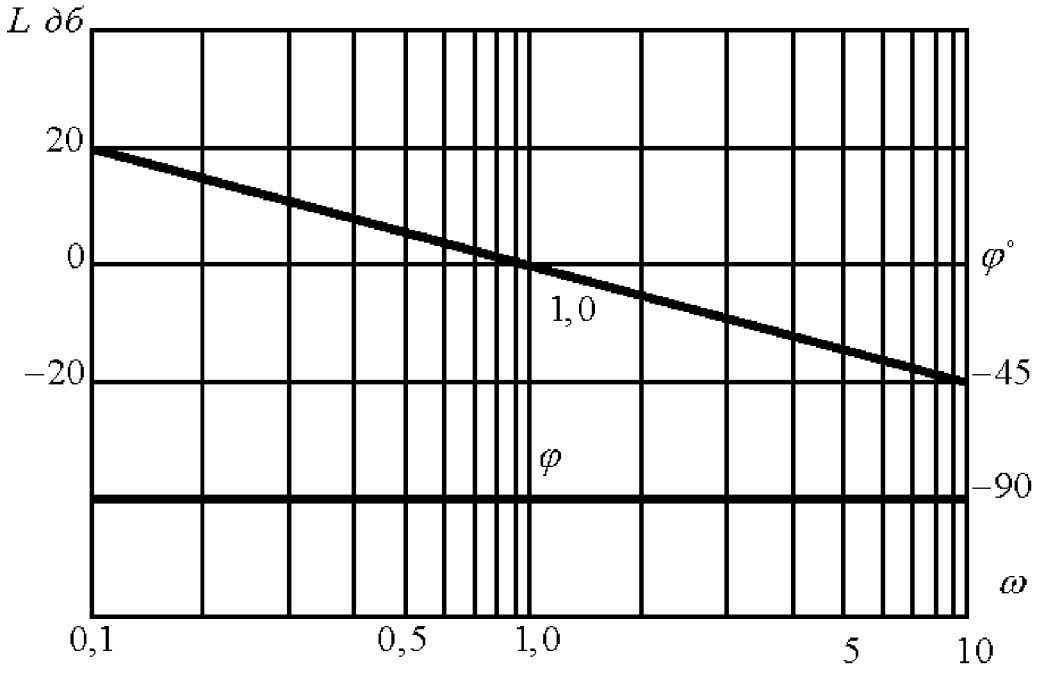

Рис. 2.1.2.

Колебательное звено

$$l^{(5)}(\omega) = 20\lg\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)+4\xi^2T^2\omega^2}}, \quad \varphi^{(5)}(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}. \qquad (2.1.27)$$

Из графиков, приведённых на рис. 2.1.4. следует, что ЛАЧХ аппроксимируется: а) при $\omega T < 1$ – отрезком горизонтальной прямой, б) в окрестности ωT – колоколообразной кривой, в) при $\omega T > 1$ – отрезком прямой с наклоном -40 дб/дек.

ЛАЧХ дифференцирующих звеньев первого и второго порядка являются зеркальным отображением относительно оси ωT ЛАЧХ инерционного и колебательного звеньев соответственно.

Для завершения доказательства представим на основе (2.1.21) амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы как

$$a(\omega) = ka^{(2)\nu}(\omega)a^{(3)q}(\omega)\prod_{i=1}^{N_1}a_i^{(4)}(\omega)\prod_{j=1}^{N_2}a_j^{(5)}(\omega)\prod_{i=1}^{\alpha_1}a_i^{(6)}(\omega)\prod_{j=1}^{\alpha_2}a_j^{(7)}(\omega), \qquad (2.1.28)$$

где $a^{(6)}(\omega)$ и $a^{(7)}(\omega)$ – АЧХ дифференцирующих звеньев первого и второго порядков соответственно.

Из этого выражения следует, что

$$20\lg a(\omega) = 20\lg k + \nu l^{(2)}(\omega) + q l^{(3)}(\omega) + \sum_{i=1}^{N_1} l_i^{(4)}(\omega) + \sum_{j=1}^{N_2} l_j^{(5)}(\omega) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} l_i^{(6)}(\omega) + \sum_{j=1}^{\alpha_2} l_j^{(7)}(\omega), \qquad (2.1.29)$$

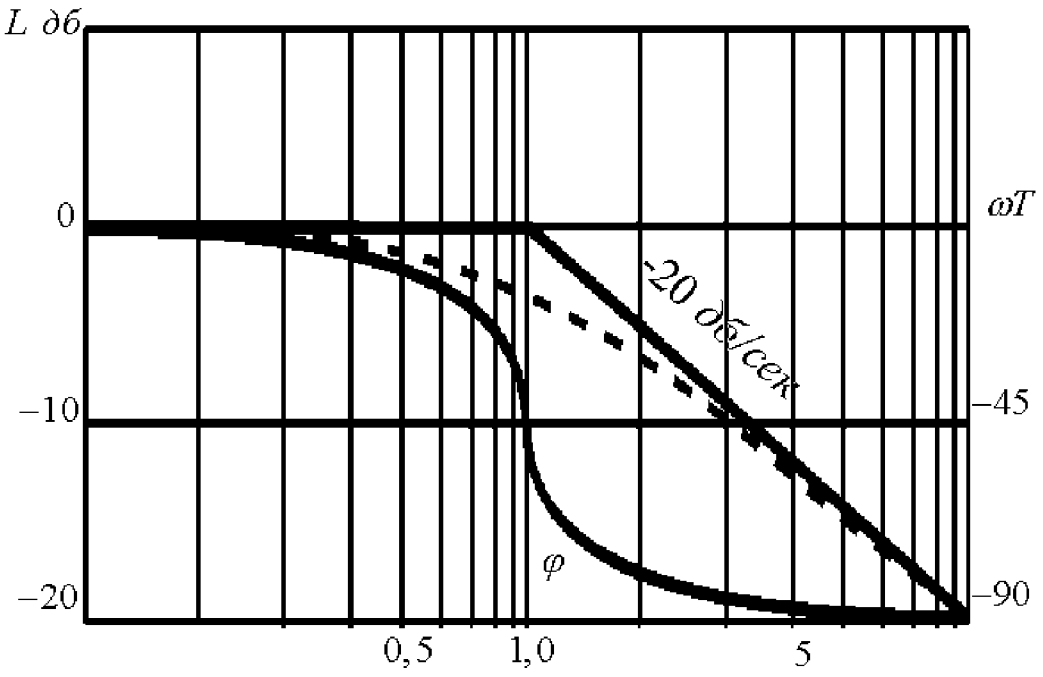

Рис. 2.1.3.

и таким образом, утверждение 2.1.1 доказано.

Фазо-частотная характеристика ФЧХ разомкнутой системы имеет аналогичный (2.1.29) вид

$$\varphi(\omega) = \nu\varphi^{(2)}(\omega) + q\varphi^{(3)}(\omega) + \sum_{i=1}^{N_1}\varphi_i^{(4)}(\omega) + \sum_{j=1}^{N_2}\varphi_j^{(5)}(\omega) + \sum_{i=1}^{\alpha_1}\varphi_i^{(6)}(\omega) + \sum_{j=1}^{\alpha_2}\varphi_j^{(7)}(\omega) =$$
$$= -\nu\frac{\pi}{2} + q\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{N_1}\operatorname{arctg} T_i\omega + \sum_{j=1}^{N_2}\operatorname{arctg}\frac{2\tilde{\xi}_j\tilde{T}_j\omega}{1-\tilde{T}_j\omega} + \sum_{i=1}^{\alpha_1}\operatorname{arctg}\tilde{T}_i\omega + \sum_{j=1}^{\alpha_2}\operatorname{arctg}\frac{2\hat{\xi}_j\hat{T}_j\omega}{1-\hat{T}_j\omega}. \tag{2.1.30}$$

Пример 2.1.1. Рассмотрим передаточную функцию

$$w(s) = \frac{2\cdot 10^3}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}. \tag{2.1.31}$$

ЛАЧХ, соответствующая этой функции, приведена на рис. 2.1.5.

Нетрудно видеть, что ЛАЧХ имеет изломы на частотах
$\omega_1 = \dfrac{1}{0.1} = 10\dfrac{1}{сек}$, $\omega_2 = \dfrac{1}{0.02} = 50\dfrac{1}{сек}$, $\omega_3 = \dfrac{1}{0.01} = 100\dfrac{1}{сек}$, $\omega_4 = \dfrac{1}{0.005} = 200\dfrac{1}{сек}$.
■

2.1.6. Анализ по ЛАЧХ и ФЧХ

Системы регулирования описывают различными способами: дифференциальными уравнениями с известными параметрами и частотными характеристиками, полученными экспериментально.

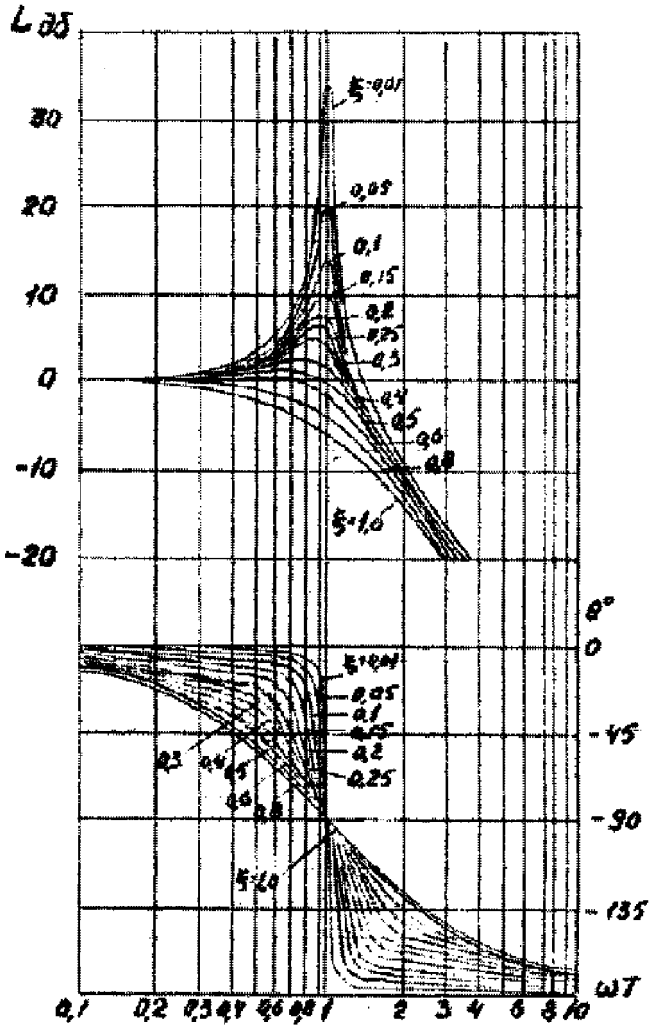

Рис. 2.1.4.

Промежуточное положение между этими способами занимает описание с помощью структурных схем. Структурная схема представляет собой совокупность элементарных звеньев и связей между ними. Постоянные времени звеньев и коэффициенты затухания (демпфирования) $\hat{\xi}_j$ $\left(j = \overline{1, \alpha_2}\right)$, $\tilde{\xi}_i$ $\left(i = \overline{1, N_2}\right)$ получают на основе дифференциальных уравнений либо по ЛАЧХ звеньев. В последнем случае постоянные времени определяются по точкам излома ЛАЧХ.

На основе структурной схемы строится передаточная функция разомкнутой системы (2.1.21). Её ЛАЧХ и ФЧХ получают в соответствии с (2.1.29), (2.1.30) простым суммированием ЛАЧХ и ФЧХ звеньев.

Для анализа устойчивости замкнутой системы по амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам разомкнутой используем теоремы 2.1.1 и 2.1.2.

Интерпретируем теорему 2.1.2 в терминах АЧХ и ФЧХ. Для этого рассмотрим рис. 2.1.6.

Зафиксируем на амплитудно-фазовой характеристике точку, которой соответ-

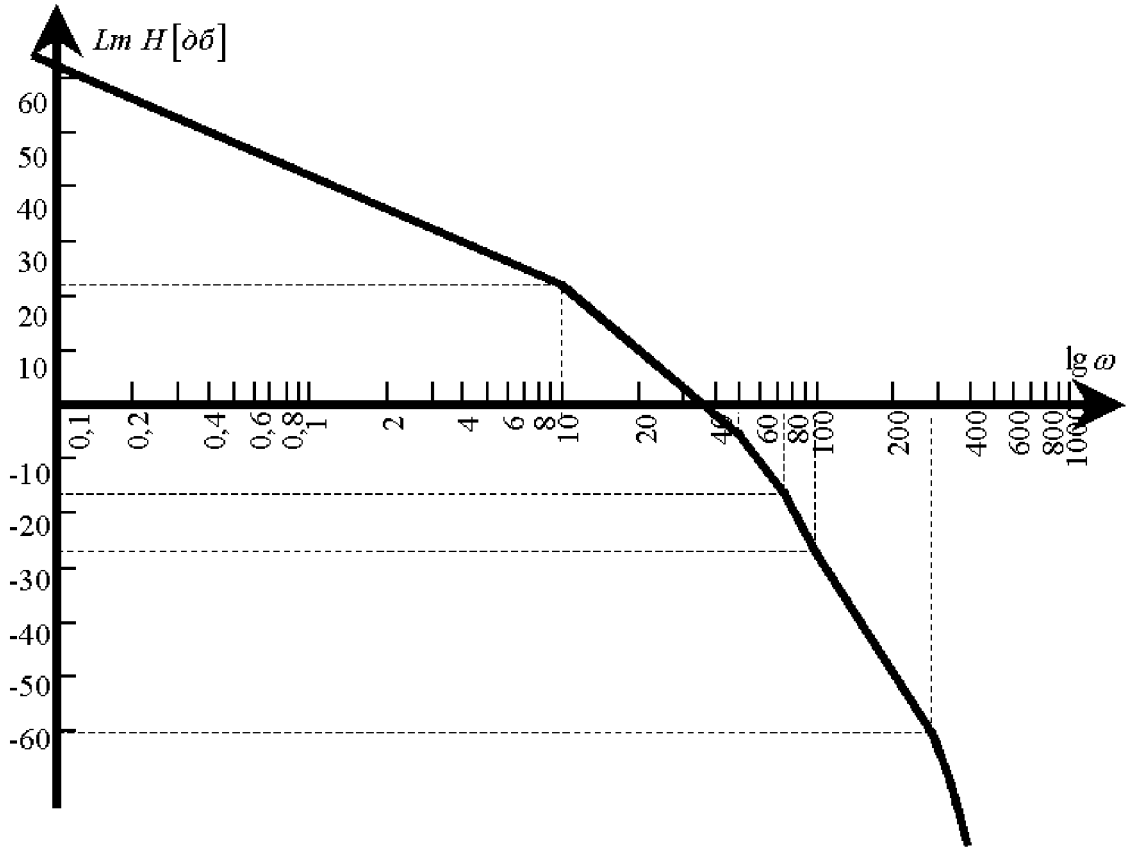

Рис. 2.1.5.

ствует частота ω_1. Длина отрезка, соединяющего эту точку с началом координат, равна $a(\omega_1)$, а угол между ним и положительной вещественной полуосью составляет $\varphi(\omega_1)$. При $\omega = \omega_2$ получим $a(\omega_2)$ и $\varphi(\omega_2)$ и т.д.

По теореме 2.1.2 анализ устойчивости сводится к исследованию отрезка $[-1, -\infty]$ вещественной оси. Если АФХ пересекает этот отрезок сверху вниз, то ФЧХ пересекает одну из линий $-\pi$, -3π, ... снизу вверх. Для анализа устойчивости представляют интерес лишь те участки ЛАЧХ, для которых $20\lg a(\omega) > 0$ $(a(\omega) > 1)$.

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на отрезках оси частот, где ЛАЧХ – положительна, разность числа переходов ФЧХ через линии $-\pi$, -3π, ... снизу вверх н сверху вниз равнялась нулю.

Пример 2.1.2. Пусть имеется система, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии описывается выражением (2.1.31).

Проанализируем устойчивость этой системы. Её фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0.1\omega - \operatorname{arctg} 0.02\omega - \operatorname{arctg} 0.01\omega - \operatorname{arctg} 0.005\omega$$

является монотонно-убывающей функцией, которая на интервале $\left[0, 42\frac{1}{сек}\right]$ положительности ЛАЧХ (см. рис. 2.1.5.) изменяется от 0 до $-244°$. В силу монотонности $\varphi(\omega)$ существует лишь один переход ФЧХ через линию $-\pi$ и поэтому замкнутая

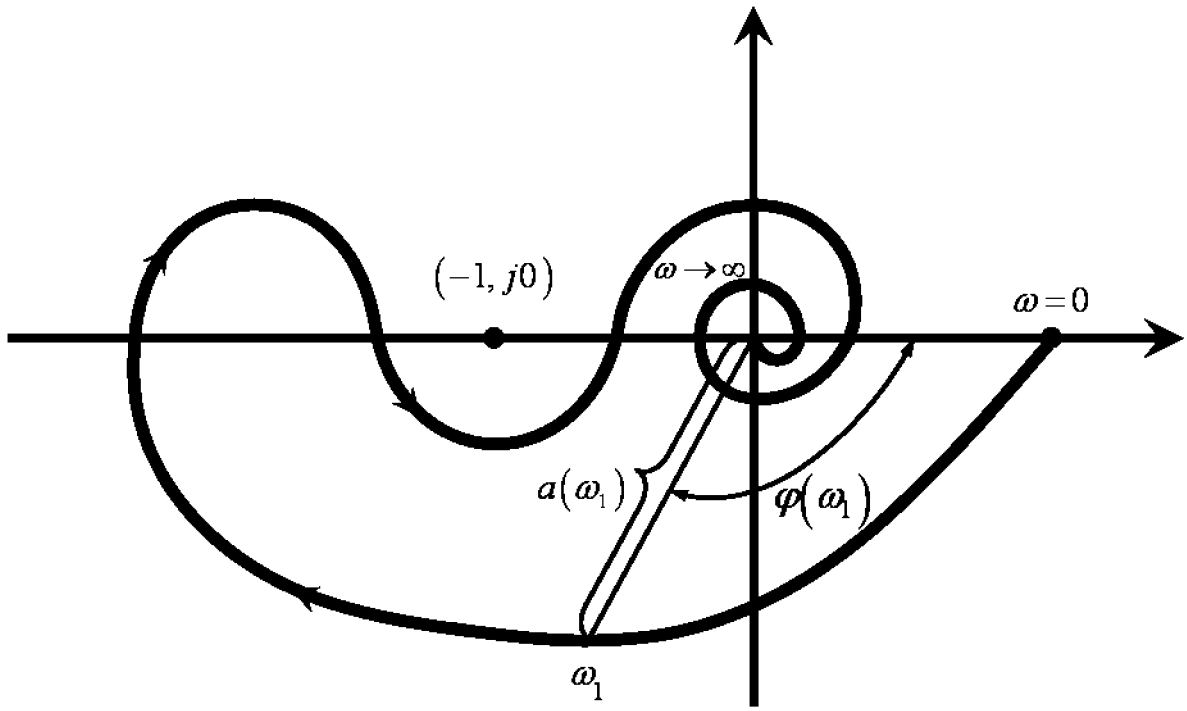

Рис. 2.1.6.

система неустойчива. ■

2.2. Грубость

2.2.1. Запасы устойчивости

Вновь рассмотрим рис. 2.1.1. АФХ не охватывает точку $(-1, j0)$ и, следовательно, замкнутая система устойчива. Однако может случиться так, что АФХ, оставаясь справа от точки $(-1, j0)$, приближается к ней сколь угодно близко. Такая система формально асимптотически устойчива. Однако, малые изменения параметров объекта или регулятора могут привести к такой деформации АФХ, что она охватит критическую точку.

Избежать описанной ситуации можно, если АФХ будет находиться на фиксированном расстоянии от точки $(-1, j0)$. Это обеспечит грубость рассматриваемой системы.

Одним из способов определения расстояния являются *запас устойчивости по фазе* $\varphi_з$ и *запас устойчивости по амплитуде* L. Для их описания введём *частоту среза* $\omega_{ср}$ и *фазовую частоту* (частоту перехода фазы) $\omega_ф$, определив их уравнениями

$$a(\omega_{ср}) = 1, \tag{2.2.1}$$

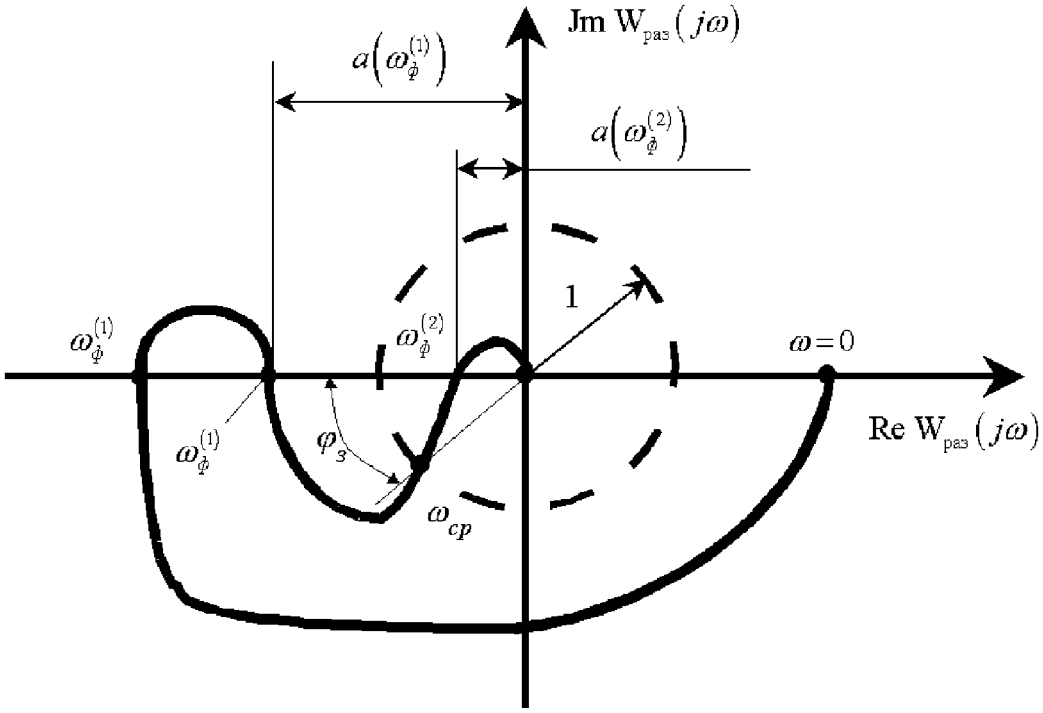

Рис. 2.2.1.

$$\begin{aligned} a\left(\omega_{ф}^{(1)}\right) &= -\pi \quad \text{при} \quad a\left(\omega_{ф}^{(1)}\right) > 1; \\ a\left(\omega_{ф}^{(2)}\right) &= -\pi \quad \text{при} \quad a\left(\omega_{ф}^{(2)}\right) < 1. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

При этом предполагается ««типичный»» случай, когда уравнение (2.2.1) имеет не более одного решения. Определение частот среза при неединственном решении этого уравнения, а также более строгое определение фазовых частот приведено в приложении 2.П.1.

Запас по фазе определяется выражением

$$\varphi_з = \pi + \varphi(\omega_{ср}) \tag{2.2.3}$$

а запас по амплитуде

$$L = \min\left\{a\left(\omega_{ф}^{(1)}\right),\ \frac{1}{a\left(\omega_{ф}^{(2)}\right)}\right\}. \tag{2.2.4}$$

Геометрическая интерпретация запасов устойчивости приведена на рис. 2.2.1.

Опыт разработки и эксплуатации различных систем регулирования позволили выработать рекомендации для проектирования.

Рекомендация 2.2.1. Запас устойчивости по фазе должен составлять по крайней мере $30°$, а запас устойчивости по амплитуде – по крайней мере 2 (6 дб). ■

2.2.2. Запретная область

Запасы устойчивости носят локальный характер и не исключают ситуации, показанной на рис. 2.2.3.

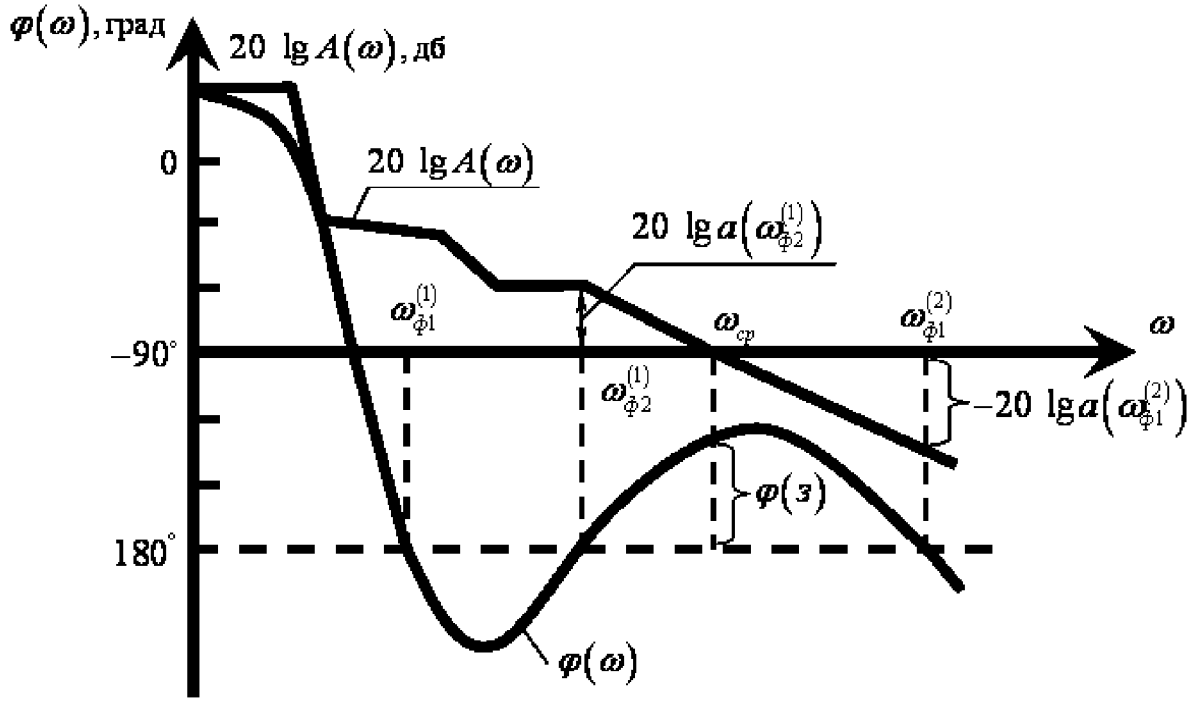

Рис. 2.2.2.

Здесь приведена АФХ, удовлетворяющая рекомендации 2.2.1. Однако она проходит вдоль дуги окружности единичного радиуса и вещественной оси. Достаточно малые изменения параметров системы (параметрические возмущения) могут привести к деформации АФХ, показанной на рис. 2.2.3. пунктиром. Таким образом, при малых отклонениях параметров от расчётных значений система становится неустойчивой.

Введём понятие *запретной области*, которая исключает описанную ситуацию. Запретная область представляет собой сектор, отмеченной штриховкой на рис. 2.2.4.

Размеры запретной области удовлетворяют рекомендации 2.2.1

$$\varphi_з \geq 30^\circ, \quad L \geq 2. \tag{2.2.5}$$

2.2.3. Радиус запасов устойчивости

Другой формой описания запретной области является запретный круг радиуса r с центром в точке $(-1, j0)$.

Этот круг показан на рис. 2.2.5.

Годограф АФЧХ не пересекает запретного круга, если для всех ω выполняется неравенство

$$[1 + \mathrm{Re} w_{раз}(j\omega)]^2 + \mathrm{Jm}^{\,2} w_{раз}(j\omega) > r^2. \tag{2.2.6}$$

Определение 2.2.1. *Радиусом запасов устойчивости* называется число

$$r = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sqrt{[1 + \mathrm{Re} w_{раз}(j\omega)]^2 + \mathrm{Jm}^{\,2} w_{раз}(j\omega)}. \tag{2.2.7}$$

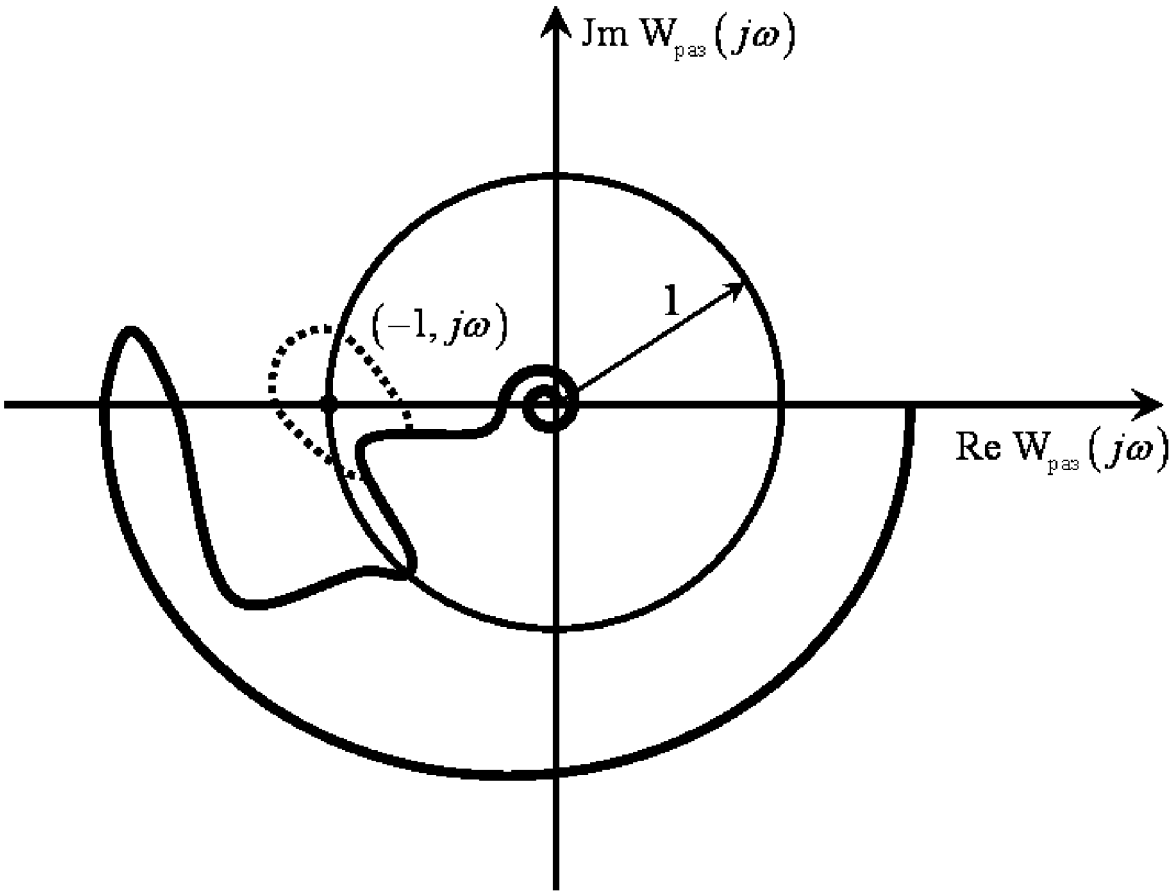

Рис. 2.2.3.

■

Выражение (2.2.7) можно записать в более компактных формах

$$r = \min_{0 \le \omega \le \infty} \sqrt{[1 + w_{раз}(j\omega)][1 + w_{раз}(-j\omega)]}, \tag{2.2.8}$$

либо

$$r = \min_{0 \le \omega \le \infty} |1 + w_{раз}(j\omega)|. \tag{2.2.9}$$

Заметим, что вычисление радиуса запасов устойчивости часто оказывается более сложным, чем вычисление запасов устойчивости. Действительно, для определения r необходимо найти значения $w_{раз}(j\omega)$ во всём диапазоне частот, а для вычисления φ_3 и L достаточно значения передаточной функции при фиксированных частотах, определяемых из (2.2.1), (2.2.2). Приближённое определение этих частот не вызывает затруднений.

Найдём связь между радиусом запасов устойчивости и запасами устойчивости по фазе и модулю. Непосредственно из рис. 2.2.5. следует, что

$$L = \min\left\{1 + r,\ \frac{1}{1 - r}\right\}, \tag{2.2.10}$$

$$\varphi_з = 2 \arcsin \frac{r}{2}. \tag{2.2.11}$$

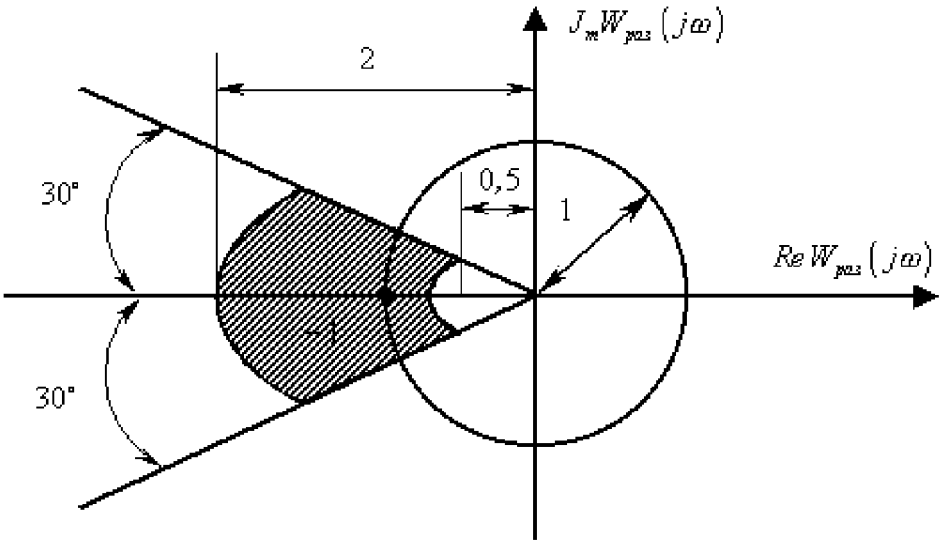

Рис. 2.2.4.

В таблице 2.2.1 приведены вычисленные по этим формулам запасы устойчивости по фазе и модулю при различных значениях радиуса запасов устойчивости.

Таблица 2.2.1

	r	$r = 0.5$	$r = 0.75$	$r = 1$
$\varphi_з \geq$	–	29°	44°	60°
$L \geq$	АФХ первого рода	2	4	∞
$L \geq$	АФХ второго рода	1.5	1.75	2

В таблице приводятся данные для АФХ первого и второго рода. Примерами таких АФХ служат кривые на рис. 2.2.1. и 2.1.5. соответственно. Строгое определение АФХ первого и второго рода содержится в приложении 2.П.1.

2.2.4. Структурная грубость

Передаточные функции объекта $w(s) = \dfrac{b(s)}{d(s)}$, регулятора $w_p(s) = \dfrac{r(s)}{g(s)}$ и разомкнутой системы $w_{раз}(s)$, используемые для анализа устойчивости системы будем называть *рабочими моделями* (*рабочими передаточными функциями*) объекта, регулятора и разомкнутой системы соответственно.

Они характеризуются *структурными показателями* и параметрами.

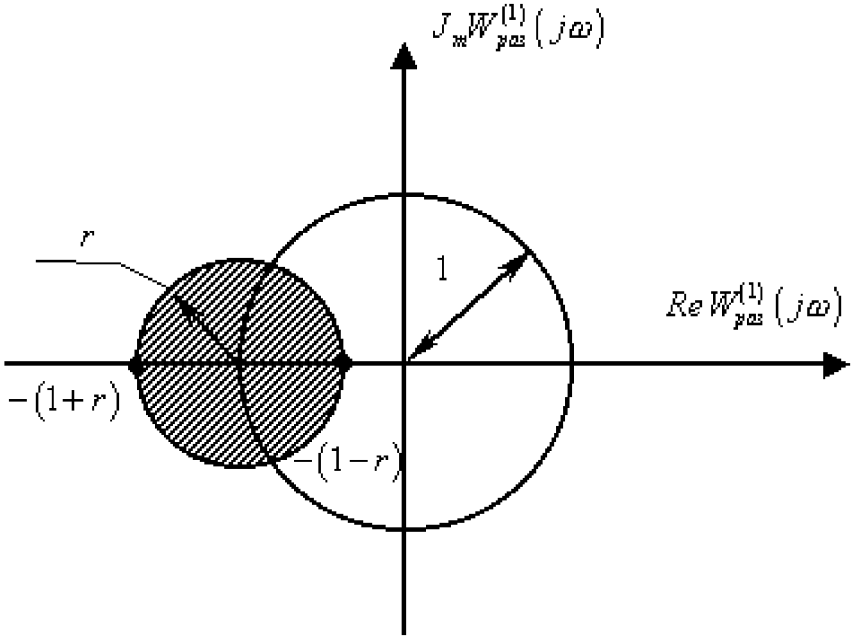

Рис. 2.2.5.

Так, передаточная функция объекта

$$w(s)=\frac{b(s)}{d(s)}=\frac{b_\gamma s^\gamma+b_{\gamma-1}s^{\gamma-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1 s+d_0}=k^0\frac{s^{q_0}\prod\limits_{i=1}^{\alpha_1^0}\left(\check{T}_i^0 s+1\right)\prod\limits_{j=1}^{\alpha_2^0}\left(\hat{T}_j^{0\,2}s^2+2\hat{\xi}_j^0\hat{T}_j^0 s+1\right)}{s^{\nu_0}\prod\limits_{i=1}^{N_1^0}\left(T_i^0 s+1\right)\prod\limits_{j=1}^{N_2^0}\left(\tilde{T}_j^{0\,2}s^2+2\tilde{\xi}_j^0\tilde{T}_j^0 s+1\right)} \tag{2.2.12}$$

(где $q^0+\alpha_1^0+\alpha_2^0=\gamma$, $\nu^0+N_1^0+N_2^0=n$, $k^0=b_0/d_0$) имеет структурные показатели n и γ, и параметры d_i, b_j $\left(i=\overline{0,n-1},\ \ j=\overline{0,\gamma}\right)$.

Наряду с рабочей моделью всегда существует *полная* либо *более точная (уточнённая) модель* объекта

$$w_{ym}(s)=\frac{b_{ym}(s)}{d_{ym}(s)}=\frac{b_{\gamma_{\text{ут}}}s^{\gamma_{\text{ут}}}+\cdots+(b_\gamma+\Delta b_\gamma)s^\gamma+\cdots+(b_1+\Delta b_1)s+(b_0+\Delta b_0)}{d_{n_{\text{ут}}}s^{n_{\text{ут}}}+\cdots+(1+\Delta d_n)s^n+\cdots+(d_1+\Delta d_1)s+(d_0+\Delta d_0)}, \tag{2.2.13}$$

которая имеет структурные показатели (n_{ym} и γ_{ym}) и параметры, отличающиеся от показателей и параметров рабочей модели.

При этом отличие параметров вызвано уточнением структуры. Поясним это обстоятельство. Пусть некоторая механическая конструкция описывается в предположении идеальной жёсткости её элементов передаточной функцией (2.2.12). Если учесть при построении передаточной функции и вычислении её параметров конечную жёсткость элементов, то такая уточнённая передаточная функция примет вид (2.2.13). Приращения Δd_i и Δb_j $\left(i=\overline{0,n-1},\ \ j=\overline{0,\gamma}\right)$ параметров вызваны учётом новых физических факторов, а не уточнением расчётов.

Уточнённую модель представим в форме

$$w_{ym}(s) = k^0_{ym} \frac{s^{q_0} \prod\limits_{i=1}^{\alpha^0_{1\text{ут}}} \left(\check{T}^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=1}^{\alpha^0_{2\text{ут}}} \left(\hat{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\hat{\xi}^0_j \hat{T}^0_j s + 1\right)}{s^{\nu_0} \prod\limits_{i=1}^{N^0_{1\text{ут}}} \left(T^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=1}^{N^0_{2\text{ут}}} \left(\tilde{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\tilde{\xi}^0_j \tilde{T}^0_j s + 1\right)}. \tag{2.2.14}$$

Частным случаем этой передаточной функции служит функция

$$w_{ym}(s) = \bar{k}^0 \frac{\prod\limits_{i=\alpha^0_1+1}^{\alpha^0_{1\text{ут}}-\alpha^0_1} \left(\check{T}^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=\alpha^0_2+1}^{\alpha^0_{2\text{ут}}-\alpha^0_2} \left(\hat{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\hat{\xi}^0_j \hat{T}^0_j s + 1\right)}{\prod\limits_{i=N^0_1+1}^{N^0_{1\text{ут}}-N^0_1} \left(T^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=N^0_2+1}^{N^0_{2\text{ут}}-N^0_2} \left(\tilde{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\tilde{\xi}^0_j \tilde{T}^0_j s + 1\right)} \cdot w(s) = w_{\text{воз}}(s) w(s), \tag{2.2.15}$$

которая описывает наиболее распространённые мультипликативные структурные возмущения рабочей модели (рабочей передаточной функции) (2.2.12). Эти возмущения описываются передаточной функцией

$$w_{\text{воз}}(s) = \bar{k}^0 \frac{\prod\limits_{i=\alpha^0_1+1}^{\alpha^0_{1\text{ут}}-\alpha^0_1} \left(\check{T}^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=\alpha^0_2+1}^{\alpha^0_{2\text{ут}}-\alpha^0_2} \left(\hat{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\hat{\xi}^0_j \hat{T}^0_j s + 1\right)}{\prod\limits_{i=N^0_1+1}^{N^0_{1\text{ут}}-N^0_1} \left(T^0_i s + 1\right) \prod\limits_{j=N^0_2+1}^{N^0_{2\text{ут}}-N^0_2} \left(\tilde{T}^{0\,2}_j s^2 + 2\tilde{\xi}^0_j \tilde{T}^0_j s + 1\right)}. \tag{2.2.16}$$

Уточнённые передаточные функции регулятора и разомкнутой системы имеют, для мультипликативных возмущений, вид

$$w_p(s) = w_{p.\text{возм}}(s) w_p(s), \tag{2.2.17}$$

$$w_{\text{раз}}(s) = w_{\text{раз.возм}}(s) w_{\text{раз}}(s). \tag{2.2.18}$$

Определение 2.2.2. Рабочая модель системы называется *структурно грубой*, если структурные возмущения не нарушают её асимптотической устойчивости. ■

На первый взгляд может показаться, что можно ввести аналогичное определение структурной грубости объекта (или регулятора), если заменить в определении 2.2.2 термин ««система»» на термин ««объект»» или ««регулятор»». Если так определить структурную грубость объекта, то окажется, что одна и та же рабочая передаточная функция (рабочая модель) объекта является структурно грубой при одних параметрах регулятора и структурно негрубой при других.

Это объясняется тем что структурные параметры рабочей модели объекта зависят от целей управления, для достижения которых используется регулятор с теми или иными параметрами. Поясним это на примере.

Пример 2.2.1. Пусть рабочая модель объекта описывается передаточной функцией

$$w(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}, \tag{2.2.19}$$

а уточнённая модель имеет вид

$$w_{ут}(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}. \tag{2.2.20}$$

Здесь структурное возмущение

$$w_{воз}(s) = \frac{1}{(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}.$$

Передаточные функции регулятора

$$w_p(s) = w_{р.ут}(s) = \text{const}.$$

Пусть

$$w_p(s) = -10. \tag{2.2.21}$$

Нетрудно убедиться, что передаточная функция

$$w_{раз}(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)} \tag{2.2.22}$$

свидетельствует об устойчивости замкнутой системы, а её уточнение

$$w_{раз.ут}(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}$$

подтверждает это заключение.

Пусть теперь

$$w_p(s) = -2 \cdot 10^3. \tag{2.2.23}$$

В этом случае передаточная функция

$$w_{раз}(s) = \frac{2 \cdot 10^3}{s(0.1s+1)} \tag{2.2.24}$$

по-прежнему приводит к суждению об устойчивости системы, но как показано в примерах 2.1.1 и 2.1.2. передаточная функция

$$w_{раз.ут}(s) = \frac{2 \cdot 10^3}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)} \tag{2.2.25}$$

соответствует неустойчивой системе. ■

Таким образом, рабочая модель объекта (2.2.19) выступает в первом случае как структурно-грубая, а во втором – структурно негрубой. Если же использовать определение 2.2.2, то теперь имеется две рабочих модели (2.2.22) и (2.2.24). Суждение об их структурной грубости однозначно: модель (2.2.22) – структурно грубая, а модель (2.2.24) – структурно негрубая. Для того, чтобы избежать последнего нужно принять в качестве рабочей модели уточнённую модель (2.2.25) и использовать не столь простой регулятор как (2.2.23).

2.2.5. Анализ структурно-параметрической грубости*

Часто модель разомкнутой системы является структурно грубой, но запасы устойчивости, вычисленные по уточнённой передаточной функции $w_{раз.ут}(s)$, могут оказаться недопустимо малыми. Такие запасы устойчивости обусловлены параметрами структурных возмущений.

Определение 2.2.3. Рабочая передаточная функция разомкнутой системы называется *структурно-параметрически грубой*, если структурные возмущения не нарушают асимптотической устойчивости замкнутой системы, а радиус запасов устойчивости уменьшается не более чем на $\sqrt{\varepsilon_з}$ (где $\varepsilon_з$ – заданное положительное число). ■

Это определение означает, что

$$r^2 - r_{ут}^2 \leq \varepsilon_з, \tag{2.2.26}$$

где $r_{ут}$ – радиус запасов устойчивости уточнённой системы, который определяется (2.2.7)

$$r_{ут} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sqrt{[1 + \mathrm{Re} w_{раз.ут}(j\omega)]^2 + \mathrm{Jm}\,^2 w_{раз.ут}(j\omega)}. \tag{2.2.27}$$

Для определённости примем $\varepsilon_з = r^2 - (0.75)^2$, что соответствует $r_{ут} \leq 0.75$.

Сравним амплитудно-частотные – $a(\omega)$ и $a_{ут}(\omega)$ – и фазо-частотные – $\varphi(\omega)$ и $\varphi_{ут}(\omega)$ – характеристики рабочей и уточненной моделей разомкнутой системы.

Определение 2.2.4. Если в диапазоне частот $[0, \omega_н]$ выполняются соотношения

$$\frac{|a(\omega) - a_{ут}(\omega)|}{a(\omega)} \leq \varepsilon_1, \quad |\varphi(\omega) - \varphi_{ут}(\omega)| \leq \varepsilon_2 \qquad 0 < \omega \leq \omega_н, \tag{2.2.28}$$

где ε_1 и ε_2 – достаточно малые положительные числа, то этот диапазон называется *полосой неразличимости* с точностью до ε_1 и ε_2 рабочей и уточнённой моделей разомкнутой системы. ■

Вне полосы неразличимости амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики моделей могут как угодно сильно отличаться друг от друга, однако, пусть

$$a(\omega) > a_{ут}(\omega) \qquad \omega_н \leq \omega \leq \infty. \tag{2.2.29}$$

Утверждение 2.2.1. Рабочая передаточная функция разомкнутой системы является структурно-параметрически грубой, если

а) выполняются неравенства (2.2.28), в которых числа ε_1 и ε_2 удовлетворяют условию

$$\eta^2 \left(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\right) + \eta \left(\varepsilon_1 + 2\sin\frac{\varepsilon_2}{2}\right) \leq \varepsilon_з, \tag{2.2.30}$$

где $\eta = \max\limits_{0 \leq \omega \leq \omega_н} a(\omega)$;

б) выполняется соотношение (2.2.29), при этом вне полосы неразличимости

$$a(\omega) \leq 0.2 \qquad \omega_н \leq \omega \leq \infty. \tag{2.2.31}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 2.Д.1. Последнее неравенство можно принять за определение наименьшей длины полосы неразличимости при исследовании грубости. В связи с этим найдём частоту $\bar{\omega}_н = \inf \tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ – множество частот, для которых выполняется неравенство (2.2.31) и тогда вместо (2.2.31) можно записать

$$\bar{\omega}_н \leq \omega_н. \tag{2.2.32}$$

Сравним частоту $\bar{\omega}_н$ с частотой среза, которая определяется равенством (2.2.1).

В обычных случаях наклон ЛАЧХ в окрестности $\omega_{ср}$ составляет (-20 дб/дек). При таком наклоне находим

$$\lg \frac{\bar{\omega}_н}{\omega_{ср}} = \frac{\lg 0.2\ дб.}{-20\ дб/дек.} = \frac{-14\ дб.}{-20\ дб/дек.} = 0.7\ декады.$$

Это означает, что

$$\bar{\omega}_н = 5\omega_{ср}. \tag{2.2.33}$$

В практике проектирования давно используется

<u>Правило 2.2.1.</u> Если постоянные времени объекта

$$\check{T}_i^0(i = \alpha_1^0 + 1, \alpha_{1\,ym}^0),\ \hat{T}_j(j = \alpha_2^0 + 1, \alpha_{2\,ym}^0),\ T_i^0(i = N_1^0 + 1, N_{1\,ym}^0),\ \tilde{T}_j^0(j = N_2^0 + 1, N_{2\,ym}^0)$$

меньше числа $\dfrac{1}{(5 \div 10)\omega_{ср}}$, то эти постоянные (называемые ««паразитными»», ««малыми»» и т.п.) можно не учитывать при синтезе регулятора. ■

Это правило во многом согласуется с условиями структурно-параметрической грубости в утверждении 2.2.1.

2.3. Синтез корректирующих устройств

2.3.1. Постановка задачи

Рассмотри задачу слежения (задача 1.1.2). Пусть параметры объекта (неизмеряемой части системы)

$$d(s)y = b(s)u \tag{2.3.1}$$

известны и требуется найти параметры регулятора (корректирующего контура)

$$g(s)u = r(s)(y - y_ж), \tag{2.3.2}$$

где $y_ж(t)$ – задающее воздействие.

Нетрудно проверить, что

$$y = \frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)} y_{ж}, \tag{2.3.3}$$

а поэтому ошибка слежения

$$\varepsilon = y_{ж} - y = \frac{1}{1 + w_{раз}(s)} y_{ж}. \tag{2.3.4}$$

Пусть задающее воздействие – ступенчатая функция

$$y_{ж}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ \bar{y}_{ж} = \text{const} & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Эта функция соответствует перенастройке регулятора на новый режим. При таком воздействии приобретают ясный физический смысл понятия переходного и установившихся процессов, введённые в п. 1.1, а характеристики процессов (установившаяся ошибка, перерегулирование, время регулирования) легко определяются экспериментально.

Установившаяся ошибка при воздействии (2.3.5) называется *статической ошибкой* $\varepsilon_{ст}$.

Учитывая, что изображение функции (2.3.5) имеет вид $\frac{\bar{y}_{ж}}{s}$, получим по теореме о конечном значении

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1 + w_{раз}(0)} \bar{y}_{ж}. \tag{2.3.6}$$

Если система не обладает астатизмом (в передаточной функции (2.1.20) $\nu = 0$), то

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1 + k} \bar{y}_{ж}.$$

В установившемся режиме выход объекта

$$y_{ст} = \frac{k}{1 + k} \bar{y}_{ж}.$$

Для астатических систем $(\nu \neq 0)$ $\varepsilon_{ст} = 0$, и поэтому их точность характеризуется амплитудой ошибки при задающем воздействии

$$y_{ж} = y_{м} \sin \omega_{ж} t.$$

Из (2.3.4) следует, что

$$\varepsilon_{г}(\omega_{ж}) = \frac{y_{м}}{|1 + w_{раз}(j\omega_{ж})|}. \tag{2.3.7}$$

На рис. 2.3.1. приведён пример графика переходного процесса, возбуждённого ступенчатым воздействием при нулевых начальных условиях.

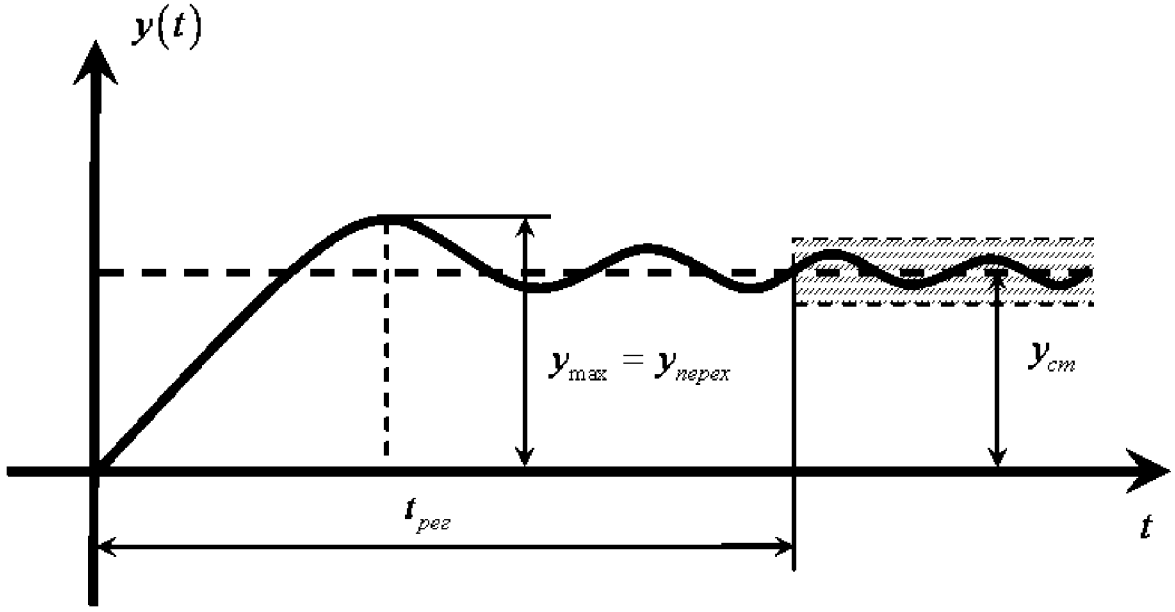

Рис. 2.3.1.

Определение 2.3.1. Время, через которое процесс не выходит из трубки $\pm 5\% \cdot y_{ст}$, называется временем регулирования при ступенчатом задающем воздействии $\left(t^{з}_{рег}\right)$. ■

Трубка радиусом $5\% \cdot y_{ст}$ заштрихована на рис. 2.3.1.

Определение 2.3.2. Число

$$\sigma^{з} = \frac{|y_{\max} - y_{ст}|}{|y_{ст}|} \cdot 100\% \tag{2.3.8}$$

называется *перерегулированием при ступенчатом задающем воздействии.* ■

Статическая ошибка – это показатель точности, а время регулирования и перерегулирования – показатели качества (переходного процесса) системы регулирования.

Связь показателей качества переходного процесса с частотными характеристиками системы приведена в 2.П.4.

Задача 2.3.1. (Задача синтеза корректирующих устройств). Пусть имеем объект регулирования (неизменяемую часть системы), заданный либо уравнением (2.1.1) с известными параметрами, либо амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками. Требуется найти параметры регулятора (2.3.2) (или, другими словами, передаточную функцию корректирующего устройства).

При этом система (2.3.1), (2.3.2) должна:

а) быть асимптотически устойчивой (при $y_{ж} = 0$);

б) удовлетворить требованиям к точности

$$|\varepsilon_{ст}| \le y^{*} \quad \text{либо} \quad \varepsilon_{г}(\omega_{ж}) \le y^{*}, \tag{2.3.9}$$

где y^* – заданное число;

в) иметь показатели качества переходного процесса,

$$\underline{t}^{з}_{рег} \le t^{з}_{рег} \le \overline{t}^{з}_{рег}, \tag{2.3.10}$$

$$\underline{\sigma}^{з} \le \sigma^{з} \le \overline{\sigma}^{з}, \tag{2.3.11}$$

где $\underline{t}^{з}_{рег}$, $\overline{t}^{з}_{рег}$, $\underline{\sigma}^{з}$, $\overline{\sigma}^{з}$ – заданные числа;

г) быть грубой, обладая запасами устойчивости

$$\varphi_{з} \ge 30^\circ, \quad L \ge 2. \tag{2.3.12}$$

■

Число $\underline{t}^{з}_{рег}$ задаёт минимальное быстродействие системы. Чем выше быстродействие, тем лучше. Однако при этом обычно увеличивается полоса пропускания и, как следствие, ухудшается помехозащищённость системы. Число $\overline{t}^{з}_{рег}$ характеризует допустимую полосу пропускания, понятие о которой приводится ниже.

Граница $\overline{\sigma}^{з}$ определяет предельно допустимое перерегулирование. В ряде случаев рекомендуется некоторое перерегулирование, для задания которого и используется $\underline{\sigma}^{з} > 0$.

Для определения полосы пропускания системы (2.3.1.), (2.3.2) положим

$$y_{ж}(t) = 1 \cdot \sin \omega t. \tag{2.3.13}$$

Выход объекта, возбуждённого таким воздействием, будет (после затухания переходных процессов) изменяться по закону

$$y(t) = M(\omega) \sin[\omega t + \psi(\omega)]. \tag{2.3.14}$$

Функция $M(\omega)$ называется амплитудно-частотной характеристикой замкнутой системы.

Из (2.3.3) следует, что

$$M(\omega) = \frac{|w_{раз}(j\omega)|}{|1 + w_{раз}(j\omega)|}. \tag{2.3.15}$$

Пример графика этой функции приведён на рис. 2.3.2.

Диапазон $[0, \omega_n]$ называется полосой пропускания системы. Частота ω_n определяется из условия $M(\omega_n) = 0.707$. Значение ω_n соизмеримо (а часто близко) с частотой среза $\omega_{ср}$ и поэтому полагают, что $\omega_{ср}$ характеризует полосу пропускания.

На рис. 2.3.2. показана величина

$$M = \max_{0 \le \omega < \infty} M(\omega), \tag{2.3.16}$$

которая называется показателем колебательности. Он характеризует резонансные свойства системы. При проектировании систем рекомендуется, чтобы его значение находилось в пределах

$$M = 1.3 \div 2. \tag{2.3.17}$$

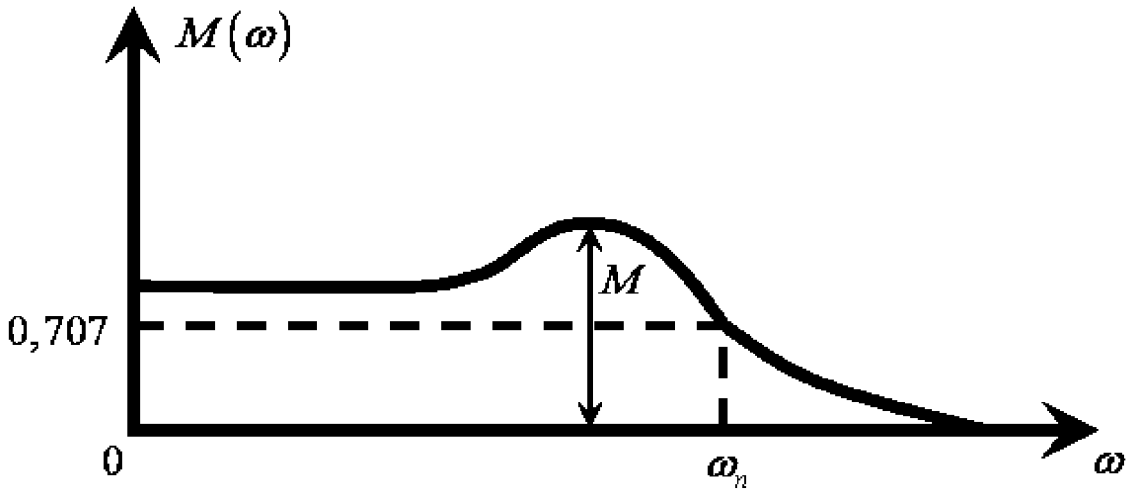

Рис. 2.3.2.

2.3.2. Метод ЛАЧХ

Решение задачи синтеза исчерпывается операциями следующей процедуры.

Процедура 2.3.1. (Операции метода ЛАЧХ)

1. построить желаемую ЛАЧХ разомкнутой системы, при которой система, замкнутая единичной отрицательной обратной связью, удовлетворяет требованиям а) - г) задачи 2.3.1,

2. сформировать ЛАЧХ регулятора (корректирующего контура) путём вычитания ЛАЧХ объекта из желаемой,

3. определить (по изломам полученной ЛАЧХ) постоянные времени регулятора (вычисление коэффициентов полиномов $g(s)$ и $r(s)$,

4. осуществить анализ системы и уточнить желаемую ЛАЧХ.

■

На рис. 2.3.3. приведён центральный участок одной из типовых желаемых ЛАЧХ и указаны три диапазона частот, для которых определяются соответствующие части желаемой ЛАЧХ.

Низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ строят так, чтобы удовлетворить требованию (2.3.9) к точности.

Для систем без астатизма $(\nu = 0)$ коэффициент передачи k определяет значение желаемой ЛАЧХ при $\omega = 0$. Найдём этот коэффициент из условия (2.3.9)

Подставляя (2.3.6) в (2.3.9), получим

$$k > \frac{\bar{y}_{ж} - y^*}{y^*}, \tag{2.3.18}$$

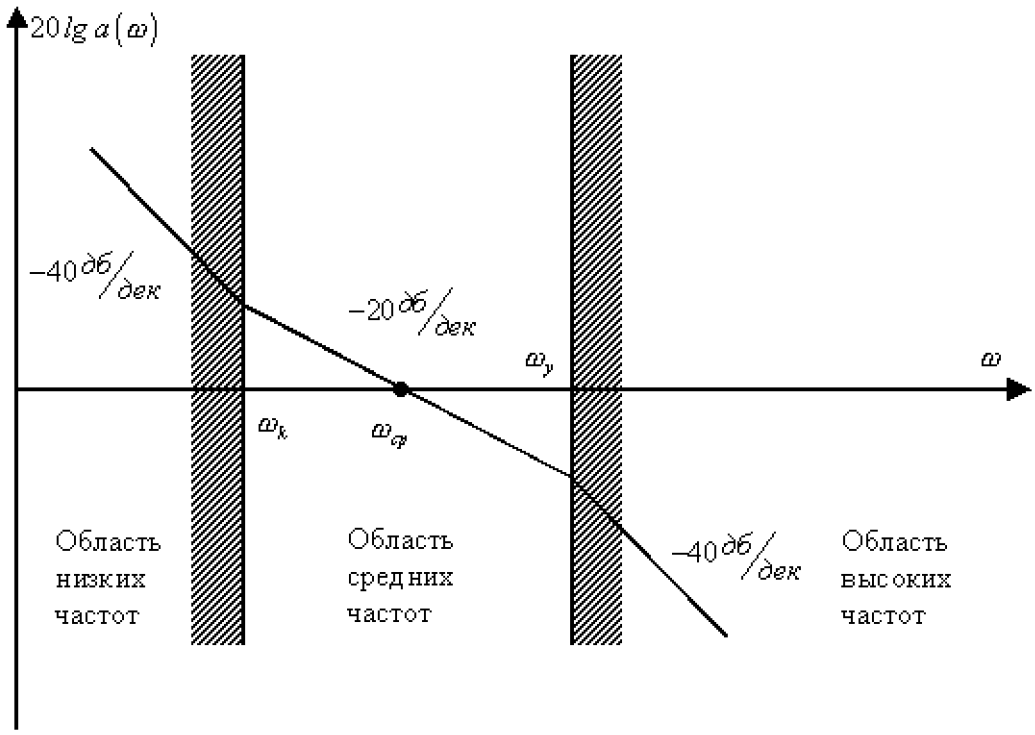

Рис. 2.3.3.

и, таким образом, желаемая ЛАЧХ

$$l_{ж}(0) \geq 20 \lg k. \tag{2.3.19}$$

Для астатических систем из (2.3.8) и (2.3.9) следует

$$|1 + w_{раз}(j\omega_{ж})| \geq \frac{y_{м}}{y^{*}}. \tag{2.3.20}$$

Обычно $w_{раз}(j\omega_{ж}) \gg 1$, поэтому требование к точности выполняется, если

$$l_{ж}(\omega_{ж}) \geq 20 \lg \frac{y_{м}}{y^{*}}. \tag{2.3.21}$$

Среднечастотная часть желаемой ЛАЧХ определяет качество переходного процесса и грубость системы.

Частоту $\omega_{ср}$ находят из требования (2.3.10) и времени переходного процесса

$$\omega_{ср} = \frac{\pi}{t^{з}_{рег}} \div \frac{4\pi}{t^{з}_{рег}}. \tag{2.3.22}$$

Это соотношение носит эмпирический характер и получено из опыта расчёта и эксплуатации большого числа систем регулирования. Этот опыт позволил также дать рекомендации для построения среднечастотной части, при которой

выполняются требования к запасам устойчивости (2.3.12) и перерегулированию (2.3.11).

Рекомендация 2.3.1. Для обеспечения запасов устойчивости и малого перерегулирования необходимо чтобы

а) наклон ЛАЧХ среднечастотной части ЛАЧХ составлял – 20 дб/дек,

б) отношение частот ω_x и ω_y (определяющих длину среднечастотной части) равнялось по крайней мере 5 ,

в) отношение частот ω_{cp} и ω_x составляло $1/3 \div 1/2$ отношения частот ω_x и ω_y .

■

Высокочастотную часть желаемой ЛАЧХ строят параллельно ЛАЧХ объекта. Этим достигается простота передаточной функции корректирующего устройства (малые степени n_p и γ уравнения регулятора (2.1.2).

После построения желаемой ЛАЧХ вычитают из неё ЛАЧХ объекта (ЛАЧХ неизменяемой части системы). Результатом этой операции (вторая операция процедуры 2.3.1) является ЛАЧХ регулятора. По её изломам строят передаточную функцию регулятора

$$w_p(s) = k_p \frac{s^{q_p} \prod\limits_{i=1}^{\alpha_{p1}} \left(\check{T}_{pi} s \pm 1\right) \prod\limits_{j=1}^{\alpha_{p2}} \left(\hat{T}_{pj}^2 s^2 \pm 2\hat{\xi}_{pj}\hat{T}_{pj} s \pm 1\right)}{s^{\gamma_p} \prod\limits_{i=1}^{N_{p1}} \left(T_{pi} s \pm 1\right) \prod\limits_{j=1}^{N_{p2}} \left(\tilde{T}_{pj}^2 s^2 \pm 2\tilde{\xi}_{pj}\tilde{T}_{pj} s \pm 1\right)} = \frac{r(s)}{g(s)}. \qquad (2.3.23)$$

Пример 2.3.1. Дан объект регулирования

$$s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)y = 2 \cdot 10^3 u. \qquad (2.3.24)$$

Его ЛАЧХ приведена на рис. 2.1.5.
Требуется найти регулятор такой, чтобы

а) ошибка воспроизведения задающего воздействия

$$y_{ж}(t) = 1 \cdot \sin \omega_{ж} t, \quad \omega_{ж} = 0.1 \frac{1}{сек}$$

удовлетворяла неравенству

$$\varepsilon_г(\omega_{ж}) \leq 10^{-3}, \qquad (2.3.25)$$

б) показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии

$$t^з_{рег} = 0.8\ сек, \quad \sigma^з = 30\%, \qquad (2.3.26)$$

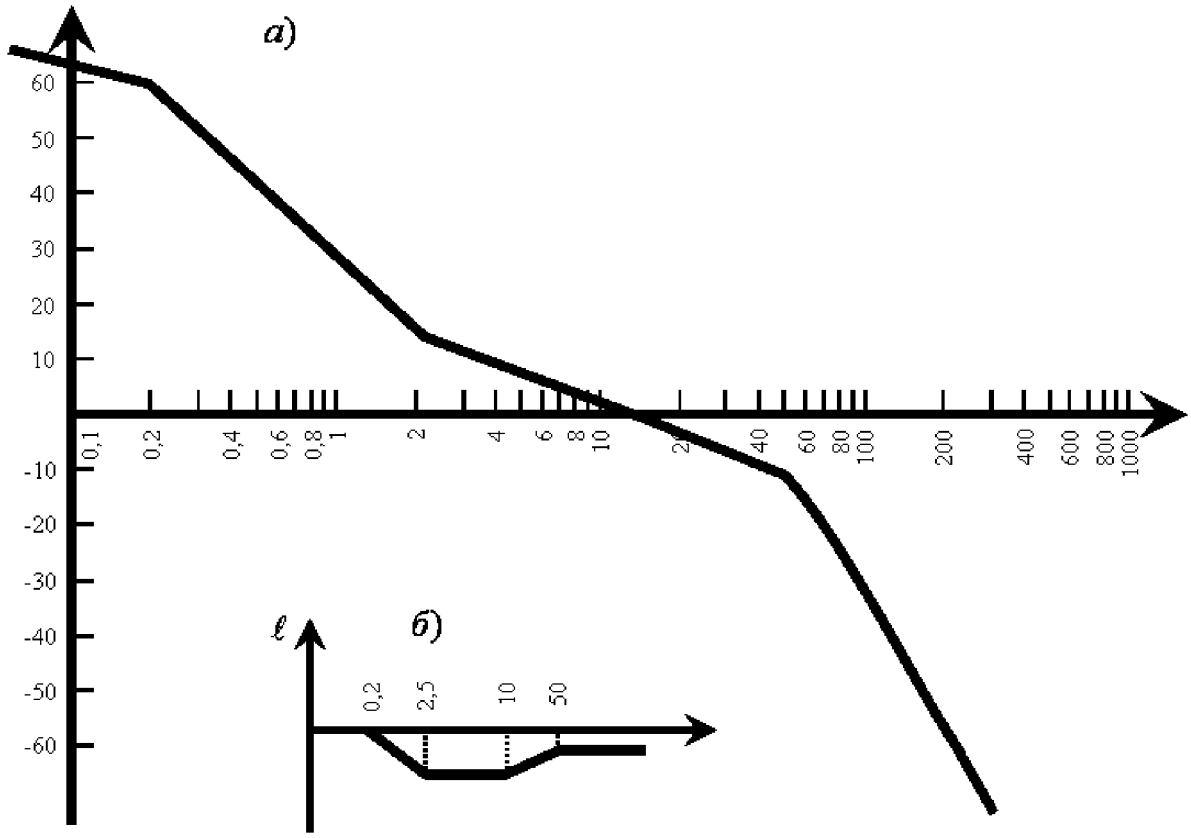

Рис. 2.3.4.

в) запасы устойчивости системы удовлетворяли неравенствам (2.3.12).

Для решения задачи построим желаемую ЛАЧХ. Она приведена на рис. 2.3.4.

Низкочастотная её часть должна удовлетворять условию (2.3.21). Нетрудно проверить, что, если при $\omega = \omega_k$, желаемая ЛАЧХ совпадает с ЛАЧХ объекта, то неравенство (2.3.21) выполняется.

Среднечастотная часть, пересекает ось частот в точке, которая определяется из (2.3.22) как

$$\omega_{cp} = \frac{4\pi}{t_{рег}} = \frac{4\pi}{0.8} = 15.7\frac{1}{сек}.$$

Принимаем

$$\omega_{cp} = 15\frac{1}{сек}.$$

Через эту точку проходит (под наклоном – 20 дб/дек) отрезок желаемой ЛАЧХ. Справа он оканчивается на частоте ω_1 излома ЛАЧХ объекта. Левый конец отрезка соответствует частоте ω_x, значение которой определено с учётом рекомендации 2.3.1.

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = 17, \quad \frac{\omega_{cp}}{\omega_y} = 6.$$

Высокочастотная часть ЛАЧХ, начиная с частоты ω_1, проходит параллельно

ЛАЧХ объекта. Нетрудно проверить, что построенная желаемая ЛАЧХ удовлетворяет требованиям (2.3.12) к запасам устойчивости.

Осуществим вторую операцию процедуры 2.3.1.

Получим ЛАЧХ корректирующего контура, приведенную на рис. 2.3.4.б Очевидно, что

$$w_p(s) = \frac{\left(\frac{1}{2.5}s+1\right)\left(\frac{1}{10}s+1\right)}{\left(\frac{1}{0.2}s+1\right)\left(\frac{1}{50}s+1\right)} = \frac{(0.4s+1)(0.1s+1)}{(5s+1)(0.02s+1)} = \frac{r(s)}{g(s)}. \tag{2.3.27}$$

Анализ переходного процесса в объекте (2.3.24) с регулятором

$$(5s+1)(0.02s+1)u = (0.4s+1)(0.1s+1)y \tag{2.3.28}$$

показывает, что

$$t^{з}_{рег} = 0.9\ сек, \quad \sigma^{з} = 35\%. \tag{2.3.29}$$

Эти значения отличатся от требуемых (2.3.26). Если они допустимы по физическим соображениям, то можно остановиться на регуляторе (2.3.28). В противном случае необходимо уточнить желаемую ЛАЧХ. ■

2.3.3. Анализ системы и уточнение желаемой ЛАЧХ

Рекомендация 2.3.1. носит эмпирический характер. Поэтому может случиться, что построенная на её основе ЛАЧХ не обеспечивает выполнение требований (2.3.10), (2.3.11) к качеству переходных процессов. В связи с этим необходимо проанализировать переходные процессы в системе.

Используя изломы желаемой ЛАЧХ найдём её передаточную функцию

$$w_{ж}(s) = \frac{k_{ж}(s)}{d^{c}_{ж}(s)}. \tag{2.3.30}$$

Замкнутая система, возбуждённая $y_{ж}$ описывается, как нетрудно проверить, уравнением

$$\left[d^{c}_{ж}(s) + k_{ж}(s)\right] y = k_{ж}(s) y_{ж}. \tag{2.3.31}$$

Это уравнение часто решают методом трапеций. Для этого строят вначале график вещественной частотной характеристики

$$p_{ж}(\omega) = \mathrm{Jm}\, \frac{k_{ж}(j\omega)}{d^{c}_{ж}(j\omega) + k_{ж}(j\omega)}.$$

Затем аппроксимируют $p_{ж}(\omega)$ суммой трапеций (показанных в разделе 2.П.4), для каждой из которых легко находятся составляющие $y(t)$. Уравнение (2.3.31) можно решить более точно одним из методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (например, методом Рунге-Кутта).

Если требования (2.3.10), (2.3.11) к качеству переходных процессов не выполняются, то желаемая ЛАЧХ уточняется. Часто используемая процедура такого уточнения приведена в приложении 2.П.6.

2.3.4. Внешние возмущения

Пусть на объект (2.3.1) действует внешнее возмущение. Тогда он описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \tag{2.3.32}$$

где

$$m(s) = m_\alpha s^\alpha + m_{\alpha-1}s^{\alpha-1} + \cdots + m_1 s + m_0. \tag{2.3.33}$$

Нетрудно проверить, что выход системы (2.3.32), (2.3.2)

$$y = \frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)} y_ж + \frac{w_f(s)}{1 + w_{раз}(s)} f, \tag{2.3.34}$$

где

$$w_f(s) = \frac{m(s)}{d^c(s)}. \tag{2.3.35}$$

Ошибка воспроизведения задающего воздействия имеет в этом случае вид

$$\varepsilon^f = \frac{1}{1 + w_{раз}(s)} y_ж - \frac{w_f(s)}{1 + w_{раз}(s)} f. \tag{2.3.36}$$

Пусть $y_ж = 0$, а $f(t)$ – ступенчатая функция

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} = \text{const} & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \tag{2.3.37}$$

В установившемся режиме выход объекта

$$y_{ст} = \frac{m(0)}{d^c(0) + k(0)} \bar{f}. \tag{2.3.38}$$

Определение 2.3.3. Время, через которое процесс регулирования не выходит из трубки $\pm 5\% \cdot y_{ст}$, называется *временем регулирования при ступенчатом внешнем возмущении* $(t_{рег})$. ■

Определение 2.3.4. Число

$$\sigma = \frac{|y_{\max} - y_{ст}|}{|y_{ст}|} \cdot 100\%, \tag{2.3.39}$$

где $y_{\max}$ – максимальное значение выхода при внешнем воздействии (2.3.37), называется *перерегулированием при ступенчатом внешнем воздействии.* ■

Если $\bar{y}_ж \neq 0$, то установившаяся ошибка

$$\varepsilon_c^f = \varepsilon_c + y_{ст}. \tag{2.3.40}$$

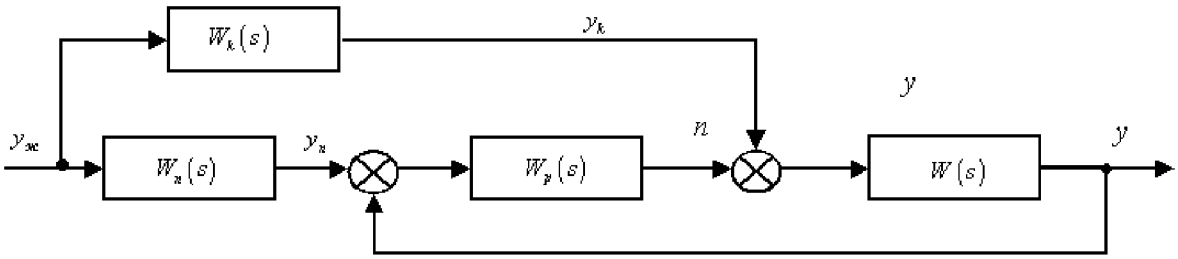

Рис. 2.3.5.

Значения $t^з_{рег}$ и $t_{рег}$, вообще говоря, не зависят один от другого и поэтому время регулирования при действии задающего и возмущающего воздействий

$$t_p = \max\left\{t^з_{рег},\, t_{рег}\right\}. \tag{2.3.41}$$

Перерегулирование определяется аналогично, как наибольшее из чисел $\sigma^з$ и σ.

2.3.5. Следящие системы

Рассмотрим теперь случай, когда задающее воздействие – произвольная ограниченная функция, а не ступенчатое воздействие (2.3.5) как это было до сих пор. Учтём теперь важное обстоятельство, состоящее в том, что задающее воздействие – функция, хотя и неизвестная заранее, но измеряемая в процессе работы системы.

Это обстоятельство позволяет организовать дополнительные (компенсирующие) связи для уменьшения ошибки слежения. На рис. 2.3.5. приведена структурная схема с компенсирующими связями, с передаточными функциями $w_n(s)$ и $w_k(s)$.

Из рис. 2.3.5. следует

$$y = w(s)[w_k(s)y_ж + w_p(s)(y + w_n(s)y_ж)].$$

Отсюда

$$y = \frac{w(s)}{1 - w(s)w_p(s)}[w_k(s) + w_p(s)w_n(s)]y_ж. \tag{2.3.42}$$

Ошибка слежения

$$\varepsilon = y_ж - y = \frac{1 - w(s)[w_p(s) + w_p(s)w_n(s) + w_k(s)]}{1 - w(s)w_p(s)}y_ж. \tag{2.3.43}$$

Эта ошибка равна нулю, если передаточные функции $w_n(s)$ и $w_k(s)$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{w(s)} = w_k(s) + w_p(s)[1 + w_n(s)]. \tag{2.3.44}$$

Рассмотрим частные случаи.

При $w_n(s) = -1$

$$w_k(s) = \frac{1}{w(s)}. \tag{2.3.45}$$

При $w_k(s) = 0$

$$w_n(s) = \frac{1 - w(s)w_p(s)}{w(s)w_p(s)}. \tag{2.3.46}$$

Полученные передаточные функции – нереализуемы, так как степени их числителей превышают степени знаменателей.

Реализуемые структуры компенсирующих связей будут рассмотрены в следующей главе.

Приложения к главе 2

2.П. Параметрические возмущения и запасы устойчивости

2.П.1. Запасы устойчивости

Обобщим понятие запаса устойчивости по фазе на случай неединственной частоты среза.

Напомним, что

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \mathrm{mod} w_{раз}(j\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2\, w_{раз}(j\omega) + \mathrm{Jm}\,^2 w_{раз}(j\omega)}, \\ \varphi(\omega) &= \mathrm{Arg}\, w_{раз}(j\omega). \end{aligned} \tag{2.П.1}$$

Главное значение $\mathrm{Arg}\, w_{раз}(j\omega)$ обозначается $\arg w_{раз}(j\omega)$,

Это значение $\arg w_{раз}(j\omega) \triangleq \psi(\omega)$ находится как наименьшее по абсолютной величине число $\psi(\omega)$, удовлетворяющее одновременно двум уравнениям

$$\cos\psi(\omega) = \frac{\mathrm{Re} w_{раз}(j\omega)}{a(\omega)}, \quad \sin\psi(\omega) = \frac{\mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega)}{a(\omega)}. \tag{2.П.2}$$

Отметим, что $-\pi \le \arg w_{раз}(j\omega) \le \pi$, а $\mathrm{Arg}\, w_{раз}(j\omega) = \psi \pm 2\pi k$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Определение 2.П.1. Множество положительных вещественных чисел $\omega_{ср}$, удовлетворяющее уравнению

$$a(\omega_{ср}) = 1, \tag{2.П.3}$$

называется множеством частот среза. Оно обозначается далее $\Omega_{ср}$. ■

Представим множество $\Omega_{ср}$, как два множества $\Omega_{ср}^{(1)}$, $\Omega_{ср}^{(2)}$ ($\Omega_{ср}^{(1)} \cup \Omega_{ср}^{(2)} = \Omega_{ср}$). Первое из них содержит частоты, для которых

$$\mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega_{ср}) < 0, \tag{2.П.4}$$

а второе состоит из частот

$$\mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega_{ср}) > 0. \tag{2.П.5}$$

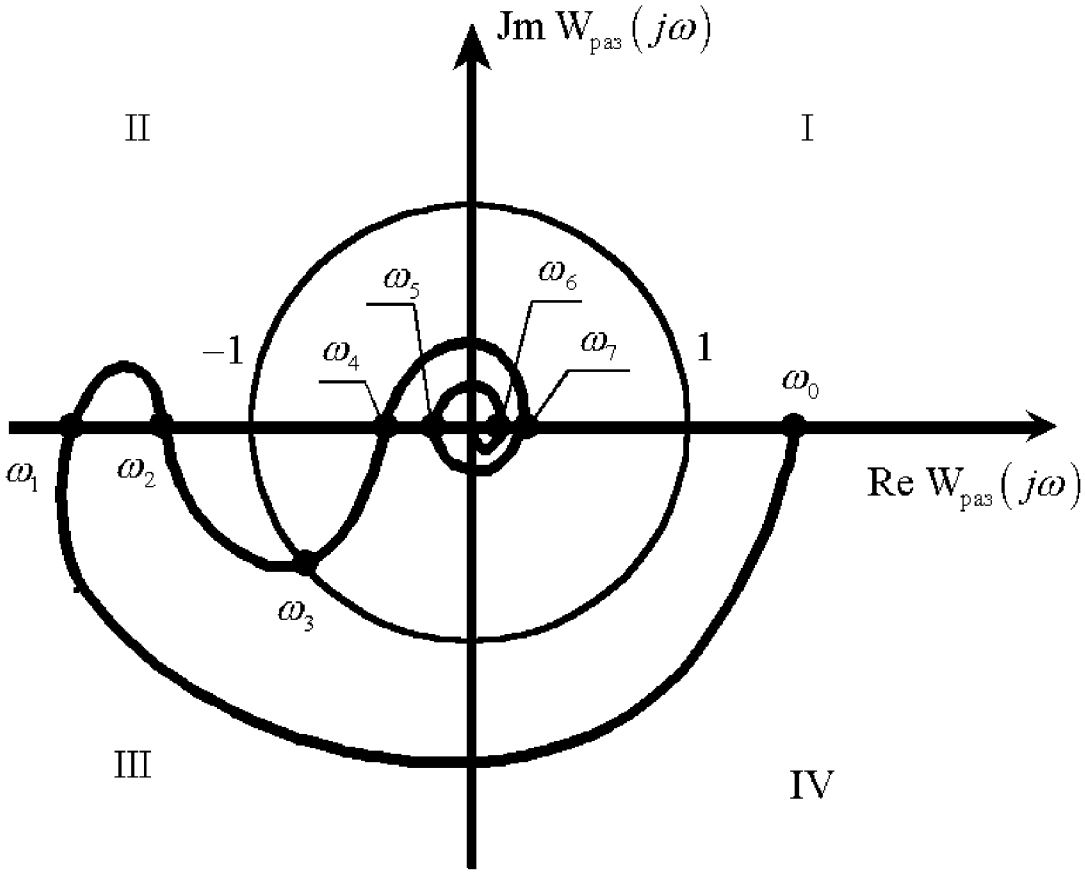

Рис. 2.П.1.

Первое из этих соотношений означает, что

$$-\pi \le \arg w_{раз}\left(j\omega_{ср}^{(1)}\right) \le 0, \quad \omega_{ср}^{(1)} \in \Omega_{ср}^{(1)}, \tag{2.П.4'}$$

а второе

$$0 \le \arg w_{раз}\left(j\omega_{ср}^{(2)}\right) \le \pi, \quad \omega_{ср}^{(2)} \in \Omega_{ср}^{(2)}. \tag{2.П.5'}$$

Геометрический смысл последних неравенств состоит в том, что точки пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса с центром в точке $(0, j0)$ находятся для частот $\omega_{ср}^{(2)}$ в первом и во втором квадрантах (квадранты указаны римскими цифрами на рис. 2.П.1.), а для частот $\omega_{ср}^{(1)}$ – в третьем и четвёртом.

Определение 2.П.2. Множество положительных вещественных чисел $\omega_ф$, удовлетворяющих уравнению

$$\text{Jm } w_{раз}(j\omega_ф) = 0, \tag{2.П.6}$$

называется множеством фазовых частот. Оно обозначается далее $-\Omega_ф$. ■

Разобьем множество $\Omega_ф$ на три подмножества: $\Omega_ф^{(1)}$, $\Omega_ф^{(2)}$, $\Omega_ф^{(3)}$. В первое из них включим те частоты, для которых

$$\text{Re} w_{раз}(j\omega) < -1. \tag{2.П.7}$$

Множество $\Omega_{ф}^{(2)}$ содержит частоты, при которых

$$-1 < \operatorname{Re} w_{раз}(j\omega) \leq 0, \tag{2.П.8}$$

а множество $\Omega_{ф}^{(3)}$ определим как множество частот, в которых

$$\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega) > 0. \tag{2.П.9}$$

Определение 2.П.3. Если множество $\Omega_{ф}^{(2)}$ пусто, то АФЧХ системы называется *АФЧХ первого рода*, в противном случае АФЧХ системы наливается *АФЧХ второго рода.* ■

Пример 2.П.1. Рассмотрим годограф АФЧХ второго рода, приведённый рис. 2.П.1. Там же тонкой линией показана окружность единичного радиуса с центром в точке $(0, j0)$ и отмечены частоты, при которых годограф пересекает ось $\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega)$ и окружность единичного радиуса.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае множество $\Omega_{ср}$ состоит из одной частоты ω_3, множество $\Omega_{ф}^{(1)}$ содержит две частоты ω_1 и ω_2, множество $\Omega_{ф}^{(2)}$ – частоты ω_4 и ω_5, а множество $\Omega_{ф}^{(3)}$ – частоты ω_0, ω_6, ω_7. ■

Определение 2.П.4. *Запасом по фазе* φ называется наименьшая из градусных (угловых) мер дуг окружности единичного радиуса с центром в точке $(0, j0)$, отсчитываемых от точки $(-1, j0)$ до точки пересечения годографа АФЧХ с этой окружностью единичного радиуса. ■

Выражение запаса по фазе, соответствующее этому определению, имеет вид

$$\varphi = \min_{\substack{\omega_{ср}^{(1)} \in \Omega_{ср}^{(1)} \\ \omega_{ср}^{(2)} \in \Omega_{ср}^{(2)}}} \left\{ 180^\circ + \arg w_{раз}\left(j\omega_{ср}^{(1)}\right),\ 180^\circ - \arg w_{раз}\left(j\omega_{ср}^{(2)}\right) \right\}. \tag{2.П.10}$$

Пример 2.П.2. Пусть годограф АФЧХ разомкнутой системы протекает как показано на рис. 2.П.2. Значение запаса по фазе определяется при $\omega_{ср} = \omega_4$, так как при других значениях частот $\omega_i \in \Omega_{ср}$ $(i = 2, 3, 5, 6, 7, 8)$ градусная мера дуги окружности, отсчитываемой от точки $(-1, j0)$ превышает её значение при $\omega_{ср} = \omega_4$. ■

Отметим, что часто множество $\Omega_{ср}$ состоит из одной частоты $\omega_{ср}$ (уравнение (2.П.3) имеет единственное решение), называемой частотой среза. В этом случае для систем асимптотически устойчивых в разомкнутом состоянии запас по фазе

$$\varphi_з = 180^\circ + \varphi(\omega_{ср}). \tag{2.П.11}$$

Определение 2.П.5. *Запасом по модулю* L называется число

$$L = \min_{\substack{\omega_{ф}^{(1)} \in \Omega_{ф}^{(1)} \\ \omega_{ф}^{(2)} \in \Omega_{ф}^{(2)}}} \left\{ a\left(\omega_{ф}^{(1)}\right),\ \frac{1}{a\left(\omega_{ф}^{(2)}\right)} \right\}. \tag{2.П.12}$$

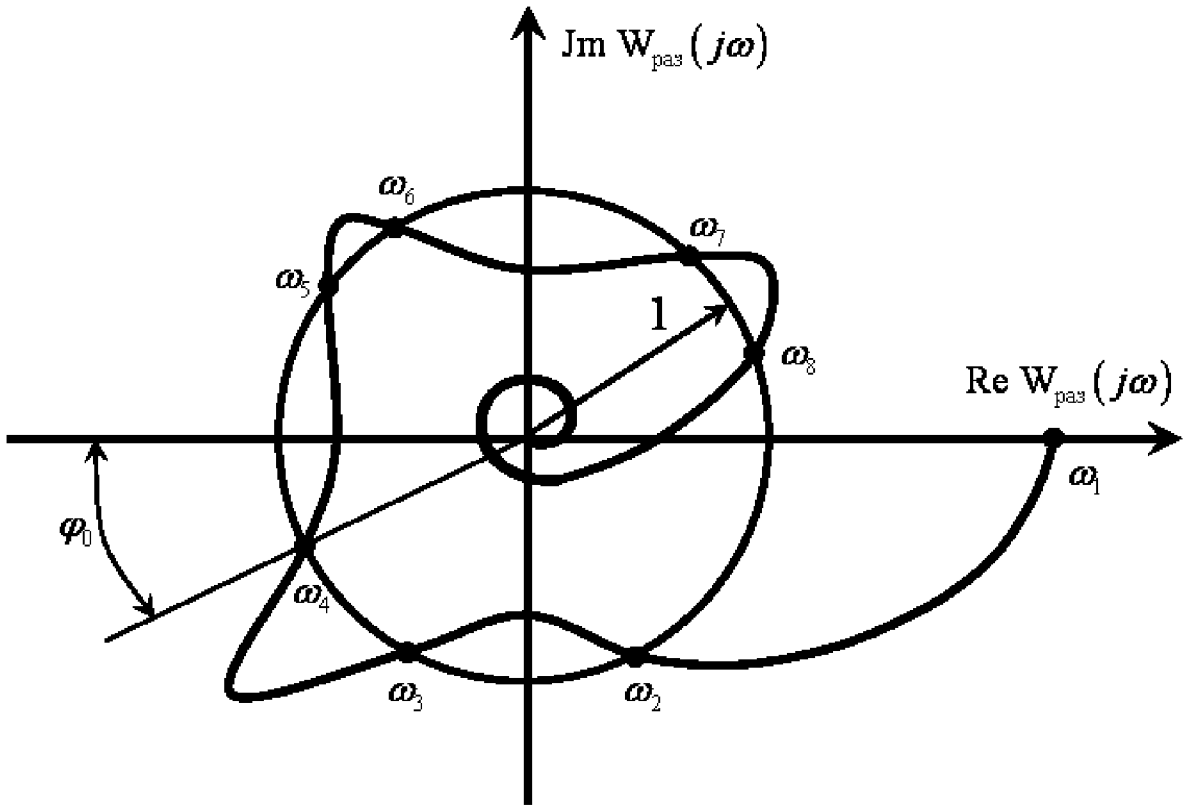

Рис. 2.П.2.

■

Из этого определения следует, что запасом по модулю является наименьшее из двух чисел. Первое из этих чисел – это наименьшее из расстояний, отсчитываемых вдоль вещественной оси влево от критической точки до точек пересечения АФЧХ с вещественной осью. Второе число характеризует расстояние до ближайшей точки пересечения АФЧХ с вещественной осью если двигаться вправо от критической точки. Это ««расстояние»» определяется как обратная величина расстояния точки пересечения АФЧХ с вещественной осью) от точки $(0, j0)$.

Пример 2.П.3. Определим запас по модулю системы, АФЧХ которой приведено на рис. 2.П.1.

Очевидно, что

$$L = \min\left\{a(\omega_2);\ \frac{1}{a(\omega_4)}\right\}. \qquad (2.П.13)$$

■

Пример 2.П.4. Исследуем запасы устойчивости системы (1.П.80), (1.П.83) из примера 1.П.2, обладающей малой степенью грубости. Для определения запаса по фазе найдём множество частот среза. В связи с этим запишем

$$w_{раз}(s) = \frac{-148.5s + 0.4}{s^2 + 150s + 0.1} = \frac{0.4(-396s + 1)}{0.1\left(\frac{1}{150}s + 1\right)(1500s + 1)}.$$

Тогда

$$a(\omega) = |w_{раз}(j\omega)| = \frac{4\sqrt{396^2\omega^2+1}}{\sqrt{0.0066^2\omega^2+1}\sqrt{1500^2\omega^2+1}} \tag{2.П.14}$$

Нетрудно проверить, что при

$$\omega = 0.0177, \tag{2.П.15}$$

$$a(\omega) = 1. \tag{2.П.16}$$

Запас устойчивости по фазе

$$\varphi_з = 180^\circ - \operatorname{arctg} 1500\omega_{ср} - \operatorname{arctg}\frac{1}{150}\omega_{ср} - \operatorname{arctg} 396\omega_{ср} = 11^\circ. \tag{2.П.17}$$

Для определения запаса устойчивости по модулю найдём на основе (2.П.6)

$$\omega_{1ф}^{(2)} = \sqrt{2}, \quad \omega_{1ф}^{(3)} = 0. \tag{2.П.18}$$

Значение

$$\operatorname{Re} w_{раз}\left(j\omega_{1ф}^{(2)}\right) = -0.99 \tag{2.П.19}$$

и поэтому

$$L = 1.01. \tag{2.П.20}$$

■

Определение 2.П.6. Система (2.1.1), (2.1.2) называется *грубой по частотным показателям*, если её запасы устойчивости по фазе и модулю удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_з \geq 30^\circ, \quad L \geq 2. \tag{2.П.21}$$

■

Если для системы (2.1.1), (2.1.2) не выполняется хотя бы одного из этих неравенств, то она называется негрубой по частотным показателям.

2.П.2. Параметрические возмущения и запасы устойчивости по фазе и модулю

Границы запаса устойчивости в (2.П.21) установлены на основе большого опыта эксплуатации систем регулирования. Вместе с тем полезно найти явную связь между значениями этих границ и уровнем параметрических возмущений.

Переходя к установлению таких связей будем полагать систему (2.1.1), (2.1.2) асимптотически устойчивой в разомкнутом состоянии. Кроме того, пусть для простоты корни полиномов $k(s)$ и $d^c(s)$ – вещественны и различны. Тогда передаточную функцию разомкнутой системы (2.1.1), (2.1.2) можно записать как

$$w_{раз}(s) = \frac{k(s)}{d^c(s)} = k_{раз}\frac{\prod\limits_{\delta=1}^{æ}(T_\delta s+1)\prod\limits_{\mu=æ+1}^{n_c}\left(\tilde{T}_\mu s+1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n_c}\left(\tilde{\tilde{T}}_i s+1\right)}, \tag{2.П.22}$$

где T_δ, $\tilde{T}_\mu$, $\tilde{\tilde{T}}_i$ $\left(\delta = \overline{1, æ},\ \ \mu = \overline{æ+1, n_c},\ \ i = \overline{1, n_c}\right)$ – постоянные времени: при этом $T_\delta < 0$ $\left(\delta = \overline{1, æ}\right)$, а остальные постоянные времени положительные числа; $k_{раз} = \dfrac{k_0}{d_0^c}$.

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики, соответствующие передаточной функции, имеют вид

$$a(\omega) = k_{раз} \prod_{\delta=1}^{æ} \sqrt{T_\delta^2 \omega^2 + 1} \cdot \prod_{\mu=æ+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_\mu^2 \omega^2 + 1} \Bigg/ \prod_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{\tilde{T}}_i^2 \omega^2 + 1}\,, \qquad (2.П.23)$$

$$\varphi(\omega) = -\sum_{\delta=1}^{æ} \operatorname{arctg} |T_\delta| \omega + \sum_{\mu=æ+1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_\mu \omega - \sum_{i=1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{\tilde{T}}_i \omega. \qquad (2.П.24)$$

Если ограничимся случаем, когда множество $\Omega_{ф}^{(1)}$ – пусто, а множество $\Omega_{ф}^{(2)}$ состоит из единственной частоты $\bar{\omega}$, то запас по модулю

$$L = \frac{1}{a(\bar{\omega})} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{\tilde{T}}_i^2 \bar{\omega}^2 + 1}}{k_{раз} \prod\limits_{\delta=1}^{æ} \sqrt{T_\delta^2 \bar{\omega}^2 + 1} \cdot \prod\limits_{\mu=æ+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_\mu^2 \bar{\omega}^2 + 1}}, \qquad (2.П.25)$$

где $\bar{\omega}$ является решением уравнения

$$\varphi(\bar{\omega}) = -\pi. \qquad (2.П.26)$$

Из (2.П.24), (2.П.26) следует, что $\bar{\omega}$ практически не зависит от изменения (в несколько раз) тех значений постоянных времени, для которых выполняются неравенства

$$|T_\delta| \gg \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad \tilde{T}_\mu \gg \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad \tilde{\tilde{T}}_i \gg \frac{1}{\bar{\omega}} \quad (\delta = \overline{1, \gamma_1};\ \mu = \overline{æ+1, \gamma_2}; i = \overline{1, \gamma_3}). \qquad (2.П.27)$$

Действительно, для этих постоянных времени $\operatorname{arctg} T\omega \approx 90^\circ$ и значительные изменения T мало изменяют значение $\operatorname{arctg} T\omega$.

Если выполняются неравенства (2.П.27), то можно записать

$$L = \frac{\prod\limits_{i=1}^{\gamma_3} \left(\tilde{\tilde{T}}_i^2 \bar{\omega}^2\right) \prod\limits_{i=\gamma_3+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{\tilde{T}}_i^2 \bar{\omega}^2 + 1}}{k_{раз} \prod\limits_{\delta=1}^{\gamma_1} \left(T_\delta^2 \bar{\omega}^2\right) \prod\limits_{\delta=\gamma_1+1}^{æ} \sqrt{T_\delta^2 \bar{\omega}^2 + 1} \cdot \prod\limits_{\mu=æ+1}^{\gamma_2} \left(\tilde{T}_\mu^2 \bar{\omega}^2\right) \prod\limits_{\mu=\gamma_2+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_\mu^2 \bar{\omega}^2 + 1}}. \qquad (2.П.28)$$

Из этого выражения следует, что запас по модулю изменяется пропорционально изменению γ_3 постоянных времени $\tilde{\tilde{T}}_i$ $\left(i = \overline{1, \gamma_3}\right)$ и обратно пропорционально изменению γ_1 постоянных времени T_δ $\left(\delta = \overline{1, \gamma_1}\right)$ и $\gamma_2 - æ - 1$ постоянных времени $\tilde{T}_\mu$ $\left(\mu = \overline{æ+1, \gamma_2}\right)$. При этом частоты, соответствующие этим постоянным времени лежат далеко влево от частоты $\bar{\omega}$.

Используя связь (2.П.28) можно найти то значение L, при котором вариации постоянных времени (2.П.27) в заданных пределах не приведут к нарушению устойчивости системы. Установим теперь аналогичную связь для запаса устойчивости по фазе. Рассмотрим выражение

$$\varphi_з = 180^\circ - \sum_{\delta=1}^{æ} \operatorname{arctg} |T_\delta| \omega_{cp} + \sum_{\mu=æ+1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_\mu \omega_{cp} - \sum_{i=1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{\tilde{T}}_i \omega_{cp}, \qquad (2.П.29)$$

где ω_{cp} пусть также единственная частота, при которой

$$a(\omega_{cp}) = \frac{k_{раз} \prod\limits_{\delta=1}^{æ} \sqrt{T_\delta^2 \omega_{cp}^2 + 1} \cdot \prod\limits_{\mu=æ+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_\mu^2 \omega_{cp}^2 + 1}}{\prod\limits_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{\tilde{T}}_i^2 \omega_{cp}^2 + 1}} = 1. \qquad (2.П.30)$$

Нетрудно видеть, что значение ω_{cp} практически не зависит от постоянных времени, для которых выполняются неравенства

$$|T_\delta| < \frac{1}{\omega_{cp}}, \quad \tilde{T}_\mu < \frac{1}{\omega_{cp}}, \quad \tilde{\tilde{T}}_i < \frac{1}{\omega_{cp}} (\delta = 1, \gamma_4;\ \mu = æ + 1, \gamma_5; i = 1, \gamma_0). \qquad (2.П.31)$$

Значение же $\varphi_з$ изменяется почти пропорционально изменению этих постоянных.

2.П.3. Свойства АФЧХ систем с нулевой либо малой степенями грубости

Утверждение 2.П.1. Годограф АФЧХ системы (2.1.1), (2.1.2), обладающей нулевой степенью грубости, проходит через критическую точку $(-1, j0)$. ■

Доказательство. Запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$w_{раз}(s) = \frac{k(s)}{d^c(s)} = \frac{k(s) d^c(-s)}{d^c(s) d^c(-s)} = \frac{\left[\sum\limits_{i=0}^{n_c} k_i s^i\right] \left[\sum\limits_{j=0}^{n_c} d_j^c (-s)^j\right]}{\left[\sum\limits_{i=0}^{n_c} d_i^c s^i\right] \left[\sum\limits_{j=0}^{n_c} d_j^c (-s)^j\right]} = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{2n_c} l_\mu s^\mu}{\sum\limits_{\mu=0}^{2n_c} t_\mu s^\mu}, \qquad (2.П.32)$$

где

$$l_\mu = \sum_{j=0}^{n_c} k_j d_{\mu-j}^c (-1)^{\mu-j}, \quad t_\mu = \sum_{j=0}^{n_c} d_j^c d_{\mu-j}^c (-1)^{\mu-j} \quad \mu = \overline{0, 2n_c}. \qquad (2.П.33)$$

Нетрудно проверить, что для нечётных μ значения $t_\mu = 0$. При $s = j\omega$ получим

$$w_{раз}(j\omega) = \frac{l_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum\limits_{\alpha=0}^{n_c-1} l_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^\alpha}{t_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum\limits_{\alpha=0}^{n_c-1} t_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^\alpha} + j \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{n_c} l_{2\alpha-1} \omega^{2(\alpha-1)} (-1)^{2\alpha-1}}{t_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum\limits_{\alpha=0}^{n_c-1} t_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^\alpha}. \qquad (2.П.34)$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re} w_{раз}(j\omega) = \frac{l_{2n_c}}{t_{2n_c}} = \frac{k_{n_c} d^c_{n_c}}{d^{c2}_{n_c}} = \frac{k_{n_c}}{d^c_{n_c}}, \tag{2.П.35}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega) = 0. \tag{2.П.36}$$

Пусть в соответствии с алгебраическим критерием нулевой степени грубости

$$k_{n_c} = -d^c_{n_c}. \tag{2.П.37}$$

Тогда

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re} w_{раз}(j\omega) = -1, \quad \lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega) = 0, \tag{2.П.38}$$

следовательно, годограф АФЧХ достигает критической точки $(-1, j0)$, что и доказывает утверждение 2.П.1.

Рассмотрим теперь случай, когда система (2.1.1), (2.1.2) обладает малой степенью грубости.

Пусть в соответствии с алгебраическим критерием малой степени грубости

$$k_\rho = -d^c_\rho + \varepsilon_\rho, \tag{2.П.39}$$

где ρ – фиксированное число, а ε_ρ – удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon_\rho \ll |k_\rho|, |d^c_\rho|. \tag{2.П.40}$$

Дополнительно к этим условиям будем полагать, что k_ρ и d_ρ достаточно большие числа по сравнению с остальными коэффициентами полиномов $k(s)$ и $d^c(s)$ соответственно. Другими словами

$$|k_\rho| \gg |k_\alpha|, \quad |d^c_\rho| \gg |d^c_\alpha| \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \rho-1, \rho+1, \ldots, n_c. \tag{2.П.41}$$

При этом условии полином $k(s)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} k(s) = \sum_{i=0}^{n_c} k_i s^i \approx \left(\frac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + \frac{k_{n_c-1}}{k_\rho} s^{n_c-\rho-1} + \cdots + \frac{k_{\rho-1}}{k_\rho} s + 1\right) \cdot \\ \cdot \left(k_\rho s^\rho + \cdots + k_1 s + k_0\right) \approx \left(T_1 s^{n_c-\rho} + 1\right)\left(k_\rho s^\rho + \cdots + k_1 s + k_0\right), \end{aligned} \tag{2.П.42}$$

где

$$T_1 = \frac{k_{n_c}}{k_\rho}. \tag{2.П.43}$$

Последнее из соотношений (2.П.42) следует из того, что корни многочлена

$$\frac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + \frac{k_{n_c-1}}{k_\rho} s^{n_c-\rho-1} + \cdots + \frac{k_{\rho-1}}{k_\rho} s + 1$$

стремятся при $k_\rho \to \infty$ к корням полинома $\dfrac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + 1$.

Рассуждая аналогично, получим

$$d(s) \approx \left(T_2 s^{n_c-\rho}+1\right)\left(d_\rho^c s^\rho + \dots + d_1^c s + d_0^c\right). \qquad (2.\text{П}.44)$$

Пренебрегая малыми постоянными времени T_1, T_2 имеем

$$w_{раз}(s) \approx \frac{k_\rho s^\rho + \dots + k_1 s + k_0}{d_\rho^c s^\rho + \dots + d_1^c s + d_0^c}. \qquad (2.\text{П}.45)$$

Полагая $s = j\omega$ и повторяя преобразования (2.П.32), (2.П.36) заключаем, что всегда существует достаточно большая частота ω^* (и достаточно большие числа k_ρ и d_ρ такие, что можно пренебречь постоянными T_1 и T_2 на этой частоте), что

$$\mathrm{Re} w_{раз}(j\omega^*) = \frac{k_\rho}{d_\rho^c} = \frac{-d_\rho^c + \varepsilon_\rho}{d_\rho^c} = -1 + \frac{\varepsilon_\rho}{d_\rho^c}, \quad \mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega^*) = 0. \qquad (2.\text{П}.46)$$

Так как в соответствии с (2.1.18) $\varepsilon_\rho \ll |d_\rho|$, то (2.П.46) означает, это годограф АФЧХ системы, обладающей малой степенью грубости, проходит в малой окружности критической точки $(-1, j0)$.

Пример 2.П.5. Исследуем свойства АФЧХ системы, построенной в примере 1.П.2. Передаточная функция этой системы, обладающей малой степенью грубости, имеет вид

$$w_{раз}(s) = \frac{-148.5s + 0.4}{s^2 + 150s + 0.1}. \qquad (2.\text{П}.47)$$

Годограф АФЧХ рассматриваемой системы строится на основе

$$\mathrm{Re} w_{раз}(j\omega) = \frac{-148.5 \cdot 150\omega^2 + 0.04}{\omega^4 + 150^2\omega^2 + 0.01}, \qquad \mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega) = \frac{148.5\omega^3 - 74.85\omega}{\omega^4 + 150^2\omega^2 + 0.01}.$$

При $\omega = 0.4$ получим

$$\mathrm{Re} w_{раз}(j0.4) = -0.99, \quad \mathrm{Jm}\, w_{раз}(j0.4) = -5.5 \cdot 10^{-3}, \qquad (2.\text{П}.48)$$

и следовательно при этой частоте годографа АФЧХ проходит в малой окрестности критической точки. ■

2.П.4. Связь показателей качества переходного процесса с частотными характеристиками системы

Решение уравнений (2.3.1), (2.3.2) можно найти используя обратное преобразование Лапласа функции

$$y(s) = \Phi(s) y_ж(s), \qquad (2.\text{П}.49)$$

где в соответствии с (2.3.3)

$$\Phi(s) = \frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)}. \qquad (2.\text{П}.50)$$

Для ступенчатого задающего воздействия $y_{ж}(s) = \dfrac{\bar{y}_{ж}}{s}$, и поэтому

$$y(s) = \frac{\Phi(s)}{s}\bar{y}_{ж}.$$

Полагая для простоты $\bar{y}_{ж} = 1$, запишем искомое решение

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{\Phi(s)}{s}e^{st}\,ds. \qquad (2.\text{П}.51)$$

После ряда преобразований этого выражения найдём

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega, \qquad (2.\text{П}.52)$$

где $P(\omega) = \mathrm{Re}\Phi(j\omega)$.

Переходный процесс (решение $y(t)$) можно также описать через мнимую часть передаточной функции замкнутой системы

$$y(t) = \Phi(0) + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{S(\omega)}{\omega}\cos\omega t\,d\omega, \qquad (2.\text{П}.53)$$

где $S(\omega) = \mathrm{Jm}\,\Phi(j\omega)$.

Обычно используют выражение (2.П.52). Способ построения $P(\omega)$ по ЛАЧХ и ФЧХ приведён ниже в разделе 2.П.5. Для вычисления интеграла (2.П.52) аппроксимируют $P(\omega)$ суммой трапеций, как показано на рис. 2.П.3.

Часто вещественную частотную характеристику можно аппроксимировать двумя трапециями (см. рис. 2.П.4.).

Эта аппроксимирующая функция характеризуется параметрами: основным наклоном $æ = \dfrac{\omega_d}{\omega_n}$, коэффициентом формы $\lambda = \dfrac{\omega_b}{\omega_n}$, наклоном $æ_a = \dfrac{\omega_a}{\omega_0}$, числами $p_{\max}$ и ω_n.

На рис. 2.П.5. приведены зависимости времени регулирования и перерегулирования от $p_{\max}$

Эти зависимости получены эмпирически в результате анализа и усреднения большого числа кривых $y(t)$, порождаемых аппроксимирующей функцией при различных значениях λ, $æ$, $æ_a$.

Примечание 2.П.1. Обозначим $P^A(\omega)$ ломаную линию, аппроксимирующую вещественную частотную характеристику $P(\omega)$. Переходный процесс, соответствующий функции $P^A(\omega)$

$$y^A(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{P^A(\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega. \qquad (2.\text{П}.54)$$

■

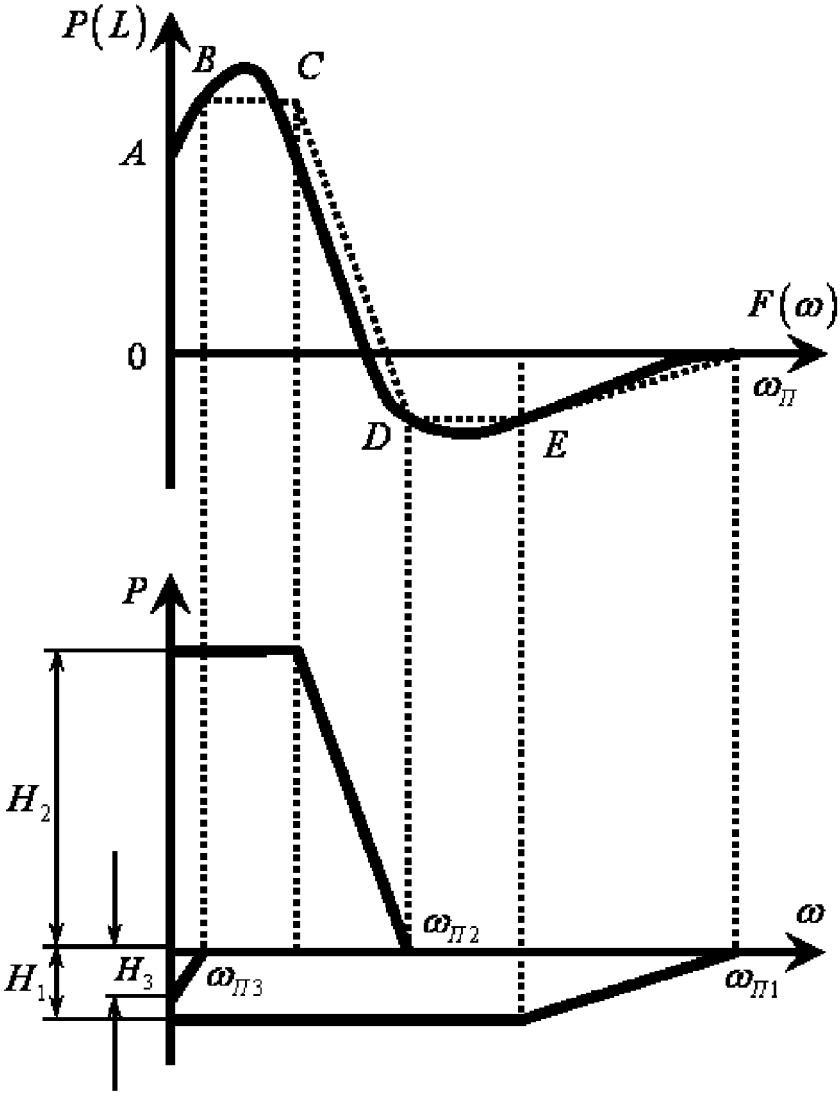

Рис. 2.П.3.

Разность между точным $y(t)$ и приближённым $y^A(t)$ решением

$$\Delta y(t) = y(t) - y^A(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Delta P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\, d\omega, \qquad (2.\text{П}.55)$$

где $\Delta P(\omega) = P(\omega) - P^A(\omega)$.

Пусть, например,

$$\Delta P(\omega) = \alpha\sin\beta\omega \quad (\alpha = \text{const},\ \beta = \text{const}), \qquad (2.\text{П}.56)$$

тогда

$$\Delta y(t) = \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\beta\omega\sin\omega t}{\omega}\, d\omega = \frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{(\beta+t)^2}{(\beta-t)^2}. \qquad (2.\text{П}.57)$$

При $t \to \beta$ значение $\Delta y(t) \to \infty$.

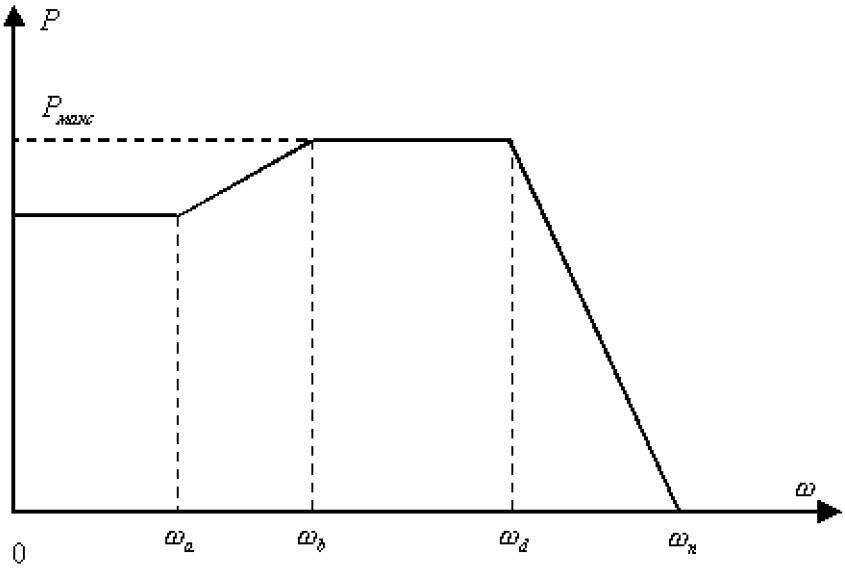

Рис. 2.П.4.

Этот пример показывает, что сколь угодно малые погрешности аппроксимации вещественной частотной характеристики могут приводить к сколь угодно большим ошибкам при вычислении переходного процесса.

2.П.5. Определение вещественной частотной характеристики по ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы

Выразим $P(\omega)$ через амплитудно-частотную $a(\omega)$ и фазо-частотную $\varphi(\omega)$ характеристики разомкнутой системы.

Запишем (2.П.50) при $s = j\omega$

$$\Phi(j\omega) = \frac{a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{1 + a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}} = \frac{a(\omega)\cos\varphi(\omega) + ja(\omega)\sin\varphi(\omega)}{1 + a(\omega)\cos\varphi(\omega) + ja(\omega)\sin\varphi(\omega)} = P(\omega) + jS(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{a^2(\omega) + a(\omega)\cos\varphi(\omega)}{a^2(\omega) + 2a(\omega)\cos\varphi(\omega) + 1}. \qquad (2.П.58)$$

Построим в плоскости с осью ординат и осью абсцисс геометрическое место точек $P(\omega) = P_c = \text{const}$.

Эти кривые, имеющие своеобразную форму в виде симметричных восьмёрок, приведены на рис. 2.П.6.

Нанесём на рис. 2.П.6. (логарифмическую) амплитудно-фазовую характеристику.

Это осуществляется так. Для некоторой фиксированной частоты ω_1 определяем по ЛАЧХ числа $20\lg a(\omega_1)$ и $\varphi(\omega_1)$. Отмечаем на рис. 2.П.6. точку с такими координатами. Повторяем эту операцию для $\omega = \omega_2$ и т.д. Соединяя эти точки получаем

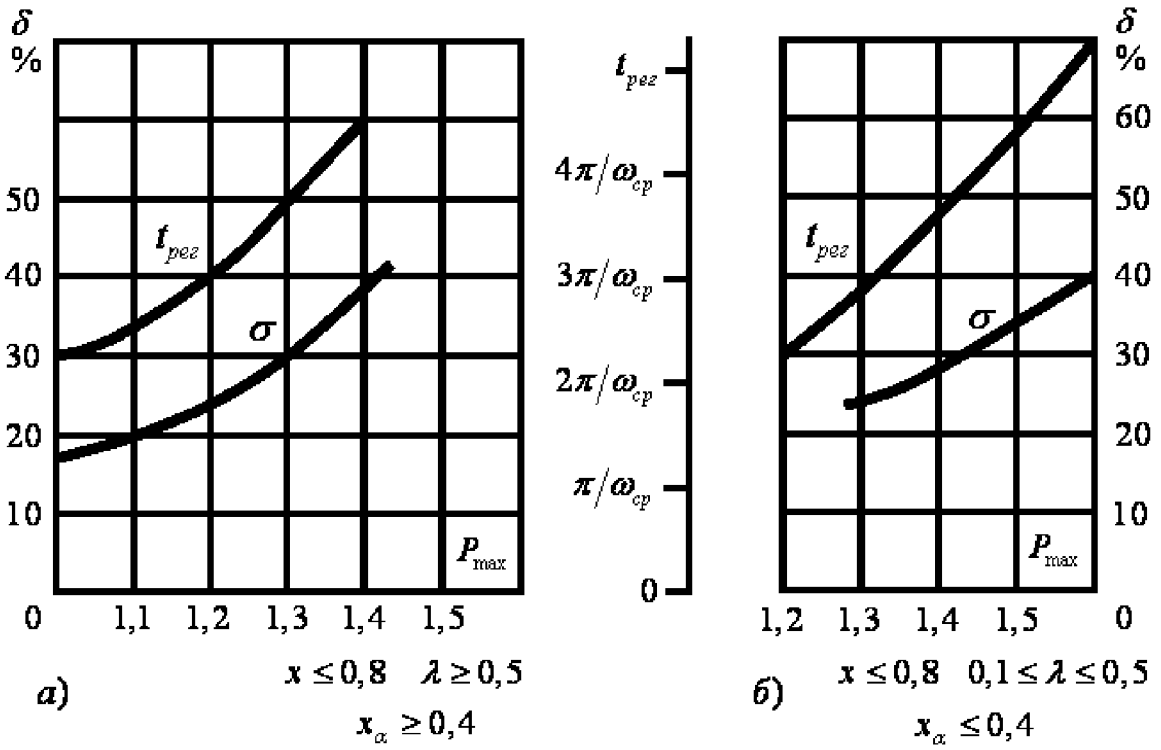

Рис. 2.П.5.

АФХ разомкнутой системы. Определяем частоты в точках пересечения АФХ с линиями $P_c = \text{const}$, получаем графики.

Если построенную функцию $P(\omega)$ можно аппроксимировать двумя трапециями, то определяют

$$P_{\max} = \max_{0 \le \omega \le \infty} P(\omega),$$

и находят по номограммам рис. 2.П.5 значения $t_{рег}$ и σ.

Таким образом можно сформировать процедуру определения показателей качества переходных процессов в системе по её ЛАЧХ и ФЧХ в разомкнутом состоянии. Эта процедура состоит из операций:

а) построение $P(\omega)$ по ЛАЧХ и ФЧХ используя номограмму рис. 2.П.6,

б) определение параметров λ, æ, æ$_a$ аппроксимирующей функции,

в) определение на основе номограмм рис. 2.П.5а или рис. 2.П.5б показателей качества $t_{рег}$ и σ.

2.П.6. Уточнение желаемой ЛАЧХ

Для уточнения среднечастотной части желаемой ЛАЧХ используются приведённые выше операции. Изменяется их последовательность.

Процедура 2.П.1.

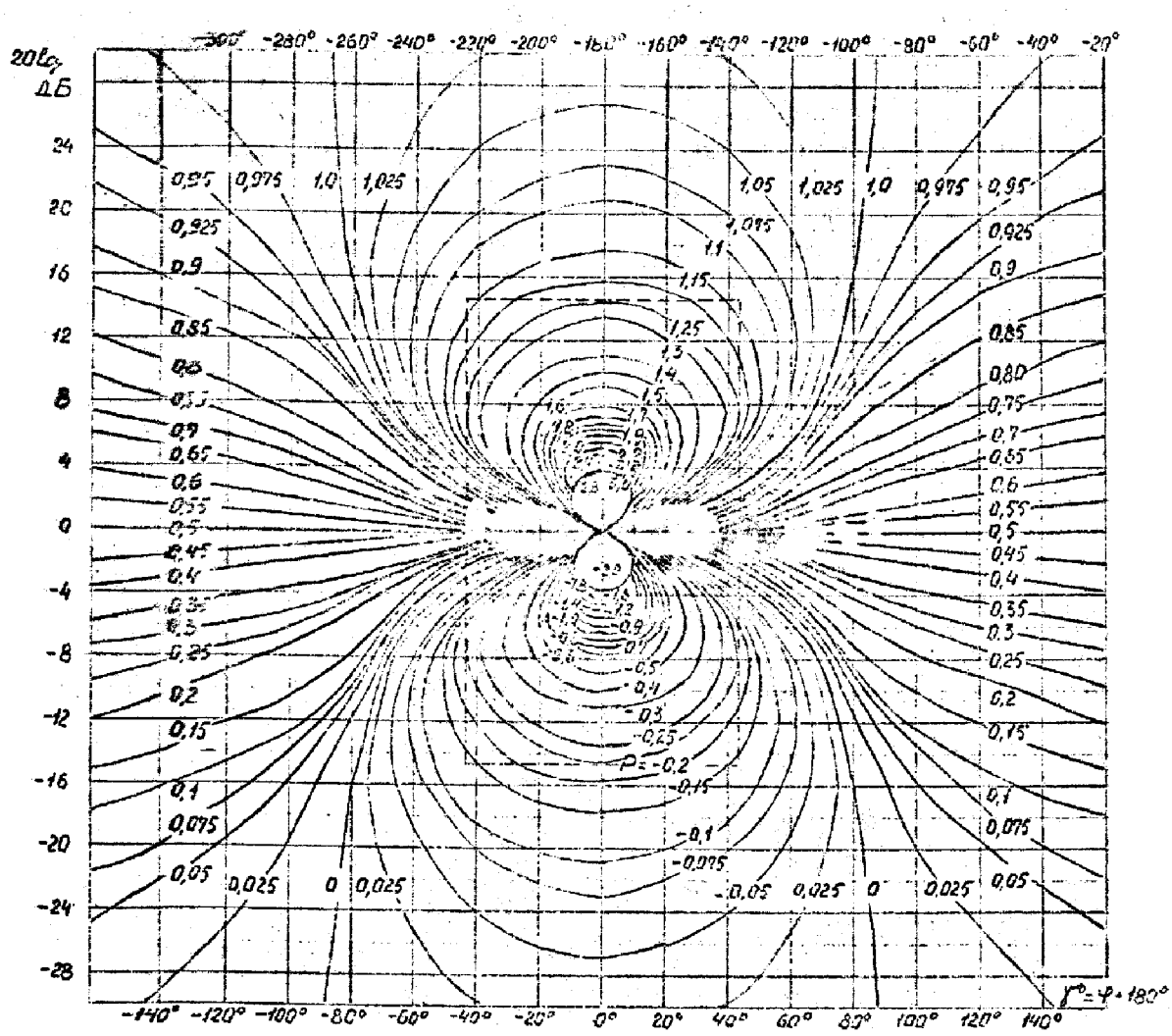

Рис. 2.П.6.

Осуществляется в следующей последовательности:

1. по заданному перерегулированию $\sigma = \sigma^*$ ($\sigma^* = \underline{\sigma}$ либо $\sigma^* = \overline{\sigma}$). Определяем по одной из номограмм рис. 2.П.5 число $p_{\max}$, из этой же номограммы определяем параметр k в формуле $t_{рег} = \dfrac{k\pi}{\omega_{ср}}$, из которой находим $\omega_{ср} = \dfrac{k\pi}{t_{рег}}$,

2. на монограмме рис. 2.П.6 выделяем запретную для АФХ область, ограниченную линиями $p_{\max}$ и $p_{\min} = p_{\max} - 1$,

3. формируем среднечастотную часть ЛАЧХ так, чтобы АФХ не пересекала запретной области.

■

Пример 2.П.5. Уточним среднечастотную часть ЛАЧХ построенной в примере 2.3.1. Выполним первую операцию процедуры 2.П.1 при $\sigma = 30\%$. Находим из графика рис. 2.П.5.а $p_{\max} = 1.27$. Этому значению $p_{\max}$ соответствует $t_{рег} = \dfrac{3.7\pi}{\omega_{ср}} = 0.8$.

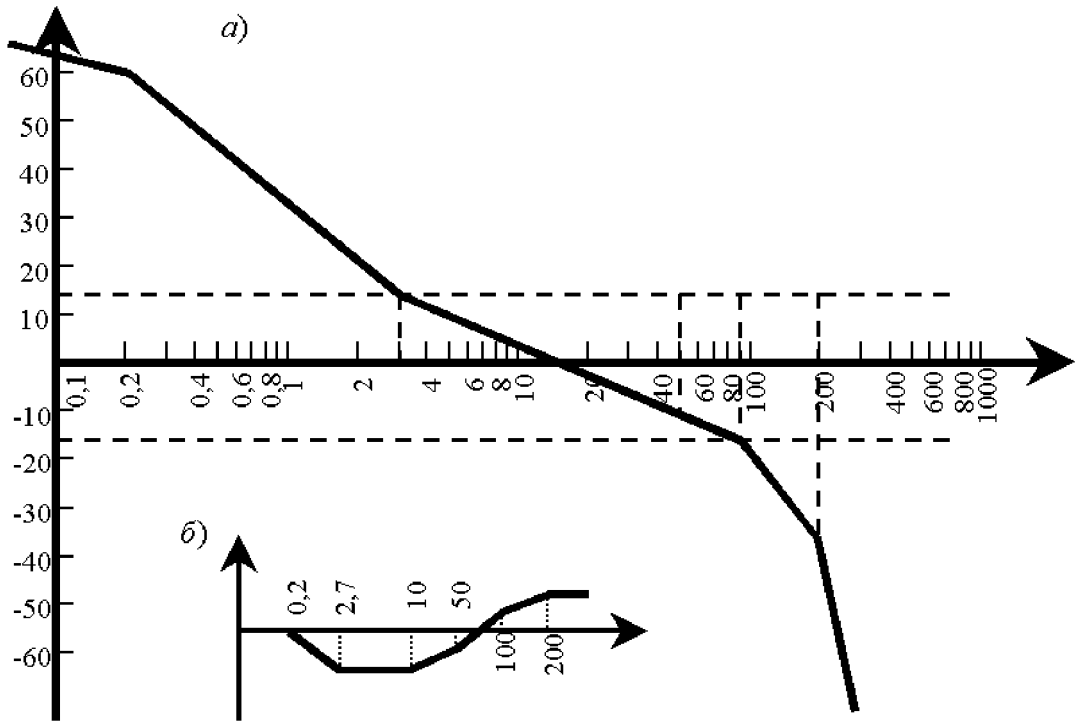

Рис. 2.П.7.

Отсюда $\omega_{cp} = \dfrac{3.7\pi}{0.8} = 14.5\dfrac{1}{сек}$. Принимаем как и ранее $\omega_{cp} = 15\dfrac{1}{сек}$. Результатом второй операции является запретный прямоугольник, выделенный на рис. 2.П.6. пунктиром. Эта запретная область построена при $p_{\max} = 1.27$ и $p_{\min} = 0.27$, и имеет стороны ± 14 дб. и $\pm 40°$.

Переходя к третьей операции рассмотрим рис. 2.П.7.а, на котором приведена уточнённая желаемая ЛАЧХ. Длина её среднечастотной части выбрана так, чтобы она целиком лежала в трубке ± 14 дб. Избыток фазы $\gamma(\omega) = 180° + \varphi(\omega)$ на частоте ω_x составляет $70°$, а на частоте $\omega = 100$ 1/сек. равен $38.4°$. Между этими частотами $\gamma(\omega) \geq 40°$. Это означает, что АФХ не пересекает запретной области.

Построенная желаемая ЛАЧХ обеспечивает показатели качества (2.3.26). Правда, передаточная функция корректирующего контура (регулятор) усложняется по сравнению с (2.3.27).

Она имеет вид

$$w_p(s) = \frac{(0.4s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}{(5s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}.$$

Эта передаточная функция получена из ЛАЧХ, приведённой на рис. 2.П.7.б ■

Доказательства к главе 2

2.Д.1. Доказательство утверждения 2.2.1

Убедимся вначале, что при выполнении неравенства (2.2.30) имеет место соотношение

$$|\eta^2_{ym}(\omega) - \eta^2(\omega)| \le \varepsilon_з \qquad 0 \le \omega \le \omega_н, \tag{2.Д.1}$$

где $\eta^2(\omega) = |1 + w_{раз}(j\omega)|^2$, $\eta^2_{ym}(\omega) = |1 + w_{раз.ym}(j\omega)|^2$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\left|\eta^2_{ym}(\omega) - \eta^2(\omega)\right| &= \left|2a_{ym}(\omega)\cos\varphi_{ym}(\omega) - 2a(\omega)\cos\varphi(\omega) + a^2_{ym}(\omega) - a^2(\omega)\right| \le \\ &\le 2\left|a_{ym}(\omega)\cos\varphi_{ym}(\omega) - a(\omega)\cos\varphi(\omega)\right| + \left|a^2_{ym}(\omega) - a^2(\omega)\right|.\end{aligned} \tag{2.Д.2}$$

Используя неравенства (2.2.28) и учитывая, что $|\cos\varphi(\omega)| \le 1$, $|\sin\varphi(\omega)| \le 1$,

$$|\cos\varphi_{ym}(\omega) - \cos\varphi(\omega)| = \left|2\sin\frac{\varphi_{ym}(\omega) + \varphi(\omega)}{2}\sin\frac{\varphi_{ym}(\omega) - \varphi_{ym}(\omega)}{2}\right| \le$$

$$\le 2\sin\frac{\varphi_{ym}(\omega) - \varphi(\omega)}{2},$$

запишем для первого слагаемого в (2.Д.2)

$$\begin{gathered}|a_{ym}(\omega)\cos\varphi_{ym}(\omega) - a(\omega)\cos\varphi(\omega)| \le \\ \le |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot |\cos\varphi_{ym}(\omega)| + a(\omega)|\cos\varphi_{ym}(\omega) - \cos\varphi(\omega)| \le \\ \le |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| + 2a(\omega)\sin\frac{|\varphi_{ym}(\omega) - \varphi(\omega)|}{2} \le \\ \le a(\omega)\varepsilon_1 + 2a(\omega)\sin\frac{\varepsilon_2}{2}.\end{gathered}$$

Для второго слагаемого в (2.Д.2) имеем

$$\begin{aligned}|a^2_{ym}(\omega) - a^2(\omega)| &= |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot |a_{ym}(\omega) - a(\omega) + 2a(\omega)| \le \\ &\le |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot [|a_{ym}(\omega) - a(\omega)| + 2a(\omega)] \le |a^2(\omega)\varepsilon_1^2 + 2a^2(\omega)\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Подставляя эти уравнения в (2.Д.2) и учитывая (2.2.30), получим (2.Д.1). Из (2.Д.1) следует, что

$$\eta^2_{ym}(\omega) \ge \eta^2(\omega) - \varepsilon_з \ge \min_{0\le\omega\le\omega_н} \eta^2(\omega) - \varepsilon_з,$$

и таким образом,

$$\min_{0\le\omega\le\omega_н} \eta^2_{ym}(\omega) \ge \min_{0\le\omega\le\omega_н} \eta^2(\omega) - \varepsilon_з \qquad 0 \le \omega \le \omega_н. \tag{2.Д.3}$$

Оценим $r_{ym}(\omega)$ в диапазоне $[\omega_н, \infty]$ при условиях (2.2.29), (2.2.31)

$$r^2_{ym}(\omega) = 1 + 2a_{ym}(\omega)\cos\varphi_{ym}(\omega) + a^2_{ym}(\omega) \ge 1 - 2a_{ym}(\omega) \ge 0.6.$$

Из этого неравенства и (2.Д.3) следует $r_{ym} \ge 0.75$, что и подтверждает справедливость утверждения.

Заключение к главе 2

Резюмируем изложенное в этой главе, основное содержание которой составляют традиционные разделы частотной теории автоматического регулирования:

- понятие амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, её логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики,
- критерий Найквиста (теоремы 2.1.2, 2.1.3),
- понятия статической ошибки, времени регулирования и перерегулирования при ступенчатом задающем воздействии (определения 2.3.1 и 2.3.2), а также показателя колебательности (2.3.16),
- метод ЛАЧХ, разрешающий задачу 2.3.1 синтеза регуляторов по требованиям к точности и качеству переходных процессов при ступенчатом задающем воздействии, а также к грубости, определяемой частотными показателями – запасами устойчивости по фазе и модулю.

Наряду с этим в главе приводятся нетрадиционные понятия и результаты.

1. Введены понятия радиуса (2.2.7) запасов устойчивости системы, структурных показателей, структурных возмущений и структурной грубости (определение 2.2.2).
2. Введены понятия установившееся ошибки, времени регулирования и перерегулирования при ступенчатом внешнем возмущении (определения 2.3.3 и 2.3.4).
3. (П) Установлены связи (2.П.28), (2.П.29) параметрических возмущений с запасами устойчивости по фазе и модулю.
4. (П) Показано, что системы с нулевой либо малой степенями грубости имеют малые значения частотных показателей грубости (п. 2.П.3).

Часть II. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта

Достоинства метода ЛАЧХ (наглядность и эффективность) во многом определяются его графоаналитическим характером. Последнее служит также и причиной недостатков метода.

Первый из них состоит в трудности автоматизации расчётов и использованием ЭВМ, второй – ориентация на одномерные системы.

Эти обстоятельства привели к аналитическим методам: аналитическому конструированию регуляторов (АКОР) и модальному управлению, которые часто называют *методами пространства состояния.* Их аналитичность удобна для применения ЭВМ и они в равной мере пригодны как для одномерных, так и многомерных систем.

Цели управления описываются в методах пространства состояний с помощью квадратичного функционала либо корней характеристического полинома системы. Область применения этих методов: системы стабилизации (регулятор в таких системах обеспечивает лишь асимптотическую устойчивость объекта, возбуждённого начальными отклонениями), системы регулирования и слежения при случайных внешних возмущениях и помехах с известными статистическими характеристиками.

Для применения методов пространства состояний к синтезу регуляторов, обеспечивающих заданную точность при ограниченных внешних возмущениях (задачи 1.1.1 и 1.1.2), необходимо найти связь целей управления в этих методах и точностью регулирования.

Такая связь служит центральным вопросом этой части. После его решения оба метода доставляют сходные результаты. Различие состоит в том, что при аналитическом конструировании регуляторов можно указать конструктивные условия, при которых синтезируемая система грубая по частотным показателям, а для модального управления – лишь интуитивные рекомендации. (О возможной негрубости систем, синтезируемых с помощью методов пространства состояний, свидетельствуют, примеры п. 1.П.6 и п. 1.П.7 приложения к главе 1).

Таким образом, аналитический синтез регуляторов – это методы построения реализуемых регуляторов, обеспечивающих грубость системы и требуемую точность при ограниченных внешних возмущениях и помехах, основанные на методах пространства состояний.

Для одномерных объектов аналитический синтез разрешает, в частности, задачи, охватываемые методом ЛАЧХ.

Полученные в этой части результаты развиваются в главе 9 на многомерный случай и служат основой для построения частотного управления в главах 6 и 7.

3. Модальное управление

Традиционный путь построения стабилизирующего управления обеспечивающего заданные корни характеристического полинома системы, складывается из двух процедур: синтеза управления в предположении полной измеряемости его вектора переменных состояния и построения наблюдателя Люенбергера для восстановления переменных состояния по измеряемой переменной. Результатом этих процедур служат уравнения регулятора.

Возможен другой путь построения этого регулятора: приведение уравнений объекта к форме ««вход-выход»» и построение модального управления, исходя из этой формы. Хотя такой путь требует исследования существования и единственности модального управления, а также его реализуемости, он открывает новые возможности для установления связи точности системы с её характеристическим полиномом. Такая связь необходима для решения задач 1.1.1 и 1.1.2.

Цель этой главы:

- установление структуры и параметров характеристического полинома системы, при которых удовлетворяются требования к её точности,
- построение на основе такой связи реализуемых управлений, разрешающих задачи регулирования и слежения для объектов второго вида при внешних возмущениях (задачи 3.2.1 и 3.3.1),
- развитие этих результатов на объекты первого вида, регуляторы которых реализуют обратную связь по состоянию (задача 3.4.2),
- исследование причин негрубости систем со стабилизирующим управлением при традиционном его построении (с наблюдателем).

3.1. Стабилизация объектов второго вида

3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый объект регулирования

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u, \quad \gamma < n \tag{3.1.1}$$

параметры d_i , b_j $\left(i = \overline{0, n-1},\ \ j = \overline{0, \gamma}\right)$ которого заданы.

Пусть этот объект замкнут регулятором

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y. \tag{3.1.2}$$

Характеристический полином рассматриваемой системы

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s) = d^u_{2n-1}s^{2n-1} + d^u_{2n-2}s^{2n-2} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0, \tag{3.1.3}$$

где

$$g(s) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i s^i, \quad r(s) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i. \tag{3.1.4}$$

Задача 3.1.1. (Задача модального управления). Для заданного объекта (3.1.1) найти параметры g_i, r_j $\left(i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, n-1}\right)$ регулятора (3.1.2) такие, чтобы характеристический полином системы имел заданные корни s_i $\left(i = \overline{1, 2n-1}\right)$. ■

3.1.2. Процедура решения

Выразим коэффициенты характеристического полинома через параметры системы. Нетрудно видеть, что

$$d_\alpha^u = \sum_{i=0}^{n} d_i g_{\alpha-i} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}, \tag{3.1.5}$$

где

$$g_{\alpha-i} = 0, \quad \text{если} \quad \alpha - i < 0 \quad \text{и} \quad \alpha - i > n-1; \tag{3.1.6}$$

$$r_{\alpha-l} = 0, \quad \text{если} \quad \alpha - l < 0 \quad \text{и} \quad \alpha - l > n-1. \tag{3.1.7}$$

Приведём очевидную процедуру решения задачи 3.1.1.

Процедура 3.1.1. (Процедура решения задачи модального управления).

Операция 1: Сформировать желаемый (модальный) полином

$$\delta(s) = \delta_{2n-1} \prod_{i=1}^{2n-1} (s - s_i^*) = \delta_{2n-1} s^{2n-1} + \delta_{2n-2} s^{2n-2} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0. \tag{3.1.8}$$

Операция 2: Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов $d^u(s)$ и $\delta(s)$, получить систему управлений

$$\sum_{i=0}^{n} d_i g_{\alpha-i} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} = \delta_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{3.1.9}$$

Операция 3: Решить систему линейных алгебраических уравнений (3.1.9) и определить параметры регулятора (3.1.2).

■

Пример 3.1.1. Рассмотрим задачу модального управления велосипедом (1.3.6)

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \tag{3.1.10}$$

с параметрами

$$d_0 = -16, \quad b_1 = 5, \quad b_0 = 30. \tag{3.1.11}$$

Требуется найти коэффициенты регулятора

$$g_1\dot{u} + g_0 u = r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{3.1.12}$$

при которых характеристический полином системы (3.1.10), (3.1.12) имеет корни

$$s_1^* = -6, \quad s_2^* = -7, \quad s_3^* = -7. \tag{3.1.13}$$

Для решения задачи сформируем (при $\delta_3 = 5$) желаемый полином

$$\delta(s) = \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0 = 5(s+6)(s+7)^2 = 5s^3 + 100s^2 + 665s + 1470. \tag{3.1.14}$$

Характеристический полином системы (3.1.10), (3.1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} d^u(s) &= (s^2 + d_0)(g_1 s + g_0) - (b_1 s + b_0)(r_1 s + r_0) = \\ &= g_1 s^3 + (g_0 - b_1 r_1)s^2 + (d_0 g_1 - b_0 r_1 - b_1 r_0)s + d_0 g_0 - b_0 r_0. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Из равенства $d^u(s) = \delta(s)$ получим систему уравнений

$$g_1 = \delta_3, \quad g_0 - b_1 r_1 = \delta_2, \quad d_0 g_1 - b_0 r_1 - b_1 r_0 = \delta_1, \quad d_0 g_0 - b_0 r_0 = \delta_0. \tag{3.1.16}$$

В матричной форме эта система примет вид

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 & 0 \\ d_0 & 0 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & d_0 & 0 & -b_0 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} g_1 \\ g_0 \\ \hline r_1 \\ r_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{array}\right). \tag{3.1.17}$$

Используя численные значения коэффициентов запишем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ -16 & 0 & -30 & -5 \\ 0 & -16 & 0 & -30 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} g_1 \\ g_0 \\ \hline r_1 \\ r_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 100 \\ 665 \\ 1470 \end{array}\right). \tag{3.1.18}$$

Решение этой системы

$$g_1 = 5, \quad g_0 = 30; \qquad r_1 = -14, \quad r_0 = -65. \tag{3.1.19}$$

■

3.1.3. Существование решения

Найдём условия существования решения системы (3.1.9). Эта система получена из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \delta(s), \tag{3.1.20}$$

которое будем называть *модальным тождеством.*

Если существуют полиномы $g(s)$ и $r(s)$, удовлетворяющие уравнению (3.1.20), то существует и решение системы алгебраических уравнений (3.1.9).

Пусть, для общности, полиномы $g(s)$, $r(s)$, $\delta(s)$ имеют степени n_p, γ_p и ρ соответственно ($\gamma_p \le n_p$). Будем обозначать степень полинома, например $g(s)$, как $\deg g(s)$. Таким образом

$$\deg g(s) = n_p, \quad \deg r(s) = \gamma_p, \quad \deg \delta(s) = \rho.$$

Определим наименьшие числа n_p и γ_p, при которых уравнения (3.1.9) совместны.

Число уравнений (3.1.9), порождаемых тождеством (3.1.20), равно $n + n_p + 1$, а число неизвестных коэффициентов полиномов $g(s)$ и $r(s)$ составляет $n_p + \gamma_p + 2$.

Для совместности системы (3.1.9) достаточно принять $\gamma_p = n - 1$ и тогда из условия реализуемости ($n_p \ge \gamma_p$) получим минимальные степени $n_p = \gamma_p = n - 1$. Следовательно, условие совместности имеет вид

$$n_p \ge n - 1, \quad \gamma_p \ge n - 1. \tag{3.1.21}$$

Второе условие существования доставляет следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть $d(s)$, $b(s)$ и $\delta(s)$ заданные полиномы с действительными коэффициентами. Для существования полиномов $g(s)$ и $r(s)$, удовлетворяющих тождеству (3.1.20), необходимо и достаточно, чтобы полином $\delta(s)$ делился нацело на наибольший общий делитель $\nu(s)$ полиномов $d(s)$ и $b(s)$. ■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.1.

Если объект (3.1.1) полностью управляем, то $\nu(s) = 1$ и очевидно следствие теоремы 3.1.1.

Следствие 3.1.1. Для существования полиномов $g(s)$ и $r(s)$, удовлетворяющих модальному тождеству (3.1.20), необходима и достаточна полная управляемость объекта (3.1.1). ■

3.1.4. Условия единственности

Пусть $g^*(s)$ и $r^*(s)$ – некоторое решение уравнения (3.1.20). Нетрудно проверить, что полиномы

$$g(s) = g^*(s) - k(s)b(s), \quad r(s) = r^*(s) - k(s)d(s). \tag{3.1.22}$$

(где $k(s)$ – произвольный полином) также является решением (3.1.20).

Это означает, что если существует хотя бы одно решение уравнения (3.1.20), то можно построить сколь угодно много решений, добавляя или вычитая из него многочлены $g(s)$ и $r(s)$ с одинаковым полиномиальным сомножителем.

Теорема 3.1.2. Если соотношение (3.1.20) разрешимо, то полиномы $g(s)$ и $r(s)$ определяются однозначно при любом из следующих условий

$$\deg g(s) < \deg \left[b(s)\nu^{-1}(s)\right], \tag{3.1.23}$$

$$\deg r(s) < \deg \left[d(s)\nu^{-1}(s)\right]. \tag{3.1.24}$$

Если выполнено неравенство

$$\deg \delta(s) < \deg d(s) + \deg b(s) - \deg \nu(s), \tag{3.1.25}$$

то каждое из условий (3.1.23), (3.1.24) приводит к одной и той же паре полиномов $g(s)$ и $r(s)$. ■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.2.

Следствие 3.1.2. Процедура 3.1.1 доставляет однозначно регулятор вида (3.1.2). ■

Действительно, регулятор (3.1.2) существует, так как объект (3.1.1) полностью управляем (см. следствие 3.1.1) и выполняется условие (3.1.21). Этот регулятор единственный в силу соотношения

$$\deg r(s) = n - 1 < n = \deg d(s). \tag{3.1.26}$$

Пример 3.1.2. Вычислим определитель системы (3.1.17), разрешающей задачу модального управления велосипедом

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & 0 \\ 0 & -b_0 & -b_1 \\ d_0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -b_0 & -b_1 \\ 0 & -b_0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ -b_0 & -b_1 \end{pmatrix} d_0 = b_0^2 + d_0 b_1^2. \tag{3.1.27}$$

Выясним смысл соотношения

$$d_0 = -\frac{b_0^2}{b_1^2}, \tag{3.1.28}$$

при котором $\Delta = 0$ и, следовательно, решение системы (3.1.17) неединственно либо но существует (уравнения (3.1.17) не совместны).

При выполнении (3.1.28) полиномы $d(s)$ и $b(s)$ имеют общий делитель $\nu(s) = s + \sqrt{|d_0|}$ (объект (3.1.10) не вполне управляем). Из-за этого нарушаются условия (3.1.23) и (3.1.24). Действительно

$$\deg g(s) = 1, \quad \text{а} \quad \deg\left[b(s)\nu^{-1}(s)\right] = 0;$$

$$\deg r(s) = 1, \quad \text{а} \quad \deg\left[d(s)\nu^{-1}(s)\right] = \deg\left[\frac{(s-\sqrt{|d_0|})(s+\sqrt{|d_0|})}{s+\sqrt{|d_0|}}\right] = 1.$$

■

3.1.5. Структурное модальное управление

Пусть модальный полином $\delta(s)$ имеет структуру

$$\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s), \tag{3.1.29}$$

где

$$\tilde{\psi}(s) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0. \tag{3.1.30}$$

Это означает, что в задаче модального управления заданы лишь n корней характеристического полинома (3.1.3). Из них формируется полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i-1}^{n}(s - s_i^*) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0. \tag{3.1.31}$$

Модальное тождество (3.1.20) принимает вид

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\tilde{\psi}(s). \tag{3.1.32}$$

Этому уравнению удовлетворяют полиномы

$$g^c(s) = b(s), \quad r^c(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s). \tag{3.1.33}$$

которые определяют *структурное модальное управление.*

Исследуем устойчивость системы с таким управлением. Пусть $\operatorname{Re} s_i^* < 0 \ \ (i = \overline{1,n})$, тогда для устойчивости нужно, чтобы объект (3.1.1) был устойчивым по управлению.

Определение 3.1.1. Объект (3.1.1) называется *устойчивым по управлению*, если полином $b(s)$ при управлении имеет корни $s_i^b \ \left(i = \overline{1,\gamma}\right)$ с отрицательными вещественными частями ($\operatorname{Re} s_i^b < 0 \ \left(i = \overline{1,\gamma}\right)$). ■

Решение (3.1.33) – единственное решение уравнения (3.1.32). Действительно, из структуры полинома $r(s)$ следует, что $\deg r(s) < n = \deg d(s)$.

Пример 3.1.2. Покажем, что управление, построенное в примере (3.1.1) – структурное модальное управление. При численных значениях параметров (3.1.11) можно записать полином (3.1.14) в виде

$$\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s), \tag{3.1.34}$$

где $b(s) = 5(s+6)$, $\tilde{\psi}(s) = (s+7)^2$.

Тогда, используя формулы (3.1.33), получим полиномы регулятора

$$g^c(s) = b(s) = 5s + 30, \quad r^c(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s) = (s^2 - 16) - (s^2 + 14s + 49) = -14s - 65,$$

параметры которых совпадают с (3.1.19). ■

3.1.6. Реализация структурного управления

Пусть степень γ полинома $b(s)$ меньше $n-1$ и $\tilde{\psi}_{n-1} \neq d_{n-1}$. В этом случае регулятор

$$b(s)u = \left[d(s) - \tilde{\psi}(s)\right] y \tag{3.1.35}$$

не реализуем, так как $\gamma < \deg\left[d(s) - \tilde{\psi}(s)\right]$.

В связи с этим примем структуру полинома

$$\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s), \tag{3.1.36}$$

где многочлен

$$\varepsilon^0(s) = \varepsilon^0_\alpha s^\alpha + \varepsilon^0_{\alpha-1}s^{\alpha-1} + \cdots + \varepsilon^0_1 s + \varepsilon^0_0. \tag{3.1.37}$$

имеет степень

$$\alpha = n - \gamma - 1. \tag{3.1.38}$$

Решение уравнения

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s) \tag{3.1.39}$$

будем искать в виде

$$g(s) = b(s)\rho(s), \tag{3.1.40}$$

где $\rho(s) = \rho_\alpha s^\alpha + \rho_{\alpha-1}s^{\alpha-1} + \cdots + \rho_1 s + \rho_0$, $\alpha = n - \gamma - 1$.

Подставляя (3.1.40) в (3.1.39), получим

$$d(s)\rho(s) - r(s) = \varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s). \tag{3.1.41}$$

Положим

$$\varepsilon^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma-1}. \tag{3.1.42}$$

Утверждение 3.1.1. Всегда существует достаточно малое число ε^0, что уравнение (3.1.41) имеет решение

$$\rho(s) = \varepsilon^0(s) + o^\varepsilon(s), \quad r(s) = r^0(s) + o^r(s), \tag{3.1.43}$$

в котором $o^\varepsilon(s)$ и $o^r(s)$ – полиномы степеней $n-\gamma-1$ и $n-1$ соответственно, имеют сколь угодно малые коэффициенты o^ε_α, $o^\varepsilon_{\alpha-1}$, ..., o^ε_1, o^ε_0; o^r_{n-1}, ..., o^r_1, o^r_0. ■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.3. Это утверждение было использовано в примере 1.1.3.

Из (3.1.40) и (3.1.43) получим

$$\deg g(s) = \deg b(s) + \deg \rho(s) = n-1, \quad \deg r(s) = n-1, \tag{3.1.44}$$

и, следовательно, регулятор

$$b(s)[\varepsilon^0(s) + o^\varepsilon(s)]u = [d(s) - \tilde{\psi}(s) + o^r(s)]y \tag{3.1.45}$$

реализуем.

3.2. Регулирование

3.2.1. Постановка задачи

Объект (3.1.1) при внешних возмущениях описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \tag{3.2.1}$$

где $m(s) = m_\alpha s^\alpha + \cdots + m_1 s + m_0 \quad (\alpha < n)$ – заданный многочлен, корни которого $s_i^f \ \left(i = \overline{1,\alpha}\right)$ имеют отрицательные вещественные части $(\mathrm{Re}s_i^f < 0 \quad (i = \overline{1,\alpha}))$.

Определение 3.2.1. Если корни полинома $m(s)$ имеют отрицательные вещественные части то объект (3.2.1) называется *устойчивым по возмущению.* ■

Будем рассматривать три вида внешних возмущений: ступенчатое

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при} \quad t \geq t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t < t_0, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

гармоническое возмущение

$$f(t) = f_{гарм} \sin \omega^f t, \tag{3.2.3}$$

и произвольное ограниченное

$$|f(t)| \leq f^*. \tag{3.2.4}$$

В этих выражениях $\bar{f}$, $f_{гарм}$, f^* – заданные числа.

Задача 3.2.1. Пусть задан объект (3.2.1) устойчивый по управлению и возмущению. Требуется найти регулятор

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{3.2.5}$$

такой, чтобы система (3.2.1), (3.2.5):

а) была асимптотически устойчивой,

б) удовлетворяла требованию к точности

$$|y(t)| \leq y^*, \quad t \geq t_{рег}, \tag{3.2.6}$$

в) имела показатели качества

$$\underline{t}_{рег} \leq t_{рег} \leq \overline{t}_{рег}, \quad \sigma \leq \overline{\sigma}, \tag{3.2.7}$$

где y^*, $\underline{t}_{рег}$, $\overline{t}_{рег}$, $\overline{\sigma}$ – заданные числа. ■

Время регулирования в этой задаче может определяться различным образом в зависимости от вида внешнего возмущения. Если $f(t)$ – ступенчатое возмущение, то $t_{рег}$ совпадает с введённым определением 2.3.3. При возмущениях (3.2.3) и (3.2.4) $t_{рег}$ – это время, через которое переходный процесс не выходит за пределы ««трубки»» (1.2.6).

3.2.2. Процедура решения

Найдём связь выхода системы (3.2.1), (3.2.5) с внешним возмущением. Исключая переменную $u(t)$ из этих уравнений, получим

$$y = \frac{m(s)g(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)} f. \tag{3.2.8}$$

Определим параметры регулятора (3.2.5) из модального тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \delta(s). \tag{3.2.9}$$

Тогда связь (3.2.8) примет вид

$$y = \frac{m(s)g(s)}{\delta(s)} f. \tag{3.2.10}$$

В общем случае полином $g(s)$ неявно зависит от полинома $\delta(s)$ и поэтому трудно указать способ определения параметров полинома $\delta(s)$, при которых удовлетворяется требование (3.2.6) к точности системы (3.2.1), (3.2.5).

В связи с этим используем структурное модальное управление (3.1.33), которое построено при $\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s)$.

Соотношение (3.2.10) примет в этом случае вид

$$y = \frac{m(s)}{\tilde{\psi}(s)} f. \tag{3.2.11}$$

При $\gamma < n - 1$ принимаем (для реализуемости регулятора) полином $\delta(s) = b(s)\cdot$ $\cdot\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s)$, при этом $g(s) = b(s)\rho(s)$.

Тогда

$$y = \frac{m(s)\rho(s)}{\tilde{\psi}(s)\varepsilon^0(s)} f. \tag{3.2.12}$$

Используя утверждение 3.1.1 заключаем, что это соотношение приближается к (3.2.11) при достаточно малых коэффициентах полинома $\varepsilon^0(s)$.

Из выражения (3.2.10) следует, что решение задачи 3.2.1 сводится при использовании модального управления к определению параметров полинома $\tilde{\psi}(s)$ управления качества (желаемой модели замкнутой системы)

$$\left(s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right) y = \left(m_\alpha s^\alpha + \cdots + m_1 s + m_0\right) f. \tag{3.2.13}$$

Параметры $\tilde{\psi}(s)$ будем находить так, чтобы выполнялись требования (3.2.6), (3.2.7).

Процедура 3.2.1. (процедура решения задачи 3.2.1) состоит из операций

а) найти полином $\tilde{\psi}(s)$ уравнения качества (3.2.13),

б) сформировать полином $\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s)$,

в) на основе модального тождества (3.1.39) построить систему линейных алгебраических уравнений,

г) решить эту систему уравнений и определить параметры регулятора (3.2.5).

■

3.2.3. Уравнение качества при ступенчатых и гармонических возмущениях

При ступенчатом внешнем возмущении из (3.2.10) следует

$$y^f_{cm} = \frac{m_0}{\tilde{\psi}_0}\bar{f}. \tag{3.2.14}$$

Для выполнения требования (3.2.6) к точности достаточно принять

$$\tilde{\psi}_0 \geq \frac{m_0}{y^*}\bar{f}. \tag{3.2.15}$$

При гармоническом воздействии амплитуда выходной переменной

$$y_{гарм} = f_{гарм}\frac{|m(j\omega^f)|}{|\tilde{\psi}(j\omega^f)|}.$$

Если принять простейшую структуру

$$\tilde{\psi}(s) = \tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\tilde{T}_i s + 1\right), \tag{3.2.16}$$

то достаточно выбрать для выполнения требования (3.2.6) к точности постоянные $\tilde{T}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ из неравенства

$$\tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\tilde{T}_i^2(\omega^f)^2 + 1} \geq \frac{|m(j\omega^f)|}{y^*} f_{гарм}. \tag{3.2.17}$$

Оценим время регулирования $t_{рег}$ замкнутой системы при ступенчатом внешнем возмущении. Его оценка по выражению (3.2.11) затруднена тем, что время регулирования зависит как от полюсов передаточной функции $w_{yf}(s) = \dfrac{m(s)}{\tilde{\psi}(s)}$ так и от её нулей. В связи с этим примем

$$\tilde{\psi}(s) = m(s)\tilde{\tilde{\psi}}(s), \tag{3.2.18}$$

где

$$\tilde{\tilde{\psi}}(s) = s^{n-\alpha} + \tilde{\tilde{\psi}}_{n-\alpha-1}s^{n-\alpha-1} + \cdots + \tilde{\tilde{\psi}}_1 s + \tilde{\tilde{\psi}}_0. \tag{3.2.19}$$

Тогда

$$y = \frac{\bar{f}}{\tilde{\tilde{\psi}}(s)s} \tag{3.2.20}$$

При этом аналогично (3.2.14)

$$\tilde{\tilde{\psi}}_0 \geq \frac{\bar{f}}{y^*}. \tag{3.2.21}$$

Положим

$$\tilde{\tilde{\psi}}(s) = \tilde{\tilde{\psi}}_0 \prod_{i=1}^{n-\alpha} \left(\tilde{\tilde{T}}_i s + 1\right), \tag{3.2.22}$$

где для определённости примем

$$\tilde{\tilde{T}}_1 > \tilde{\tilde{T}}_2 > \cdots > \tilde{\tilde{T}}_{n-\alpha-1} > \tilde{\tilde{T}}_{n-\alpha}. \tag{3.2.23}$$

Пусть T_1 значительно больше T_2, тогда постоянная времени T_1, являясь доминирующей, определяет время переходного процесса

$$t_{рег} \approx 3\tilde{\tilde{T}}_1. \tag{3.2.24}$$

Если найти оригинал изображения (3.2.19) с учётом выражения (3.2.21) и неравенств (3.2.22), то из приводимого далее утверждения 3.П.4 следует, что перерегулирование $\sigma = 0$. Это утверждение устанавливает границы переменной $y(t)$ при произвольном внешнем воздействии из множества (3.2.3). Так для решений уравнения $\tilde{\tilde{\psi}}(s)y = f$ при различных вещественных T_i $\left(i = \overline{1, n-\alpha}\right)$ справедлива оценка $|y(t)| \leq \dfrac{f^*}{\tilde{\tilde{\psi}}}$. Она совпадает со статической ошибкой и поэтому $\sigma = 0$.

<u>Процедура 3.2.2.</u> (процедура построения уравнения качества) состоит из операций

а) определяем число $\tilde{\tilde{\psi}}_0$ из неравенства (3.2.1),

б) находим постоянную времени $\tilde{\tilde{T}}_1 = \dfrac{t_{рег}}{3}$ и задаёмся положительными числами $\tilde{\tilde{T}}_i$ $\left(i = \overline{2, n-\alpha}\right)$, меньшими $\tilde{\tilde{T}}_1$, так, чтобы $\tilde{\tilde{\psi}}_0 \prod\limits_{i=1}^{n-\alpha} \tilde{\tilde{T}}_i s = 1$ и строим полином (3.2.2),

в) формируем полином $\tilde{\psi}(s) = m(s)\tilde{\tilde{\psi}}(s)$.

Если $f(t)$ – гармоническое воздействие, то в операциях а) и б) вместо (3.2.20) используется (3.2.16).

Если $f(t)$ – произвольное внешнее возмущение, то в (3.2.20) следует заменить $\bar{f}$ на f^*. ■

Таким образом, решение задачи 3.2.1 осуществляется на основе процедур 3.2.2 и 3.2.1.

3.2.4. Уравнение качества грубых регуляторов

Процедура 3.1.1 может приводить к негрубым системам. Действительно, в примере 1.П.2 построен регулятор на основе процедуры модального управления. При этом $\tilde{\psi}(s) = (s+1)(s+0.5)$.

Затем в примере 2.П.4 исследованы запасы устойчивости системы с этим регулятором. Показано, что $\varphi_з = L = 1.01$. Такие запасы устойчивости означают, что синтезированная система будет практически неработоспособной. Чтобы избежать подобной ситуации наложим дополнительные ограничения на выбор полинома $\psi(s)$. Представим характеристический полином (3.1.3) как

$$d^u(s) = d^c(s) + k(s), \tag{3.2.25}$$

где

$$d^c(s) = d(s)g(s) = d^c_{2n-1}s^{2n-1} + \cdots + d^c_1 s + d^c_0, \tag{3.2.26}$$

$$k(s) = -b(s)r(s) = k_{2n-\gamma}s^{2n-\gamma} + \cdots + k_1 s + k_0. \tag{3.2.27}$$

Рекомендация 3.2.1. Для обеспечения грубости синтезируемой системы необходимо коэффициенты полинома $\delta(s) = b(s)\psi(s)$ выбирать так, чтобы они были соизмеримы с модулями коэффициентов при соответствующих степенях полиномов $d^c(s)$ и $k(s)$.

Другими словами, не должно возникать ситуации, когда

$$\delta_i \ll |d^c_i|, \quad \delta_i \ll |k_i| \quad i = \overline{0, 2n-1}. \tag{3.2.28}$$

При структурном управлении эти недопустимые соотношения принимают вид

$$\tilde{\psi}_i \ll |d_i| \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{3.2.29}$$

■

Обоснование этой рекомендации следует из результатов, приведенных в 1.П.2, 2.П.3.

Проверка соотношений (3.2.28) может быть осуществлена лишь после решения задачи синтеза, а неравенства (3.2.29) носят слишком общий необходимый характер.

В связи с этим построим полином $\tilde{\psi}(s)$ так, чтобы процедура 3.2.1 гарантировала запас устойчивости.

Рассмотрим полином

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + q, \tag{3.2.30}$$

где $d(-s) = (-1)^n s^n + (-1)^{n-1}d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_2 s^2 - d_1 s + d_0$ – полином, сопряжённый с $d(s)$, q – некоторое положительное число.

Полином $\Delta(s)$ содержит лишь чётные степени s и поэтому его корни имеют структуру s_1, $-s_1$; s_2, $-s_2$; ..., s_n, $-s_n$. Очевидно, что его можно представить как

$$\Delta(s) = \tilde{\psi}(s)\tilde{\psi}(-s),$$

где

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i). \tag{3.2.31}$$

Этот полином имеет корни с отрицательными действительными частями.

Параметр q в (3.2.30) определим исходя из требований (3.2.6) к точности.

На основе (3.2.30), (3.2.14) запишем условие (3.2.6)

$$\left(y^f_{cm}\right)^2 = \frac{m_0^2}{\tilde{\psi}_0^2}\bar{f}^2 = \frac{m_0^2}{d_0^2 + q}\bar{f}^2 \le y^{*2}. \tag{3.2.32}$$

Отсюда

$$q \ge \frac{\bar{f}^2}{y^{*2}}m_0^2 - d_0^2. \tag{3.2.33}$$

Процедура 3.2.3. (процедура построения уравнения качества) состоит из операций

а) вычислить параметр q по формуле (3.2.33),

б) сформировать полином (3.2.30),

в) найти корни этого полинома и выделить из них n корней с отрицательными вещественными частями,

г) построить искомый многочлен (3.2.31).

■

Утверждение 3.2.1. Если полином $\tilde{\psi}(s)$ уравнения качества (3.2.12) построен в соответствии с процедурой 3.2.2, то регулятор (3.2.5), получаемый в результате процедуры 3.2.1, обеспечивает запасы устойчивости

$$\varphi_з \ge 60^\circ, \quad L \ge 2. \tag{3.2.34}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.2.

3.2.5. ПИД-регулятор*

Регулятор (3.2.5) содержит составляющую, пропорциональную отклонению измеряемой (регулируемой) переменной от желаемого значения, равного нулю, и составляющие, зависящие от производных этого отклонения. Такие регуляторы называются ПД-регудяторами (Пропорционально-Дифференцирующими регуляторами). Наряду со структурой (3.2.5) используются регуляторы, содержащие интеграл, измеряемой переменной. Они называются ПИД-регуляторами (Пропорционально-Ингегро-Дифференцирующие регуляторы) и описываются уравнением

$$\bar{g}_n u^{(n)} + \cdots + \bar{g}_1 \dot{u} + \bar{g}_0 u = \bar{r}_n y^{(n-1)} + \cdots + \bar{r}_2 \dot{y} + \bar{r}_1 y + \bar{r}_0 \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau. \tag{3.2.35}$$

При такой структуре регулятора установившаяся ошибка в системе (3.2.1), (3.2.35) при ступенчатом внешнем возмущении равна нулю.

Действительно,

$$y = \frac{b(s)}{d(s)} u + \frac{m(s)}{d(s)} f = \frac{b(s)}{d(s)} \times \frac{\tilde{\bar{r}}(s)}{\bar{g}(s)} y + \frac{m(s)}{d(s)} f, \tag{3.2.36}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g}(s) &= \sum_{i=0}^{n} \bar{g}_i s^i, \\ \tilde{\bar{r}}(s) &= \bar{r}_n s^{n-1} + \cdots + \bar{r}_2 s + \bar{r}_1 + \frac{\bar{r}_0}{s} = \frac{\bar{r}(s)}{s}, \\ \bar{r}(s) &= \sum_{i=0}^{n} \bar{r}_i s^i. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Из этого выражения следует

$$y = \frac{\bar{g}(s) m(s)}{d(s)\bar{g}(s) - b(s)\tilde{\bar{r}}(s)} f = \frac{s\bar{g}(s) m(s)}{s d(s)\bar{g}(s) - b(s)\bar{r}(s)} f. \tag{3.2.38}$$

Изображение ступенчатого внешнего возмущения $f(s) = \dfrac{\bar{f}}{s}$ и поэтому по теореме о конечном значении

$$y_{cm} = \lim_{s \to 0} s y(s) = 0. \tag{3.2.39}$$

Для построения регулятора (3.2.35) будем решать задачу управления (задачу 3.1.1) для ««расширенного объекта»»

$$d(s) y = b(s) u, \quad \dot{\bar{y}} = y, \tag{3.2.40}$$

который можно записать в виде

$$\bar{d}(s) \bar{y} = b(s) u, \tag{3.2.41}$$

где

$$\bar{d}(s) = d(s) s. \tag{3.2.42}$$

Если $b(0) \neq 0$, то ««объект»» (3.2.40) полностью управляем.

Зададимся модальным полиномом степени $2n+1$

$$\bar{\delta}(s) = b(s)\bar{\varepsilon}^0(s)\tilde{\bar{\psi}}(s), \tag{3.2.43}$$

где $\bar{\varepsilon}^0(s)$ и $\tilde{\bar{\psi}}(s)$ – полиномы степеней $n-\gamma$ и $n+1$ соответственно, и рассмотрим модальное тождество

$$\bar{d}(s)\bar{g}(s) - b(s)\bar{r}(s) = \bar{\delta}(s). \tag{3.2.44}$$

Из него получим полиномы (3.2.37) регулятора

$$\bar{g}(s)u = \bar{r}(s)\bar{y}. \tag{3.2.45}$$

Исключим переменную $\bar{y}$ и приходим к регулятору (3.2.35). Реакция системы (3.2.1), (3.2.35) с модальным ПИД-регулятором имеет, в соответствии с (3.2.38) и (3.2.43), вид

$$y = \frac{s\bar{g}(s)m(s)}{b(s)\bar{\varepsilon}^0(s)\tilde{\bar{\psi}}(s)}f. \tag{3.2.46}$$

Если в полиноме $\bar{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}$ число ε^0 достаточно мало, то

$$y = \frac{sm(s)}{\tilde{\bar{\psi}}(s)}f, \tag{3.2.47}$$

и, следовательно, качество регулирования определяется многочленами $\tilde{\bar{\psi}}(s)$ и $sm(s)$.

Заметим, что передаточные функции разомкнутых систем (3.2.40), (3.2.45) и (3.2.1), (3.2.35) совпадают. Действительно, первая из этих передаточных функций

$$\bar{w}_{раз}(s) = -\frac{b(s)\bar{r}(s)}{\bar{d}(s)\bar{g}(s)},$$

а вторая

$$w_{раз}(s) = -\frac{b(s)\tilde{\bar{r}}(s)}{d(s)\bar{g}(s)} = -\frac{b(s)\bar{r}(s)}{sd(s)\bar{g}(s)}.$$

3.2.6. Анализ структурной грубости*

Пусть известна уточнённая модель объекта, описанного ранее рабочей моделью (3.2.1),

$$d_{ym}(s)y = b_{ym}(s)u + m_{ym}(s)f, \tag{3.2.48}$$

где

$$d_{ym}(s) = \prod_{i=N_1^0+1}^{N_{1\text{ут}}^0}\left(T_i^0 s + 1\right)\prod_{j=N_2^0+1}^{N_{2\text{ут}}^0}\left(\tilde{T}_j^{02}s^2 + 2\tilde{\xi}_j^0\tilde{T}_j^0 s + 1\right)d(s) = d_{боз}(s)d(s) \tag{3.2.49}$$

$$b_{ym}(s) = \prod_{i=\alpha_1^0+1}^{\alpha_{1\text{ут}}^0}\left(\check{T}_i^0 s + 1\right)\prod_{j=\alpha_2^0+1}^{\alpha_{2\text{ут}}^0}\left(\hat{T}_j^{02}s^2 + 2\hat{\xi}_j^0\tilde{T}_j^0 s + 1\right)b(s) = b_{боз}(s)b(s), \tag{3.2.50}$$

$$m_{ym}(s) = m_{боз}(s)m(s). \tag{3.2.51}$$

Здесь, как и ранее в п. 2.2.4 структурные возмущения носят мультипликативный характер. Кроме того, для простоты будем полагать, что все постоянные времени структурных возмущений – положительны.

Проанализируем устойчивость модели (3.2.42) с регулятором (3.2.5), разрешающим задачу 3.2.1. Если система (3.2.48), (3.2.5) неустойчива, то изменим рабочую модель с помощью следующей процедуры.

Процедура 3.2.4. (Процедура построения структурно-грубого регулятора). Она состоит из операций:

Операция 1. Сформировать рабочую модель

$$d^I(s)y = b^I(s)u + m^I(s)f, \tag{3.2.52}$$

в которой

$$d^I(s) = (T^0 s + 1)\, d(s) \quad \text{либо} \quad d^I(s) = \left(\tilde{T}^{02}s^2 + 2\tilde{\xi}^0\tilde{T}^0 s + 1\right) d(s), \quad \text{где} \tag{3.2.53}$$

$$T^0 = \max\left\{T^0_{N_1^0+1},\, T^0_{N_1^0+2},\, \ldots,\, T^0_{N_{1\text{ут}}}\right\}, \quad \tilde{T}^0 = \max\left\{\tilde{T}^0_{N_2^0+1},\, \tilde{T}^0_{N_2^0+2},\, \ldots,\, \tilde{T}^0_{N_{2\text{ут}}}\right\}; \tag{3.2.54}$$

$$b^I(s) = \left(\check{T}^0 s + 1\right) b(s) \quad \text{либо} \quad b^I(s) = \left(\hat{T}^{02}s^2 + 2\hat{\xi}^0\hat{T}^0 s + 1\right) b(s), \quad \text{где} \tag{3.2.55}$$

$$\check{T}^0 = \min\left\{\check{T}^0_{\alpha_1^0+1},\, \check{T}^0_{\alpha_1^0+2},\, \ldots,\, \check{T}^0_{\alpha_{1\text{ут}}}\right\}, \quad \hat{T}^0 = \min\left\{\hat{T}^0_{\alpha_2^0+1},\, \hat{T}^0_{\alpha_2^0+2},\, \ldots,\, \hat{T}^0_{\alpha_{2\text{ут}}}\right\}. \tag{3.2.56}$$

Выбор полиномов в (3.2.52) осуществляется так: если $T^0 > \tilde{T}^0$ то принимается первый полином, если $\tilde{T}^0 > T^0$ – второй. В (3.2.55) – наоборот: $\check{T}^0 > \hat{T}^0$, то принимается второй полином.

Операция 2. Решить задачу 3.2.1 используя процедуру 3.2.1 и найти регулятор

$$g^I_{n_1}u^{(n_1)} + \cdots + g^I_1\dot{u} + g^I_0 u = r^I_{n_1}y^{(n_1)} + \cdots + r^I_1\dot{y} + r^I_0 y, \tag{3.2.57}$$

где $n_1 = n + 1$ либо $n_1 = n + 2$.

Операция 3. Проанализировать устойчивость системы (3.2.42), (3.2.57). Если она неустойчива, то вернуться к операции 1, построить $d^{II}(s)$, $b^{II}(s)$, $m^{II}(s)$ и т.д.

■

Очевиден более простой путь построения структурно-грубого регулятора: решить задачу 3.2.1 сразу, для уточнённой модели (3.2.47). Такой путь приводит к уравнению регулятора $N_{ym} - 1$ порядка. Столь сложный регулятор часто не вызван условиями (3.2.6), (3.2.7) задачи 3.2.1, а является следствием неудачного выбора рабочей модели объекта.

Процедура 3.2.3 доставляет регулятор минимальной сложности (минимального порядка дифференциального уравнения регулятора), определяемой требованиями к точности и качеству синтезируемой системы. Он сохраняет асимптотическою устойчивость системы при уточнении модели объекта и, следовательно, рабочая модель

системы является структурно грубой. Будем его называть *структурно грубым регулятором.*

Примечание 3.2.1. Понятие структурной грубости, введённое определением 2.2.2, характеризует зависимость свойства устойчивости от структуры модели системы. Аналогичным образом можно ввести понятие структурной грубости точности и структурной грубости показателей качества, которые будут отражать зависимость точности и качества системы от структурных возмущений.

Для построения структурно грубых по точности либо структурно грубых по качеству регулирования применима процедура 3.2.4, если при выполнении операции 3 определять (наряду с устойчивостью) значение y^f либо $t^f_{рег}$, σ^f и сравнивать их с требуемыми. ■

3.3. Слежение

3.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим следящую систему, описываемую уравнениями

$$d(s)y = b(s)(u + u_1), \tag{3.3.1}$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v, \tag{3.3.2}$$

$$g^k(s)u_1 = r^k(s)v, \tag{3.3.3}$$

где $v(t)$ – задающее воздействие, $u_1(t)$ – дополнительное управление,
$r^n(s) = r^n_{\beta_1}s^{\beta_1} + r^n_{\beta_1-1}s^{\beta_1-1} + \cdots + r^n_1 s + r^n_0$,
$r^k(s) = r^k_{\beta_2}s^{\beta_2} + r^k_{\beta_2-1}s^{\beta_2-1} + \cdots + r^k_1 s + r^k_0$, $g^k(s) = g^k_{\beta_3}s^{\beta_3} + g^k_{\beta_3-1}s^{\beta_3-1} + \cdots + g^k_1 s + g^k_0$
– полиномы с неизвестными параметрами $(\beta_2 \le \beta_3)$.

До сих пор функция $y_ж(t)$ использовалась для описания, во-первых, цели управления и, во-вторых, для описания задающего воздействия. В общем случае задающее воздействие $v(t)$ может не совпадать с $y_ж(t)$. Эти функции связаны уравнением слежения

$$\psi_м(s)y_ж = l_м(s)v. \tag{3.3.4}$$

Оно является желаемой моделью системы (3.3.1)-(3.3.3). В этом уравнении $\psi_м(s)$ и $l_м(s)$ – заданные полиномы степеней n_ψ и $n_l < n-1$ соответственно.

Для удобства будем представлять

$$\psi_м(s) = \varepsilon^0(s)\tilde{\psi}_м(s), \tag{3.3.5}$$

где $\tilde{\psi}_м(s) = s^n + \tilde{\psi}^м_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}^м_1 s + \tilde{\psi}^м_0$, а $\varepsilon^0(s)$ – полином (3.1.42) с достаточно малым ε^0 и следовательно $\deg\psi_м(s) = 2n - \gamma - 1$.

Пусть, в частности, в (3.3.2) полином $r^n(s) = r(s)\delta^n(s)$, где $\delta^n(s)$ – некоторый многочлен.

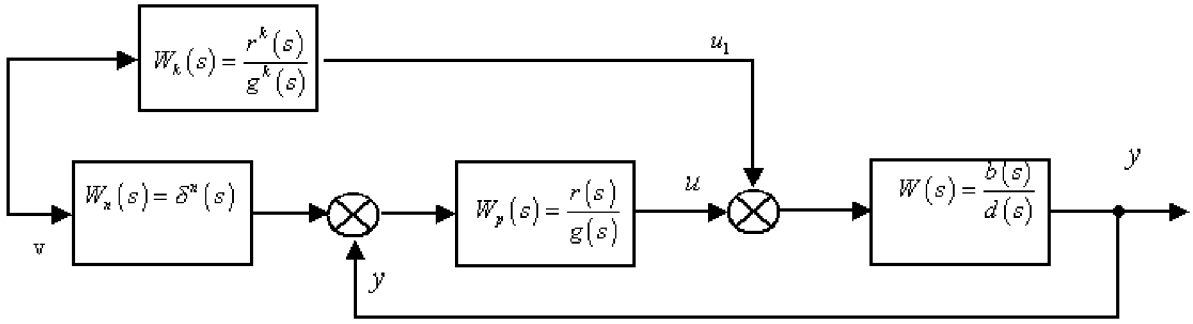

Рис. 3.3.1.

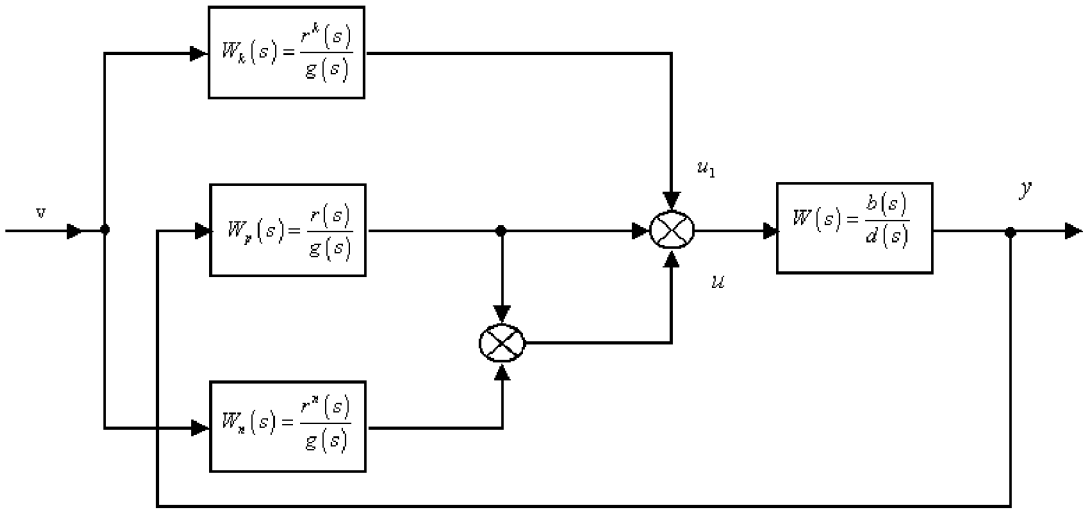

Рис. 3.3.2.

Структурная схема следящей системы (3.3.1)-(3.3.3) для этого случая приведена на рис. 3.3.1. Она совпадает со схемой рис. 2.3.5., если в последней заменить $y_{ж}(t)$ на $v(t)$.

Задающее воздействие, приложенное к регулятору, будем называть *последовательным*, а к объекту – *параллельным задающим воздействием.*

Далее вместо структурной схемы рис. 3.3.1. будем рассматривать схему рис. 3.3.2. В этой схеме на структуру оператора $r^n(s)$ не накладывается ограничение $r^n(s)r(s)\delta^n(s)$.

Найдём связь выходной переменной $y(t)$ системы (3.3.1)-(3.3.3) с задающим воздействием.

На основе (2.3.42) получим

$$y = w_v(s)v,$$

где

$$w_v(s) = \frac{b(s)[r^k(s)g(s) + r^n(s)g^k(s)]}{[d(s)g(s) - b(s)r(s)]g^k(s)}. \qquad (3.3.6)$$

С другой стороны, передаточная функция желаемой модели (3.3.4)

$$w_м(s) = \frac{l_м(s)}{\psi_м(s)}. \tag{3.3.7}$$

Задача 3.3.1. (Задача синтеза следящих систем). Пусть объект (3.3.1) устойчив по управлению. Требуется найти регулятор (3.3.2) и уравнение (3.3.3) параллельной передачи задающего воздействия такие, чтобы выполнялось тождество

$$w_v(s) = w_м(s). \tag{3.3.8}$$

Очевидно, что при этом условии выход системы

$$y(t) = y_ж(t).$$

■

Рассмотрим различные варианты решения этой задачи и исследуем условия их реализуемости. При этом будем выделять случай, когда $v(t) = y_ж(t)$. В этом случае $w_м(s) = 1$ или

$$l_м(s) = \psi_м(s). \tag{3.3.9}$$

3.3.2. Последовательное задающее воздействие

Алгоритм. Пусть $u_1 = 0$. Тогда система принимает вид

$$d(s)y = b(s)u, \tag{3.3.10}$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \tag{3.3.11}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае передаточная функция

$$w_v(s) = \frac{r^n(s)b(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)}. \tag{3.3.12}$$

Из тождества

$$\frac{r^n(s)b(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)} = \frac{l_м(s)}{\psi_м(s)} \tag{3.3.13}$$

следует, что полином $l_м(s)$ должен иметь структуру $l_м(s) = b(s)\tilde{l}_м(s)$. Чтобы избежать этого ограничения будем определять коэффициенты полиномов $g(s)$ и $r(s)$ из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_м(s). \tag{3.3.14}$$

Тогда

$$r^n(s) = l_м(s). \tag{3.3.15}$$

Реализуемость. Регулятор (3.3.11) реализуем, если

$$\deg g(s) \geq \deg r(s), \quad \deg g(s) \geq \deg r^n(s). \tag{3.3.16}$$

Первое из этих неравенств выполняется при условиях

$$\deg[b(s)\psi_м(s)] \geq 2n-1, \quad \deg r(s) = n-1. \tag{3.3.17}$$

Второе условие реализуемости удовлетворяется, так как

$$\deg l_м(s) \leq \deg g(s) = n-1.$$

Рассмотрим **случай** $v(t) = y_ж(t)$.

В этом случае $l_м(s) = b(s)\psi_м(s)$

$$\deg l_м(s) = 2n-1 > \deg g(s), \tag{3.3.18}$$

и поэтому в случае $v(t) = y_ж(t)$ регулятор (3.3.11) при $r^n(s) = b(s)\psi_м(s)$ нереализуем.

Пусть равенство $v(t) = y_ж(t)$ нарушается лишь для высокочастотных составляющих $v(t)$. Математически это означает, например, что переменные $v(t)$ и $y_ж(t)$ связаны уравнением

$$(\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma} y_ж = v, \tag{3.3.19}$$

где ε^0 – достаточно малое положительное число.

Примем передаточную функцию желаемой модели системы

$$w_м(s) = \frac{l_м(s)}{\psi_м(s)} = \frac{\tilde{\psi}(s)}{\check{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s)}, \tag{3.3.20}$$

где

$$\check{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}, \quad \tilde{\psi}(s) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0. \tag{3.3.21}$$

В этом случае искомые полиномы регулятора (3.3.11) находятся из уравнений

$$r^n(s) = \tilde{\psi}(s), \tag{3.3.22}$$

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\check{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s). \tag{3.3.23}$$

Так как $\deg \psi_м(s) = 2n$, то $\deg g(s) = n = \deg \tilde{\psi}(s) = \deg l_м(s)$ и, следовательно, регулятор реализуем. Он обеспечивает при задающем воздействии $y_ж(t)$ выход

$$y = \frac{1}{\check{\varepsilon}^0(s)} y_ж \tag{3.3.24}$$

который лишь на высоких частотах отличается от желаемого.

3.3.3. О классической задаче регулирования*

Рассмотрим задачу 2.3.1, в которой $v(t) = y_ж(t)$.

Регулятор, разрешающий эту задачу будем искать не в виде (2.3.2), а в более общей форме (3.3.11). Когда $r^n(s) \neq r(s)$. Полиномы этого регулятора находим на основе (3.3.22), (3.3.23), где $\tilde{\psi}(s)$ – произвольный гурвицев полином.

При этом $\sigma \approx 0$, так как $\check{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}$. Кроме того, из (3.3.24) следует, что $\varepsilon_{cm} = 0$.

Выполнение требований к точности (при гармонических задающих воздействиях) и времени регулирования достигается выбором достаточно малого числа ε^0.

3.3.4. Принцип разделения

Рассмотрим следящую систему (3.3.10), (3.3.11) при внешних возмущениях

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \tag{3.3.25}$$

Движение этой системы

$$y(t) = y_{ж}(t) + y^f(t) + \varepsilon(t) = y_{ж}(t) + \varepsilon^f(t), \tag{3.3.26}$$

где $y^f(t)$ – погрешность регулирования, вызванная внешним возмущением, $\varepsilon(t)$ – ошибка слежения при $f = 0$, $\varepsilon^f(t)$ – ошибка слежения.

Если параметры регулятора определены на основе (3.3.14), (3.3.15), то $\varepsilon(t) = 0$.

При задающем воздействии $v(t) = y_{ж}(t)$ получим из (3.3.24)

$$\varepsilon^f = y_{ж} - y = \frac{\check{\varepsilon}^0(s) - 1}{\check{\varepsilon}^0(s)} y_{ж}. \tag{3.3.27}$$

<u>Процедура 3.3.1.</u> (Процедура построения следящей системы при внешних возмущениях).

а) определим полином $\check{\varepsilon}^0(s)$ по заданной ошибке слежения ε^* так, чтобы

$$|\varepsilon(t)| \le \varepsilon^*,$$

б) используем при условии $|y^f(t)| \le y^*$ процедуры 3.2.1 и 3.2.2 и найдём полиномы $g(s)$ и $r(s)$ регулятора системы (3.3.25). При этом, осуществляя первую операцию процедуры 3.2.1, полагаем $\varepsilon^0(s) = \check{\varepsilon}^0(s)$.

в) Сформируем

$$r^n(s) = \tilde{\psi}(s).$$

Если $v(t) \ne y_{ж}(t)$, то полагаем $\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}_{м}(s)\dfrac{\tilde{\psi}_0}{\tilde{\psi}_{0м}}$, а $r^n(s) = l_{м}(s)$.

■

В последнем случае полином $r^n(s)$ не зависит от полиномов $g(s)$ и $r(s)$ (а при $v(t) = y_{ж}(t)$ эта зависимость малосущественна).

Эта независимость выражает *принцип разделения*, который состоит в том, что полиномы $g(s)$, $r(s)$ и оператор $r^n(s)$ при задающем воздействии находятся независимо по заданным ошибкам регулирования и слежения соответственно.

Пример 3.3.1. Рассмотрим следящий привод подачи станков с числовым программным управлением (станков с ЧПУ). Двигатель постоянного тока с якорным управлением (объект управления) описывается уравнением

$$(T_м T s^3 + T_м s^2 + s)y = k_g u - k_м(1 + Ts)f, \tag{3.3.28}$$

где $y(t)$ – относительное перемещение (угол поворота), $u(t)$ – относительное напряжение якорной цепи, $f(t)$ – относительный момент сопротивления движению.

Желаемое относительное перемещение – $y_ж(t)$ зависит от обрабатываемой на станке детали и задаётся некоторым программным устройством. Сигнал $y_ж(t)$ сравнивается с фактическим $y(t)$. Таким образом, задающее последовательное воздействие $v(t) = y_ж(t)$. Внешнее возмущение $f(t)$ будем полагать для простоты ступенчатой функцией. T и $T_м$ – электромагнитная и электромеханическая постоянные времени привода, k_g и $k_м$ – коэффициенты передачи управления и внешнего возмущения.

Запишем уравнение (3.3.28) в виде

$$(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s)y = b_0 u + (m_1 s + m_0)f, \tag{3.3.29}$$

где $d_2 = \dfrac{1}{T}$, $d_1 = \dfrac{1}{T_м T}$, $b_0 = \dfrac{k_g}{T_м T}$, $m_1 = \dfrac{k_м}{T_м}$, $m_0 = \dfrac{k_м}{T_м T}$.

Пусть даны параметры уравнения привода (3.3.28). Требуется найти такой регулятор , чтобы при $y_ж(t) = 1 \cdot \sin \omega_ж t$ выполнялись неравенства

$$|\varepsilon(t)| \le \varepsilon^*, \quad |y^f(t)| \le y^*, \tag{3.3.30}$$

в которых ε^* и y^* – заданные числа.

Для решения задачи найдём полиномы $\tilde{\psi}(s)$ и $\check{\varepsilon}^0(s)$ в уравнениях (3.3.22), (3.3.23). Полином $\tilde{\psi}(s)$ будем определять по формулам (3.2.17), (3.2.16) используя второе из неравенств (3.3.30) определяющего точность регулирования при $y_ж(t) = 0$

$$\tilde{\psi}(s) = (m_1 s + m_0)\left(\tilde{\tilde{\psi}}_2 s^2 + \tilde{\tilde{\psi}}_1 s + \tilde{\tilde{\psi}}_0\right); \tag{3.3.31}$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}_2 > 0, \quad \tilde{\tilde{\psi}}_1 > 0, \quad \tilde{\tilde{\psi}}_0 > \frac{f_{гарм}}{y^*}. \tag{3.3.32}$$

Погрешность слежения при $f(t) = 0$ определяется коэффициентом в многочлене $\check{\varepsilon}^0(s)$. Для его определения рассмотрим уравнение вида (3.3.24)

$$(\varepsilon^0 s + 1)^2 y = y_ж = 1 \cdot \sin \omega_ж t \tag{3.3.33}$$

и найдём достаточно малое число ε^0, при котором

$$|\varepsilon(t)| \le \varepsilon^*.$$

■

3.3.5. Параллельное задающее воздействие*

Пусть в (3.3.2) слагаемое $r^n(s)v = 0$, тогда уравнения (3.3.1)-(3.3.3) примут вид

$$d(s)y = b(s)\left[u + \frac{r^k(s)}{g^k(s)}v\right], \tag{3.3.34}$$

$$g(s)u = r(s)y. \tag{3.3.35}$$

Передаточная функция этой системы

$$w_v(s) = \frac{r^k(s)g(s)b(s)}{[d(s)g(s) - b(s)r(s)]g^k(s)}. \tag{3.3.36}$$

Определим коэффициенты регулятора из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_м(s). \tag{3.3.37}$$

Затем для выполнения (3.3.8) положим

$$g^k(s) = g(s), \tag{3.3.38}$$

$$r^k(s) = l_м(s). \tag{3.3.39}$$

Управление $u_1 = \dfrac{r^k(s)}{g^k(s)}v$ можно осуществить, так как

$$\deg g^k(s) = \deg g(s) = n-1, \quad \text{а} \quad \deg r^k(s) = \deg l_м(s) = n-1. \tag{3.3.40}$$

При $v(s) = y_ж(t)$ управление u_1 не реализуемо. Однако, если функции $v(s)$ и $y_ж(t)$ связать уравнением (3.3.19), и сформировать модель (3.3.20), то параметры регулятора и управления u_1 найдём из уравнений

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\check{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s), \quad g^k(s) = g(s), \quad r^k(s) = \tilde{\psi}(s). \tag{3.3.41}$$

3.3.6. Последовательно-параллельное задающее воздействие*

Пусть уравнения (3.3.1)-(3.3.3) имеют вид

$$d(s)y = b(s)u + r^k(s)v, \tag{3.3.42}$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \tag{3.3.43}$$

Объект (3.3.42) существенно отличается от объекта (3.3.1) по физическому смыслу. Во-первых, он имеет два входа, во-вторых, предполагается, что полином $r^k(s)$ не задан и его можно изменить.

Передаточная функция системы (3.3.42), (3.3.43)

$$w_v(s) = \frac{r^k(s)g(s) + b(s)r^n(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)}. \tag{3.3.44}$$

Будем как и ранее определять полиномы регулятора $g(s)$ и $r(s)$ из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_м(s), \tag{3.3.45}$$

а многочлены $r^k(s)$ и $r^n(s)$ при задающем воздействии v найдём из соотношения

$$g(s)r^k(s) + b(s)r^n(s) = l_м(s). \tag{3.3.46}$$

Для реализуемости достаточно принять

$$\deg r^n(s) < \deg g(s), \quad \deg r^k(s) \le n. \tag{3.3.47}$$

Рассмотрим **случай** $v(t) = y_ж(t)$. Примем в (3.3.46)

$$l_м(s) = b(s)\psi_м(s) \tag{3.3.48}$$

и тогда соотношение (3.3.46) запишется как

$$g(s)r^k(s) + b(s)r^n(s) = b(s)\psi_м(s). \tag{3.3.49}$$

Полагая

$$\deg r^k(s) = n, \quad \deg r^n(s) = n-2. \tag{3.3.50}$$

находим единственное решение (3.3.49).

3.3.7. Компенсационная схема (1-ый вариант)*

На рис. 3.3.3. приведена компенсационная схема следящей системы. В ней $h^{(1)}(s) = h^{(1)}_{n_1-1}s^{n_1-1} + \cdots + h^{(1)}_1 s + h^{(1)}_0$, $h^{(2)}(s) = h^{(2)}_{n_2-1}s^{n_2-1} + \cdots + h^{(2)}_1 s + h^{(2)}_0$, $g(s) = g_{n_3}s^{n_3} + \cdots + g_1 s + g_0$ – неизвестные полиномы; причем $g(s)$ имеет корни с отрицательными вещественными частями.

Пусть для определённости,

$$n_1 \le n-1, \quad n_2 \le n-1, \quad n_3 = n-1. \tag{3.3.51}$$

Объект (3.3.10) представим в виде

$$d(s)p = u, \tag{3.3.52}$$

$$y = b(s)p, \tag{3.3.53}$$

где $p(t)$ – некоторая промежуточная переменная.

Из схемы следует выражение

$$u = kv + q^{-1}(s)\left[h^{(1)}(s)y + h^{(2)}(s)u\right], \tag{3.3.54}$$

в котором k – заданное число.

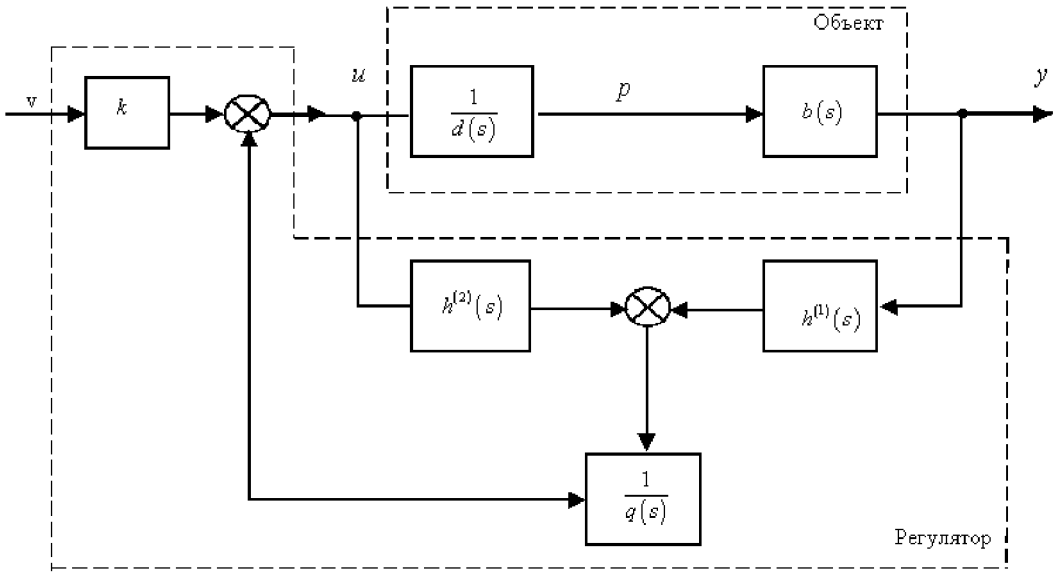

Рис. 3.3.3.

Преобразуя (3.3.54), получим

$$u = \frac{h^{(1)}(s)}{q(s) - h^{(2)}(s)} y + \frac{q(s)k}{q(s) - h^{(2)}(s)} v. \tag{3.3.55}$$

Из (3.3.52), (3.3.53), (3.3.54) находим окончательно

$$y = \frac{b(s)q(s)k}{d(s)q(s) - d(s)h^{(2)}(s) - b(s)h^{(1)}(s)} v. \tag{3.3.56}$$

Коэффициенты полиномов $h^{(1)}(s)$ и $h^{(2)}(s)$ будем определять из тождества

$$d(s)h^{(2)}(s) + b(s)h^{(1)}(s) = q(s)\alpha(s), \tag{3.3.57}$$

где $\alpha(s)$ – некоторый полином степени $n-1$, а $q(s)$ – произвольный устойчивый многочлен степени $n-1$.

Тогда

$$y = \frac{b(s)k}{d(s) - \alpha(s)} v. \tag{3.3.58}$$

Если определить $\alpha(s)$ из равенства

$$d(s) - \alpha(s) = b(s)\check{\varepsilon}^0(s)k_1 \quad \left(k_1 = \frac{1}{b_0\varepsilon^0}\right) \tag{3.3.59}$$

и принять $k = k_1$, то

$$y = \frac{1}{\check{\varepsilon}^0(s)} v. \tag{3.3.60}$$

При $v(t) = y_{ж}(t)$ можно получить необходимую точность слежения, выбирая ε^0 соответствующим образом.

3.3.8. Компенсационная схема (2-ой вариант)*

Существует ещё один путь определения полиномов $h^{(1)}(s)$, $h^{(2)}(s)$ и $q(s)$ компенсационной схемы рис. 3.3.3.

Пусть в модели (3.3.4) $\deg \psi_м(s) = n$ [для этого положим $\psi_м(s) = \tilde{\psi}(s)$], а $\deg l_м(s) = \deg b(s) = n - 1$.

Тогда положим

$$q(s) = l_м(s), \tag{3.3.61}$$

а коэффициенты полиномов $h^{(1)}(s)$ и $h^{(2)}(s)$ будем искать из тожества

$$d(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right] - b(s)h^{(1)}(s) = b(s)\tilde{\psi}(s). \tag{3.3.62}$$

Тогда (при $k = 1$) выражение (3.3.56) принимает желаемый вид

$$y = \frac{l_м(s)}{\tilde{\psi}(s)}v. \tag{3.3.63}$$

Пример 3.3.2. Пусть задан объект

$$\left(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0\right) y = \left(s^2 + b_1 s + b_0\right) u. \tag{3.3.64}$$

Требуется найти параметры компенсационного регулятора такие, чтобы передаточная функция замкнутой системы совпадала с заданной

$$w_м(s) = \frac{s^2 + l_1^м s + l_0^м}{s^3 + \tilde{\psi}_2 s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0}. \tag{3.3.65}$$

Для решения задачи положим

$$q(s) = s^2 + l_1^м s + l_0^м \tag{3.3.66}$$

а $h^{(1)}(s)$ и $h^{(2)}(s)$ найдём из тождества

$$\begin{gathered}(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0)\left(s^2 + l_1^м s + l_0^м - h_1^{(2)} s - h_0^{(2)}\right) - (s^2 + b_1 s + b_0)\cdot \\ \cdot\left(h_2^{(1)} s^2 + h_1^{(1)} s + h_0^{(1)}\right) = (s^2 + b_1 s + b_0)\left(s^3 + \tilde{\psi}_2 s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0\right).\end{gathered} \tag{3.3.67}$$

■

3.3.9. Влияние внешних возмущений на компенсационную схему*

При внешних возмущениях уравнения (3.3.52)-(3.3.54) примут вид

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \tag{3.3.68}$$

$$u = q^{-1}(s)\left[h^{(1)}(s)y + h^{(2)}(s)u\right]. \tag{3.3.69}$$

В уравнении регулятора опущено задающее воздействие, поскольку влияние внешних возмущений и задающих воздействий можно исследовать независимо.

Из (3.3.68), (3.3.69) следует

$$y = \frac{m(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right]}{d(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right] - b(s)h^{(1)}(s)} f. \tag{3.3.70}$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (3.2.8). Рассмотрим его структуру для обоих вариантов компенсационных схем.

1 вариант. С учётом (3.3.57), (3.3.59) получим

$$y = \frac{m(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right]}{[d(s) - \alpha(s)]q(s)} f = \frac{m(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right]}{b(s)\check{\varepsilon}^0(s)k_1 q(s)} f. \tag{3.3.71}$$

В этом выражении полином $h^{(2)}(s)$ зависит неявно от коэффициентов полиномов $b(s)$, $\check{\varepsilon}^0(s)$, $q(s)$ и поэтому погрешность $y^f(t)$, вызванная внешним возмущением, может оказаться недопустимо большой.

2 вариант. Учитывая (3.3.62), запишем (3.3.71) как

$$y = \frac{m(s)\left[q(s) - h^{(2)}(s)\right]}{b(s)\tilde{\psi}(s)} f = \frac{m(s)\left[l_м(s) - h^{(2)}(s)\right]}{b(s)\tilde{\psi}(s)} f. \tag{3.3.72}$$

Полином $h^{(2)}(s)$ в этом выражении неявно зависит от полиномов $l_м(s)$, $b(s)$, $\tilde{\psi}(s)$. Поэтому, как и в первом варианте, погрешность $y^f(t)$ может оказаться недопустимой.

Рассмотрим это обстоятельство более подробно.

Выходной сигнал любой следящей системы имеет вид (3.3.26). Требование к точности следящей системы выражаются с помощью неравенств

$$|y_\varepsilon(t)| \le \varepsilon^*, \quad |y^f(t)| \le y^*, \tag{3.3.73}$$

где ε^* и y^* – числа, задаваемые независимо одно от другого. При последовательном, параллельном и последовательно-параллельном задающих воздействиях использовалось структурное модальное управление и было показано, что можно выбрать параметры регулятора так, чтобы выполнялись требования (3.3.73).

При использовании компенсационной схемы числа ε^* и y^* не могут задаваться независимо друг от друга. Это означает, что для компенсационных схем не применим принцип разделения.

3.4. Обратная связь по состоянию

3.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \tag{3.4.1}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.2}$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – n-мерный вектор измеряемых переменных объекта (3.4.1), A – матрица чисел размеров $n \times n$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ – n-мерные вектора чисел.

Характеристический полином этой системы

$$d^u(s) = \det(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}') = s^n + d^u_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0. \tag{3.4.3}$$

Задача 3.4.1. (Задача модального управления). Для объекта (3.4.1) с заданными матрицей A и вектором $\boldsymbol{b}$ найти вектор $\boldsymbol{c}$ регулятора (3.4.2) такой, чтобы характеристический полином (3.4.3) имел заданные корни s_i^* $\left(i = \overline{1,n}\right)$. ■

Решение этой задачи сводится к процедуре 3.1.1 после преобразования объекта (3.4.1) к канонической форме управляемости.

3.4.2. Каноническая форма

Объект (3.4.1) в канонической форме управляемости (форме Фробениуса) имеет вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{\boldsymbol{b}}u, \tag{3.4.4}$$

где

$$\check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4.5}$$

Эти матрицы можно записать в более компактной форме

$$\check{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{n-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-\tilde{\boldsymbol{d}}} \end{array}\right), \quad \check{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad \tilde{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.4.6}$$

В (3.4.5) d_i $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ – коэффициенты характеристического полинома объекта (3.4.1) $d(s) = \det(Es - A)$.

Для преобразования (3.4.1) к виду (3.4.4) введём вектор

$$\check{\boldsymbol{x}} = T\boldsymbol{x}, \tag{3.4.7}$$

где T – неособая матрица ($\det T \neq 0$) чисел размеров $n \times n$.

Подставляя $\boldsymbol{x} = T^{-1}\check{\boldsymbol{x}}$ в (3.4.1) получим

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = TAT^{-1}\check{\boldsymbol{x}} + T\boldsymbol{b}u. \tag{3.4.8}$$

Необходимо найти матрицу такую, чтобы

$$TAT^{-1} = \check{A}, \quad T\boldsymbol{b} = \check{\boldsymbol{b}}. \tag{3.4.9}$$

Теорема 3.4.1. Если объект (3.4.1) полностью управляем, то матрица T его преобразования (3.4.7) к канонической форме (3.4.4) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \check{\boldsymbol{b}} & \check{A}\check{\boldsymbol{b}} & \cdots & \check{A}^{n-1}\check{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{3.4.10}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.4.

Выражение (3.4.10) в более компактной форме имеет вид

$$T = \check{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^{-1}, \tag{3.4.11}$$

где

$$\check{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} \check{\boldsymbol{b}} & \check{A}\check{\boldsymbol{b}} & \cdots & \check{A}^{n-1}\check{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \tag{3.4.12}$$

– матрица управляемости модели (3.4.4), а

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{3.4.13}$$

– матрица управляемости (3.4.1).

Процедура 3.4.1. (процедура приведения уравнения к канонической форме управляемости) состоит из операций:

1. Построить характеристический полином объекта

$$d(s) = \det(Es - A),$$

и сформировать вектор $\tilde{\boldsymbol{d}}$ матрицы $\check{A}$ (3.4.6).

2. Сформировать матрицы $\check{\boldsymbol{k}}$ и $\boldsymbol{k}$ по формулам (3.4.12), (3.4.13) и вычислить матрицу

$$T = \check{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^{-1}$$

преобразования (3.4.7).

■

Пример 3.4.1. Пусть имеем объект управления

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 5u, \tag{3.4.14}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 + 6u. \tag{3.4.15}$$

Приведём эти уравнения к канонической форме. В соответствии с первой операцией найдём

$$d(s) = \det\begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{pmatrix} = s^2 - 5s - 2; \quad \tilde{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}. \tag{3.4.16}$$

Затем сформируем

$$\check{\boldsymbol{k}} = \left(\check{\boldsymbol{b}},\, \check{A}\check{\boldsymbol{b}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{b},\, A\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 6 & 39 \end{pmatrix},$$

и вычислим

$$T = \check{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{93}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}. \tag{3.4.17}$$

Нетрудно проверить, что

$$\check{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{b}} = T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.4.18}$$

■

3.4.3. Построение управления

Из структуры уравнения (3.4.4) заключаем, что компоненты вектора $\check{\boldsymbol{x}}$

$$\check{x}_2 = \dot{\check{x}}_1, \quad \check{x}_3 = \ddot{\check{x}}_1, \quad \ldots, \quad \check{x}_n = \check{x}_1^{(n-1)}, \tag{3.4.19}$$

и поэтому относительно переменной $\check{x}_1$ оно запишется как

$$d(s)\check{x}_1 = u. \tag{3.4.20}$$

Регулятор (3.4.2) имеет теперь вид

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'T^{-1}\check{\boldsymbol{x}} = \left(\check{c}_n s^{n-1} + \cdots + \check{c}_1 s + \check{c}_1\right)\check{x}_1 = \check{c}(s)\check{x}_1. \tag{3.4.21}$$

Здесь $\check{c}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – компоненты вектора $\check{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \check{c}_1 & \check{c}_2 & \cdots & \check{c}_n \end{bmatrix}$, который определяется как

$$\check{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{c}'T^{-1}, \tag{3.4.22}$$

и обратно, если известен вектор $\check{\boldsymbol{c}}$, то искомый вектор

$$\boldsymbol{c}' = \check{\boldsymbol{c}}'T. \tag{3.4.23}$$

Уравнения (3.4.20) и (3.4.21) являются частным случаем уравнений (3.1.1) и (3.1.2), когда в последних

$$b(s) = 1, \quad g(s) = 1. \tag{3.4.24}$$

Поэтому решение задачи 3.4.1 сводится к процедурам 3.1.1 и 3.4.1.

Процедура 3.4.2. (процедура построения модального управления).

Операция 1. На основе процедуры 3.4.1 найти полином $d(s)$ уравнения (3.4.20) и матрицу T.

Операция 2. Сформировать желаемый полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i^*) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0. \tag{3.4.25}$$

Операция 3. Находим полином регулятора (3.4.21) из тождества

$$d(s) - \check{c}(s) = \tilde{\psi}(s) \tag{3.4.26}$$

и формируем вектор

$$\check{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} d_0 - \tilde{\psi}_0 & d_1 - \tilde{\psi}_1 & \cdots & d_{n-1} - \tilde{\psi}_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.4.27}$$

Операция 4. Вычисляем искомый вектор $\boldsymbol{c}'$ по формуле (3.4.23).

■

Пример 3.4.2. Найти регулятор

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{3.4.28}$$

для объекта (3.4.14), (3.4.15) так, чтобы характеристический полином объекта, замкнутого регулятором, имел корни

$$s_1^* = -1, \quad s_2^* = -2. \tag{3.4.29}$$

Полином $d(s)$ и матрица T, разрешающие эту задачу, были определены ранее и имеют вид (3.4.16) и (3.4.17).

Осуществляя вторую операцию, находим

$$\tilde{\psi}(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2. \tag{3.4.30}$$

Затем определяем полином

$$\check{c}(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s) = -8s - 4, \tag{3.4.31}$$

и формируем вектор

$$\check{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix}. \tag{3.4.32}$$

Вычислим коэффициенты c_1 и c_2 регулятора (3.4.28)

$$\boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \check{\boldsymbol{c}} T = \begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{93} = \begin{bmatrix} -48 & -84 \end{bmatrix} \frac{1}{93}. \tag{3.4.33}$$

Нетрудно проверить, что при таком регуляторе характеристический полином объекта (3.4.14), (3.4.15), замкнутого регулятором

$$u = -\frac{48}{93} x_1 - \frac{84}{93} x_2,$$

имеет вид

$$d^u(s) = \det(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}') = s^2 + 3s + 2. \tag{3.4.34}$$

■

3.4.4. Проблема синтеза

Пусть на объект (3.4.1) действуют внешние возмущения. Тогда он описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{m}f, \tag{3.4.35}$$

где $\boldsymbol{m}$ – заданный n-мерный вектор.

Динамику такого объекта будем оценивать регулируемой переменной

$$z(t) = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.36}$$

где $\boldsymbol{l}$ – заданный n-мерный вектор.

Задача 3.4.2. Пусть задан объект (3.4.35), у которого

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}. \tag{3.4.37}$$

Требуется найти регулятор (3.4.2) такой, чтобы, начиная с момента времени $t_{рег}$, выполнялось условие

$$|z(t)| \leq z^*, \tag{3.4.38}$$

где z^* – заданное число, характеризующее точность регулирования. ■

Эта задача аналогична задаче 3.2.1. В ней как и ранее внешнее возмущение может быть трёх видов – (3.2.2), (3.2.3) либо (3.2.4).

Для решения задачи найдём связь регулируемой переменной системы (3.4.35), (3.4.2) с внешним возмущением

$$z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}'(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')^{-1}\boldsymbol{m}f = \frac{\boldsymbol{l}'(Es - \widetilde{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{m}}{d^u(s)}f = \frac{m^c(s)}{d^u(s)}f, \tag{3.4.39}$$

где

$$m^c(s) = \boldsymbol{l}'(Es - \widetilde{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{m}. \tag{3.4.40}$$

Будем определять вектор $\boldsymbol{c}'$, используя процедуру 3.4.2, из тождества

$$d^u(s) = \tilde{\psi}(s). \tag{3.4.41}$$

Тогда

$$z = \frac{m^c(s)}{\tilde{\psi}(s)}f. \tag{3.4.42}$$

В этом выражении полином $m^c(s)$ зависит от компонент вектора $\boldsymbol{c}'$ и, следовательно, он неявно зависит от коэффициентов $\tilde{\psi}(s)$. В общем случае трудно указать способ определения этих коэффициентов, при которых выполняется требование (3.4.38) к точности и это составляет основную проблему при синтезе регуляторов. Эта проблема разрешается при $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}$, так как при этом условии полином $m^c(s)$ не зависит от вектора $\boldsymbol{c}'$.

Убедимся в этом.

Утверждение 3.4.1. Вектора

$$\beta(s) = (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{и} \quad \beta^{з}(s) = (Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')^{-1}\boldsymbol{b} \tag{3.4.43}$$

связаны соотношением

$$\beta^{з}(s) = \frac{\beta(s)}{1 + w_{раз}(s)}, \tag{3.4.44}$$

где

$$w_{раз}(s) = -\boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{3.4.45}$$

■

Доказательство утверждения несложно. Действительно, подставляя управление (3.4.2) в уравнение объекта (3.4.35) при $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}$, получим

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f.$$

Отсюда

$$x(s) = (Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')^{-1}\boldsymbol{b}f, \tag{3.4.46}$$

с другой стороны из (3.4.35) при $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}$ следует

$$x(s) = (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}(u + f) = \beta(s)(u + f). \tag{3.4.47}$$

Подставляя это выражение в (3.4.2) находим

$$u(s) = \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}(u + f) = -w_{раз}(s)(u + f),$$

или

$$u(s) = -\frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)}f. \tag{3.4.48}$$

Исключая переменную u, представленную этим соотношением, из (3.4.47), получим (3.4.44).

Используя доказанное утверждение находим

$$z = \boldsymbol{l}'(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')^{-1}\boldsymbol{m}f = \frac{\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}}{1 - \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}}f. \tag{3.4.49}$$

3.4.5. Процедура синтеза

Почти очевидны соотношения

$$\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{l}'T^{-1}(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}'T^{-1}(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}, \tag{3.4.50}$$

в справедливости которых можно убедиться, подставляя в их правые части выражения (3.4.9).

Вводя вектор

$$\tilde{\boldsymbol{m}}' = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_\gamma \end{bmatrix} = \boldsymbol{l}' T^{-1} \tag{3.4.51}$$

и учитывая (3.4.22), получим

$$z = \frac{\tilde{\boldsymbol{m}}' \left(Es - \check{A}\right)^{-1} \check{\boldsymbol{b}}}{1 - \check{\boldsymbol{c}}' \left(Es - \check{A}\right)^{-1} \check{\boldsymbol{b}}} f = \frac{b_z(s)}{d(s) - \check{c}(s)} f \tag{3.4.52}$$

где

$$b_z(s) = b_{z,\gamma_z} s^{n-1} + \cdots + b_{z,1} s + b_{z,0} = \boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1} \boldsymbol{b}. \tag{3.4.53}$$

Определяя $r(s)$ из тожества (3.4.26), находим

$$z = \frac{b_z(s)}{\tilde{\psi}(s)} f. \tag{3.4.54}$$

Параметры полинома $\tilde{\psi}(s)$ определяем, исходя из требования (3.4.38) к точности на основе неравенств (3.2.14) или (3.2.16), полагая в них z^* вместо y^*.

Если полином $b_z(s)$ устойчив, то можно принять аналогично (3.2.17)

$$\tilde{\psi}(s) = b_z(s) \tilde{\tilde{\psi}}(s). \tag{3.4.55}$$

Это позволит оценить время регулирования.

Для обеспечения грубости синтезируемой системы нужно руководствоваться соотношением (3.2.28) рекомендации 3.2.1 либо использовать для построения $\tilde{\psi}(s)$ процедуру 3.2.2.

3.4.6. Следящие системы

При *последовательном задающем воздействии* следящая система описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.56}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + kv, \tag{3.4.57}$$

Желаемое значение $z_{ж}(t)$ регулируемой переменной связано с задающим воздействием $v(t)$ уравнением качества слежения

$$\tilde{\psi}_{м}(s) z_{ж} = l_{м}(s) v. \tag{3.4.58}$$

Регулируемая переменная системы (3.4.56), (3.4.57) описывается соотношением

$$z = \frac{b_z(s) k}{d(s) - \check{c}(s)} v, \tag{3.4.59}$$

которое следует из (3.4.52), если заменить f на kv.

Сравнивая эти два выражения заключаем, что при последовательном задающем воздействии нельзя получить наперёд заданный полином $l_м(s)$.

При *параллельном задающем воздействии* система принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(u + u_1), \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \quad u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.60}$$

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}}^k = \check{A}^k\check{\boldsymbol{x}}^k + \check{\boldsymbol{b}}^k v, \quad u_1 = \boldsymbol{r}^k\check{\boldsymbol{x}}^k, \tag{3.4.61}$$

где $\check{\boldsymbol{x}}^k$ – $\beta_3 + 1$ – мерный вектор

$$\check{A}^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{\beta_3} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-\boldsymbol{g}^k} \end{array}\right), \quad \check{\boldsymbol{b}}^k = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right],$$
$$\tilde{\boldsymbol{g}}^k = \left[\begin{array}{cccc} g_0^k & g_1^k & \cdots & g_{\beta_3}^k \end{array}\right], \quad \tilde{\boldsymbol{r}}^k = \left[\begin{array}{cccc} r_0^k & r_1^k & \cdots & r_{\beta_2}^k \end{array}\right]. \tag{3.4.62}$$

Нетрудно проверить, что передаточные функции $\dfrac{u_1(s)}{v(s)}$, получаемые из (3.4.61) и (3.3.3), совпадают.

Из (3.4.60), (3.4.61) следует выражение, аналогичное (3.3.36)

$$z = \frac{b_z(s)r^k(s)}{[d(s) - \check{c}(s)]g^k(s)}v. \tag{3.4.63}$$

Если $b_z(s)$ гурвицев полином, а

$$\deg b_z(s) \geq \deg l_м(s), \tag{3.4.64}$$

вектор $\mathbf{c}$ регулятора и вектора $\boldsymbol{g}^k$, $\boldsymbol{r}^k$ уравнения (3.4.61) определяется из уравнений

$$d(s) - \check{c}(s) = \tilde{\psi}_м(s), \quad g^k(s) = b_z(s), \quad r^k(s) = l_м(s). \tag{3.4.65}$$

Первое из этих уравнений доставляет вектор $\check{\boldsymbol{c}}$, используя который находим $\boldsymbol{c}' = \check{\boldsymbol{c}}'T$, из второго следует $r_i^k = l_i^м$ $\left(i = \overline{0, n_l}\right)$, из третьего получим $g_i^k = b_{z,i}$ $\left(i = \overline{0, \gamma_z}\right)$.

3.4.7. Система с эталонной моделью*

Если задана эталонная модель

$$\dot{\boldsymbol{x}}_м = A_м\boldsymbol{x}_м + \boldsymbol{b}_м v, \quad z_м = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}_м \tag{3.4.66}$$

то управление объектом (3.4.56) будем искать в виде

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'_м\boldsymbol{x}_м, \tag{3.4.67}$$

где $\boldsymbol{x}_м(t)$ – n-мерный вектор измеряемых переменных состояния эталонной модели, $A_м$ и $\boldsymbol{b}_м$ – заданная матрица и вектор её параметров.

Будем искать вектора $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{c}'_{м}$ такие, чтобы разность регулируемых переменных эталонной модели и объекта

$$\varepsilon = z - z_{м} = 0. \tag{3.4.68}$$

Для решения этой задачи подставим управление (3.4.67) в уравнение объекта (3.4.56) и найдём, учитывая (3.4.44),

$$z = \boldsymbol{l}'(Es - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{x}_{м} = \frac{\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'_{м}}{1 - \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}_{м}. \tag{3.4.69}$$

С другой стороны, из уравнений эталонной модели следует

$$z_{м} = \boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}_{м}v. \tag{3.4.70}$$

Составим разность

$$\varepsilon = z - z_{м} = \left[\frac{\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'_{м}}{1 - \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}}(Es - A_{м})^{-1}\boldsymbol{b}_{м} - \boldsymbol{l}'(Es - A_{м})^{-1}\boldsymbol{b}_{м}\right]v. \tag{3.4.71}$$

и найдём условие, когда она равна нулю. Это условие имеет вид

$$\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'_{м}(Es - A_{м})^{-1}\boldsymbol{b}_{м} - \left[1 - \boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}\right]\boldsymbol{l}'(Es - A_{м})^{-1}\boldsymbol{b}_{м} = 0. \tag{3.4.72}$$

Используем преобразование (3.4.9) и аналогичное преобразование эталонной модели

$$T_{м}A_{м}T_{м}^{-1} = \check{A}_{м}, \quad T_{м}\boldsymbol{b}_{м} = \check{\boldsymbol{b}}_{м}, \tag{3.4.73}$$

где $T_{м}$ определяется выражением (3.4.10), в котором добавляется индекс ««м»» при матрицах и векторах, а $\check{A}_{м}$ и $\check{\boldsymbol{b}}_{м}$ – матрица и вектор структуры (3.4.6).

Тогда (3.4.72) примет вид

$$\check{\boldsymbol{l}}'(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}\check{\boldsymbol{c}}'_{м}(Es - \check{A}_{м})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}_{м} - \left[1 - \check{\boldsymbol{c}}'(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}\right]\check{\boldsymbol{l}}'_{м}(Es - \check{A}_{м})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}_{м} = 0, \tag{3.4.74}$$

или

$$\check{l}'(s)\check{c}_{м}(s) - [d(s) - \check{c}(s)]\,\check{l}_{м}(s) = 0, \tag{3.4.75}$$

где

$$\check{l}'(s) = \check{l}_{n}s^{n-1} + \cdots + \check{l}_{2}s + \check{l}_{1}, \quad \check{c}_{м}(s) = \check{c}_{м,n}s^{n-1} + \cdots + \check{c}_{м,2}s + \check{c}_{м,1}, \tag{3.4.76}$$

$$\check{l}_{м}(s) = \check{l}_{м,n}s^{n-1} + \cdots + \check{l}_{м,2}s + \check{l}_{м,1}, \tag{3.4.77}$$

а вектора $\check{l}' = \begin{bmatrix} \check{l}_1 & \check{l}_2 & \cdots & \check{l}_n \end{bmatrix}'$, $\check{c}'_{м} = \begin{bmatrix} \check{c}_{м,1} & \check{c}_{м,2} & \cdots & \check{c}_{м,n} \end{bmatrix}'$, $\check{l}_{м} = \begin{bmatrix} \check{l}_{м,1} & \check{l}_{м,2} & \cdots & \check{l}_{м,n} \end{bmatrix}'$ связаны с исходными векторами соотношениями

$$l' = \check{l}'T, \quad c' = \check{c}'T, \quad l'_{м} = \check{l}'T_{м}, \quad c'_{м} = \check{c}'T_{м}. \tag{3.4.78}$$

Будем полагать, что эталонная модель такова, что

$$\check{l}_{м,n} = 0. \tag{3.4.79}$$

Это означает, что полином в числителе передаточной функции эталонной модели

$$w_м(s) = \boldsymbol{l}'(Es - A_м)^{-1}\boldsymbol{b}_м = \frac{\boldsymbol{l}'\widetilde{(Es - A_м)}\boldsymbol{b}_м}{\det(Es - A_м)} \tag{3.4.80}$$

имеет степень

$$\gamma_{n_э} \le n - 2. \tag{3.4.81}$$

Запишем (3.4.75) в форме модального тождества (3.1.20)

$$l'(s)\check{c}_м(s) - \check{l}_м(s)\check{c}(s) = \delta(s), \tag{3.4.82}$$

где

$$\delta(s) = d(s)\check{l}_м(s). \tag{3.4.83}$$

Выбором параметров эталонной модели всегда можно получить полиномы $\check{l}(s)$ и $\check{l}_м(s)$, не содержащие общего делителя. Тогда существуют многочлены $\check{c}_м(s)$ и $\check{c}(s)$, удовлетворяющие тождеству (3.4.82). Правда, эти полиномы не единственны. Действительно, из тождества (3.4.82) следует система (3.1.9) из $2n-1$ уравнений для определения $2n$ неизвестных составляющих векторов $\check{\boldsymbol{c}}'$ и $\check{\boldsymbol{c}}'_м$.

3.4.8. Анализ структурной грубости*

Пусть задача 3.4.2 решена и получена система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.84}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{3.4.85}$$

которая при действии внешних возмущений удовлетворяет требованию (3.4.38) к точности.

Наряду с рабочей моделью (3.4.84), (3.4.85) существует уточнённая её модель

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} = A^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(1)}u, \tag{3.4.86}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = A^{(3)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A^{(4)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(2)}u, \quad z = \boldsymbol{l}^{(2)}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{l}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(2)} + l^{(3)}u, \tag{3.4.87}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^{(2)}, \tag{3.4.88}$$

где $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ составляют n_{ym}-мерный вектор $\boldsymbol{x}_{ym}(t)$ состояний объекта (3.4.86), (3.4.87), $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ – n-мерный вектор, матрицы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, вектора $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{l}^{(1)}$, $\boldsymbol{l}^{(2)}$ и число $l^{(3)}$ – заданы.

Рабочая модель получается из уточнённой путём приравнивания производной вектора $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ нулю $\left(\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}(t) = \boldsymbol{0}\right)$.

Следовательно, матрицы рабочей модели объекта связаны с матрицами уточнённой модели соотношениями

$$\begin{aligned} A &= A^{(4)} - A^{(3)}\left[A^{(1)}\right]^{-1}A^{(2)}, & \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{b}^{(2)} - A^{(3)}\left[A^{(1)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}, \\ \boldsymbol{l}' &= \boldsymbol{l}^{(2)'} - \boldsymbol{l}^{(1)'}\left[A^{(1)}\right]^{-1}A^{(2)}, & l^{(3)} &= \boldsymbol{l}^{(1)'}\left[A^{(1)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.4.89}$$

Уравнения (3.4.86) назовём *структурными возмущениями рабочей модели* (3.4.84).

Определение 3.4.1. Рабочая модель (3.4.84), (3.4.85) называется структурно грубой, если структурные возмущения (3.4.86) не нарушают её асимптотической устойчивости. ■

Это определение служит развитием определения 2.2.2 на объекты первого вида.

Для анализа структурной грубости модели (3.4.84), (3.4.85) должны быть заданы матрицы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, вектора $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$ и $\boldsymbol{l}^{(1)}$, $\boldsymbol{l}^{(2)}$ и число $l^{(3)}$ уточнённой модели. Если окажется, что уточнённая модель (3.4.86)-(3.4.88) неустойчива, то нужно изменить рабочую модель, используя следующую процедуру, которая является развитием процедуры 3.2.4.

Процедура 3.4.3. (процедура построения структурно-грубого регулятора). Она состоит из операций:

Операция 1. Заменить в уравнениях (3.4.86), (3.4.87) размерность вектора $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$, равную n, на $n+1$. Тогда эти уравнения примут вид

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} = A_I^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A_I^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}_I^{(1)}u, \quad \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = A_I^{(3)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A_I^{(4)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}_I^{(2)}u, \qquad (3.4.90)$$

где $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ – $n+1$-мерный вектор, а $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ – $n_{ym}-n-1$-мерный вектор.

Операция 2. Сформировать рабочую модель объекта

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_I\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_I u, \quad z = \boldsymbol{l}_I'\boldsymbol{x}, \qquad (3.4.91)$$

параметры которой определяются по формулам (3.4.89). При этом матрицы и вектора в правых частях этих формул нужно заменить матрицами и векторами модели (3.4.90).

Операция 3. Вновь решить задачу 3.4.2 с рабочей моделью (3.4.91) и найти вектор $\boldsymbol{c}_I'$ управления

$$u = \boldsymbol{c}_I'\boldsymbol{x}. \qquad (3.4.92)$$

Операция 4. Проанализировать устойчивость уточнённой модели (3.4.84)-(3.4.86), заменив в ней вектор $\boldsymbol{c}'$ на вектор $\boldsymbol{c}_I'$. Если эта система неустойчива, то вернуться к операции 1, полагая размерность вектора $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$, равной $n+2$ и т.д.

■

Приложения к главе 3

3.П.1. Системы с наблюдателями

3.П.1.1. Восстановление (наблюдение) переменных состояния объекта управления

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \\ y &= \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{3.П.1}$$

Пусть требуется восстановить n-мерный вектор его переменных состояния $\boldsymbol{x}(t)$ по доступным непосредственному измерению переменным $y(t)$ и $u(t)$.

Простейшее устройство восстановления (наблюдения) описывается уравнением

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}u, \quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}}^{(0)}, \tag{3.П.2}$$

в котором $\boldsymbol{x}(t)$ – n-мерный вектор переменных состояния наблюдателя.

Такое устройство можно использовать лишь для асимптотически устойчивых объектов. Действительно, вычитая (3.П.2) и (3.П.1), получим

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)} - \tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)}, \tag{3.П.3}$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$ – ошибка восстановления вектора переменных состояния, которая исчезает со временем, если объект асимптотически устойчив.

В связи с этим воспользуемся измеряемой переменной $y(t)$ и, используя разность $y(t) - \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}(t)$, построим наблюдатель

$$\hat{\boldsymbol{x}} = A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{k}_y\,(y - \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}u, \tag{3.П.4}$$

где $\boldsymbol{k}_y$ – n-мерный вектор чисел, который определяется из условия устойчивости наблюдателя.

<u>Утверждение 3.П.1.</u> Если объект (3.П.1) полностью наблюдаем, то существует вектор $\boldsymbol{k}_y$, при котором матрица $A - \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d}$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями. Более того, можно указать процедуру нахождения такого вектора $\boldsymbol{k}_y$, что характеристический полином наблюдателя

$$d^{н}(s) = \det(Es - A + \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d}) \tag{3.П.5}$$

имеет наперёд заданные корни $s_i^{н}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. ■

Доказательство этого утверждения и указанная в нём процедура приведены в 3.Д.5.

Итак, пусть найден вектор $\boldsymbol{k}_y$, при котором наблюдатель

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (A - \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}_y y + \boldsymbol{b}u, \tag{3.П.6}$$

асимптотически устойчив.

Построим уравнение для ошибки $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ восстановления. Вычитая (3.П.4) из (3.П.1) получим

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - \boldsymbol{k}_y \boldsymbol{d})\tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{3.П.7}$$

По построению $\boldsymbol{k}_y$ вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ исчезает при $t \to \infty$ и поэтому

$$\lim_{t\to\infty} [\boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)] = 0.$$

Приложим к объекту (3.4.60) управление

$$u = \boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{x}}. \tag{3.П.8}$$

Тогда уравнение (4.4.60) можно представить в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{3.П.9}$$

Из этого уравнения и уравнения (4.4.72) следует, что характеристический полином системы (4.5.1), (4.5.4), (4.5.8) с наблюдателем имеет вид

$$\tilde{d}(s) = d^u(s)d^н(s). \tag{3.П.10}$$

Из этого выражения следует, что, если задан полином

$$\psi^*(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i^*) \prod_{j=1}^{n} \left(s - s_j^н\right), \tag{3.П.11}$$

то вектора $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{k}_y$ можно находить независимо друг от друга, определяя вектор $\boldsymbol{c}'$ с помощью процедуры 3.4.2, а вектор $\boldsymbol{k}_y$ – на основе процедуры 3.Д.1.

3.П.1.2. Следящая система с наблюдателем

Она описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}; \quad \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (A - \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}_y y + \boldsymbol{b}u; \tag{3.П.12}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{x}} + kv. \tag{3.П.13}$$

Найдём связь измеряемой переменной с задающим воздействием. Исключая переменную u получим

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}kv, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}. \tag{3.П.14}$$

Кроме того, перепишем (3.П.7)

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d})\tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{3.П.15}$$

Используя блочные матрицы, запишем эти уравнения как

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' & -\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' \\ 0 & A-\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}k \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \cdot v, \quad y = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix}. \tag{3.П.16}$$

Отсюда

$$y = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Es-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' \\ 0 & Es-A+\boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}k \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \cdot v = \boldsymbol{d}[Es-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}']^{-1}\boldsymbol{b}kv. \tag{3.П.17}$$

Последнее равенство нетрудно получить, если использовать выражение (2.1.36) обратной матрицы для специфической блочной матрицы (3.П.17). Это соотношение не зависит от наблюдателя. Это объясняется тем, что в системе (3.П.14), (3.П.15) вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ не зависит от v ($\tilde{\boldsymbol{x}}$ полностью неуправляем переменной v) и поэтому при выводе (3.П.17) произошло сокращение полинома $d^н(s)$.

В действительности связь (3.П.17) имеет вид

$$y = \boldsymbol{d}[Es-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}']^{-1}\boldsymbol{b}k\frac{d^н(s)}{d^н(s)}v. \tag{3.П.18}$$

Это следует из выражения (3.П.10) для характеристического полинома системы с наблюдателем.

Структура полученной связи позволяет использовать при построении регулятора для объекта с одной измеряемой переменной процедуру п. 3.4.5, в которой все переменные состояния объекта измеряются. При этом полагаем $y = z$ $(\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{d})$.

3.П.1.3. Наблюдатель пониженного порядка

Интуитивно ясно, что размерность n вектора состояний наблюдателя (3.П.4) может быть уменьшена на число измеряемых переменных. Такой наблюдатель называется наблюдателем пониженного порядка (редуцированным наблюдателем). Он описывается уравнениями

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{s}}y + \Phi\boldsymbol{x}_p, \tag{3.П.19}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \Theta\boldsymbol{x}_p + \tilde{\boldsymbol{f}}y + \tilde{T}\boldsymbol{b}u, \tag{3.П.20}$$

где $\boldsymbol{x}_p(t)$ – $n-1$-мерный вектор состояния наблюдателя, $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ – n-мерный вектор выхода наблюдателя, $\tilde{\boldsymbol{s}}$ и $\tilde{\boldsymbol{f}}$ – n- и $n-1$-мерные вектора чисел соответственно, Θ, $\tilde{T}$, Φ – матрицы чисел размеров $(n-1)\times(n-1)$, $(n-1)\times n$ и $n\times n$ соответственно.

Вектор $\tilde{\boldsymbol{s}}$ и матрица Φ определяются из уравнения

$$\tilde{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{d} + \Phi\tilde{T} = E_n, \tag{3.П.21}$$

в котором матрица $\tilde{T}$ является решением уравнения

$$\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}' = \tilde{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{d}, \tag{3.П.22}$$

где $\tilde{\boldsymbol{f}}$ – произвольный вектор, а Θ – произвольная матрица, собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части.

Пример 3.П.1. Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = b_2 u. \tag{3.П.23}$$

Пусть непосредственному измерению доступна переменная $y = x_1$.

Требуется построить наблюдатель пониженного порядка для восстановления переменной x_2.

В соответствии с (3.П.19), (3.П.20) искомый наблюдатель описывается уравнениями

$$\hat{x}_1 = \tilde{s}_1 y + \varphi_{11} x_{p1}, \quad \hat{x}_2 = \tilde{s}_2 y + \varphi_{21} x_{p1}, \tag{3.П.24}$$

$$\dot{x}_{p1} = \theta_{11} x_{p1} + \tilde{f}_1 y + \left(\tilde{t}_1 b_1 + \tilde{t}_2 b_2\right) u, \tag{3.П.25}$$

параметры которых находятся из матричных уравнений (3.П.21), (3.П.22). Эти уравнения имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \theta_{11} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} = \tilde{f}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение этих уравнений

$$\tilde{s}_1 = 1, \quad \tilde{s}_2 = -\frac{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}, \quad \varphi_{11} = 0, \quad \varphi_{21} = \frac{1}{\tilde{t}_2}, \quad \tilde{t}_1 = -\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}}, \quad \tilde{t}_2 = -\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}^2}. \tag{3.П.26}$$

Таким образом, наблюдатель (3.П.24), (3.П.25) имеет вид

$$\hat{x}_1 = y_1, \quad \hat{x}_2 = -\theta_{11} y - \frac{\theta_{11}^2}{\tilde{f}_1} x_{p1}, \tag{3.П.27}$$

$$\dot{x}_{p1} = \theta_{11} x_{p1} + \tilde{f}_1 y + \left(-\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}} b_1 - \frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}^2} b_2\right) u. \tag{3.П.28}$$

■

3.П.1.4. Передаточная функция разомкнутой системы с наблюдателем

Рассмотрим следящую систему с наблюдателем пониженного порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}; \tag{3.П.29}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{s}} y + \Phi \boldsymbol{x}_p, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_p = \Theta \boldsymbol{x}_p + \tilde{\boldsymbol{f}} y + \tilde{T}\boldsymbol{b}u; \tag{3.П.30}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{x}} + kv. \tag{3.П.31}$$

Преобразуем её по Лапласу при нулевых начальных условиях. Очевидно, что

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{s}}y + \Phi\boldsymbol{x}_p = \tilde{\boldsymbol{s}}y + \Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{\boldsymbol{f}}y + \Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}\boldsymbol{b}u. \qquad (3.\text{П}.32)$$

Тогда

$$u = \boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{s}}y + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{\boldsymbol{f}}y + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}\boldsymbol{b}u.$$

Отсюда при $k=0$ получаем уравнение регулятора

$$\left[1 + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}\boldsymbol{b}\right]u = \left[\boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{\boldsymbol{f}}\right]y. \qquad (3.\text{П}.33)$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$w_{раз}(s) = -\left[1 + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}\boldsymbol{b}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{c}'\Phi(Es-\Theta)^{-1}\tilde{\boldsymbol{f}}\right]\boldsymbol{d}(Es-A)^{-1}\boldsymbol{b}. \qquad (3.\text{П}.34)$$

Преобразуем это выражение. Используя (3.П.22), запишем

$$(Es-\Theta)^{-1}\tilde{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{d}(Es-A)^{-1} = (Es-\Theta)^{-1}\left[\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}\right](Es-A)^{-1}.$$

Используем тождества

$$A(Es-A)^{-1} = (Es-A)^{-1}s - E, \quad (Es-\Theta)^{-1}\Theta = (Es-\Theta)^{-1}s - E, \qquad (3.\text{П}.35)$$

которые нетрудно доказать умножая их справа на $(Es-A)$ и $(Es-\Theta)$ соответственно.

Тогда

$$(Es-\Theta)^{-1}\left[\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}\right](Es-A)^{-1} = (Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}A(Es-A)^{-1} -$$
$$-(Es-\Theta)^{-1}\Theta\tilde{T}(Es-A)^{-1} = \tilde{T}(Es-A)^{-1} - (Es-\Theta)^{-1}\tilde{T}.$$

Подставляя это выражение в (3.П.34) получим с учётом (3.П.21)

$$w_{раз}(s) = \frac{-\boldsymbol{c}'\widetilde{(Es-A)}\boldsymbol{b}d^{н}(s) + \boldsymbol{c}'\Phi\widetilde{(Es-\Theta)}\tilde{T}\boldsymbol{b}d(s)}{d(s)d^{н}(s) - \boldsymbol{c}'\Phi\widetilde{(Es-\Theta)}\tilde{T}\boldsymbol{b}d(s)}, \qquad (3.\text{П}.36)$$

где $\widetilde{(Es-A)} = (Es-A)^{-1}d(s)$, $\widetilde{(Es-\Theta)} = (Es-\Theta)^{-1}d^{н}(s)$.

3.П.1.5. О негрубости систем с наблюдателями

Введём в рассмотрение полином

$$\rho(s) = \boldsymbol{c}'\Phi\widetilde{(Es-\Theta)}\tilde{T}\boldsymbol{b}d(s). \qquad (3.\text{П}.37)$$

Тогда передаточная функция (3.П.36) примет вид

$$w_{раз}(s) = \frac{-\boldsymbol{c}'\widetilde{(Es-A)}\boldsymbol{b}d^{н}(s) + \rho(s)}{d(s)d^{н}(s) - \rho(s)} = \frac{k(s)}{d^{c}(s)}. \qquad (3.\text{П}.38)$$

Характеристический полином системы с наблюдателем пониженного порядка

$$\tilde{d}^u(s) = d^c(s) + k(s) = \left[d(s) - \boldsymbol{c}'(\widetilde{Es - A})\boldsymbol{b}\right] d^н(s) = d^u(s)d^н(s) \qquad (3.\text{П}.39)$$

совпадает с (3.П.10).

Заметим, что при построении полинома (3.П.39) произошло взаимное уничтожение полиномов $\rho(s)$ в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой системы. Если хотя бы один из коэффициентов этого полинома существенно превышает коэффициенты при соответствующей степени полиномов $d^u(s)d^н(s)$ и $\boldsymbol{c}'(\widetilde{Es - A})\boldsymbol{b}$, то имеет место неполная аддитивная компенсация, рассмотренная в 1.П.2. Частотные свойства систем с неполной аддитивной компенсацией исследованы в ... где показано, что такие системы могут обладать малой степенью грубости (малыми запасами устойчивости по фазе и модулю).

Пример 3.П.2. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = b_2 u, \quad u = c_1 x_1 + c_2 x_2, \qquad (3.\text{П}.40)$$

с параметрами

$$b_1 = -10, \quad b_2 = 1; \qquad c_1 = -10, \quad c_2 = -200. \qquad (3.\text{П}.41)$$

Пусть реализация закона управления в этой системе затруднена тем, что переменная x_2 не измеряется, а измеряется переменная

$$y = x_1. \qquad (3.\text{П}.42)$$

Для восстановления переменной состояния x_2 используем наблюдатель (3.П.27), (3.П.28) и сформируем

$$u = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2. \qquad (3.\text{П}.43)$$

Определяем запасы устойчивости построенной системы (3.П.23), (3.П.42), (3.П.43), (3.П.27), (3.П.28).

Найдём вначале уравнение регулятора. Для этого исключим из (3.П.43) переменную $\hat{x}_2$ с помощью (3.П.27), (3.П.28). Получим

$$\dot{u} - (\theta_{11} + c_2\theta_1 b_1 + c_2 b_2)u = -c_1\theta_1 + y + (c_1 - c_2\theta_{11})\dot{y}. \qquad (3.\text{П}.44)$$

Передаточная функция объекта (3.П.23), (3.П.42) имеет вид

$$w(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2},$$

и таким образом, передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$\begin{aligned} w_{раз}(s) &= -\frac{[(c_1 - c_2\theta_{11})s - c_1\theta_{11}](b_1 s + b_2)}{s^2(s - \theta_{11} - c_2\theta_{11}b_1 + c_2 b_2)} = \\ &= -\frac{[(c_1 b_1 + c_2 b_2)s + c_1 b_2](s - \theta_{11}) + (c_2\theta_{11}b_1 + c_2 b_2)s^2}{s^2(s - \theta_{11}) - (c_2\theta_{11}b_1 + c_2 b_2)s^2}. \end{aligned} \qquad (3.\text{П}.45)$$

При $\theta_{11} = -20$ и численных значениях параметров (3.П.41) получим

$$w_{раз}(s) = \frac{(100s+10)(s-20) - 402\cdot 10^2 s^2}{s^3 + 20s^2 + 402\cdot 10^2 s^2} \approx \frac{(20s+1)(-10s+1)}{200s^2\left(\dfrac{1}{4\cdot 10^4}s+1\right)}.$$

При $\omega = j1.56$ находим $\mathrm{Re}\, w_{раз}(j\omega) = -0.999$, $\mathrm{Jm}\, w_{раз}(j\omega) = -0.32\cdot 10^{-1}$ и, следовательно, запас устойчивости по фазе $\varphi_з = 2^\circ$.

Заметим, что исходная система (3.П.40) без наблюдателя имеет передаточную функцию

$$w_{раз}(s) = -\frac{(c_1b_1 + c_2b_2)s + c_1b_2}{s^2} = \frac{100s+10}{s^2}. \qquad (3.П.46)$$

Запасы устойчивости, полученные на её основе $\varphi_з \approx 90^\circ$, $L \to \infty$, что свидетельствует о грубости системы без наблюдателя. Введение наблюдателя приводит к существенному снижению запасов устойчивости. В рассмотренном примере коэффициент при $s^2 b$ в полиноме $\rho(s) = 402\cdot 10^2 s^2$ значительно превышает коэффициент при s^2 в полиномах $d(s)d^н(s) = s^2(s+20)$ и $\boldsymbol{c}'(E\widetilde{s} - A)\boldsymbol{b}d^н(s) = (100s+10)(s+20)$.
■

3.П.1.6. Описание компенсационной схемы в пространстве состояний

Система, представленная на рис. 3.3.2. описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}; \qquad (3.П.47)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p^{(1)} = \check{A}_p^{(1)}\boldsymbol{x}_p^{(1)} + \check{\boldsymbol{b}}y, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_p^{(2)} = \check{A}_p^{(2)}\boldsymbol{x}_p^{(2)} + \check{\boldsymbol{b}}u; \qquad (3.П.48)$$

$$u = \tilde{\boldsymbol{h}}^{(1)}\boldsymbol{x}_p^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{h}}^{(2)}\boldsymbol{x}_p^{(2)} + kv, \qquad (3.П.49)$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{h}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_0^{(1)} & \tilde{h}_1^{(1)} & \cdots & \tilde{h}_{n-2}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{h}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_0^{(2)} & \tilde{h}_1^{(2)} & \cdots & \tilde{h}_{n-2}^{(2)} \end{bmatrix}, \qquad (3.П.50)$$

$$\check{A}_p^{(1)} = \check{A}_p^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{n-2} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-\boldsymbol{q}} \end{array}\right), \quad \check{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_{n-2} \end{bmatrix}. \qquad (3.П.51)$$

При структуре управления (3.П.49) полиномы $\boldsymbol{h}^{(1)}(s)$ и $\boldsymbol{h}^{(2)}(s)$ на схеме рис. 3.3.2. имеют степень $n-2$. Эта степень повышается до $n-1$ при

$$u = f_p^{(1)}y + \tilde{\boldsymbol{h}}^{(1)}\boldsymbol{x}_p^{(1)} + f_p^{(2)}u + \tilde{\boldsymbol{h}}^{(2)}\boldsymbol{x}_p^{(2)} + kv. \qquad (3.П.52)$$

В этом случае

$$\boldsymbol{h}^{(1)}(s) = f_p^{(1)}\boldsymbol{q}(s) + \tilde{\boldsymbol{h}}^{(1)}(s), \quad \boldsymbol{h}^{(2)}(s) = f_p^{(2)}\boldsymbol{q}(s) + \tilde{\boldsymbol{h}}^{(2)}(s). \qquad (3.П.53)$$

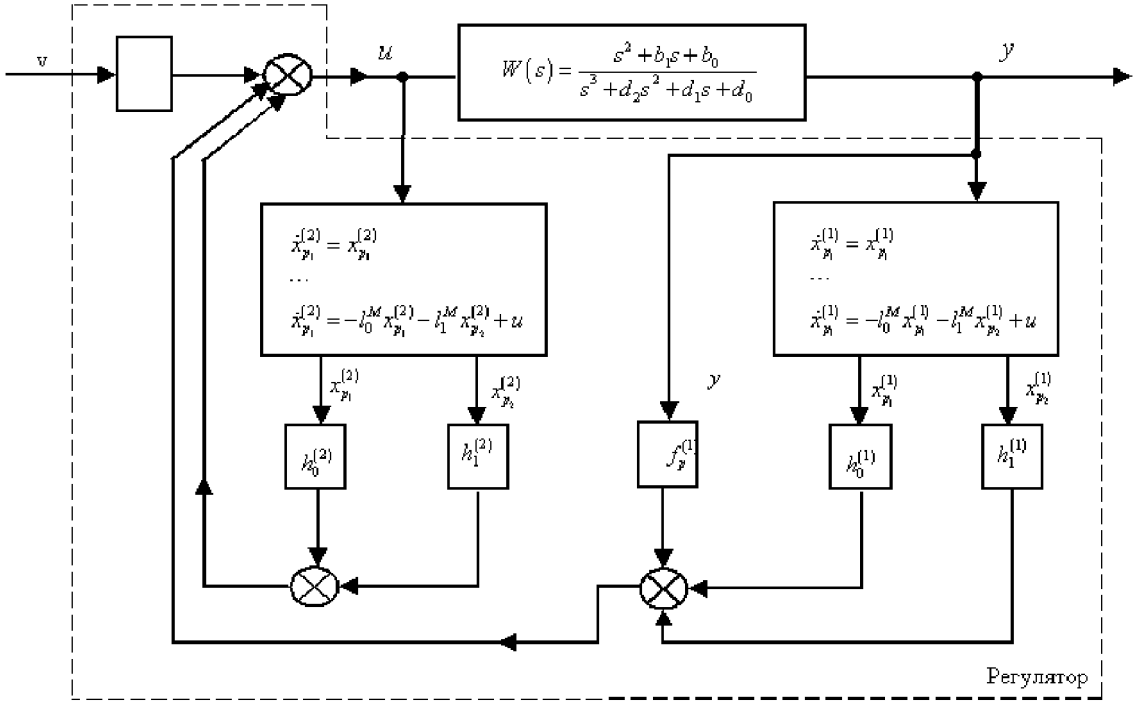

Рис. 3.П.1.

Объект (3.П.47) имеет передаточную функцию

$$w(s) = \boldsymbol{d}(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{b(s)}{d(s)}. \qquad (3.П.54)$$

Первый вариант компенсационной схемы описывается в пространстве состояний управлением (3.П.49). Вектора $\tilde{\boldsymbol{h}}^{(1)}$ и $\tilde{\boldsymbol{h}}^{(2)}$ определяются из тождества (3.3.57), а параметр $k = k_1$. Вектор $\boldsymbol{q}$ в (3.П.51) – произвольный вектор, при котором собственные числа матрицы $\breve{A}_p^{(1)}$ имеют отрицательные вещественные части (матрица – устойчивая).

Во **втором варианте** компенсационной схемы вектор

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} l_0^м & l_1^м & \cdots & l_{n-2}^м \end{pmatrix}. \qquad (3.П.55)$$

Это следует из (3.3.60). Управление описывается суммой (3.П.52) при $\boldsymbol{f}_p^{(2)} = \boldsymbol{0}$, а $\boldsymbol{h}^{(1)}(s)$ и $\boldsymbol{h}^{(2)}(s)$ находятся из (3.3.62).

Пример 3.П.3. Опишем в пространстве состояний регулятор, полученный в примере 3.3.2. Система с таким регулятором приведена на рис. 3.П.1. ■

3.П.1.7. Компенсационные схемы и системы с наблюдателями

Покажем, что компенсационные схемы являются формой представления систем с наблюдателями.

Действительно, выражение (3.П.32) можно записать как

$$u = f_p^{(1)} y + \frac{b^{(1)}(s)}{b^{н}(s)} y + \frac{b^{(2)}(s)}{b^{н}(s)} u + kv. \qquad (3.П.56)$$

где $f_p^{(1)} = \boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{s}}$, $b^{(1)}(s) = \boldsymbol{c}'\Phi(\widetilde{Es - \Theta})\tilde{\boldsymbol{f}} = b_{n-2}^{(1)} s^{n-2} + \cdots + b_1^{(1)} s + b_0^{(1)}$,
$b^{(2)}(s) = \boldsymbol{c}'\Phi(\widetilde{Es - \Theta})\tilde{T}\boldsymbol{b} = b_{n-2}^{(2)} s^{n-2} + \cdots + b_1^{(2)} s + b_0^{(2)}$,
$d^{н}(s) = \det(Es - \Theta) = s^{n-1} + d_{n-2}^{н} s^{n-2} + \cdots + d_1^{н} s + d_0^{н}$.

Полагая

$$b_i^{(1)} = \tilde{h}_i^{(1)} (i = \overline{0, n-2}), \quad b_j^{(2)} = \tilde{h}_j^{(2)} (i = \overline{0, n-2}), \quad d_k^{н} = q_k (k = \overline{0, n-2}), \qquad (3.П.57)$$

получим вместо уравнений (3.П.30), (3.П.31) уравнения (3.П.48), (3.П.52) при $f_p^{(2)} = 0$.

3.П.2. Построение уравнения качества

3.П.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим вначале частный случай уравнения качества (3.2.12), когда $m_0 = 1$, $m_1 = m_2 = \cdots = m_\alpha = 0$

$$y^{(n)} + \tilde{\psi}_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{\psi}_1 \dot{y} + \tilde{\psi}_0 y = f. \qquad (3.П.58)$$

Здесь $f(t)$ – произвольная ограниченная функция

$$|f(t)| \le f^*, \qquad (3.П.59)$$

где f^* – заданное число.

Задача 3.П.1. Определить параметры $\tilde{\psi}_i$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ управления (3.П.58) такие, чтобы, при наиболее неблагоприятном вешнем возмущении из множества (3.П.59), выполнялись требования к точности

$$|y(t)| \le u^* \quad 0 \le t \le \infty, \qquad (3.П.60)$$

где y^* – заданное число. ■

Уточним понятие наиболее неблагоприятного внешнего воздействия. Для этого рассмотрим решение уравнения (3.П.58).

Утверждение 3.П.2. Решение неоднородного уравнения (3.П.58) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \eta(t - \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad (3.П.61)$$

где импульсная переходная функция $\eta(t)$ является решением однородного уравнения

$$\eta^{(n)} + \tilde{\psi}_{n-1} \eta^{(n-1)} + \ldots + \tilde{\psi}_1 \dot{\eta} + \tilde{\psi}_0 = 0 \qquad (3.П.62)$$

при начальных условиях

$$\eta^{(n-1)}(0) = 1, \quad \eta^{(n-2)}(0) = \cdots = \dot{\eta}(0) = \eta(0) = 0. \tag{3.П.63}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.6.

Зафиксируем $t = T$ и найдём ограниченную функцию $f(t)$, при которой

$$y(T) = \int_0^T \eta(T-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{3.П.64}$$

достигает максимального значения $y_{\max}(T)$. Эта задача называется *задачей о накоплении возмущений.*

Очевидно, что искомая функция имеет вид

$$f(t) = f^* \operatorname{sign} \eta(T-t) \tag{3.П.65}$$

($\operatorname{sign} a = 1$, при $a > 0$ и $\operatorname{sign} a = -1$, при $a > 0$).

Выражение (3.П.65) является *наиболее благоприятным внешним возмущением* на интервале $[0, T]$.

Подставляя его в (3.П.64), находим

$$y_{\max}(T) = f^* \int_0^T |\eta(T-\tau)|\, d\tau = f^* \int_0^T |\eta(\tau)|\, d\tau \le f^* \int_0^\infty |\eta(\tau)|\, d\tau. \tag{3.П.66}$$

Таким образом задача 3.П.1 состоит в определении таких коэффициентов $\tilde{\psi}_i$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ уравнения (3.П.58), чтобы выполнялось равенство

$$y_{\max}(\infty) < y^*. \tag{3.П.67}$$

3.П.2.2. Выбор корней характеристического полинома

Пусть уравнение (3.П.58) имеет характеристический полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i), \tag{3.П.68}$$

где s_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – вещественные, отрицательные и различные числа.

Импульсная функция имеет в этом случае вид

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}, \tag{3.П.69}$$

где вещественные константы c_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ подобраны так, чтобы выполнялись условия (3.П.63).

Утверждение 3.П.3. (Первое утверждение Н.Г.Чеботарёва). Функция (3.П.70), удовлетворяющая условиям (3.П.63), не обращается в нуль при $t \neq 0$. ■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.7.

В соответствии с утверждением рассматриваемая функция не изменяет знак на интервале $[0, \infty]$ и поэтому с точностью до этого знака

$$\eta(t) = |\eta(t)|. \tag{3.П.70}$$

Отсюда следует

$$y_{\max}(\infty) = f^* \int\limits_0^\infty |\eta(\tau)|\, d\tau = f^* \int\limits_0^\infty \eta(\tau)\, d\tau = f^* \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i \tau}\, d\tau = -f^* \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i}. \tag{3.П.71}$$

Утверждение 3.П.4. (Второе утверждение Н.Г.Чеботарёва). Если корни характеристического полинома уравнения (3.П.68) вещественны, отрицательны и различны, то при наиболее неблагоприятном внешнем возмущении

$$y_{\max}(\infty) = \frac{f^*}{\tilde{\psi}_0}. \tag{3.П.72}$$

■

Доказательство утверждения сводится к доказательству выражения

$$-\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i} = \frac{1}{\tilde{\psi}_0} \tag{3.П.73}$$

и приведено в 3.Д.8.

Из (3.П.72) следует, что для выполнения требования (3.П.60) к точности при произвольном ограниченном внешнем возмущении достаточно построить полином $\tilde{\psi}(s)$ с вещественными отрицательными и различными корнями, на которые положено лишь одно ограничение

$$\prod_{i=1}^n |s_i| \geq \frac{f^*}{y^*}. \tag{3.П.74}$$

3.П.2.3. Оценка максимального отклонения

Рассмотрим теперь общий случай, когда уравнение качества имеет вид (3.2.13)

$$y^{(n)} + \tilde{\psi}_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{\psi}_1 \dot{y} + \tilde{\psi}_0 y = m_\alpha f^{(\alpha)} + \cdots + m_1 \dot{f} + m_0 f, \tag{3.П.75}$$

где m_i $\left(i = \overline{0, \alpha}\right)$ – заданное число.

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y(t) = \int\limits_0^t \left[\sum_{i=0}^\alpha m_i \eta^{(i)}(t-\tau)\right] f(\tau)\, d\tau, \tag{3.П.76}$$

где $\eta^{(i)}(t-\tau) = \dfrac{d^i}{d\tau^i}\eta(t-\tau)$.

Отсюда следует выражение наиболее неблагоприятного внешнего возмущения

$$f(t) = f^* \operatorname{sign}\left[\sum_{i=0}^{\alpha} m_i \eta^{(i)}(T-t)\right]. \tag{3.П.77}$$

Максимальное отклонение

$$\begin{gathered} y_{\max}(T) = f^* \int\limits_0^T \left|\sum_{i=0}^{\alpha} m_i \eta^{(i)}(T-\tau)\right| d\tau \le \\ \le f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| \int\limits_0^T \left|\eta^{(i)}(T-\tau)\right| d\tau = f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| \int\limits_0^T \left|\eta^{(i)}(\tau)\right| d\tau. \end{gathered} \tag{3.П.78}$$

Вводя обозначения интегралов модулей производных импульсных функций

$$J_i = \int\limits_0^{\infty} \left|\eta^{(i)}(\tau)\right| d\tau \quad (i = 0, \alpha),$$

запишем, что

$$|y_{\max}(\infty)| \le f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| J_i. \tag{3.П.79}$$

Корни полинома $\tilde{\psi}(s)$ примем, как и ранее, вещественными и различными. При этом пронумеруем их так, чтобы выполнялись неравенства

$$|s_1| < |s_2| < \cdots < |s_n|. \tag{3.П.80}$$

<u>Утверждение 3.П.5.</u> Интегралы модулей производных импульсных функций удовлетворяют неравенствам

$$J_i = \int\limits_0^{\infty} \left|\eta^{(i)}(\tau)\right| d\tau \le 2^i \frac{|s_1 s_2 \cdots s_i|}{\tilde{\psi}_0} \quad i = \overline{0, \alpha}, \tag{3.П.81}$$

из которых следуют оценки максимального отклонения

$$|y_{\max}(\infty)| \le f^* \left[\frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0} + 2\frac{|m_1 s_1|}{\tilde{\psi}_0} + \cdots + 2^{\alpha}\frac{|m_\alpha s_1 \cdots s_\alpha|}{\tilde{\psi}_0}\right]. \tag{3.П.82}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.8.

Если учесть, что $\tilde{\psi}_0 = \prod\limits_{i=1}^{n} |s_i|$, то неравенство (3.П.82) можно записать в более конструктивной форме

$$\begin{gathered} |y_{\max}(\infty)| \le f^* \left[2^{\alpha}\frac{|m_\alpha|}{\prod\limits_{i=\alpha+1}^{n} |s_i|} + \cdots + 2^2\frac{|m_2|}{\prod\limits_{i=3}^{n} |s_i|} + 2\frac{|m_1|}{\prod\limits_{i=2}^{n} |s_i|} + \frac{|m_0|}{\prod\limits_{i=1}^{n} |s_i|}\right] = \\ = f^* \frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0}\left[2^{\alpha}\frac{|m_\alpha|}{|m_0|}|s_1 \cdots s_\alpha| + \cdots + 2^2\frac{|m_2|}{|m_0|}|s_1 s_2| + 2\frac{|m_1|}{|m_0|}|s_1| + 1\right]. \end{gathered} \tag{3.П.83}$$

Примем

$$|s_1| < \frac{1}{2}\frac{|m_0|}{|m_1|}, \quad |s_1 s_2| < \frac{1}{2^2}\frac{|m_0|}{|m_2|}, \quad \ldots, \quad |s_1 \cdots s_\alpha| < \frac{1}{2^\alpha}\frac{|m_0|}{|m_\alpha|}, \tag{3.П.84}$$

тогда

$$y_{\max}(\infty) \le \alpha f^* \frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0}. \tag{3.П.85}$$

Представляя

$$\tilde{\psi}_0 = \prod_{i=1}^{\alpha} |s_i| \prod_{j=\alpha+1}^{n} |s_j|$$

определим корни $s_{\alpha+1}, \ldots, s_n$ из условия

$$\prod_{j=\alpha+1}^{n} |s_j| \ge \alpha \frac{f^* |m_0|}{y^* \prod_{i=1}^{\alpha} |s_i|}. \tag{3.П.86}$$

Совокупность неравенств (3.П.84), (3.П.86) обеспечивает выполнение требования (3.П.60) к точности.

Пример 3.П.4 Определить коэффициенты $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ уравнением качества

$$\dddot{y} + \tilde{\varphi}_2 \ddot{y} + \tilde{\varphi}_1 \dot{y} + \tilde{\varphi}_0 y = 0.8\dot{f} - 0.15 f, \tag{3.П.87}$$

такие, чтобы при

$$|f(t)| \le 0.1 \tag{3.П.88}$$

максимальное отклонение

$$|y_{\max}(\infty)| \le 1.1. \tag{3.П.89}$$

Переходя к решению этой задачи определим из (3.П.84)

$$|s_1| \le \frac{1}{2}\frac{|m_0|}{|m_1|} = \frac{1}{2}\frac{|-0.15|}{0.8} = 0.094. \tag{3.П.90}$$

Примем

$$|s_1| \le 0.09.$$

На основе (3.П.86) получим

$$|s_2||s_3| \ge \alpha \frac{f^* |m_0|}{y^* |s_1|} = 2\frac{0.1 \cdot |-0.15|}{1.1 \cdot 0.09} = 0.3.$$

Примем

$$|s_2| = 0.4, \quad |s_3| = 0.76. \tag{3.П.91}$$

Искомые коэффициенты

$$\tilde{\varphi}_2 = |s_1 + s_2 + s_3| = 1.25, \quad \tilde{\varphi}_1 = |s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1| = 0.4084, \quad \tilde{\varphi}_0 = |s_1 s_2 s_3| = 0.0273,$$

и таким образом уравнение качества имеет вид

$$\dddot{y} + 1.25\ddot{y} + 0.4084\dot{y} + 0.0273y = 0.8\dot{f} - 0.15f. \qquad (3.П.92)$$

Для этого уравнения было определено наиболее неблагоприятное внешнее возмущение (3.П.65). В результате решения уравнения (3.П.92) при таком внешнем воздействии получено

$$|y_{\max}(\infty)| = 0.52. \qquad (3.П.93)$$

■

Доказательства к главе 3

3.Д. Доказательства теорем и утверждений

3.Д.1. Доказательство теоремы 3.1.1

а) Алгоритм Эвклида. Обозначим $d(s) = d_0(s)$, а $b(s) = d_1(s)$. Пусть $q_1(s)$ – частное, а $d_2(s)$ – остаток деления $d_0(s)$ на $d_1(s)$, т.е.

$$d_0(s) = d_1(s)q_1(s) + d_2(s), \qquad (3.Д.1)$$

где $\deg d_2(s) < \deg d_1(s)$.

Разделим $d_1(s)$ на $\deg d_2(s)$:

$$d_1(s) = d_2(s)q_2(s) + d_3(s) \quad [\deg d_3(s) < \deg d_2(s)]. \qquad (3.Д.2)$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\begin{array}{lll}
d_2(s) = d_3(s)\,q_3(s) + d_4(s) & & [\deg d_4(s) < \deg d_3(s)] \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
d_{\alpha-3}(s) = d_{\alpha-2}(s)\,q_{\alpha-2}(s) + d_{\alpha-1}(s) & & [\deg d_{\alpha-1}(s) < \deg d_{\alpha-2}(s)] \\
d_{\alpha-2}(s) = d_{\alpha-1}(s)\,q_{\alpha-1}(s) + d_{\alpha}(s) & & [\deg d_{\alpha}(s) < \deg d_{\alpha-1}(s)] \\
d_{\alpha-1}(s) = d_{\alpha}(s)\,q_{\alpha}(s) + d_{\alpha+1}(s) & & [\deg d_{\alpha+1}(s) < \deg d_{\alpha}(s)] \\
d_{\alpha+1}(s) = 0, & &
\end{array} \qquad (3.Д.3)$$

где $d_{\alpha+1}(s)$ – первый многочлен, тождественно равный нулю. Поскольку $\deg d_0(s) > \deg d_1(s) > \deg d_2(s) > \cdots > \deg d_{n+1}(s)$ этот процесс завершится за конечное число шагов. Этот процесс последовательного деления полиномов называется *алгоритмом Эвклида*.

Покажем, что многочлены $q_1(s)$ и $d_2(s)$ в (3.Д.1) определяются однозначно. Пусть существуют ещё многочлены $\bar{q}_1(s)$ и $\bar{d}_2(s)$, удовлетворяющие равенству

$$d_0(s) = d_1(s)\bar{q}_1(s) + \bar{d}_2(s) \quad [\deg \bar{d}_2(s) < \deg d_1(s)]. \qquad (3.Д.4)$$

Приравнивая правые части равенств (3.Д.1) и (3.Д.4), получим

$$d_1(s)\,[q_1(s) - \bar{q}_1(s)] = \bar{d}_2(s) - d_2(s).$$

Степень правой части этого равенства меньше степени $d_1(s)$, степень же левой части была бы при $q_1(s) - \bar{q}_1(s)$ больше или равна степени $d(s)$. Поэтому должно быть $q_1(s) - \bar{q}_1(s)$, а тогда и $\bar{d}_2(s) = d_2(s)$. Аналогично доказывается однозначность последующих полиномов в алгоритме Эвклида.

Пример 3.Д.1. Опишем последовательное деление для полиномов примера 3.1.1, в котором

$$d_0(s) = s^2 - 16, \quad d_1(s) = 5s + 30.$$

Первый шаг деления:

$$s^2 - 16 = (5s + 30)\frac{1}{5}s - 6s - 16.$$

Таким образом

$$q_1(s) = \frac{1}{5}s, \quad d_2(s) = -6s - 16.$$

Второй шаг:

$$5s + 30 = (-6s - 16)\frac{-5}{6} + 30 + \frac{5 \cdot 16}{6}$$

и следовательно

$$q_2(s) = -\frac{5}{6}, \quad d_3(s) = \frac{260}{6}.$$

Третий шаг:

$$-6s - 16 = \left(\frac{260}{6}\right)\left(-\frac{36}{260}s\right) - 16.$$

Нетрудно видеть, что

$$q_3(s) = -\frac{36}{260}s, \quad d_4(s) = -16.$$

Четвертый шаг:

$$\frac{260}{6} = (-16)\left(-\frac{6 \cdot 16}{260}\right) + 0$$

и следовательно

$$q_4(s) = -\frac{96}{260}, \quad d_5(s) = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае процесс последовательного деления закончился на пятом шаге $(\alpha = 4)$. ■

б) Покажем, что $d_\alpha(s)$ является наибольшим общим делителем полиномов $d(s)$ и $b(s)$.

Полином $d_{\alpha-1}(s)$ делится на $d_\alpha(s)$, так как $d_{\alpha+1}(s)=0$, и поэтому $d_\alpha(s)$ является наибольшим общим делителем полиномов $d_\alpha(s)$ и $d_{\alpha-1}(s)$. Из (3.Д.3) получим

$$d_{\alpha-2}(s)=d_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-1}(s)+d_\alpha(s)=d_\alpha(s)q_\alpha(s)q_{\alpha-1}(s)+d_\alpha(s)=d_\alpha(s)[q_\alpha(s)q_{\alpha-1}(s)+1] \tag{3.Д.5}$$

и, следовательно, $d_\alpha(s)$ является делителем полиномов $d_{\alpha-1}(s)$ и $d_{\alpha-2}(s)$. При том их наибольшим делителем.

Для того, чтобы убедиться в последнем предположим, что это не так, и существует наибольшие общий делитель $v(s)\neq d_\alpha(s)$ такой, что

$$d_{\alpha-2}(s)=d_{\alpha-1}(s)v(s).$$

Тогда из (3.Д.3) получим $d_\alpha(s)=0$, что противоречит предположению, что алгоритм Эвклида заканчивается при $d_{\alpha+1}(s)=0$.

Повторяя эти рассуждения заключаем, что $d_\alpha(s)$ является наибольшим общим делителем полиномов $d_0(s)$ и $d_1(s)$.

в) Так как $d_\alpha(s)$ является делителем полиномов $d(s)$ и $b(s)$, то соотношение (3.1.20) можно переписать в виде

$$d(s)g(s)-b(s)r(s)=\left[\bar{d}(s)g(s)-\bar{b}(s)r(s)\right]d_\alpha(s)=\delta(s). \tag{3.Д.6}$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решения, если $d_\alpha(s)$ не является делителем $\delta(s)$.

г) Найдём, используя алгоритм Эвклида, полиномы $g^{(\delta)}(s)$ и $r^{(\delta)}(s)$, удовлетворяющие уравнению (3.1.20) при произвольном полиноме $\delta(s)$.

Если $d_\alpha(s)$ является делителем $\delta(s)$, то обе части (3.1.20) можно разделить на $d_\alpha(s)$ и получим уравнение, в котором $\bar{d}(s)$ и $\bar{b}(s)$ не будут иметь общих делителей. В этом случае алгоритм Эвклида даёт общий делитель $d_\alpha(s)=1$.

Тогда на основе (3.Д.3) запишем

$$1=d_\alpha(s)=d_{\alpha-2}(s)-q_{\alpha-1}(s)+d_{\alpha-1}(s).$$

Из уравнения, предшествующего приведённому, следует

$$d_{\alpha-1}(s)=d_{\alpha-3}(s)-q_{\alpha-2}(s)d_{\alpha-2}(s).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}1&=d_{\alpha-2}(s)-q_{\alpha-1}(s)d_{\alpha-1}(s)=\\&=d_{\alpha-2}(s)-q_{\alpha-1}(s)[d_{\alpha-3}(s)-q_{\alpha-2}(s)d_{\alpha-2}(s)]=\\&=-q_{\alpha-1}(s)d_{\alpha-3}(s)+[1+q_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-2}(s)]d_{\alpha-2}(s)=\\&=d_{\alpha-2}(s)q^{(\alpha-3)}(s)-d_{\alpha-3}(s)r^{(\alpha-3)}(s),\end{aligned}$$

где

$$q^{(\alpha-3)}(s) = [1 + q_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-2}(s)], \quad r^{(\alpha-3)}(s) = q_{\alpha-1}(s).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$1 = d_0(s)q^{(1)}(s) - d_1(s)r^{(1)}(s),$$

или, с учётом обозначений,

$$d(s)q^{(1)}(s) - b(s)r^{(1)}(s) = 1. \tag{3.Д.7}$$

Из однозначности полиномов алгоритма Эвклида следует единственность $q^{(1)}(s)$ и $r^{(1)}(s)$.

Умножим тождество (3.Д.7) на $\delta(s)$ и получим искомое решение $q^{(\delta)}(s) = q^{(1)}(s)\delta(s)$ и $r^{(\delta)}(s) = r^{(1)}(s)\delta(s)$.

3.Д.2. Доказательство теоремы 3.1.2

а) Предварительные сведения. При доказательстве ограничимся, для простоты, случаем $v(s) = 1$.

Рассмотрим частные случаи уравнений (3.1.20), когда $\delta(s) = 0$ и $\delta(s) = 1$.

Решения таких уравнений будем обозначать как $g^{(0)}(s)$, $r^{(0)}(s)$ и $g^{(1)}(s)$, $r^{(1)}(s)$ соответственно. Это означает, что выполняются соотношения

$$d(s)g^{(0)}(s) - b(s)r^{(0)}(s) = 0, \tag{3.Д.8}$$

$$d(s)g^{(1)}(s) - b(s)r^{(1)}(s) = 1. \tag{3.Д.9}$$

Решение уравнения (3.Д.8) имеет вид

$$g^{(0)}(s) = k(s)b(s), \quad r^{(0)}(s) = k(s)d(s), \tag{3.Д.10}$$

где $k(s)$ – произвольный полином.

Очевидно, что решение уравнения (3.Д.7) связано с решением $g^{(\delta)}(s)$, $r^{(\delta)}(s)$ уравнения (3.1.20) соотношениями

$$g^{(\delta)}(s) = g^{(1)}(s)\delta(s), \quad r^{(\delta)}(s) = r^{(1)}(s)\delta(s), \tag{3.Д.11}$$

которые следуют из сравнения (3.1.20) и (3.Д.7) после умножения последнего на $\delta(s)$.

б) Вывод условия (3.1.24). Представим на основе (3.1.22) решение (3.1.20) в виде

$$g(s) = g^{(\delta)}(s) + k(s)b(s), \quad r(s) = r^{(\delta)}(s) + k(s)d(s). \tag{3.Д.12}$$

Убедимся, что при условии (3.1.24)

$$\deg r(s) < \deg d(s), \tag{3.Д.13}$$

из второго уравнения (3.Д.11) однозначно находим полином $k(s)$.

Из неравенства (3.Д.12) следует, что

$$\deg k(s) = \deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s). \tag{3.Д.14}$$

(Если $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) < 0$, то $k(s) = 0$).

Пусть $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) = 2$, тогда

$$\begin{aligned} r^{(\delta)}(s) + k(s)d(s) = r^{(\delta)}_{n+2}s^{n+2} + r^{(\delta)}_{n+1}s^{n+1} + r^{(\delta)}_{n}s^{n} + r^{(\delta)}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r^{(\delta)}_{1}s + r^{(\delta)}_{0} + \\ + (k_2s^2 + k_1s + k_0)(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0). \end{aligned} \tag{3.Д.15}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при s^{n+2}, s^{n+1}, s^n получим рекуррентную систему уравнений для определения $k(s)$

$$-r^{(\delta)}_{n+2} = k_2, \quad -r^{(\delta)}_{n+1} = k_1 + k_2d_{n-1}, \quad -r^{(\delta)}_{n} = k_0 + k_1d_{n-1} + k_2d_{n-2}. \tag{3.Д.16}$$

Если $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) > 2$, то получим аналогичную систему. Система (3.Д.15) имеет единственное решение и поэтому при условии (3.1.24) $r(s)$ – единственно. Аналогично, доказывается единственность $g(s)$ при выполнении неравенства (3.1.23).

в) Вывод условия (3.1.25). Пусть

$$\deg \delta(s) = \deg d(s) + \deg b(s) \tag{3.Д.17}$$

и выполнено (3.1.23).

В этом случае из (3.1.20) следует

$$b(s)r(s) = d(s)g(s) - \delta(s)$$

и

$$\deg b(s) + \deg r(s) = \deg b(s)r(s) \le \max[\deg d(s)g(s), \deg \delta(s)] < \deg d(s) + \deg b(s) \tag{3.Д.18}$$

Следовательно,

$$\deg r(s) < \deg d(s),$$

что совпадает с (3.1.24).

Поэтому условия (3.1.23) и (3.1.24) приводят к одной и той же паре полиномов $g(s)$ и $r(s)$.

3.Д.3. Доказательство утверждения 3.1.1

Ограничимся для простоты случаем $\alpha = 2$. В этом случае уравнение (3.1.41) примет вид

$$\begin{aligned} (s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \cdots + d_2s^2 + d_1s + d_0)(\rho_2s^2 + \rho_1s + \rho_0) - r(s) = \\ = (\varepsilon^{02}s^2 + 2\varepsilon^0s + 1)\left(s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \tilde{\psi}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0\right). \end{aligned} \tag{3.Д.19}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях этого равенства, получим уравнения для параметров полиномов $\rho(s)$ и $r(s)$

$$
\begin{array}{lclcll}
s^{n+2} & : & \rho_2 - \varepsilon^{02} & = & 0 & = \; o_2^{\varepsilon}, \\
s^{n+1} & : & \rho_1 - 2\varepsilon^0 & = & \tilde{\psi}_{n-1}\varepsilon^{02} - d_{n-1}\rho_2 & = \; o_1^{\varepsilon}, \\
s^{n} & : & \rho_0 - 1 & = & \tilde{\psi}_{n-1}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-2}\varepsilon^{02} - d_{n-1}\rho_1 - d_{n-2}\rho_2 & = \; o_0^{\varepsilon}, \\
s^{n-1} & : & d_{n-1}\rho_0 - r_{n-1} - \tilde{\psi}_{n-1} & = & \tilde{\psi}_{n-2}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-3}\varepsilon^{02} - d_{n-2}\rho_1 - d_{n-3}\rho_2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\
s^{2} & : & d_2\rho_0 - r_2 - \tilde{\psi}_2 & = & \tilde{\psi}_1 2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_0\varepsilon^{02} - d_1\rho_1 - d_0\rho_2 & \\
s^{1} & : & d_1\rho_0 - r_1 - \tilde{\psi}_1 & = & \tilde{\psi}_0 2\varepsilon^0 - d_0\rho_1 & \\
s^{0} & : & d_0\rho_0 - r_0 - \tilde{\psi}_0 & = & & = \; o_0^{r}.
\end{array}
$$

Из уравнений для коэффициентов при s^{n+2}, s^{n+1}, s^n следует

$$\rho_2 = \varepsilon^{02}, \quad \rho_1 = 2\varepsilon^0 + o_1^{\varepsilon}(\varepsilon^{02}), \quad \rho_0 = 1 + o_0^{\varepsilon}(\varepsilon^0), \tag{3.Д.20}$$

где

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{o_1^{\varepsilon}(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau\to 0} o_0^{\varepsilon}(\tau) = 0. \tag{3.Д.21}$$

Из уравнении для коэффициентов при s^{n-1}, ..., s^2, s^1, s^0 получим соответственно

$$r_{n-1} = \tilde{\psi}_{n-1} - d_{n-1} + o_{n-1}^{r} = r_{n-1}^{c} + o_{n-1}^{r},$$

где $o_{n-1}^{r} = \tilde{\psi}_{n-2}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-3}\varepsilon^{02} - d_{n-2}[2\varepsilon^0 + o_1^{æ}(\tau^2)] - d_{n-1}o_0^{\varepsilon}$;

$$\vdots$$

$r_2 = \tilde{\psi}_2 - d_2 + o_2^{r} = r_2^{c} + o_2^{r}$, где $o_2^{r} = \tilde{\psi}_1 2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_0\varepsilon^{02} - d_0\varepsilon^{02} - d_1[2\varepsilon^0 + o_1^{\varepsilon}(\varepsilon^{02})] - d_2 o_0^{\varepsilon}$;

$r_1 = \tilde{\psi}_1 - d_1 + o_1^{r} = r_1^{c} + o_1^{r}$, где $o_1^{r} = \tilde{\psi}_0 2\varepsilon^0 - d_0[2\tau + o_1^{\varepsilon}(\varepsilon^{02})] - d_1 o_0^{\varepsilon}$;

$r_0 = \tilde{\psi}_0 - d_0 + o_0^{r} = r_0^{c} + o_0^{r}$, где $o_0^{r} = d_0 o_0^{æ}$;

Очевидно, что

$$\lim_{\tau\to 0} o_i^{r} = 0, \quad \lim_{\tau\to 0} r_i = r_i^{c} \quad i = \overline{0, n-1} \tag{3.Д.22}$$

3.Д.4. Доказательство теоремы 3.4.1

Представим выражение (3.4.9) с учётом (3.4.11), как

$$\check{A} = TAT^{-1} = \check{K}K^{-1}AK\check{K}^{-1}. \tag{3.Д.23}$$

Введём матрицу

$$\bar{A} = K^{-1}AK. \tag{3.Д.24}$$

Тогда

$$\check{A} = \check{K}\bar{A}\check{K}^{-1}. \tag{3.Д.25}$$

Рассмотрим (3.Д.23). Используя (3.4.13), получим

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & \cdots & A^n\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_n & -\boldsymbol{g} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ – i-тый столбец единичной матрицы, $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix}'$ – некоторый вектор

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}^{-1} A^n\boldsymbol{b}. \tag{3.Д.26}$$

Представим

$$A^n = -Ed_0 - Ad_1 - A^2d_2 - \cdots - A^{n-1}d_{n-1}. \tag{3.Д.27}$$

Это равенство следует из теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема 3.Д.4. (Теорема Гамильтона-Кэли). Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. ■

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид $s^n+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1s+$ $+d_0 = 0$. Заменяя в нём параметр s матрицей A получим (3.Д.25).

Используя (3.Д.25), запишем

$$\begin{aligned}E\boldsymbol{g} &= -\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -d_0\boldsymbol{b} & -d_1A\boldsymbol{b} & \cdots & -d_{n-1}A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d_0\boldsymbol{e}_1 & d_1\boldsymbol{e}_2 & \cdots & d_{n-1}\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.Д.28}$$

Рассмотрим поочерёдно части равенства, получаемого из (3.Д.24)

$$\check{A}\check{K} = \check{K}\bar{A}. \tag{3.Д.29}$$

С одной стороны, используя (3.Д.12), имеем

$$\check{A}\check{K} = \begin{pmatrix} \check{A}\check{\boldsymbol{b}} & \check{A}^2\check{\boldsymbol{b}} & \cdots & \check{A}^n\check{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}. \tag{3.Д.30}$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\check{K}\bar{A} &= \check{K}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_n & -\boldsymbol{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{K}\boldsymbol{e}_2 & \check{K}\boldsymbol{e}_3 & \cdots & \check{K}\boldsymbol{e}_n & -\check{K}\boldsymbol{g} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \check{A}\check{\boldsymbol{b}} & \check{A}^2\check{\boldsymbol{b}} & \cdots & \check{A}^{n-1}\check{\boldsymbol{b}} & -\check{K}\boldsymbol{g} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.Д.31}$$

На основе (3.Д.26) заключаем, в силу теоремы 3.Д.4, что

$$-\check{K}\boldsymbol{g} = -\check{K}\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} \end{bmatrix}' = \left(-Ed_0 - \check{A}d_1 \cdots - \check{A}^{n-1}d_{n-1}\right)\boldsymbol{b} = \check{A}^n\boldsymbol{b}, \tag{3.Д.32}$$

и таким образом равенство (3.Д.27) доказано.

3.Д.5. Доказательство утверждения 3.П.1

По заданным корням $s_i^н$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ сформируем желаемый характеристический полином наблюдателя

$$\psi^н(s) = \prod_{i=1}^{n} \left(s - s_i^н\right). \tag{3.Д.33}$$

Введём в рассмотрение вспомогательную систему управления

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = A'\boldsymbol{\mu}'' + \boldsymbol{d}'u, \tag{3.Д.34}$$

$$u = -\boldsymbol{k}_y'\boldsymbol{\mu}, \tag{3.Д.35}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – n-мерный вектор состояния.

««Объект»» (3.Д.34) полностью управляем, если объект (3.П.1) полностью наблюдаем.

Её характеристический полином

$$\det(Es - A'\boldsymbol{d}'\boldsymbol{k}_y') = \det(Es - A + \boldsymbol{k}_y\boldsymbol{d}) = d^н(s). \tag{3.Д.36}$$

Отсюда следует, что для построения вектора $\boldsymbol{k}_y$ можно применить процедуру 3.4.2, полагая в ней

$$A = A', \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}'. \tag{3.Д.37}$$

Получив в результате этой процедуры вектор $\boldsymbol{c}$, находим

$$\boldsymbol{k}_y = -\boldsymbol{c}. \tag{3.Д.38}$$

3.Д.6. Доказательство утверждения 3.П.2

Используя формулу дифференцирования по параметру

$$z(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha,\tau)\,d\tau, \quad \dot{z}(\alpha) = \varphi(\alpha,\alpha) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \dot{\varphi}(\alpha,\tau)\,d\tau, \tag{3.Д.39}$$

и начальные условия, которым удовлетворяет функция $\eta(t,\tau)$, получим

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \eta \qquad (0)f(t) + \int_0^t \dot{\eta} \qquad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \qquad \int_0^t \dot{\eta} \qquad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\\
\ddot{y} &= \dot{\eta} \qquad (0)f(t) + \int_0^t \ddot{\eta} \qquad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \qquad \int_0^t \ddot{\eta} \qquad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\\
&\vdots\\
y^{(n-1)} &= \eta^{(n-2)}(0)f(t) + \int_0^t \eta^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \qquad \int_0^t \eta^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,\\
y^{(n)} &= \eta^{(n-1)}(0)f(t) + \int_0^t \eta^{(n)} \quad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau = f(t) + \int_0^t \eta^{(n)} \quad (t-\tau)f(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Умножая выражения $y^{(n)}$ на 1, $y^{(n-1)}$ на $\tilde{\psi}_{n-1}$, $y^{(n-2)}$ на $\tilde{\psi}_{n-2}$ и т.д., затем складывая их, получим с учётом (3.П.62)

$$\int_0^t \left[\sum_{i=0}^{n} \tilde{\psi}_i \eta^i(t-\tau)\right] f(\tau)\, d\tau + f(t) = f(t). \qquad (3.Д.40)$$

3.Д.7. Доказательство утверждения 3.П.3

Из (3.П.63) следует, что $t = 0$ является $(n-1)$-кратным корнем функции

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}. \qquad (3.Д.41)$$

Допустим, что при некотором $\mu_0 \neq 0$

$$\eta(\mu_0) = 0. \qquad (3.Д.42)$$

Нормируем функцию $\eta(t)$ так, что-бы она содержала независящее от t (постоянное) слагаемое. Пусть

$$\eta_1(t) = e^{-s_i t}\eta(t) = c_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i e^{(s_i - s_1)t}. \qquad (3.Д.43)$$

Функция $\eta_1(t)$ имеет $(n-1)$-кратный корень $t = 0$ и $t = \mu_0$. Производная $\dot{\eta}_1(t)$ будет иметь $(n-2)$-кратный корень $t = 0$ и кроме того, корень $t = \mu_1$ на интервале $(0, \mu_0)$. (Корень $t = \mu_1$ следует из теоремы Ролля, согласно которой между двумя корнями функции лежит корень её производной).

Заметим, что $\dot{\eta}_1(t)$ содержит уже $n-1$ членов вместо n членов функции $\eta(t)$.

Нормируем $\dot{\eta}_1(t)$ так, чтобы функция

$$\eta_2(t) = e^{-(s_2 - s_1)t}\dot{\eta}_1(t) \qquad (3.Д.44)$$

содержала постоянное слагаемое. Тогда функция $\dot{\eta}_2(t)$, имея $n-2$ слагаемых, будет иметь в точке $t = 0$ $(n-3)$-кратный корень и один корень $t = \mu_2$ в интервале $(0, \mu_1)$. Продолжая процесс, придём к функции $\eta_{n-2}(t) = k + le^{\beta t}$, имеющей простой корень $t = 0$ и некоторый корень $t = \mu_{n-2} \neq 0$. Функция

$$\dot{\eta}_{n-2}(t) = \beta l e^{\beta t}$$

должна иметь корень в интервале $(0, \mu_{n-1})$. Но это невозможно.

3.Д.8. Доказательство утверждения 3.П.4

Запишем уравнения для констант c_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ в функции (3.П.73), при которых эта функция удовлетворяет начальным условиям (3.П.63)

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i s_i^2 = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i s_i^{n-2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i s_i^{n-1} = 1. \qquad (3.Д.45)$$

Так как s_i – корни полинома $\tilde{\psi}(s)$, то

$$\frac{1}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0}s_i^{n-1} - \frac{\tilde{\psi}_{n-1}}{\tilde{\psi}_0}s_i^{n-2} - \dots - \frac{\tilde{\psi}_2}{\tilde{\psi}_0}s_i - \frac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_0} \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.Д.46}$$

Умножая эти равенства на c_i и суммируя по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0}\sum_{i=1}^{n}c_i s_i^{n-1} - \frac{\tilde{\psi}_{n-1}}{\tilde{\psi}_0}\sum_{i=1}^{n}c_i s_i^{n-2} - \dots - \frac{\tilde{\psi}_2}{\tilde{\psi}_0}\sum_{i=1}^{n}c_i s_i - \frac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_0}\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

Отсюда, принимая во внимание (3.Д.42), находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0}. \tag{3.Д.47}$$

3.Д.9. Доказательство утверждения 3.П.5

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{\psi}^{(1)}(s)y = 0, \tag{3.Д.48}$$

в котором

$$\tilde{\psi}^{(1)}(s) = \prod_{i=2}^{n}(s - s_i) = s^{n-1} + \tilde{\psi}_{n-2}^{(1)}s^{n-2} + \dots + \tilde{\psi}_1^{(1)}s + \tilde{\psi}_0^{(1)}. \tag{3.Д.49}$$

Другими словами

$$\tilde{\psi}(s) = (s - s_1)\tilde{\psi}^{(1)}(s) \tag{3.Д.50}$$

решение уравнения (3.Д.48) при начальных условиях

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-3)}(0) = 0, \quad y^{(n-2)}(0) = 1 \tag{3.Д.51}$$

обозначим, как

$$y(t) = \tilde{\eta}_1(t). \tag{3.Д.52}$$

Утверждение 3.Д.1. Решение $\eta(t)$ уравнения (3.П.62) при начальных условиях (3.П.63) и решение $\tilde{\eta}_1(t)$ уравнения (3.Д.48) при начальных условиях (3.Д.51) связаны уравнением

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{\eta}_1(t) + s_1\eta(t). \tag{3.Д.53}$$

■

Доказательство. Очевидно, что

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{n}c_i s_i e^{s_i t} = s_1\sum_{i=1}^{n}c_i e^{s_i t} + \sum_{i=1}^{n}c_i(s_i - s_1)e^{s_i t} = \mu(t) + s_1\eta(t), \tag{3.Д.54}$$

где

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n}c_i(s_i - s_1)e^{s_i t} = \sum_{i=2}^{n}c_i(s_i - s_1)e^{s_i t} = \sum_{i=1}^{n}c_i^{(1)}e^{s_i t}. \tag{3.Д.55}$$

Убедимся, что $\mu(t) = \tilde{\eta}_1(t)$.

Действительно, во-первых, $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению (3.Д.48), так как полином $\tilde{\psi}^{(1)}(s)$ имеет корни s_2, s_3, ..., s_n, во-вторых, $\mu(t)$ отвечает начальным условиям (3.Д.51): $\mu(0) = \dot{\eta}(0) - s_1\eta(0) = 0$, $\dot{\mu}(0) = \ddot{\eta}(0) - s_1\dot{\eta}(0) = 0$, ..., $\mu^{(n-3)}(0) = \eta^{(n-2)}(0) - s_1\eta^{(n-3)}(0) = 0$, $\mu^{(n-2)}(0) = \eta^{(n-1)}(0) - s_1\eta^{(n-2)}(0) = 1$, и таким образом, утверждение 3.Д.1 доказано.

Переходя непосредственно к доказательству (3.П.81) найдём

$$J_1 = \int\limits_0^\infty |\dot{\eta}(\tau)|\, d\tau = \int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau) + s_1\eta(\tau)|\, d\tau \le \int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau)|\, d\tau + |s_1| \int\limits_0^\infty |\eta(\tau)|\, d\tau. \qquad (3.Д.56)$$

Повторяя изложенное в 3.Д.7, 3.Д.8, находим

$$\int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau)|\, d\tau = \frac{1}{\tilde{\psi}_0^{(1)}} = \frac{1}{\prod\limits_{i=2}^{n} |s_i|} = \frac{|s_1|}{\tilde{\psi}_0}, \qquad (3.Д.57)$$

и тогда, с учётом (3.П.71), (3.П.73), получаем

$$J_1 = 2\frac{|s_1|}{\tilde{\psi}_0}. \qquad (3.Д.58)$$

Теперь найдём $J_2 = \int\limits_0^\infty |\ddot{\eta}(\tau)|\, d\tau$.

Представим

$$\ddot{\eta} = \dot{\tilde{\eta}}_1 + s_1\dot{\eta} = (\tilde{\eta}_2 + s_2\tilde{\eta}_1) + s_1(\tilde{\eta}_1 + s_1\eta) = \tilde{\eta}_2 + (s_1 + s_2)\tilde{\eta}_1 + s_1^2\eta, \qquad (3.Д.59)$$

где $\tilde{\eta}_2(t)$ – решение при начальных условиях $y(0) = \dot{y}(0) = y^{(n-4)}(0) = 0$, $y^{(n-3)}(0) = 1$ уравнения

$$\tilde{\psi}^{(2)}(s)y = 0, \qquad (3.Д.60)$$

в котором

$$\tilde{\psi}^{(2)}(s) = \prod_{i=3}^{n}(s - s_i) = s^{n-2} + \tilde{\psi}_{n-3}^{(2)}s^{n-3} + \cdots + \tilde{\psi}_1^{(2)}s + \tilde{\psi}_0^{(2)}. \qquad (3.Д.61)$$

Используя (3.Д.56) получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_0^\infty |\ddot{\eta}(\tau)|\, d\tau \le \int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_2(\tau)|\, d\tau + (|s_1| + |s_2|)\int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau)|\, d\tau + s_1^2\int\limits_0^\infty |\eta(\tau)|\, d\tau = \\ &= \frac{1}{\left|\tilde{\psi}_0^{(2)}\right|} + (|s_1| + |s_2|)\frac{1}{\left|\tilde{\psi}_0^{(1)}\right|} + s_1^2\frac{1}{\left|\tilde{\psi}_0\right|} = \frac{1}{\left|\tilde{\psi}_0\right|}\left[s_1^2 + |s_1||s_2|\right]. \end{aligned} \qquad (3.Д.62)$$

Определим $J_3 = \int\limits_0^\infty |\dddot{\eta}(\tau)|\, d\tau$.

Представим на основе (3.Д.56)

$$\dddot{\eta} = \dot{\tilde{\eta}}_2 + (s_1+s_2)\dot{\tilde{\eta}}_1 + s_1^2\dot{\eta} = (\tilde{\eta}_3 + s_3\tilde{\eta}_2) + (s_1+s_2)(\tilde{\eta}_2 + s_2\tilde{\eta}_1) + s_1^2(\tilde{\eta}_1 + s\eta) =$$
$$= \tilde{\eta}_3 + (s_1+s_2+s_3)\tilde{\eta}_2 + (s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2)\tilde{\eta}_1 + s_1^3\eta.$$

Тогда

$$J_3 = \int\limits_0^\infty |\dddot{\eta}(\tau)|\,d\tau \le \int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_3(\tau)|\,d\tau + (|s_1|+|s_2|+|s_3|)\int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_2(\tau)|\,d\tau +$$
$$+ (s_1^2 + |s_1||s_2| + s_2^2)\int\limits_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau)|\,d\tau + |s_1|^3\int\limits_0^\infty |\eta(\tau)|\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{|\tilde{\psi}_0|}\Big[|s_1||s_2||s_3| + (|s_1|+|s_2|+|s_3|)|s_1||s_2| + (s_1^2 + |s_1||s_2| + s_2^2)|s_1| + |s_1|^3\Big] =$$
$$= 2\frac{|s_1|}{|\tilde{\psi}_0|}\left(s_1^2 + |s_1||s_2| + |s_2||s_3| + s_2^2\right).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$J_4 = \int\limits_0^\infty \left|\eta^{(4)}(\tau)\right| d\tau \le 2\frac{|s_1|}{|\tilde{\psi}_0|}\times$$

$$\times\Big(|s_2|^3 + |s_2^2 s_3| + |s_2 s_3^2| + |s_2 s_3 s_4| + |s_1|^3 + |s_1^2 s_2| + |s_1 s_2^2| + |s_1 s_2 s_3|\Big).$$

Учитывая неравенства (3.П.80), приходим к соотношениям (3.П.81) и, таким образом, (3.П.85) доказано для $\alpha = 4$. Для $\alpha > 4$ доказательство аналогично.

Заключение к главе 3

Подведём итоги этой главы.

1. Найдена структура (3.1.29) модального (желаемого) полинома при которой можно установить явную связь между требуемой точностью и коэффициентами этого полинома для ступенчатых – (3.2.2), гармонических – (3.2.3) и неопределённых внешних возмущений.

2. На основе этих связей построена процедура 3.2.1 решения задачи регулирования для объектов второго вида, устойчивых по управлению.

3. Сформулирована рекомендация 3.2.1 и процедура 3.2.4, обеспечивающие параметрическую и структурную грубость системы.

4. Сформирована процедура 3.3.1 построения следящих систем, основанная на независимом (раздельном) построении операторов регулирования и оператора при задающем воздействии (принцип разделения).

5. (*) Исследованы известные компенсационные схемы построения следящих систем и показано, что для них нарушается принцип разделения. Это ограничивает их возможности при внешних возмущениях.

6. Построена процедура 3.4.3 синтеза регуляторов для, объектов первого вида (обратная связь по состоянию).

7. (П) Исследованы системы с наблюдателями, установлена их связь с компенсационными схемами. Показано, что эти системы могут обладать малыми запасами устойчивости. Причиной этого является аддитивная компенсация.

4. Оптимальное управление

Цель этой главы, как и предыдущей, состоит в построении управления, обеспечивающего необходимую точность и качество регулирования и слежения при внешних возмущениях. Однако, задачи этой главы, аналогичные задачам 3.4.2 и 3.2.1, содержат требование грубости синтезируемой системы.

Для решения этих задач необходимо исследовать

- связь структуры и параметров функционала оптимизации при аналитическом конструировании регуляторов с точностью и качеством оптимальной системы при внешних возмущениях,
- границы частотных показателей грубости аналитически сконструированных систем.

Эти исследования опираются на известное условие оптимальности в частотной форме. Оно вместе с указанной выше связью составляет основу метода построения регуляторов по частотным параметрам, изложенного в главе 7, где получен также критерий устойчивости систем по частотным параметрам. Этот критерий основан на решении обратной задачи АКОР, приведённой в конце настоящей главы.

4.1. Аналитическое конструирование регуляторов

4.1.1. Процедура АКОР

Задача 4.1.1. (задача АКОР).

Пусть имеем полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{4.1.1}$$

все переменные состояния которого доступны измерению.

Требуется найти вектор $\boldsymbol{c}$ регулятора

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.1.2}$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (4.1.1), (4.1.2), возбуждённой произвольными начальными отклонениями $\boldsymbol{x}^{(0)}$, минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt, \tag{4.1.3}$$

в котором Q – заданная положительно-определённая матрица. ■

Решение этой задачи об *аналитическом конструировании регуляторов* (задачи АКОР) заключается в следующем.

Процедура 4.1.1. (Процедура АКОР). Искомый вектор

$$\boldsymbol{c} = -P\boldsymbol{b}, \tag{4.1.4}$$

где положительно-определённая матрица P является решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A'P - P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'P + Q = 0. \tag{4.1.5}$$

■

Приведём два метода решения этого уравнения. Рассмотрим первый метод (метод Репина-Третьякова).

Теорема 4.1.1. Если пара (P, B) – полностью управляема, а матрица Q – положительно-определённая, то положительно-определённая матрица P, являющаяся рёшением уравнения (4.1.5), единственна и находится путём решения дифференциального уравнения (матричного уравнения Риккати)

$$\dot{\tilde{P}} = \tilde{P}A + A'P - \tilde{P}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\tilde{P} + Q, \quad \tilde{P}(t_0) = 0, \tag{4.1.6}$$

в результате которого искомая матрица

$$P = \lim_{t\to\infty} \tilde{P}(t). \tag{4.1.7}$$

■

Второй метод (метод квазилинеаризации, метод Ньютона-Рафсона) базируется на теореме.

Теорема 4.1.2. Если выполняются условия теоремы 4.1.1, то нахождение единственной матрицы $P > 0$ сводится к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)\prime}P^{(\alpha+1)} = -Q - \boldsymbol{c}^{(\alpha)}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.8}$$

в котором

$$\boldsymbol{c}^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}\boldsymbol{b}, \tag{4.1.9}$$

$$A^{(\alpha)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}, \tag{4.1.10}$$

и, если собственные числа – $\lambda_i\left(A^{(0)}\right)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – матрицы $A^{(0)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}$ таковы, что

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(A^{(0)}\right) < 0 \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.1.11}$$

то последовательность матриц $P^{(\alpha)}$ обладает свойством

$$\lim_{\alpha\to\infty} P^{(\alpha)} = P. \tag{4.1.12}$$

■

Доказательство этой теоремы приведено в 4.Д.1.

Примечание 4.1.1. Требование положительно-определённой матрицы Q в функционале оптимизации (4.1.3) можно ослабить. Пусть Q – неотрицательная матрица (форма $\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} \geq 0$), тогда её можно представить

$$Q = H'H, \tag{4.1.13}$$

где H – прямоугольная матрица размеров $æ \times n$, $æ$ – ранг матрицы Q (если Q – положительно-определённая матрица, то $æ = n$).

Функционал (4.1.3) примет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'H'H\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt = \int\limits_0^\infty \left[(H\boldsymbol{x})'(H\boldsymbol{x}) + u^2\right]\, dt. \tag{4.1.14}$$

Если не накладывать на матрицу H никаких ограничений, то может случиться так, что функционал (4.1.14) принимает наименьшее значение (равное нулю), когда

$$u = 0, \quad H\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \tag{4.1.15}$$

Для того чтобы избежать такого тривиального ($u = 0$) решения наложим на матрицу H условие $H\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{cccc} H' & A'H' & \cdots & (A^{n-1})'H' \end{array}\right] = n. \tag{4.1.16}$$

■

Примечание 4.1.2. Можно ослабить также требование полной управляемости объекта в задаче АКОР. Если объект (4.1.1) – стабилизируем, то процедура 4.1.1 по прежнему разрешает задачу АКОР. ■

Пример 4.1.1. Пусть дан объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0x_1 - d_1x_2 + bu, \tag{4.1.17}$$

параметры которого $d_0 = 200$, $d_1 = 30$, $b = 1$. (4.1.18)

Требуется найти вектор $\boldsymbol{c} = \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}\right]$ регулятора

$$u = c_1x_1 + c_2x_2, \tag{4.1.19}$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + u^2\right)\, dt \tag{4.1.20}$$

с коэффициентами $q_{11} = 8 \cdot 10^6$, $q_{22} = 3 \cdot 10^4$. (4.1.21)

Уравнения Риккати, разрешающие эту задачу АКОР, имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} p_{12}b \\ p_{22}b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{12}b & p_{22}b \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.1.22}$$

а искомые коэффициенты регулятора (4.1.19)

$$c_1 = -p_{12}b, \quad c_2 = -p_{22}b. \tag{4.1.23}$$

Решим уравнение (4.1.20) с помощью метода Ньютона-Рафсона. Положим, для простоты, что объект (4.1.17) – асимптотически устойчив. Тогда, полагая $\boldsymbol{c}^{(0)} = \mathbf{0}$, запишем на первом шаге итерационной процедуры уравнение $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{12}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{12}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.1.24}$$

Его можно записать как систему

$$2p_{12}^{(1)} d_0 = q_{11}, \quad 2\left(p_{12}^{(1)} - p_{22}^{(1)} d_1\right) = -q_{22}, \quad p_{11}^{(1)} - p_{12}^{(1)} d_1 - p_{22}^{(1)} d_0 = 0. \tag{4.1.25}$$

Отсюда

$$p_{12}^{(1)} = \frac{q_{11}}{2d_0}, \quad p_{22}^{(1)} = \frac{q_{11}}{2d_0 d_1} + \frac{q_{22}}{2d_1}. \tag{4.1.26}$$

Подставляя эти выражения в (4.1.23), получим при численных значениях параметров (4.1.18), (4.1.21)

$$c_1^{(1)} = -2 \cdot 10^4, \quad c_2^{(1)} = -1.166 \cdot 10^3. \tag{4.1.27}$$

Рассмотрим вторую итерацию $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{12}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0^{(1)} & -d_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0^{(1)} \\ 1 & -d_1^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{12}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} q_{11} + c_1^{(1)2} & c_1^{(1)} c_2^{(1)} \\ c_1^{(1)} c_2^{(1)} & q_{22} + c_2^{(1)2} \end{pmatrix}.$$

Заменяя в (4.1.26) q_{ii} на $q_{ii} + c_i^{(1)2}$ $\left(i = \overline{1,2}\right)$, d_0 на $d_0^{(1)}$, d_1 на $d_1^{(1)}$, получим

$$p_{12}^{(2)} = \frac{q_{11} + c_1^{(1)2}}{2d_0^{(1)}}, \quad p_{22}^{(2)} = \frac{q_{11} + c_1^{(1)2}}{2d_0^{(1)} d_1^{(1)}} + \frac{q_{22} + c_2^{(1)2}}{2d_1^{(1)}}, \tag{4.1.28}$$

где $d_0^{(1)} = d_0 - c_1^{(1)}$, $d_1^{(1)} = d_1 - c_2^{(1)}$.

Подставляя (4.1.27) в (4.1.23), получим

$$c_1^{(2)} = -10^4, \quad c_2^{(2)} = -5.58 \cdot 10^2. \tag{4.1.29}$$

Теперь уравнения Ляпунова примут вид

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} \\ p_{12}^{(3)} & p_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0^{(2)} & -d_1^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0^{(2)} \\ 1 & -d_1^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} \\ p_{12}^{(3)} & p_{22}^{(3)} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} q_{11} + c_1^{(2)2} & c_1^{(2)} c_2^{(2)} \\ c_1^{(2)} c_2^{(2)} & q_{22} + c_2^{(2)2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$p_{12}^{(3)} = \frac{q_{11} + c_1^{(2)2}}{2d_0^{(2)}}, \quad p_{22}^{(3)} = \frac{q_{11} + c_1^{(2)2}}{2d_0^{(2)} d_1^{(2)}} + \frac{q_{22} + c_2^{(2)2}}{2d_1^{(2)}}, \tag{4.1.30}$$

где $d_0^{(2)} = d_0 - c_1^{(2)}$, $d_1^{(2)} = d_1 - c_2^{(2)}$.

Подставим (4.1.30) в (4.1.23) и вычислим

$$c_1^{(3)} = -0.5 \cdot 10^4, \quad c_2^{(3)} = -2.8 \cdot 10^2. \tag{4.1.31}$$

Искомые параметры регулятора (4.1.19)

$$c_1 = -2.63 \cdot 10^3, \quad c_2 = -1.6 \cdot 10^2. \tag{4.1.32}$$

Это нетрудно проверить, решая уравнение (4.1.22), которое запишем как систему трёх нелинейных уравнений

$$-2p_{12}d_0 - (p_{12}b)^2 + q_{11} = 0, \quad 2p_{12} - 2p_{22}d_1 - (p_{22}b)^2 + q_{22} = 0. \tag{4.1.33}$$

Отсюда

$$p_{12} = -d_0 + \sqrt{d_0^2 + q_{11}}, \quad p_{22} = -d_1 + \sqrt{d_1^2 + q_{22} + 2p_{12}}.$$

■

4.1.2. Критерий обобщённой работы

Пусть объект (4.1.1) асимптотически устойчив и полностью управляем.

Построим функцию Ляпунова для него при $u = 0$ как решение уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = -\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j, \tag{4.1.34}$$

где q_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ – элементы матрицы Q, которая является положительно-определённой либо не отрицательной, но удовлетворяющей условию (4.1.16) наблюдаемости пары (H, A).

Определим уравнение как

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i. \tag{4.1.35}$$

Построенное таким образом управление обладает тем свойством, что на движениях системы (4.1.1), (4.1.35) достигает минимума функционал

$$J = \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}' Q \boldsymbol{x} + u^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i \right)^2 \right] dt, \tag{4.1.36}$$

который называется *функционалом обобщнной работы* и поэтому решение уравнения Ляпунова (4.1.34) и нахождение по функции Ляпунова уравнения (4.1.35) называется *аналитическим конструированием регуляторов по критерию обобщнной работы* либо синтезом регуляторов на основе функций Ляпунова.

Решение уравнения Ляпунова (4.1.34) будем искать в виде

$$v = \boldsymbol{x}' P^{(1)} \boldsymbol{x}, \tag{4.1.37}$$

тогда вектор $\boldsymbol{c}$ управления

$$u = \boldsymbol{c}' \boldsymbol{x}, \tag{4.1.38}$$

оптимального в смысле функционала обобщённой работы находится на основе процедуры, которая следует из (4.1.34), (4.1.35).

Процедура 4.1.2. (Процедура АКОР по критерию обобщённой работы)

Вектор $\boldsymbol{c}$ управления (4.1.37) находится из равенства

$$\boldsymbol{c} = -P^{(1)} \boldsymbol{b}, \tag{4.1.39}$$

где $P^{(1)}$ – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)} A + A' P^{(1)} + Q = 0. \tag{4.1.40}$$

■

Из теоремы 4.Д.1 следует существование и единственность матрицы $P^{(1)} > 0$, удовлетворяющей уравнению (4.1.40). Это уравнение в отличие от алгебраического уравнения Риккати является линейным и поэтому его численное решение значительно проще.

Процедура 4.1.2 является первым шагом $(\alpha = 0)$ итерационной процедуры (4.1.8) решения уравнения Риккати.

Пример 4.1.2.

Пусть для объекта (4.1.17) требуется найти вектор $\boldsymbol{c}$ регулятора (4.1.19) такой, чтобы минимизировался функционал обобщённой работы

$$J = \int_0^\infty \left[q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + u^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} b \right)^2 \right] dt, \tag{4.1.41}$$

где $v = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$ – решение уравнения (4.1.24).

Процедура решения этой задачи заключается в решении уравнений (4.1.25) и вычисления компонент вектора $\boldsymbol{c}$ по формуле (4.1.23). Таким образом, искомое уравнение

$$u = -2 \cdot 10^2 x_1 - 1.166 \cdot 10^3 x_2.$$

■

4.1.3. Объекты второго вида

Пусть имеем объект управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = u \tag{4.1.42}$$

и требуется найти регулятор

$$u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{4.1.43}$$

такой, чтобы на движениях системы (4.1.42), (4.1.43), возбуждённых произвольными начальными отклонениями

$$y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n0}, \tag{4.1.44}$$

минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}y^2 + q_{22}\dot{y}^2 + \cdots + q_{\delta\delta}y^{(\delta-1)2} + u^2\right)\, dt, \tag{4.1.45}$$

с $\delta < n$, $q_{ii} > 0$ $\left(i = \overline{1,\delta}\right)$.

Для решения этой задачи АКОР введём переменные

$$\check{x}_1 = y, \quad \check{x}_2 = \dot{y}, \quad \ldots, \quad \check{x}_n = y^{(n-1)},$$

и тогда уравнения объекта и функционал примут вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{\boldsymbol{b}}u, \tag{4.1.46}$$

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\check{\boldsymbol{x}}'\check{Q}\check{\boldsymbol{x}} + u^2\right)\, dt, \tag{4.1.47}$$

где $\check{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \check{x}_1 & \check{x}_2 & \cdots & \check{x}_n \end{bmatrix}$, $Q = \operatorname{diag}\left[\begin{array}{cccc|cccc} q_{11} & q_{22} & \cdots & q_{\delta\delta} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$, матрица $\check{A}$ и вектор $\check{\boldsymbol{b}}$ имеют вид (3.4.5).

Используя процедуру 4.1.1 найдём вектор $\check{\boldsymbol{c}}$, компоненты которого

$$\check{c}_i = r_{i-1} \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.1.48}$$

4.1.4. Реализуемость

Для получения реализуемого регулятора для объекта (4.1.42) используем функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} y^{(i-1)2} + u^2 + \varepsilon_1^2 \dot{u}^2 + \cdots + \varepsilon_\psi^2 u^{(\psi)2} \right) dt, \quad \psi \geq n-1, \tag{4.1.49}$$

где $q_{ii} > 0 \ \left(i = \overline{1,\delta}\right)$.

Покажем, что регулятор, разрешающий задачу АКОР с таким функционалом, имеет вид

$$g_\psi u^{(\psi)} + \cdots + g_1 \dot{u} + g_0 u = \tilde{r}_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{r}_1 \dot{y} + \tilde{r}_0 y. \tag{4.1.50}$$

Введём дополнительно к (4.1.45) переменные

$$\check{x}_{n+1} = u, \quad \check{x}_{n+2} = \dot{u}, \quad \ldots, \quad \check{x}_{n+\psi} = u^{(\psi-1)}, \quad \tilde{\check{u}} = \varepsilon_\psi u^{(\psi)}. \tag{4.1.51}$$

Эти переменные связаны уравнением

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A} \check{\boldsymbol{x}}, \tag{4.1.52}$$

где

$$\check{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \check{x}_{n+1} \\ \check{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{x}_{n+\psi} \end{bmatrix}, \quad \check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & E_{\psi-1} \\ \hline 0 & \mathbf{0} \end{array} \right). \tag{4.1.53}$$

Вводя вектор

$$\tilde{\check{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \check{\boldsymbol{x}}' & \check{\boldsymbol{x}}' \end{bmatrix}', \tag{4.1.54}$$

запишем функционал (4.1.49) как

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\tilde{\check{\boldsymbol{x}}}' \tilde{\check{Q}} \tilde{\check{\boldsymbol{x}}} + \tilde{\check{u}}^2 \right) dt, \tag{4.1.55}$$

где $\tilde{\check{Q}} = \operatorname{diag} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} q_{11} & q_{22} & \cdots & q_{\delta\delta} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_\psi^2 \end{array} \right]$. (4.1.56)

Объединяя уравнения (4.1.46), (4.1.52) получим ««объект»»

$$\dot{\tilde{\check{\boldsymbol{x}}}} = \tilde{\check{A}} \tilde{\check{\boldsymbol{x}}} + \tilde{\check{\boldsymbol{b}}} \tilde{\check{u}}, \tag{4.1.57}$$

где

$$\tilde{\check{A}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \check{A} & \check{\boldsymbol{b}} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & E_{\psi-1} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \tilde{\check{\boldsymbol{b}}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline (\varepsilon_\psi)^{-1} \end{array} \right]. \tag{4.1.58}$$

Полагая в процедуре 4.1.1 матрицу $A = \tilde{A}$, вектор $\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}}$, найдём вектор $\tilde{\tilde{\boldsymbol{c}}}$ управления

$$\tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{c}}}'\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \check{\boldsymbol{c}}'\check{\boldsymbol{x}} + \check{\tilde{\boldsymbol{c}}}'\check{\tilde{\boldsymbol{x}}}. \tag{4.1.59}$$

Используя обозначения (4.1.45), (4.1.51) приходим к уравнению (4.1.50), которое при $\psi \geq n-1$ – реализуемо.

Пример 4.1.3.

Пусть дан объект управления

$$\dddot{y} + d_2\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = u \tag{4.1.60}$$

и требуется найти регулятор

$$g_2\ddot{u} + g_1\dot{u} + g_0 u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{4.1.61}$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}y^2 + u^2 + \varepsilon_1^2\dot{u}^2 + \varepsilon_2^2\ddot{u}^2\right)\, dt. \tag{4.1.62}$$

Для решения этой задачи АКОР введём обозначения

$$\check{x}_1 = y, \quad \check{x}_2 = \dot{y}, \quad \check{x}_3 = \ddot{y}, \quad \check{x}_4 = u, \quad \check{x}_5 = \dot{u}, \quad \check{\tilde{u}} = \varepsilon_2\ddot{u}. \tag{4.1.63}$$

и сформируем ««объект»»

$$\dot{\check{x}}_1 = \check{x}_2, \quad \dot{\check{x}}_2 = \check{x}_3, \quad \dot{\check{x}}_3 = -d_0\check{x}_1 - d_1\check{x}_2 - d_2\check{x}_3 + x_4 \tag{4.1.64}$$

$$\dot{\check{x}}_4 = \check{x}_5, \quad \dot{\check{x}}_5 = \frac{1}{\varepsilon_2}\check{\tilde{u}}. \tag{4.1.65}$$

Функционал (4.1.62) с учётом введённых обозначений примет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left(q_{11}\check{x}_1^2 + \check{x}_4^2 + \varepsilon_1^2\check{x}_5^2 + \check{\tilde{u}}^2\right)\, dt. \tag{4.1.66}$$

Решая задачу об оптимальном в смысле этого функционала управлении для ««объекта»» (4.1.64), (4.1.65) находим

$$\sum_{i=1}^{5} \tilde{\tilde{c}}_i\check{x}_i = \tilde{\tilde{c}}_1 y + \tilde{\tilde{c}}_2\dot{y} + \tilde{\tilde{c}}_3\ddot{y} + \tilde{\tilde{c}}_4 u + \tilde{\tilde{c}}_5\dot{u}. \tag{4.1.67}$$

Заменяя в левой части этого выражения $\check{\tilde{u}}$ на $\sqrt{\varepsilon_2}$ приходим к искомому регулятору (4.1.61).

■

Примечание 4.1.3. Для общего случая объекта второго вида, когда он описывается уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u. \quad \gamma < n, \tag{4.1.68}$$

следует привести это уравнение к форме $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$, и заменить в матрице $\tilde{\tilde{A}}$ матрицу $\check{A}$ на A, а вектор $\check{\boldsymbol{b}}$ на $\boldsymbol{b}$. Кроме того, возможен и другой путь решения задачи АКОР для объекта (4.1.68). Действительно, используя обозначения (4.1.45), (4.1.51) запишем уравнение объекта в виде

$$\dot{\check{x}}_1 = \check{x}_2, \quad \dot{\check{x}}_2 = \check{x}_3, \quad \ldots, \quad \dot{\check{x}}_n = -\sum_{i=1}^{n} d_{i-1}\check{x}_i + \sum_{i=1}^{\gamma-1} b_i\check{x}_{n+i} + b_\gamma\check{x}_{n+\gamma} \tag{4.1.69}$$

(если $\gamma = \psi$, то в последнем слагаемом следует заменить $\check{x}_{n+\gamma}$ на $\dfrac{1}{\varepsilon_\psi}\tilde{\check{u}}$).

Используя процедуру 4.1.1 для этого объекта, дополненного уравнением (4.1.52) и функционала (4.1.55), получим регулятор (4.1.30). ■

4.1.5. Эталонная модель*

Пусть имеется эталонная модель, асимптотическое устойчивое движение которой описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}}_м = A_м\boldsymbol{x}_м, \quad z_м = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}_м, \quad \boldsymbol{x}_м(t_0) = \boldsymbol{x}_м^{(0)}, \tag{4.1.70}$$

где $\boldsymbol{x}_м(t)$ – n-мерный вектор измеряемых переменных состояния, $A_м$ – заданная матрица, $z_м(t)$ – выход модели, $\boldsymbol{l}$ – заданный вектор.

Объект управления описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{4.1.71}$$

которые отличаются от (4.1.1) заданием регулируемой переменной $z(t)$.

Задача 4.1.2. (Задача АКОР с эталонной моделью). Найти вектора $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{c}'_м$ регулятора

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'_м\boldsymbol{x}_м, \tag{4.1.72}$$

такие, чтобы на движениях системы (4.1.70)-(4.1.72), возбуждённых произвольными начальными отклонениями $\boldsymbol{x}_м^{(0)}$, $\boldsymbol{x}^{(0)}$, минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty \left[q(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_м)^2 + u^2\right] dt, \quad q > 0. \tag{4.1.73}$$

■

Этот функционал можно записать, как

$$J = \int_0^\infty \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_м)'Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_м) + u^2\right] dt, \tag{4.1.74}$$

где $Q = \boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'q$.

Такая матрица Q удовлетворяет условию (4.1.16), если (4.1.70) и (4.1.71) полностью наблюдаемы по сигналам $\boldsymbol{z}_м(t)$ и $\boldsymbol{z}(t)$ соответственно.

Для решения задачи 4.1.2 введём вектор

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' & \boldsymbol{x}'_{м} \end{bmatrix}', \tag{4.1.75}$$

и запишем уравнения (4.1.70), (4.1.71) в виде

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}u, \tag{4.1.76}$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{м} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{4.1.77}$$

При этом функционал (4.1.74) представляется как

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\bar{\boldsymbol{x}}'\bar{Q}\bar{\boldsymbol{x}} + u^2\right)\, dt, \tag{4.1.78}$$

где

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}. \tag{4.1.79}$$

Используя процедуру 4.1.1 получим искомое управление

$$u = \bar{\boldsymbol{c}}'\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{x}_{м}. \tag{4.1.80}$$

Заметим, что ««объект»» (4.1.76) не вполне управляем, (так как управление не воздействует на модель (4.1.70)), но стабилизируем в силу асимптотической устойчивости эталонной модели. В связи с этим уравнение Риккати распадается на несколько алгебраических уравнений: линейных и нелинейных. Приведём часть этих уравнений. Запишем вначале уравнение (4.1.5)

$$P\bar{A} + \bar{A}'P - P\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{b}}'A + Q = 0, \tag{4.1.81}$$

которое в развёрнутой форме имеет вид

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{м} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'_{м} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} P_{11}\bar{\boldsymbol{b}} \\ P_{21}\bar{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (P_{11}\bar{\boldsymbol{b}}) & (P_{21}\bar{\boldsymbol{b}})' \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.1.82}$$

Искомый вектор

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}_{м} \end{bmatrix} = -\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11}\bar{\boldsymbol{b}} \\ P_{21}\bar{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix}. \tag{4.1.83}$$

Распишем подробнее (4.1.82)

$$P_{11}A + A'P_{11} - P_{11}\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{b}}'P_{11} = -Q, \tag{4.1.84}$$

$$P_{21}A + A'_{м}P_{21} - P_{21}\bar{\boldsymbol{b}}(P_{11}\bar{\boldsymbol{b}})' = Q. \tag{4.1.85}$$

Из (4.1.82) следует ещё два матричных уравнения, которые опущены, поскольку их решения не влияют на формирование искомого вектора $\bar{\boldsymbol{c}}$. Они приведены в п. 10.2...

Решая нелинейное уравнение (4.1.84) и подставляя P_{11} в (4.1.85), получим линейное уравнение для определения матрицы P_{21}.

4.2. Частотные свойства оптимальных систем

4.2.1. Условие оптимальности в частотной форме

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{4.2.1}$$

с управлением

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.2.2}$$

оптимальным в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt, \tag{4.2.3}$$

где Q – положительно-определённая либо неотрицательная матрица, удовлетворяющая условию (4.1.16).

Уравнения (4.1.4), (4.1.5), с помощью которых было получено оптимальное управление (4.2.2), называются *алгебраическими условиями оптимальности*. Выведём частотную форму этих условий. Для этого прибавим и вычтем из левой части (4.1.5) матрицу sP и умножим полученное равенство слева на $\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}$, а справа на $(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}$. Тогда

$$\begin{gathered}\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}[-PA + Ps - A'P - sP + P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'P - Q](Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \\ = \boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}P\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'P(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'P(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} - \\ -\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}Q(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = 0.\end{gathered} \tag{4.2.4}$$

Представим $Q = H'H$ и обозначим

$$h(s) = H(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{4.2.5}$$

$$w_{раз}(s) = -\boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{4.2.6}$$

где $w_{раз}(s)$ – передаточная функция системы (4.2.1), (4.2.2) разомкнутой на выходе объекта.

Соотношение (4.2.4) принимает с учётом этих обозначений вид

$$w_{раз}(-s) + w_{раз}(s) + w_{раз}(-s)w_{раз}(s) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-s)h_i(s), \tag{4.2.7}$$

где $h_i(-s)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – компоненты вектора $\boldsymbol{h}(s)$.

Прибавляя к обеим частям этого тождества единицу, получим связь передаточной функции разомкнутой системы с коэффициентами функционала оптимизации

$$[1 + w_{раз}(-s)][1 + w_{раз}(s)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_i(-s)h_i(s). \tag{4.2.8}$$

Положим $s = j\omega$ и приходим к следующему заключению.

Утверждение 4.2.1. *Условием оптимальности* системы (4.2.1), (4.2.2) в системе функционала (4.2.3) *в частотной форме* является тождество

$$[1 + w_{раз}(-j\omega)][1 + w_{раз}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{4.2.9}$$

■

Пусть регулятор 4.2.2 получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы. Приведём условие оптимальности в частотной форме для этого случая.

Прибавим и вычтем из левой части (4.1.40) матрицу sP и умножим результат слева на $\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}$, а справа на $(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}$, тогда аналогично (4.2.4)-(4.2.6) получим тождество

$$w_{раз}(-j\omega) + w_{раз}(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{4.2.10}$$

которое называется *условием оптимальности по критерию обобщнной работы в частотной форме.*

4.2.2. Запасы устойчивости

Запишем тождество (4.2.9) в виде следующих эквивалентных соотношений

$$w_{раз}(-j\omega) + w_{раз}(j\omega) + w_{раз}(-j\omega)w_{раз}(j\omega) = \psi(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{4.2.11}$$

$$2a(\omega)\cos\varphi(\omega) + a^2(\omega) = \psi(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{4.2.12}$$

где $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики разомкнутой на входе объекта оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2)

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} |h_i(j\omega)|^2. \tag{4.2.13}$$

Очевидно, что

$$\psi(\omega) \ge 0, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{4.2.14}$$

Из тождества (4.2.11), (4.2.12) нетрудно получить, учитывая неравенство (4.2.14), границы запасов устойчивости. Причём эти границы не зависят от численных значений параметров матрицы Q в функционале (4.2.3).

Теорема 4.2.1. Оптимальная, в смысле функционала (4.2.3), система (4.2.1), (4.2.2) обладает запасами устойчивости:

$$\text{по фазе:} \qquad \varphi_з \geq 60^\circ, \tag{4.2.15}$$

$$\text{по модулю:} \qquad L \geq 2. \tag{4.2.16}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 4.Д.2.

Утверждение 4.2.2. Радиус запасов устойчивости оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2)

$$r \geq 1. \tag{4.2.17}$$

■

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из (4.2.9). Действительно, левую часть этого тождества можно записать как

$$[1 + w_{раз}(-j\omega)][1 + w_{раз}(j\omega)] = [1 + \operatorname{Re} w_{раз}(j\omega)]^2 + \operatorname{Jm}^2 w_{раз}(j\omega). \tag{4.2.18}$$

Учитывая, что $\psi(\omega) \geq 0$, заключаем

$$[1 + \operatorname{Re} w_{раз}(j\omega)]^2 + \operatorname{Jm}^2 w_{раз}(j\omega) \geq 1. \tag{4.2.19}$$

Отсюда, в соответствии с определением 2.2.1, следует (4.2.17). Если использовать таблицу 2.2.1, то из (4.2.19) следуют границы (4.2.15), (4.2.16) запасов устойчивости.

Утверждение 4.2.3. Система (4.2.1), (4.2.2), регулятор (4.2.2) которой получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы, обладает запасами устойчивости

$$\varphi_з \geq 90^\circ, \quad L \to \infty. \tag{4.2.20}$$

■

Доказательство утверждения следует непосредственно из тождества (4.2.10). Действительно, его левую часть можно представить, как

$$w_{раз}(-j\omega) + w_{раз}(j\omega) = 2 \operatorname{Re} w_{раз}(j\omega). \tag{4.2.21}$$

Учитывая (4.2.14), заключаем, что

$$\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega) \geq 0. \tag{4.2.22}$$

Это неравенство означает, что годограф АФЧХ системы (4.2.1), (4.2.2) не выходит за пределы первого и четвертого квадрантов плоскости $\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega)$, $\operatorname{Jm} w_{раз}(j\omega)$.

По определению запаса устойчивости по модулю отсюда следует, что $L \to \infty$.

На множестве частот $a(\omega_{ср}) = 1$ можно записать неравенство (4.2.22) как

$$a(\omega_{ср}) \cos \varphi(\omega_{ср}) = \cos \varphi(\omega_{ср}) \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi_з \geq 90^\circ$.

4.2.3. Объекты второго вида

Рассмотрим систему (4.1.42), (4.1.43) оптимальную в системе функционала (4.1.45). Её передаточная функция

$$w_{раз}(s) = -\check{\boldsymbol{c}}'(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}} \tag{4.2.23}$$

удовлетворяет соотношению (4.2.8), в котором

$$\boldsymbol{h}(s) = H(Es - \check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}, \tag{4.2.24}$$

где

$$H = \operatorname{diag}\left[\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{q_{11}} & \sqrt{q_{22}} & \cdots & \sqrt{q_{\delta\delta}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]. \tag{4.2.25}$$

Нетрудно проверить, используя (3.4.5), что

$$\check{\beta}(s) = \left(Es - \check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{n-1} \end{array}\right]\frac{1}{d(s)}, \tag{4.2.26}$$

где

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0 = \det\left(Es - \check{A}\right), \tag{4.2.27}$$

и, следовательно

$$w_{раз}(s) = -\frac{\check{c}(s)}{d(s)}, \quad \boldsymbol{h}(s) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{q_{11}} & \sqrt{q_{22}}s & \cdots & \sqrt{q_{\delta\delta}}s^{\delta-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right], \tag{4.2.28}$$

где

$$\check{c}(s) = \sum_{i=1}^{n} \check{c}_i s^{i-1}. \tag{4.2.29}$$

Подставим эти выражения в (4.2.8). Тогда

$$\left[1 - \frac{\check{c}(-s)}{d(-s)}\right]\cdot\left[1 - \frac{\check{c}(s)}{d(s)}\right] = 1 + \frac{1}{d(-s)d(s)}\sum_{i=1}^{\delta} q_{ii}s^{2(i-1)}(-1)^{i-1}. \tag{4.2.30}$$

Умножая на $d(-s)d(s)$ получим соотношение

$$[d(-s) - \check{c}(-s)]\,[d(s) - \check{c}(s)] = d(-s)d(s) + \sum_{i=1}^{\delta} q_{ii}s^{2(i-1)}(-1)^{i-1}, \tag{4.2.31}$$

связывающее характеристический полином $d(s) - \check{c}(s)$ оптимальной системы с коэффициентами функционала оптимизации.

Рассмотрим объект (4.1.42) с реализуемым регулятором (4.1.50).

Передаточная функция этой системы

$$w_{раз}(s) = -\frac{\tilde{r}(s)}{d(s)g(s)}. \tag{4.2.32}$$

Утверждение 4.2.4. Передаточная функция (4.2.32) системы (4.1.42), (4.1.50), оптимальной в смысле функционала (4.1.49), удовлетворяет тождеству

$$[1+w_{раз}(-s)][1+w_{раз}(s)] = \left[\frac{1+\sum\limits_{i=1}^{\psi}\varepsilon_i^2 s^{2i}(-1)^i}{g(-s)g(s)} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\delta} q_{ii}s^{2(i-1)}(-1)^{(i-1)}}{d(-s)d(s)g(-s)g(s)}\right]. \qquad (4.2.33)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.3.

Очевидно, что запасы устойчивости оптимальной системы (4.1.42), (4.1.43) удовлетворяют неравенствам (4.2.15), (4.2.16). Для системы (4.1.42), (4.1.50) трудно доказать, что она обладает такими запасами устойчивости. Эта трудность состоит в проверке неравенства

$$\left[\frac{1+\sum\limits_{i=1}^{\psi}\varepsilon_i\omega^{2i}}{g(-j\omega)g(j\omega)} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\delta} q_{ii}\omega^{2(i-1)}}{d(-j\omega)d(j\omega)g(-j\omega)g(j\omega)}\right] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \qquad (4.2.34)$$

в котором коэффициенты полинома $g(s)$ неявно зависят от ε_i $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ и q_{ii} $\left(i=\overline{1,\delta}\right)$.

4.2.4. Эталонная модель*

Найдём связь векторов $\boldsymbol{c}_q$ и $\boldsymbol{c}_м$ управления (4.1.80) с коэффициентом q функционала оптимизации (4.1.73). Эти вектора

$$\boldsymbol{c} = -P_{11}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}_м = -P_{21}\boldsymbol{b}, \qquad (4.2.35)$$

где P_{11} и P_{21} – решения матричных уравнений (4.1.84), (4.1.85). Исключим матрицы P_{11} и P_{21} из этих уравнений и равенств (4.2.35). Уравнение (4.1.84) с точностью до обозначений совпадает с (4.1.5) и поэтому справедливо тождество (4.2.8), которое запишем в более подробной форме

$$[1+\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-s)][1+\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(s)] = 1 + q\boldsymbol{\beta}'(-s)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s), \qquad (4.2.36)$$

где $\boldsymbol{\beta}(s) = (Es-A)^{-1}\boldsymbol{b}$.

Уравнение (4.1.85) представим как

$$P_{21}A^з + A'_м P_{21} = Q, \qquad (4.2.37)$$

где

$$A^з = A - \boldsymbol{b}(P_{11}\boldsymbol{b})' = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}'. \qquad (4.2.38)$$

Запишем (4.2.37) в виде

$$P_{21}(Es - A^{з}) + (-Es - P_{м})'P_{21} + Q = 0.$$

Умножим это тождество слева на $\boldsymbol{k}'(-Es - P_{м})^{-1\prime}$, а справа на $(Es - A^{з})^{-1}\boldsymbol{b}$. Тогда получим

$$\boldsymbol{k}'(-Es - P_{м})^{-1\prime}[(Es - P_{м})'P_{21} + P_{21}(Es - A^{з}) + Q](Es - A^{з})^{-1}\boldsymbol{b} = 0. \qquad (4.2.39)$$

Здесь $\boldsymbol{k}$ – произвольный n-мерный вектор, удовлетворяющий лишь условию полной управляемости пары $(\boldsymbol{k}, P_{м})$.

Из (4.2.39) следует, что

$$\boldsymbol{k}'P_{21}(Es - A^{з})^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{k}'(-Es - P_{м})^{-1}P_{21}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{k}'(-Es - P_{м})^{-1\prime}Q(Es - A^{з})^{-1}\boldsymbol{b} = 0.$$

Введя обозначения

$$\boldsymbol{\beta}^{з}(s) = (Es - A^{з})^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{\beta}_{м}(s) = (Es - P_{м})^{-1}\boldsymbol{k}, \qquad (4.2.40)$$

получим окончательно

$$-\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(s) - \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}^{м}(-s) + q\boldsymbol{\beta}^{м}(-s)\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l}\boldsymbol{\beta}^{з}(s) = 0, \qquad (4.2.41)$$

где

$$\boldsymbol{\delta} = -P'_{21}\boldsymbol{k}. \qquad (4.2.42)$$

Таким образом, тождества (4.2.36) и (4.2.41) связывают вектора $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}_{м}$ с коэффициентом q функционала оптимизации.

4.3. Точность и качество

4.3.1. Установившиеся ошибки (ступенчатые воздействия)

Пусть оптимальная, в смысле функционала (4.2.3), система (4.2.1), (4.2.2) подвержена ступенчатым внешним возмущениям в местах приложения управления.

Тогда она описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(u + f), \quad u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}. \qquad (4.3.1)$$

Регулируемая переменная $z(t)$ связана с внешним возмущением соотношением (3.4.49)

$$z = \frac{\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s)}{1 + w_{раз}(s)} \cdot \frac{f^*}{s}, \qquad (4.3.2)$$

из которого следует установившаяся ошибка

$$z_{ст} = \lim_{s\to\infty} sz(s) = \frac{\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)}{1 + w_{раз}(0)} \cdot f^*. \qquad (4.3.3)$$

Далее будем полагать, что функционал (4.2.3) имеет вид

$$J = \int_0^\infty (qz^2 + u^2)\, dt, \quad q > 0. \tag{4.3.4}$$

В этом случае связь передаточной функции разомкнутой оптимальной системы с числом q записывается в соответствии с (4.2.8) как

$$[1 + w_{раз}(-s)][1 + w_{раз}(s)] = 1 + q\boldsymbol{\beta}'(-s)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s). \tag{4.3.5}$$

Подставляя это выражение при $s = 0$ в (4.3.3), находим выражение установившейся ошибки через коэффициент q функционала оптимизации (4.3.4)

$$z_{cm}^2 = \frac{[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2}{1 + q[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2} \cdot f^{*2}. \tag{4.3.6}$$

Для объектов второго вида

$$\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{1}{d(s)} \tag{4.3.7}$$

(это следует из (4.2.26) и равенства $z = y$). Тогда установившаяся ошибка (4.3.6)

$$z_{cm}^2 = \frac{f^{*2}}{d^2(0) + q}. \tag{4.3.8}$$

Пусть регулятор системы (4.2.1), (4.2.2) получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы. Тогда передаточная функция этой системы удовлетворяет тождеству (4.2.10)

$$w_{раз}(-s) + w_{раз}(s) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-s)h_i(s). \tag{4.3.9}$$

Примем в уравнении Ляпунова (4.1.39) процедуры 4.1.2

$$Q = q\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}' \tag{4.3.10}$$

тождество (4.3.7) запишется так

$$w_{раз}(-s) + w_{раз}(s) = q'\boldsymbol{\beta}'(-s)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s). \tag{4.3.11}$$

Установившаяся ошибка в этой системе имеет (после подстановки (4.3.9) при $s = 0$ в (4.3.3)) вид

$$z_{cm} = \frac{\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)}{1 + 0.5q[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2} \cdot f^*. \tag{4.3.12}$$

4.3.2. Переходные процессы

Запишем выражение (4.3.2) для регулируемой переменной как

$$z = \frac{b(s)}{d^u(s)} f(s). \tag{4.3.13}$$

где

$$b(s) = \boldsymbol{n}'(E\widetilde{s} - A)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}'\boldsymbol{\beta}(s)\frac{1}{d(s)}, \tag{4.3.14}$$

$$d^u(s) = d(s) - \boldsymbol{c}'(E\widetilde{s} - A)\boldsymbol{b}. \tag{4.3.15}$$

При этих обозначениях тождество (4.3.5) принимает вид

$$d^u(-s)d^u(s) = d(-s)d(s) + qb(-s)b(s). \tag{4.3.16}$$

Рассмотрим полином в правой части этого тождества.

Представим

$$b(s) = b_\gamma \prod_{i=1}^{\gamma}(s - \nu_i), \tag{4.3.17}$$

где ν_i $\left(i = \overline{1,\gamma}\right)$ – корни полинома $b(s)$.

Пусть

$$\operatorname{Re}\nu_i \le 0 \quad i = \overline{1,\gamma}. \tag{4.3.18}$$

<u>Утверждение 4.3.1.</u> При $q \to \infty$ из n корней характеристического полинома $d^u(s)$ замкнутой оптимальной системы γ корней приближаются к ν_i $\left(i = \overline{1,\gamma}\right)$, оставшиеся $n-\gamma$ корней этого полинома приближаются к прямым линиям, которые пересекаются в начале координат и образуют с отрицательной осью углы, равные

$$\left.\begin{array}{lll} \pm l\dfrac{\pi}{n-\gamma} & l = \overline{0, \frac{n-\gamma-1}{2}} & \text{если } n-\gamma \text{ – нечётное число} \\ \pm\left(l + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{n-\gamma} & l = \overline{0, \frac{n-\gamma}{2} - 1} & \text{если } n-\gamma \text{ – чётное число} \end{array}\right\}. \tag{4.3.19}$$

Эти корни удалены от начала координат на расстояние

$$\omega_0 = \left(b^2\gamma q\right)^{\frac{1}{2(n-\gamma)}}. \tag{4.3.20}$$

■

Указанное в утверждении распределение (4.3.19) называется *размещением (распределением) Баттерворта* порядка $n-\gamma$ с радиусом ω_0. На рис. 4.3.1. приведено размещение (4.3.19) для нескольких $n-\gamma$.

Полиномы Баттерворта, имеющие корни, показаны на рис. 4.3.1.

$$\begin{aligned} æ_1(s) &= s + \omega_0, \\ æ_2(s) &= s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2, \\ æ_3(s) &= s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3, \\ æ_4(s) &= s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

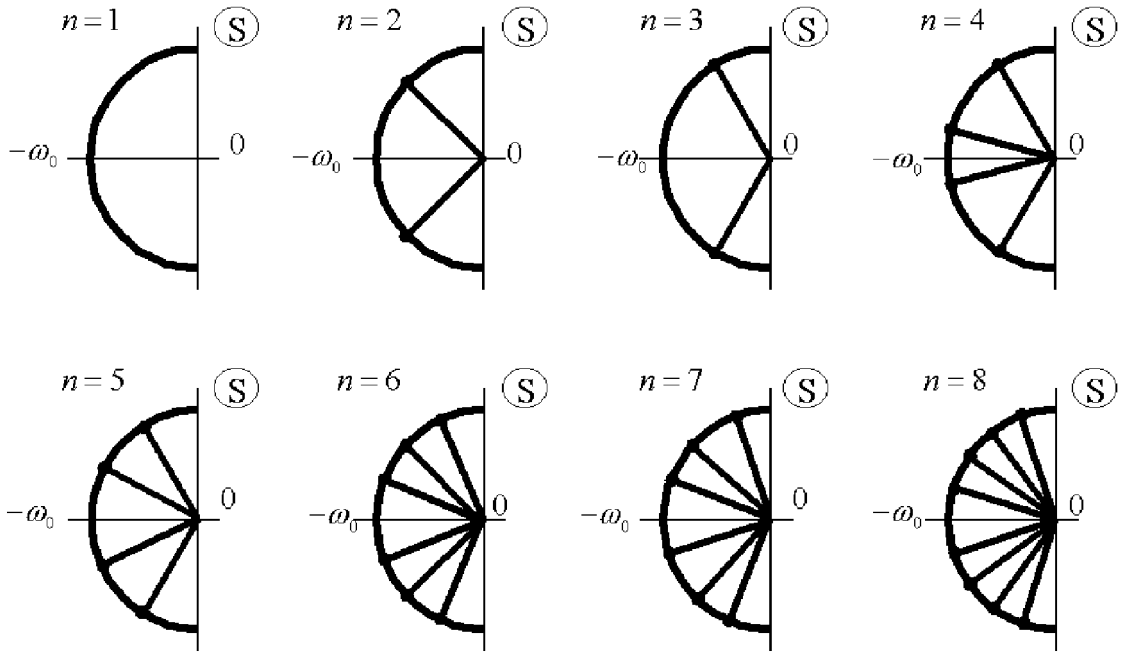

Рис. 4.3.1.

Реакции систем, имеющих характеристический полином Баттерворта, на ступенчатое воздействие приведены на рис. 4.3.2.

Итак, при $q \to \infty$

$$d^u(s) = \frac{1}{b_\gamma} b(s) æ_{n-\gamma}(s), \tag{4.3.22}$$

где $æ_{n-\gamma}(s)$ – полином Баттерворта степени $n - \gamma$.

Подставляя это выражение в (4.3.13) получим

$$z = \frac{f(s) b_\gamma}{æ_{n-\gamma}(s)}. \tag{4.3.23}$$

Очевидно, что установившаяся ошибка

$$z_{cm} = \frac{f^*}{\sqrt{q}}. \tag{4.3.24}$$

Проанализируем графики, приведённые на рис. 4.3.2.

Нетрудно заметить, что при изменении $n - \gamma$ от 2 до 8 время регулирования $t_{рег} = 6/\omega_0 \div 20/\omega_0$, а перерегулирования $\sigma = 5\% \div 20\%$.

Используя эти значения, составим эмпирическую зависимость

$$t_{рег} \approx \frac{3(n-\gamma)}{\omega_0}, \tag{4.3.25}$$

$$\sigma \approx 3(n-\gamma)\%. \tag{4.3.26}$$

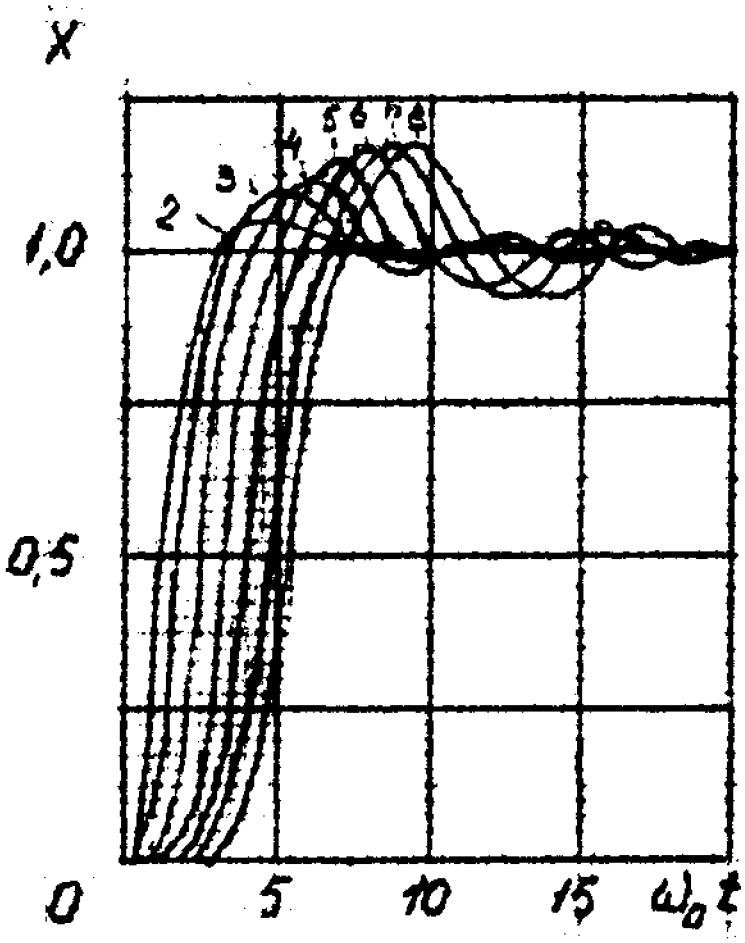

Рис. 4.3.2.

4.3.3. Время регулирования

Столь явная зависимость времени регулирования от коэффициента q не всегда удобна. В связи с этим рассмотрим функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q(z^2 + \tau^2 \dot{z}^2) + u^2\right] \, dt, \tag{4.3.27}$$

который отличается от (4.3.4) слагаемым, содержащим производную регулируемой переменной.

Пусть при этом объект (4.2.1) обладает дополнительным свойством

$$\boldsymbol{l}'\boldsymbol{b} = 0. \tag{4.3.27$'$}$$

Покажем, что при таком функционале время регулирования оптимальной системы определяется (при достаточно больших q) числом τ ($t_{рег} \approx 3\tau$).

Найдём условие оптимальности в смысле функционала (4.3.27) системы (4.2.1), (4.2.2) в частотной форме.

Вначале приведём этот функционал к стандартной форме (4.3.1). С учётом (4.3.22) найдём

$$\dot{z} = \boldsymbol{l}'\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{l}'(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u) = \boldsymbol{l}'A\boldsymbol{x}.$$

Тогда (4.3.27) примет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}' + \tau^2 A'\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'A)\boldsymbol{x}\right]\, dt. \tag{4.3.28}$$

Тождество (4.2.8) записывается для такого функционала как

$$[1 + w_{раз}(-s)][1 + w_{раз}(s)] = 1 + q\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1}(\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}' + \tau^2 A'\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'A)(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{4.3.29}$$

Используя почти очевидное соотношение

$$A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E,$$

получим окончательно

$$[1 + w_{раз}(-s)][1 + w_{раз}(s)] = 1 + q(1 - \tau^2 s^2)\boldsymbol{\beta}(-s)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s).$$

Перепишем это тождество в форме

$$[d(-s) - c(-s)][d(s) - c(s)] = d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2)b(-s)b(s),$$

где $c(s) = \boldsymbol{c}'(E\widetilde{s - A})\boldsymbol{b}$.

Правая часть при достаточно больших q может быть представлена в виде

$$d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2)b(-s)b(s) \approx (1 + \tau s)b(s)(1 - \tau s)b(-s)æ_{n-\gamma-1}(-s)æ_{n-\gamma-1}(s).$$

Отсюда находим характеристический полином системы

$$d^u(s) \approx (1 + \tau s)b(s)æ_{n-\gamma-1}(s). \tag{4.3.30}$$

Подставляя это выражение в (4.3.13), получим

$$z \approx \frac{f(s)}{(1 + \tau s)æ_{n-\gamma-1}(s)}. \tag{4.3.31}$$

Отсюда следует, что время переходного процесса определяется полиномом Баттерворта (теперь уже степени $n - \gamma - 1$) и величиной τ.

Рассмотрим теперь системы с объектами второго вида.

Пусть функционал (4.1.45) имеет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q(y^2 + \tau^2 y^2) + u^2\right]\, dt. \tag{4.3.32}$$

Тогда тождество (4.2.31) запишется как

$$[d(-s) - \check{c}(-s)][d(s) - \check{c}(s)] = d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2). \tag{4.3.33}$$

Аналогично (4.3.31) имеем

$$d^u(s) \approx (1 + \tau s)æ_{n-1}(s), \tag{4.3.34}$$

и, следовательно

$$z \approx \frac{f(s)}{(1 + \tau s)æ_{n-1}(s)}. \tag{4.3.35}$$

4.3.4. Гармонические воздействия

Пусть внешнее возмущение

$$f(t) = f_{гарм} \sin \omega^f t. \tag{4.3.36}$$

Амплитуда вынужденных колебаний системы (4.2.1), (4.2.2), оптимальной в смысле функционала (4.3.3), определяется на основе (4.3.23) как

$$z_{гарм} \approx \frac{f_{гарм} b_\gamma}{|æ_{n-\gamma}(j\omega^f)|}. \tag{4.3.37}$$

Для систем оптимальных в смысле функционала (4.3.27), а также для систем с объектами второго вида нетрудно записать, на основе (4.3.31), (4.3.35), аналогичные выражения для амплитуды регулируемой переменной.

Рассмотрим систему оптимальную по критерию обобщённой работы. Вначале получим из (4.3.2) выражение

$$z_{гарм} = \frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega^f)|}{|1 + w_{раз}(j\omega^f)|} \cdot f_{гарм}. \tag{4.3.38}$$

Представим (4.3.11) как

$$[1 + w_{раз}(-s)][1 + w_{раз}(s)] = 1 + w_{раз}(-s)w_{раз}(s) + q\boldsymbol{\beta}'(-s)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s). \tag{4.3.39}$$

Тогда

$$|1 + w_{раз}(j\omega)|^2 = 1 + |w_{раз}(j\omega)|^2 + q|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)|^2 \geq 1 + q|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_f)|^2, \tag{4.3.40}$$

и следовательно

$$z_{гарм} \leq \frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega^f)|}{1 + q|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_f)|^2} \cdot f_{гарм}. \tag{4.3.41}$$

4.3.5. Показатель колебательности

Управляющая переменная $u(t)$ в системе (4.3.1) связана с внешним возмущением соотношением (3.4.48)

$$u = \frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)} f.$$

При гармоническом воздействии (4.3.36) амплитуда установившихся колебаний по управлению

$$u_{гарм} = \frac{|w_{раз}(j\omega^f)|}{|1 + w_{раз}(j\omega^f)|} f_{гарм} = M(\omega^f) f_{гарм}, \tag{4.3.42}$$

где $M(\omega^f)$ – значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы.

Аналогичным соотношением связана измеряемая переменная системы (4.1.42), (4.1.43) с объектом второго вида с задающим воздействием, приложенным ко входу регулятора. Действительно, эта система такого воздействия описывается уравнениями

$$d(s)y = u, \quad u = r(s)(y - v). \tag{4.3.43}$$

Следовательно,

$$y = -\frac{r(s)}{d(s) - r(s)} v = -\frac{w_{раз}(s)}{1 + w_{раз}(s)} v.$$

При $v = v_{гарм} \sin \omega t$

$$y_{гарм} = \frac{|w_{раз}(j\omega^v)|}{|1 + w_{раз}(j\omega^v)|} v_{гарм} = M(\omega^v) v_{гарм}. \tag{4.3.44}$$

Максимальные (и не зависящие от ω^f либо ω^v) значения $u_{гарм}$ и $y_{гарм}$ определяется показателем колебательности

$$M = \max_{0 \le \omega \le \infty} M(\omega).$$

Утверждение 4.3.2. Система (4.2.1), (4.2.2) оптимальная в смысле функционала (4.2.3) имеет показатель колебательности

$$M \le 2. \tag{4.3.45}$$

Если эта система оптимальна по критерию обобщённой работы, то

$$M \le 1. \tag{4.3.46}$$

■

Докажем первое из этих неравенств.

В соответствии с определением

$$M = \max_{0 \le \omega \le \infty} \frac{|w_{раз}(j\omega)|}{|1 + w_{раз}(j\omega)|} = \max_{0 \le \omega \le \infty} \frac{a(\omega)}{\sqrt{[1 + w_{раз}(-j\omega)][1 + w_{раз}(j\omega)]}}. \tag{4.3.47}$$

Решая уравнение (4.2.12), находим

$$a(\omega) = -\cos\varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2\varphi(\omega) + \psi(\omega)}. \tag{4.3.48}$$

Подставим это выражение, вместе с условием (4.2.9) оптимальности в частотной форме, в (4.3.47)

$$\begin{aligned} M &= \max_{0\le\omega\le\infty} \frac{-\cos\varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2\varphi(\omega) + \psi(\omega)}}{\sqrt{1+\psi(\omega)}} \le \\ &\le \max_{\substack{-1\le\cos\varphi(\omega)\le 1\\ 0\le\psi(\omega)\le\infty}} \frac{-\cos\varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2\varphi(\omega) + \psi(\omega)}}{\sqrt{1+\psi(\omega)}} = \\ &= \max_{0\le\psi(\omega)\le\infty} \frac{1+\sqrt{1+\psi(\omega)}}{\sqrt{1+\psi(\omega)}} = \max_{0\le\psi(\omega)\le\infty}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\psi(\omega)}}\right] = 2. \end{aligned} \tag{4.3.49}$$

Для доказательства неравенства (4.3.46) рассмотрим выражение (4.3.47) с учётом условия (4.2.10) оптимальности по критерию обобщённой работы

$$\frac{a(\omega)}{\sqrt{1 + w_{раз}(-j\omega) + w_{раз}(j\omega) + a^2(\omega)}} = \frac{a(\omega)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) + a^2(\omega)}}. \tag{4.3.50}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \ge 0$, то $M \le 1$.

4.3.6. Частота среза (полоса пропускания)

Введём в рассмотрение некоторую частоту $\bar\omega_{ср}$, определяемую равенством

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\left(-j\bar\omega_{ср}\right) h_i\left(j\bar\omega_{ср}\right) = 1. \tag{4.3.51}$$

Будем называть $\bar\omega_{ср}$ – *прогнозируемой частотой среза.* Сравним эту частоту с частотой среза $\omega_{ср}$ системы (4.2.1), (4.2.2). По определению

$$a(\omega_{ср}) = |w_{раз}(j\omega_{ср})| = 1. \tag{4.3.52}$$

Утверждение 4.3.3. Частота среза системы (4.2.1), (4.2.2) оптимальной в смысле функционала (4.2.3) отличается от прогнозируемой частоты $\bar\omega_{ср}$ не более чем в 2.5 раза (на 0.4 декады). ■

Действительно, из (4.3.48) при $\omega = \bar\omega_{ср}$ следует с учётом (4.2.13).

Из неравенств $-1 \le \cos\varphi(\bar\omega_{ср}) \le 1$ следует, что $0.4 \le a(\bar\omega_{ср}) \le 2.4$ или

$$\mathrm{mod}\, 20\lg a(\bar\omega_{ср}) \le 8\,\text{дб}.$$

Предполагая, что наклон ЛАЧХ разомкнутой системы в окрестности не менее 20 дб/дек, имеем

$$\operatorname{mod}\,[\lg\bar{\omega}_{cp} - \lg\omega_{cp}] \le 0.4\,\text{дек.} \qquad \left(\operatorname{mod}\,\lg\frac{\bar{\omega}_{cp}}{\omega_{cp}} \le 0.4\,\text{дек.}\right).$$

Таким образом, при дополнительном предположении о наклоне ЛАЧХ утверждение доказано.

Если функционал оптимизации имеет вид (4.3.4), то уравнение (4.3.51) для определения частоты $\bar{\omega}_{cp}$ записывается как

$$q\boldsymbol{\beta}'(-j\bar{\omega}_{cp})\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\bar{\omega}_{cp}) = 1, \tag{4.3.53}$$

а для систем с объектами (4.1.42) второго вида это соотношение принимает простую форму

$$\frac{q}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1. \tag{4.3.54}$$

4.4. Синтез регуляторов

4.4.1. Объекты первого вида

Приведём решение классической задачи 2.3.1 синтеза регуляторов. Уточним её формулировку.

Задача 4.4.1. Для объекта управления

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(u+f), \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} \tag{4.4.1}$$

найти регулятор

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.4.2}$$

такой, чтобы система (4.4.1), (4.4.2):

а) была асимптотически устойчивой (при $f = 0$);

б) удовлетворяла требованию к точности

$$|z_{cm}| \le z^* \tag{4.4.3}$$

(z^* – заданное число);

в) имела показатели качества переходных процессов по регулируемой переменной

$$t_{рег} \le \bar{t}_{рег}, \quad \sigma \le \bar{\sigma}, \tag{4.4.4}$$

где $t_{рег}$ и $\bar{\sigma}$ – заданные числа;

г) была грубой (обладала запасами устойчивости $\varphi_з \ge 30^\circ$, $L \ge 2$).

■

Примечание 4.4.1. В задаче 3.3.1 имеется задающее воздействие, а внешнее возмущение отсутствует. Поэтому внешнее возмущение в уравнении (4.4.1) интерпретируем как задающее воздействие.

Действительно, систему (4.4.1), (4.4.2) можно записать в эквивалентной форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \quad u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + kv, \tag{4.4.5}$$

где $kv = f$, и поэтому $t_{рег}$ и σ соответствуют определениям 2.3.1, 2.3.2. ■

Решение сформулированной задачи сводится к решению задачи АКОР с функционалом

$$J = \int\limits_0^\infty \left(qz^2 + u^2\right)\, dt. \tag{4.4.6}$$

Действительно, пусть q – произвольное положительное число. Решая задачу АКОР получим регулятор (4.4.2), который в соответствии с теоремой 4.2.1 обеспечивает выполнение требований а) и г) задачи 4.4.1.

Определим значение q, исходя из условий б) и в) этой задачи.

Из (4.3.6) и (4.3.3) следует, что при

$$q \geq \frac{f^{*2}}{z^{*2}}, \tag{4.4.7}$$

регулятор (4.4.2) обеспечивает требование к точности (4.4.3). При этом предполагается, что справедливо соотношение

$$q[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2 \gg 1, \tag{4.4.8}$$

которое для астатических объектов выполняется автоматически.

Для выполнения неравенств (4.4.4) используем эмпирическое соотношение (4.3.25), которое, с учётом (4.3.20), принимает вид

$$t_{рег} = \frac{3(n-\gamma)}{\left(b_\gamma^2 q\right)^{\frac{1}{2(n-\gamma)}}}. \tag{4.4.9}$$

Отсюда

$$q \geq \frac{1}{b_\gamma^2}\left[\frac{3(n-\gamma)}{\bar{t}_{рег}}\right]^{2(n-\gamma)}. \tag{4.4.10}$$

Перерегулирование однозначно определяется степенью полинома Баттерворта. Если $\bar{\sigma} = 10\%$, а $n-\gamma = 8$ то необходимо вводить в функционал (4.4.6) производные регулируемой переменной и тогда степень полинома Баттерворта понижается.

Действительно, пусть функционал оптимизации имеет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q\left(z + \tau_1\dot{z} + \tau_2\ddot{z} + \cdots + \tau_\delta z^{(\delta)}\right)^2 + u^2\right]\, dt. \tag{4.4.11}$$

где положительные коэффициенты τ_i $\left(i = \overline{1, \delta}\right)$ таковы, что полином

$$\tau(s) = 1 + \tau_1 s + \tau_2 s^2 + \cdots + \tau_\delta s^\delta \tag{4.4.12}$$

имеет отрицательные вещественные части.

Пусть также выполняются равенства

$$\boldsymbol{n}'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{n}'A\boldsymbol{b} = \cdots = \boldsymbol{n}'A^{\delta-1}\boldsymbol{b} = 0. \tag{4.4.13}$$

При этом условии получим, повторяя изложенное в п. 4.3.3, характеристический полином оптимальной, в смысле функционала (4.4.11), системы

$$d^u(s) = \tau(s)b(s)æ_{n-\gamma-\delta}(s). \tag{4.4.14}$$

Параметры полинома $\tau(s)$ выберем так, чтобы его корни были по модулю существенно больше числа $\dfrac{1}{\bar{t}_{рег}}$.

Примем

$$\tau(s) = (1 + \tau s)^\delta, \tag{4.4.15}$$

где

$$\tau < \bar{t}_{рег}. \tag{4.4.16}$$

Тогда время переходного процесса и перерегулирования в оптимальной системе будут определяться полиномом $æ_{n-\gamma-\delta}(s)$.

Резюмируем изложенное в форме следующей процедуры.

Процедура 4.4.1. (Процедура аналитического синтеза регуляторов) состоит из операций

а) Найти передаточную функцию объекта (4.4.1)

$$w_{zf}(s) = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{b_z(s)}{d(s)}, \tag{4.4.17}$$

связывающую регулируемую переменную z и внешнее возмущение (или управляющее воздействие) и убедиться, что все корни полинома $b_z(s)$ имеют отрицательные вещественные части.

б) По заданной величине перерегулирования $\bar{\sigma}$ определить максимальную степень (μ) полинома Баттерворта и проверить неравенство

$$n - \gamma \le \mu. \tag{4.4.18}$$

Если оно нарушается, то найти число δ из (4.1.13) и убедиться в выполнении неравенства

$$n - \gamma - \delta \le \mu. \tag{4.4.19}$$

в) Сформировать в соответствии (4.4.15), (4.4.16) полином $\tau(s)$ и определить коэффициенты τ_i $\left(i = \overline{1,\delta}\right)$ функционала (4.4.11).

г) Найти коэффициент q этого функционала

$$q \geq \max\left\{\frac{f^{*2}}{z^{*2}},\ \frac{1}{[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2},\ \frac{1}{b_\gamma^2}\left[\frac{3(n-\gamma-\delta)}{\bar{t}_{рег}}\right]^{2(n-\gamma-\delta)}\right\}. \tag{4.4.20}$$

д) Решить задачу АКОР для объекта (4.4.1) (при $f = 0$) с функционалом (4.4.11), который после исключения производных с учётом (4.4.13), принимает вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt, \tag{4.4.21}$$

где

$$Q = q\left(\boldsymbol{n} + \tau_1 A'\boldsymbol{n} + \cdots + \tau_\delta A^{(\delta-1)\prime}\boldsymbol{n}\right)\left(\boldsymbol{n}' + \tau_1\boldsymbol{n}'A + \cdots + \tau_\delta\boldsymbol{n}'A^{(\delta-1)}\right). \tag{4.4.22}$$

■

Пример 4.4.1. Продольное движение транспортного самолёта в крейсерском режиме описывается уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0158 & 0.02633 & -9.810 & 0 \\ -0.1571 & -1.030 & 0 & 120.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0005274 & -0.01652 & 0 & -1.466 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -9.496 \\ 0 \\ -5.565 \end{bmatrix} [u(t) + f(t)],$$

где $x_1(t)$ – приращение скорости по оси x (ось x – продольная ось самолёта), $x_2(t)$ – скорость по оси z (ось z – перпендикулярна оси x), $x_3(t)$ – тангаж, $x_4(t)$ – угловая скорость по тангажу, $u(t)$ – отклонение руля высоты.

Регулируемой переменной является угол тангажа

$$z = x_3. \tag{4.4.23}$$

Порыв ветра моделируется ступенчатой функцией

$$|f(t)| \leq 1. \tag{4.4.24}$$

Требуется определить коэффициенты регулятора

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4. \tag{4.4.25}$$

такие, чтобы ошибка по учёту тангажа

$$|z_{cm}| \leq 0.1, \tag{4.4.26}$$

а время регулирования и перерегулирования не превышали значений

$$\bar{t}_{рег} = 1, \quad \bar{\tau} = 10\%. \tag{4.4.27}$$

Операция а) В соответствии с первой операцией процедуры 4.1.1 найдём передаточную функцию

$$w_{zf}(s) = -\frac{5.565s^2 + 5.663s + 0.1112}{s^4 + 2.51s^3 + 3.544s^2 + 0.06487s + 0.03079} = \frac{b_z(s)}{d(s)} \tag{4.4.28}$$

Полином

$$b_z(s) = -5.565\left(s^2 + \frac{5.663}{5.565}s + \frac{0.1112}{5.565}\right) \tag{4.4.29}$$

имеет корни

$$\nu_1 = -0.02004, \quad \nu_2 = -0.9976. \tag{4.4.30}$$

Операция б) Из графиков рис. 4.3.2. находим максимальное значение $(\mu = 4)$ степени полинома Баттерворта, при которой $\bar{\sigma} = 10\%$ и убеждаемся, что неравенство (4.4.18) выполняется, так как $n = 4$, а $\gamma = 2$.

Операция в) На основе (4.4.18) полагаем $\sigma = 0$ и тогда $\tau(s) = 1$.

Операция г) Найдём коэффициент q функционала (4.4.6). Очевидно, что

$$\frac{f^{*2}}{z^{*2}} = 100, \quad \frac{1}{[\boldsymbol{n}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2} = \left(\frac{0.03079}{0.1112}\right)^2, \quad \frac{1}{b_\gamma^2}\left[\frac{3(n-\gamma)}{\bar{t}_{рег}}\right]^{2(n-\gamma)} = \left(\frac{6}{1}\right)^4 \frac{1}{(5.565)^2} = 41.$$

Принимаем

$$q = 100.$$

Операция д) Решая задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty (100x_3^2 + u^2)\, dt \tag{4.4.31}$$

на движениях объекта (4.4.22) при $f = 0$, получим искомое управление

$$u = 0.0001174x_1 + 0.002813x_2 - 10x_3 - 1.619x_4. \tag{4.4.32}$$

Проанализируем синтезированную систему. Её характеристический полином

$$d^u(s) = s^4 + 11.49s^3 + 66.43s^2 + 56.84s + 1.112 \tag{4.4.33}$$

имеет корни

$$s_1 = -0.02004, \quad s_2 = -0.9953, \quad s_{3,4} = 5.239 \pm j5.323. \tag{4.4.34}$$

Нетрудно заметить, что первые два корня близки к нулям передаточной функции (4.4.28).

Моделирование системы показало, что регулятор (4.4.33) обеспечивает выполнение требований к её точности и качеству.

■

4.4.2. Объекты второго вида

Пусть дан объект управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0y = u + f, \tag{4.4.35}$$

и требуется найти регулятор

$$u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0y, \tag{4.4.36}$$

такой, чтобы удовлетворялись требования к точности

$$|y_{cm}| \le y^*, \tag{4.4.37}$$

качеству

$$t_{рег} \le \bar{t}_{рег}, \quad \sigma \le \bar{\sigma},$$

и грубости

$$\varphi_з \ge 30^\circ, \quad L \ge 2.$$

Используя обозначения п. 4.1.3 сводим эту задачу к задаче 4.4.1 и затем используем процедуру 4.1.1. При этом, как нетрудно проверить, равенства (4.4.13) выполняются для всех δ от 1 до n. Этим снимается ограничение (4.4.19) процедуры.

Для построения реализуемого регулятора изменим последнюю операцию процедуры 4.1.1 используя функционал

$$J = \int_0^\infty \left[q\left(y + \tau_1\dot{y} + \tau_2\ddot{y} + \cdots + \tau_\delta y^{(\delta)}\right)^2 + u^2 + \varepsilon_1^2\dot{u}^2 + \cdots + \varepsilon_\psi^2 u^{(\psi)2} \right] dt, \tag{4.4.38}$$

который отличается от (4.4.11) производными управлений. Искомый регулятор имеет вид

$$g_\psi u^{(\psi)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0u, = \tilde{r}_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{r}_1\dot{y} + \tilde{r}_0y. \tag{4.4.39}$$

При произвольном выборе коэффициентов ε_i $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ в функционале (4.4.38) может случиться так, что система (4.4.35), (4.4.39) не будет удовлетворять требованиям к точности и качеству. Естественно ожидать, что при достаточно малых числах ε_i $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ свойства системы будут приближаться к требуемым. В связи с этим введём полином чётных степеней

$$\varepsilon(s^2)=1-\varepsilon_1^2s^2+\cdots+(-1)^\psi\varepsilon_\psi^2s^{2\psi}, \tag{4.4.40}$$

который представим как

$$\varepsilon(s^2)=\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s),$$

где

$$\varepsilon^0(s)=1+\varepsilon_1^0s+\cdots+\varepsilon_{\psi-1}^0s^{\psi-1}+\varepsilon_\psi^0s^\psi. \tag{4.4.41}$$

Очевидно, что

$$(-1)^i\varepsilon_i^2=\sum_{\mu=0}^{i-1}2\varepsilon_\mu^0\varepsilon_{2i-\mu}^0(-1)^\mu+\varepsilon_i^{02}(-1)^i \quad i=\overline{1,\psi}. \tag{4.4.42}$$

<u>Утверждение 4.4.1.</u> Всегда существуют положительные числа ε_i^0 $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ удовлетворяющие условию

$$1\gg\varepsilon_1^0\gg\varepsilon_2^0\gg\cdots\gg\varepsilon_{\psi-1}^0\gg\varepsilon_\psi^0 \tag{4.4.43}$$

такие, что

$$g_i\approx\varepsilon_i^0 \quad i=\overline{0,\psi}, \quad \tilde{r}_i\approx r_i \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{4.4.44}$$

■

Обоснование утверждения приведено в 4.Д.4.

Приведём рекомендации по выбору чисел ε_i $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ при решении практических задач.

<u>Рекомендация 4.4.1.</u> Корни полинома $\varepsilon^0(s)$ следует выбирать так, чтобы они были в $5\div10$ раз больше частоты среза системы (4.4.35), (4.4.36).

Примем

$$\varepsilon^0(s)=\left(\frac{\varepsilon^0s}{\sqrt{\psi}}+1\right)^\psi, \tag{4.4.45}$$

где, в соответствии с рекомендацией 4.4.1,

$$\varepsilon^0=\frac{\sqrt{\psi}}{(5\div10)\bar{\omega}_{cp}}. \tag{4.4.46}$$

Здесь вместо неизвестной (до синтеза) частоты ω_{cp} используется прогнозируемая частота.

Из (4.4.45) и (4.4.41) получим

$$\varepsilon_i=\frac{c_\psi^i}{\psi^i}\left(\varepsilon^0\right)^{2i} \quad i=\overline{1,\psi}, \tag{4.4.47}$$

где c_ψ^i – число сочетаний из ψ элементов по i.

Вместо частоты ω_{cp}, которая неизвестна до решения задачи синтеза, используем в (4.4.46) прогнозируемую частоту $\bar{\omega}_{cp}$ из (4.3.54).

4.4.3. $b(s) \neq 1$, $m(s) \neq 1$. Уравнение качества

Рассмотрим общий случай объекта (4.4.35), когда он описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \tag{4.4.48}$$

где $b(s)$ и $m(s)$ – гурвицевы полиномы (объект устойчив по управлению н возмущению).

Введём новое управление

$$\tilde{u} = b(s)u, \tag{4.4.49}$$

тогда уравнение (4.4.48) примет вид

$$d(s)y = \tilde{u} + m(s)f.$$

Для выполнения требований к времени регулирования и перерегулированию примем вместо (4.4.38) функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q\left(\rho_0 y + \rho_1 \dot{y} + \cdots + \rho_\delta y^{(\delta)}\right)^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon_1^2 \dot{\tilde{u}}^2 + \cdots + \varepsilon_\psi^2 \tilde{u}^{(\psi)2}\right] dt, \tag{4.4.50}$$

где

$$\rho(s) = m(s)\left(1 + \tau_1 s + \cdots + \tau_{\delta-\alpha} s^\delta\right), \tag{4.4.51}$$

$$\psi = n - \gamma. \tag{4.4.52}$$

Пусть пока $\varepsilon_i = 0$ $\left(i = \overline{1, \psi}\right)$. Характеристический полином оптимальной, в смысле функционала (4.4.50), системы

$$d(s)y = \tilde{u}, \quad \tilde{u} = r(s)y \tag{4.4.53}$$

можно записать аналогично (4.4.14) как

$$d^u(s) = m(s)\tau(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s), \tag{4.4.54}$$

где

$$\tau(s) = 1 + \tau_1 s + \cdots + \tau_\delta s^\delta, \tag{4.4.55}$$

и тогда реакция системы (4.4.53) на внешнее возмущение $m(s)f$ имеет, при достаточно большом q, вид

$$y = \frac{m(s)}{m(s)\tau(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s)} f = \frac{1}{\tau(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s)} f. \tag{4.4.56}$$

При $\varepsilon_i \neq 0$ $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$, но удовлетворяющих условию (4.4.43) оптимальная система (4.4.53) записывается как

$$d(s)y = \tilde{u}, \quad \bar{g}(s)\bar{u} = r(s)y.$$

Возвращаясь в ней к прежнему управлению, получим с учётом внешнего возмущения

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad b(s)\bar{g}(s)u = r(s)y. \tag{4.4.57}$$

Резюмируем изложенное в форме следующей процедуры.

Процедура 4.4.2. (Синтез регуляторов для объектов второго вида)

а) Проверить гурвицевость полиномов $b(s)$ и $m(s)$ и сформировать полином $\rho(s) = m(s)\tau(s)$, где

$$\tau(s) = (1 - \tau s)^{\delta}, \tag{4.4.58}$$

при этом $\tau < \bar{t}_{рег}$, а δ – определяется перегруппированием $\bar{\sigma}^f$.

б) Найти прогнозируемую частоту из равенства

$$q\frac{\tau(-j\bar{\omega}_{cp})\tau(j\bar{\omega}_{cp})m(-j\bar{\omega}_{cp})m(j\bar{\omega}_{cp})}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1, \tag{4.4.59}$$

и определить на основе (4.4.46), (4.4.47) коэффициенты ε_i $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$, $\psi = n-\gamma-1$ функционала (4.4.50).

в) Определить коэффициент q из неравенств (4.4.20), где положить $\gamma = 0$ ($b_0 = 1$).

г) Решить задачу АКОР с функционалом (4.4.50).

■

Примечание 4.4.1.

Первая операция описанной процедуры – это построение уравнения качества. Действительно, из (4.4.57) следует

$$y = \frac{m(s)g(s)}{d(s)g(s) - r(s)}f. \tag{4.4.60}$$

Учитывая малость коэффициентов полинома $g(s)$, кроме $g_0 = 1$, запишем

$$y = \frac{m(s)}{d(s) - r(s)}f = \frac{m(s)}{\psi(s)}f. \tag{4.4.61}$$

Полином $\psi(s)$ в уравнении качества

$$\psi(s)y = m(s)f \tag{4.4.62}$$

выберем так, чтобы его решения удовлетворяли требованиям точности и качеству. Очевидно, что

$$\psi(s) = m(s)\tau(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s). \tag{4.4.63}$$

При этом в полиноме Баттерворта расстояние $\omega_0 = \frac{1}{q^{2(n-\delta-\alpha)}}$. ■

4.4.4. Ограничение полосы пропускания

Вернёмся к системе (4.4.35), (4.4.36), регулятор которой получен в результате процедуры 4.4.1. Прогнозируемая частота среза этой системы определяется в соответствии с (4.3.53) из уравнения

$$q\frac{\tau(-j\bar{\omega}_{cp})\tau(j\bar{\omega}_{cp})}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1, \tag{4.4.64}$$

При больших q эта частота может оказаться недопустимо большой. Более того, в ряде случаев требуется, чтобы полоса пропускания не превышала заданного числа ω_{cp} .

Тогда неравенство

$$\bar{\omega}_{cp} < \omega_{cp}, \tag{4.4.65}$$

и равенство (4.4.64) могут оказаться несовместными.

Несовместность выражает известное противоречие между высоким коэффициентом усиления разомкнутой системы и умеренной полосой её пропускания. Это противоречие преодолевается введением в систему инерционных звеньев, уменьшающих полосу её пропускания без изменения коэффициента усиления.

Объект (4.4.35), дополненный таким звеном описывается уравнениями

$$d(s)y = (u + f), \quad \dot{\tilde{y}} = -t_1^{-1}\tilde{y} + t_1^{-1}y, \tag{4.4.66}$$

где t_1 – неопределённая постоянная времени инерционного звена.

Исключая переменную y , получим

$$d(s)\left(s + t_1^{-1}\right)\tilde{y} = t_1^{-1}(u + f). \tag{4.4.67}$$

Уравнение (4.4.64) при заданном ω_{cp}^* принимает для этого ««расширенного объекта»» вид

$$\frac{q}{t_1^2\omega_{cp}^{*2} + 1} \cdot \frac{\tau(-j\omega_{cp}^*)\tau(j\omega_{cp}^*)}{d(-j\omega_{cp}^*)d(j\omega_{cp}^*)} = 1, \tag{4.4.68}$$

Отсюда находим постоянную времени t_1 .

Применяя для ««объекта»» (4.4.67) процедуру 4.4.1 найдём ««регулятор»»

$$u = \left(\bar{r}_n s^n + \bar{r}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \bar{r}_1 s + \bar{r}_0\right)\tilde{y} = \bar{r}(s)\tilde{y}. \tag{4.4.69$'$}$$

Исключим переменную $\tilde{y}$ и получим окончательно регулятор

$$(t_1 s + 1)u = \bar{r}(s)y, \tag{4.4.69}$$

который обеспечивает частоту среза, близкую к требуемой.

Примечание 4.4.2. Процедура 4.4.1 обеспечивает требования к точности и качеству расчётной системы (4.4.67), (4.4.69'). Статика и динамика выхода y физической: системы (4.4.35), (4.4.69) связаны с выходом y расчётной системы инерционным

звеном. Поэтому физическая система может не обладать перерегулированием и временем регулирования расчётной. Это расхождение будет тем большим, чем больше постоянная времени t_1. ■

Для объектов первого вида дополнительное инерционное звено описывается уравнением

$$\dot{x}_{n+1} = -t_1^{-1}x_{n+1} + t_1^{-1}z = -t_1^{-1}x_{n+1} + t_1^{-1}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{4.4.70}$$

где постоянная t_1 находится из уравнения

$$\frac{q}{t_1^2\omega_{cp}^{*2}+1}\cdot\boldsymbol{\beta}'(-j\omega_{cp}^*)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_{cp}^*) = 1. \tag{4.4.71}$$

Это уравнение следует из (4.3.53).

4.4.5. Следящие системы

Рассмотрим систему (4.4.57) при последовательном задающем воздействии, полагая в ней для простоты $f(t) = 0$,

$$d(s)y = b(s)u, \quad b(s)\bar{g}(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \tag{4.4.72}$$

Выход этой системы описывается в соответствии с (4.3.12) выражением

$$y = \frac{b(s)r^n(s)}{d(s)\bar{g}(s)b(s) - b(s)r(s)}v = \frac{r^n(s)}{d(s)\bar{g}(s) - r(s)}v. \tag{4.4.73}$$

Её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)\bar{g}(s) - r(s) = \varepsilon^0(s)m(s)\tau(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s). \tag{4.4.74}$$

Последнее равенство следует из (4.4.55) утверждения 4.4.1 (точнее, соотношение (4.Д.47) доказательства этого утверждения).

Положим

$$r^n(s) = m(s)\tau(s)\sqrt{q}. \tag{4.4.75}$$

Тогда

$$y = \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon^0(s)æ_{n-\delta-\alpha}(s)}v = \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon^0(s)\left(s^{n-\delta-\alpha} + \cdots + \sqrt{q}\right)}v. \tag{4.4.76}$$

Корни полинома $\varepsilon^0(s)$ значительно превышают ω_{cp}. Это следует из (4.4.5).

Такое свойство корней полинома $\varepsilon^0(s)$ опишем с помощью соотношения

$$|\varepsilon^0(j\omega)| = 1 + \delta^0, \quad 0 \le \omega \le \omega_{cp}, \tag{4.4.77}$$

где δ^0 – достаточно малое число (которое выбором ε^0 можно сделать по модулю меньшим любого наперёд заданного положительного числа).

Аналогичное ограничение наложим на полином Баттерворта

$$|æ_{n-\delta-\alpha}(j\omega)| = \sqrt{q} + \delta^{(1)}, \quad 0 \le \omega \le \omega_{cp}, \tag{4.4.78}$$

где $\delta^{(1)}$ – число значительно меньшее по модулю, чем $\sqrt{q}$.

Утверждение 4.4.2. Для того, чтобы в полосе пропускания системы выполнялось равенство (4.4.82) достаточно выбрать

$$q > 10^{2(n-\delta-\alpha)}\omega_{cp}. \tag{4.4.79}$$

■

Для доказательства утверждения заметим, что полином Баттерворта обладает свойством

$$æ_{n-\delta-\alpha}(-s)æ_{n-\delta-\alpha}(s) = s^{2(n-\delta-\alpha)}\omega_0^{2(n-\delta-\alpha)}, \tag{4.4.80}$$

где

$$\omega_0 = (\sqrt{q})^{\frac{1}{n-\delta-\alpha}}. \tag{4.4.81}$$

С учётом этих соотношений запишем (4.4.82) в виде

$$\sqrt{\omega^{2(n-\delta)}(-1)^{n-\delta-\alpha} + q} = \sqrt{q} + \delta^{(1)}. \tag{4.4.82}$$

Заменяя в этом равенстве ω на ω_{cp}, заключаем, что при q, удовлетворяющем неравенству (4.4.83) $|\delta| \ll \sqrt{q}$ и таким образом утверждение доказано. ■

Возвращаясь к (4.4.76) замечаем, что в полосе пропускания системы

$$y(t) \approx v(t).$$

Рассмотрим следящую систему с объектами первого вида. Она описывается уравнениями (4.4.5). Пусть регулятор этой системы получен с помощью процедуры 4.4.1. Аналогично (4.3.31) заключаем, что регулируемая переменная связана с задающим воздействием соотношением

$$z = \frac{kv}{\tau(s)æ_{n-\gamma-\delta}(s)}. \tag{4.4.83}$$

Принимаем

$$k = \sqrt{q}. \tag{4.4.84}$$

и выбираем коэффициенты полиномов $\tau(s)$ и $æ_{n-\gamma-\delta}(s)$ так, чтобы выполнялись условия, аналогичные (4.4.77), (4.4.78). Тогда в полосе пропускания системы сигнал $z(t)$ воспроизводит задающее воздействие $v(t)$ с наперёд заданной точностью, определяемой коэффициентами полиномов $\tau(s)$ и $æ_{n-\gamma-\delta}(s)$.

4.4.6. ПИ-регулятор*

Если в задаче 4.4.1 снять ограничения (4.4.4) на качество переходных процессов, то при ступенчатом внешнем возмущении она разрешается в классе ПИ-регуляторов вида

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + c_{n+1}\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau. \tag{4.4.85}$$

Убедимся, что в системе (4.4.1), (4.4.85) статическая ошибка $z_{cm} = 0$.

Повторяя изложенное в п. 3.4.4, получим

$$z = \frac{m^c(s)}{d^u(s)}f + \frac{b_z(s)}{d^u(s)}c_{n+1}\frac{z}{s}, \tag{4.4.86}$$

где $b_z(s) = \boldsymbol{l}'(E\widetilde{s} - A)\boldsymbol{b}$, $m_c(s) = \boldsymbol{l}'(Es - \widetilde{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}')\boldsymbol{m}$.

Отсюда следует

$$z_{cm} = \lim_{s\to 0} sz(s) = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{sm^c(s)}{d^u(s)s - c_{n+1}b_z(s)}\cdot\frac{\bar{f}}{s}\right\} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов ПИ-регулятора будем решать задачу АКОР для ««расширенного объекта»»

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}; \tag{4.4.87}$$

$$\dot{x}_{n-1} = z. \tag{4.4.88}$$

При этом примем функционал оптимизации

$$J = \int\limits_0^\infty \left(qx_{n+1}^2 + u^2\right)\,dt. \tag{4.4.89}$$

Решим задачу 4.1.1 и получим оптимальный регулятор

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + c_{n+1}x_{n+1} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + c_{n+1}\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau. \tag{4.4.90}$$

Приведём условия существования и единственности решения этой задачи: полная управляемость ««расширенного объекта»» и равенство (4.1.16) для функционала оптимизации.

Утверждение 4.4.3. Если объект (4.4.87) полностью управляем, а свободный член полинома $b_z(s)$ не равен нулю ($b_{z,0} \neq 0$), то расширенный объект (4.4.87), (4.4.88) полностью управляем.

Если объект (4.4.87) полностью наблюдаем по сигналу z, то для функционала (4.4.89) выполняется равенство (4.1.16). ■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.5.

4.4.7. Построение структурно-грубых регуляторов*

Пусть задача 4.4.1 решена и получена система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}; \tag{4.4.91}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.4.92}$$

которая при действии внешних возмущений, удовлетворяет требованиям к точности, качеству и грубости (параметрической грубости).

Уточнённая модель, объекта имеет вид (3.4.86), (3.4.87)

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} = A^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(1)}u, \tag{4.4.93}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = A^{(3)}\boldsymbol{x}^{(1)} + A^{(4)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(2)}u, \quad z = \boldsymbol{l}^{(1)\prime}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{l}^{(2)\prime}\boldsymbol{x}^{(2)} + l^{(3)}u. \tag{4.4.94}$$

Если уточнённая система (4.4.93), (4.4.94), (4.4.92) неустойчива, то можно использовать процедуру 3.4.3 построения структурно-грубого регулятора, в которой операция 3 – это процедура 4.4.1 для объекта (3.4.91).

Такой путь построения структурно-грубого регулятора, разрешающего задачу 4.4.1, является слишком трудоёмким, поэтому ниже предлагается другой, менее обоснованный путь, позволяющий в ряде случаев избежать многократного использования трудоемкой процедуры 4.4.1. Он основан на отдельных признаках структурной грубости, вытекающих из утверждения 2.2.1, и сравнении функций $|h(j\omega)|$ и $|h_{ym}(j\omega)|$. Эти функции близки к амплитудно-частотным характеристикам $|w_{раз}(j\omega)|$ и $|w_{раз.ym}(j\omega)|$ разомкнутых систем, если число q в функционале оптимизации (4.4.6) либо (4.4.11) достаточно велико.

Длину полосы неразличимости найдём из неравенства, аналогичного (2.2.31)

$$|h(j\omega)| \le 0.2. \tag{4.4.95}$$

Полученная из этого выражения частота $\tilde{\bar{\omega}}_н$ отличается от $\bar{\omega}_н$ так же как частота среза разомкнутой оптимальной системы отличается от частоты $\bar{\omega}_{ср}$, определённой равенством (4.3.51).

Потребуем, аналогично первому из соотношений (2.2.28), чтобы

$$\frac{|h(j\omega)| - |h_{ym}(j\omega)|}{|h(j\omega)|} \le \varepsilon_1, \quad 0 \le \omega \le \tilde{\bar{\omega}}_н. \tag{4.4.96}$$

Вычислим функции, входящие в этот признак структурной грубости. В соответствии с (4.2.5) и (4.4.21) запишем

$$h(s) = \boldsymbol{h}(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = q\left(\boldsymbol{l}' + \tau_1\boldsymbol{l}'A + \cdots + \tau_\delta\boldsymbol{l}'A^{(\delta-1)}\right)(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Принимая во внимание соотношение $A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E$ и равенства (4.4.13), получим выражение

$$\boldsymbol{l}'A^i(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = s^i\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} \quad i = \overline{0, \delta},$$

которое позволяет найти

$$h(s) = q\left(1 + \tau_1 s + \cdots + \tau_\delta s^{\delta-1}\right) \boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = q\tau(s)\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s). \tag{4.4.97}$$

Если равенства (4.4.13) сохраняются для уточнённой модели объекта, то

$$h_{ym}(s) = \boldsymbol{h}(Es - A_{ym})^{-1}\boldsymbol{b}_{ym} =$$
$$= q\left(\boldsymbol{l}'_{ym} + \tau_1\boldsymbol{l}'_{ym}A_{ym} + \cdots + \tau_\delta\boldsymbol{l}'_{ym}A_{ym}^{(\delta-1)}\right)(Es - A_{ym})^{-1}\boldsymbol{b}_{ym} = q\tau(s)\boldsymbol{l}'_{ym}\boldsymbol{\beta}_{ym}(s), \tag{4.4.98}$$

где

$$A_{ym} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{ym} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}^{(1)} \\ \boldsymbol{b}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_{ym} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}^{(1)} \\ \boldsymbol{l}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{4.4.99}$$
$$l^{(3)} = 0, \quad \boldsymbol{\beta}_{ym}(s) = (Es - A_{ym})^{-1}\boldsymbol{b}_{ym}.$$

и таким образом, признак (4.4.96) принимает вид

$$\frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)| - |\boldsymbol{l}'_{ym}\boldsymbol{\beta}_{ym}(j\omega)|}{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)|} \le \varepsilon_1, \quad 0 \le \omega \le \tilde{\tilde{\omega}}_н, \tag{4.4.100}$$

где частота $\tilde{\tilde{\omega}}_н$ – наименьшая из частот, удовлетворяющих неравенству

$$q|\tau(j\omega)||\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)| \le 0.2. \tag{4.4.101}$$

Приведём ещё один признак грубости системы (4.4.91), (4.4.92), выраженной через свойства матриц уточнённой модели объекта. Ограничимся случаем когда собственные числа λ_1, λ_2, ..., $\lambda_{n_{ут}-n}$ матрицы $A^{(1)}$ – вещественны и различны, вектор $\boldsymbol{b}^{(1)} = \boldsymbol{0}$, и кроме того, вещественны и различны собственные числа $\lambda_1^{(R)}$, $\lambda_2^{(R)}$, ..., $\lambda_n^{(R)}$ матрицы

$$R = A^{(3)}\Psi\Lambda\Psi^{-1}A^{(2)}, \tag{4.4.102}$$

в которой $\Lambda = \operatorname{diag}\left[\ \lambda_1 \ \ \lambda_2 \ \ \cdots \ \ \lambda_{n_{ут}-n}\ \right]$, а Ψ – матрица преобразования $A^{(1)}$ к диагональной форме $\Lambda = \Psi^{-1}A^{(1)}\Psi$.

Утверждение 4.4.4. Если

$$|\lambda_i| \gg \tilde{\tilde{\omega}}_н \quad i = \overline{1, n_{ym} - n}, \tag{4.4.103}$$
$$|\lambda_i^{(R)}| \ll 1 \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.4.104}$$

то функции $|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)|$ и $|\boldsymbol{l}'_{ym}\boldsymbol{\beta}_{ym}(j\omega)|$ достаточно близки при $\omega < \tilde{\tilde{\omega}}_н$. ■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.6.

4.4.8. Условия структурной грубости для одного вида структурных возмущений*

Рассмотрим случай, когда уточнённая модель оптимальной системы (4.1.1), (4.1.2) имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u^{(1)}, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}; \tag{4.4.105}$$

$$d_{n_1}^{(1)}\left[u^{(1)}\right]^{(n_1)} + d_{n_1-1}^{(1)}\left[u^{(1)}\right]^{(n_1-1)} + \cdots + d_1^{(1)}\dot{u}^{(1)} + d_0^{(1)}u^{(1)} = b_{\gamma_1}^{(1)}u_1^{\gamma} + \cdots + b_1^{(1)}\dot{u} + b_0^{(1)}u, \tag{4.4.106}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.4.107}$$

где уравнение (4.4.106) описывает структурные возмущения. В этом уравнении $u^{(1)}(t)$ – функция управления объектом (4.4.105), а $\left[u^{(1)}\right]^{(n_1-i)}$ $\left(i=\overline{0,n_1}\right)$ – её производные. Передаточная функция структурного возмущения

$$w_{возм.1}(s) = -\frac{b_{\gamma_1}^{(1)}s^{\gamma_1}+\cdots+b_1^{(1)}s+b_0^{(1)}}{d_{n_1}^{(1)}s^{n_1}+\cdots+d_1^{(1)}s+d_0^{(1)}} = \frac{b^{(1)}(s)}{d^{(1)}(s)}. \tag{4.4.108}$$

Приведём условия, накладываемые на эту функцию, при которых оптимальная система (4.1.1), (4.1.2) является структурно грубой.

Утверждение 4.4.5. Если регулятор системы (4.1.1), (4.1.2) получен в результате процедуры АКОР (процедуры 4.1.1), а для структурных возмущений выполняется условие

$$w_{возм.1}(-j\omega)+w_{возм.1}(j\omega)\geq 1, \quad 0\leq\omega\leq\infty \tag{4.4.109}$$

то система (4.4.105)-(4.4.107) асимптотически устойчива. ■

Утверждение 4.4.6. Если регулятор (4.1.2) оптимален по критерию обобщённой работы (построен на основе процедуры 4.1.2), а структурные возмущения обладают свойством

$$w_{возм.1}(-j\omega)+w_{возм.1}(j\omega)\geq 0, \quad 0\leq\omega\leq\infty \tag{4.4.110}$$

то система (4.4.105)-(4.4.107) асимптотически устойчива. ■

Доказательство утверждений приведено в 4.Д.7.

4.5. Обратная задача АКОР

4.5.1. Функционал общего вида

Пусть имеем полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^{(0)} \tag{4.5.1}$$

и требуется найти регулятор

$$u=\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{4.5.2}$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J=\int\limits_0^\infty\left[\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x}+2\left(\tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{x}\right)u+u^2\right]\,dt, \tag{4.5.3}$$

в котором заданная матрица Q и вектор $\boldsymbol{l}$ удовлетворяют условию

$$\bar{Q}=Q-\tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{l}}'>0, \tag{4.5.4}$$

положительной определённости квадратичной формы ($n+1$) переменной $\boldsymbol{x}$ и u.

При $\tilde{\boldsymbol{l}}' = 0$ эта задача совпадает с задачей 4.1.1. Применим для её решения процедуру 4.1.1. Для этого обозначим

$$\bar{u} = u + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{x}, \quad \bar{A} = A - \boldsymbol{x}\tilde{\boldsymbol{l}}'. \tag{4.5.5}$$

Тогда уравнение объекта (4.5.1) и функционал (4.5.3) примут вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \bar{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\bar{u}, \tag{4.5.6}$$

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \bar{u}^2\right)\, dt. \tag{4.5.7}$$

Используя процедуру 4.1.1 получим

$$\bar{u} = \bar{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x}, \tag{4.5.8}$$

где вектор $\bar{\boldsymbol{c}}'$ определяется из соотношения

$$\bar{\boldsymbol{c}}' = -P\boldsymbol{b}, \tag{4.5.9}$$

в котором положительно-определённая матрица P является решением уравнения

$$P\bar{A} - \bar{A}'P - P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'P + \bar{Q} = 0. \tag{4.5.10}$$

Таким образом, искомое управление

$$u = \left(\bar{\boldsymbol{c}} - \tilde{\boldsymbol{l}}\right)'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}. \tag{4.5.11}$$

Утверждение 4.5.1. Частотная форма условий оптимальности системы (4.5.1), (4.5.2) в смысле функционала (4.5.3) имеет вид

$$[1+w_{раз}(-j\omega)][1+w_{раз}(j\omega)] = 1+\sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega)+2\,\mathrm{Re}\,\tilde{l}(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{4.5.12}$$

где

$$\tilde{l}(j\omega) = \tilde{\boldsymbol{l}}'(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(j\omega). \tag{4.5.13}$$

■

Для доказательства запишем алгебраические условия оптимальности (4.5.9), (4.5.10) с учётом выражений $\bar{A}$ и $\bar{\boldsymbol{c}}$

$$\boldsymbol{c} = -\left(P\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right), \tag{4.5.14}$$

$$PA + A'P - \left(P\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right)\left(P\boldsymbol{b} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right)' + Q = 0. \tag{4.5.15}$$

Повторяя изложенное в п. 4.2.1 получим тождество

$$\boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}P\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'P(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'(-Es - A)^{-1\prime}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}'(-s)\boldsymbol{h}(s).$$

Прибавляя к обеим его частям функцию $\boldsymbol{b}'(-Es-A)^{-1\prime}P\tilde{\boldsymbol{l}}+\tilde{\boldsymbol{l}}'(Es-A)^{-1}\boldsymbol{b}$ получим, при $s = j\omega$, искомое условие (4.5.12), которое при $\tilde{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{0}$ совпадает с (4.2.9).

4.5.2. Запасы устойчивости

Теорема 4.2.1 устанавливает границы запасов устойчивости оптимальных систем, когда в функционале оптимизации нет произведений переменных состояния и управления $\left(\tilde{\boldsymbol{l}} = \mathbf{0}\right)$. Эти границы следуют из неравенства

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \geq 0.$$

В рассматриваемом случае аналогичное слагаемое в правой части условия оптимальности (4.5.12)

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) + 2\,\mathrm{Re}\,\tilde{l}(j\omega) \tag{4.5.16}$$

может оказаться отрицательным. Построим пример, показывающий, что запасы устойчивости системы (4.5.1), (4.5.2) оптимальной в смысле положительно-определённого функционала общего вида (4.5.3), могут быть сколь угодно малы.

Пример 4.5.1. Пусть уравнения объекта (4.5.1) и функционал оптимизации (4.5.3) имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{4.5.17}$$

$$J = \int_0^\infty \left(q_{11}x_1^2 + 2\tilde{l}_1 x_1 u + u^2\right)\, dt, \tag{4.5.18}$$

$$q_{11} - \tilde{l}_1^2 > 0.$$

Определим параметры оптимального управления

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2. \tag{4.5.19}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{l}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.5.20}$$

запишем на основе (4.5.14), (4.5.15)

$$c_1 = -p_{12} - \tilde{l}_1, \quad c_2 = -p_{22}, \tag{4.5.21}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} p_{12} + \tilde{l}_1 \\ p_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{12} + \tilde{l}_1 & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5.22}$$

В развёрнутой форме это матричное уравнение принимает вид

$$\left(p_{12} + \tilde{l}_1\right)^2 = q_{11}, \quad p_{11} - \left(p_{12} + \tilde{l}_1\right) p_{22} = 0, \quad 2p_{12} - p_{22}^2 = 0. \tag{4.5.23}$$

Учитывая (4.5.21), получим на основе первого и третьего из этих уравнений

$$c_1 = -\sqrt{q_{11}}, \quad c_2 = -\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}. \tag{4.5.24}$$

Передаточная функция разомкнутой оптимальной системы (4.5.1), (4.5.2)

$$w_{раз}(s) = \frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}s + \sqrt{q_{11}}}{s^2}. \tag{4.5.25}$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики, соответствующие этой передаточной функции

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{\left(2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1\right)\omega^2 + q_{11}}}{\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}}{\sqrt{q_{11}}}\omega. \tag{4.5.26}$$

Из равенства $a(\omega_{ср}) = 1$ получим уравнение для определения $\omega_{ср}$

$$\omega_{ср}^4 - \left(2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1\right)\omega_{ср}^2 - q_{11} = 0.$$

Это уравнение имеет единственное вещественное положительное решение

$$\omega_{ср} = \sqrt{\left(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1\right) + \sqrt{\left(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1\right)^2 + q_{11}}}.$$

Подставляя это выражение в (4.5.26), найдём

$$\varphi_з = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}}{\sqrt{q_{11}}} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1\right) + \sqrt{\left(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1\right)^2 + q_{11}}}\right].$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_з \to 0 \quad \text{при} \quad \tilde{l}_1 \to \sqrt{q_{11}}. \tag{4.5.27}$$

■

4.5.3. Обратная задача

Приведённый пример свидетельствует о возможности малых запасов устойчивости оптимальных систем. Более того, оказывается, что для любой (даже сколь угодно ««плохой»» с точки зрения проектировщика) асимптотически устойчивой системы всегда можно построить положительно-определённый функционал (4.5.3), в смысле которого эта система является оптимальной.

Построение такого функционала составляет обратную задачу оптимального управления.

Задача 4.5.1. **(Обратная задача оптимального управления)**.

Найти матрицу Q и вектор $\tilde{\boldsymbol{l}}$ положительно-определённого (либо не отрицательного, но удовлетворяющего условию (4.1.16) функционала (4.5.3), в смысле которого заданная асимптотически устойчивая система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad u = \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x} \tag{4.5.28}$$

является оптимальной. Объект этой системы полностью управляем, а также наблюдаем по сигналу $u(t)$. Последнее означает, что $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^* & A\boldsymbol{c}^* & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{c}^* \end{pmatrix} \neq 0$. (Символом «« * »» подчёркивается заданность вектора $\boldsymbol{c}$ регулятора). ■

Для изложения существа решения этой задачи запишем тождество (4.2.9) для системы (4.5.6), (4.5.8), оптимальной в смысле функционала (4.5.7),

$$[1 + \bar{w}_{раз}(-s)][1 + \bar{w}_{раз}(s)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{h}_i(-s)\bar{h}_i(s), \tag{4.5.29}$$

где $\bar{w}_{раз}(s) = -\bar{\boldsymbol{c}}'(Es - \bar{A})^{-1}\boldsymbol{b}$, $\bar{h}(s) = \bar{H}(Es - \bar{A})^{-1}\boldsymbol{b}$, $\bar{H}'\bar{H} = \bar{Q}$. (4.5.30)

Преобразуем вектор $(Es - \bar{A})^{-1}\boldsymbol{b}$. Используя утверждение 3.4.1, получим

$$(Es - \bar{A})^{-1}\boldsymbol{b} = \left(Es - A + \boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{l}}'\right)^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta}(s)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s)\right]^{-1}, \tag{4.5.31}$$

где $\boldsymbol{\beta}(s) = (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}$.

Подставим (4.5.31) в (4.5.29) с учётом выражения $\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{l}$

$$\begin{gathered}\left\{1 - \left(\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right)'\boldsymbol{\beta}(-s)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-s)\right]^{-1}\right\}\left\{1 - \left(\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right)'\boldsymbol{\beta}(s)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s)\right]^{-1}\right\} = \\ = 1 + \boldsymbol{\beta}'(-s)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-s)\right]^{-1}\left(Q - \tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{l}}'\right)\boldsymbol{\beta}(s)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s)\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{4.5.32}$$

Умножая это тождество на $\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-s)\right]\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s)\right]$, получим

$$\begin{gathered}[1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-s)]\,[1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(s)] = \left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-s)\right]\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s)\right] + \\ + \boldsymbol{\beta}'(-s)\left(Q - \tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{l}}'\right)\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\beta}'(-s)Q\boldsymbol{\beta}(s).\end{gathered} \tag{4.5.33}$$

При заданном векторе $\boldsymbol{c}$ отсюда следует выражение

$$\tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-s) + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(s) + \boldsymbol{\beta}'(-s)Q\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(-s) - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(s) + \boldsymbol{\beta}'(-s)\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(s). \tag{4.5.34}$$

для определения вектора $\tilde{\boldsymbol{l}}$ и элементов матрицы Q.

4.5.4. Существование решения

Тождество (4.5.34) содержит полиномы чётных степеней s. Сравним коэффициенты при одинаковых степенях s, получим систему n линейных алгебраических уравнений для определения n компонент вектора $\tilde{\boldsymbol{l}}$ и n^2 коэффициентов матрицы Q. Множество решений этой системы алгебраических уравнений должно удовлетворять условию (4.5.4) положительной определённости функционала (4.5.3). Существование

решения указанной системы линейных уравнений и системы n неравенств Сильвестера (для положительной определённости решений) устанавливается следующая теорема

Теорема 4.5.1. Если задан любой вектор $\boldsymbol{c}^*$, при котором система (4.5.28) асимптотически устойчива, то существует матрица Q и вектор $\tilde{\boldsymbol{l}}$ (удовлетворяющие условию (4.5.4) функционала (4.5.3), по отношению к которому эта система оптимальна. При этом объект системы (4.5.28) должен быть полностью управляем, а также наблюдаем по сигналу $u(t)$. ■

Доказательство теоремы приведено в 4.Д.5.

Приведём ещё один способ решения обратной задачи. Он выступает также как основа доказательства теоремы 4.5.1. Этот способ основан на тождестве (4.5.33), которое после преобразования уравнений (4.5.28) к канонической форме (3.4.4), принимает вид

$$\left[1-\check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(-s)\right]\left[1-\check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(s)\right]=\left[1+\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(-s)\right]\left[1+\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(s)\right]+\check{\boldsymbol{\beta}}'(-s)\left(\check{Q}-\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'\right)\check{\boldsymbol{\beta}}'(s), \tag{4.5.35}$$

где в соответствии с п. 3.4.2

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime} &= \boldsymbol{c}^{*\prime}T^{-1}, & \check{\boldsymbol{\beta}}(s) &= \left(Es-\check{A}\right)^{-1}\boldsymbol{b}', & \check{A} &= TAT^{-1}, \\ \tilde{\check{\boldsymbol{l}}}' &= \check{\boldsymbol{l}}'T^{-1}, & \check{\boldsymbol{b}} &= T\boldsymbol{b}, & \check{Q} &= T^{-1\prime}AT. \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

Учитывая, что $\check{\boldsymbol{\beta}}(s)=\begin{pmatrix} 1 & s & \cdots & s^{n-1}\end{pmatrix}'\dfrac{1}{d(s)}$, где $d(s)=\det(Es-\check{A})=$ $=\det(Es-A)$, запишем (4.5.35) после умножения на $d(-s)d(s)$ как

$$[d(-s)-\check{c}^*(-s)]\,[d(s)-\check{c}^*(s)]-\left[d(-s)+\tilde{\check{l}}(-s)\right]\left[d(s)+\tilde{\check{l}}(s)\right]=\nu(-s)\nu(s). \tag{4.5.37}$$

Здесь

$$\check{c}^*(s)=\sum_{i=1}^{n}\check{c}_i^*s^{i-1},\quad \tilde{\check{l}}(s)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{l}_is^{i-1},\quad \nu(s)=\sum_{i=1}^{n}\nu_is^{i-1}. \tag{4.5.38}$$

Последнее означает, что

$$\check{Q}-\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}', \tag{4.5.39}$$

где $\boldsymbol{\nu}'=\begin{bmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n\end{bmatrix}$.

Запишем тождество (4.5.37) в более компактной форме

$$d^u(-s)d^u(s)-d^l(-s)d^l(s)=\nu(-s)\nu(s), \tag{4.5.40}$$

где $d^l(s)=d(s)+\check{l}(s)$.

Обратная задача будет решена, если найти вектор $\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}$ такой, чтобы полином $\theta(s)=$ $=d(-s)d(s)-d^l(-s)d^l(s)$ можно было представить в виде произведения $\nu(-s)\nu(s)$. Тогда матрица $\check{Q}=\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'+\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'$.

4.5.5. Процедура

Найдём условия, при которых можно представить полином

$$\theta(s) = \alpha_1(-s)\alpha_1(s). \tag{4.5.41}$$

Положим $s = j\omega$, тогда $\theta(j\omega) = \theta(\omega^2)$ – полином относительно ω^2 с действительными коэффициентами.

Лемма 4.5.1. Пусть $\theta(\omega^2)$ – полином относительно ω^2 с действительными коэффициентами, не принимающий отрицательных значений для всех действительных ω ($\theta(\omega^2) \geq 0$). Тогда существуют γ полиномов $\alpha_k(j\omega)$ ($1 \leq \gamma \leq n$) с действительными коэффициентами, таких что

$$\theta(\omega^2) = \sum_{k=1}^{\gamma} \alpha_k(-j\omega)\alpha_k(j\omega) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} |\alpha_k(j\omega)|^2.$$

Более того, всегда можно положить $\gamma = 1$ и выбрать $\alpha_1(j\omega)$ так, чтобы все корни этого полинома имели неположительные действительные части. При этих двух ограничениях получим определённое единственным образом разложение

$$\theta(\omega^2) = \alpha_1(-j\omega)\alpha_1(j\omega) = \alpha_1(-s)\alpha_1(s)\Big|_{s\,=\,j\omega}.$$

■

Используем лемму и будем искать вектор $\check{\boldsymbol{l}}$ так, чтобы полином

$$\theta(\omega^2) = d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) \geq 0. \tag{4.5.42}$$

При этом будем рассматривать два случая.

Случай 1. Корни известного полинома $d^u(s) = d(s) - \check{c}^*(s)$ вещественные.

В этом случае можно записать

$$d^u(s) = s^n + d^u_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i), \tag{4.5.43}$$

где s_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – корни полинома $d^u(s)$.

Будем искать число $\tilde{l}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ так, чтобы корни $-\bar{s}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ полинома $d^l(s)$ также были вещественными и выполнялось неравенство (4.5.42), которое запишем так

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\omega^2 + s_i^2\right) > \prod_{i=1}^{n}\left(\omega^2 + \bar{s}_i^2\right).$$

Очевидно, что это неравенство выполняется, если

$$\bar{s}_i^2 = \varepsilon_i^2 s_i^2, \quad \varepsilon_i^2 < 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.5.44}$$

Случай 2. Часть корней полинома $d^u(s)$ – комплексные

В этом случае

$$d^u(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \left(s^2 + 2\xi_i æ_i s + æ_i^2\right) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + s_i). \tag{4.5.45}$$

Будем искать

$$d^l(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \left(s^2 + 2\bar{\xi}_i \bar{æ}_i s + \bar{æ}_i^2\right) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + \bar{s}_i). \tag{4.5.46}$$

Неравенство (4.5.42) принимает теперь вид

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{\rho} \left[\omega^4 - 2æ_i^2 \left(1 - 2\xi_i^2\right) \omega^2 + æ_i^4\right] \prod_{i=1}^{n-2\rho} \left(\omega^2 + s_i^2\right) > \\ > \prod_{i=1}^{\rho} \left[\omega^4 - 2\bar{æ}_i^2 \left(1 - 2\bar{\xi}_i^2\right) \omega^2 + \bar{æ}_i^4\right] \prod_{i=1}^{n-2\rho} \left(\omega^2 + \bar{s}_i^2\right).\end{gathered} \tag{4.5.47}$$

Оно выполняется, если

$$\bar{s}_i^2 = \varepsilon_{1i}^2 s_i^2, \quad \varepsilon_{1i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, n-2\rho}, \tag{4.5.48}$$

$$\bar{æ}_i^2 = \varepsilon_{2i}^2 æ_i^2, \quad 1 > \varepsilon_{2i}^2 > \frac{1 - 2\xi_i^2}{1 - 2\bar{\xi}_i^2}, \quad \xi_i^2 < 0.5 \quad i = \overline{1, \rho}, \tag{4.5.49}$$

$$\bar{\xi}_i^2 < \xi_i^2 \quad i = \overline{1, \rho}. \tag{4.5.50}$$

Действительно, покажем, что при выполнении (4.5.49), (4.5.50)

$$\omega^4 - 2æ_i^2 \left(1 - 2\xi_i^2\right) \omega^2 + æ_i^4 > \omega^4 - 2\bar{æ}_i^2 \left(1 - 2\bar{\xi}_i^2\right) \omega^2 + \bar{æ}_i^4. \tag{4.5.51}$$

Это неравенство можно записать как

$$\left[-\left(æ_i^2 - \bar{æ}_i^2\right) + 2\left(æ_i^2 \xi_i^2 - \bar{æ}_i^2 \bar{\xi}_i^2\right)\right] + \left[\frac{æ_i^4 - \bar{æ}_i^4}{2}\right] > 0, \ \frac{æ_i^4 - \bar{æ}_i^4}{2} > 0 \text{ при } \varepsilon_{2i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, \rho},$$

$$\left[-\left(æ_i^2 - \bar{æ}_i^2\right) + 2\left(æ_i^2 \xi_i^2 - \bar{æ}_i^2 \bar{\xi}_i^2\right)\right] = æ_i^2 \left[-\left(1 - \varepsilon_{2i}^2\right) + 2\left(\xi_i^2 - \varepsilon_{2i}^2 \bar{\xi}_i^2\right)\right] > 0,$$

если

$$\varepsilon_{2i}^2 \left(1 - 2\bar{\xi}_i^2\right) > 1 - 2\xi_i^2. \tag{4.5.52}$$

Отсюда следует (4.5.49), а из условия $\varepsilon_{2i}^2 < 1$ получим (4.5.50). Пусть теперь

$$1 > \xi_i^2 > 0.5. \tag{4.5.53}$$

Непосредственно из (4.5.51) следует, что неравенство (4.5.51) выполняется, когда

$$\bar{\xi}_i^2 = \xi_i^2, \quad \bar{æ}_i^2 = \varepsilon_{2i}^2 æ_i, \quad \varepsilon_{2i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, \rho}. \tag{4.5.54}$$

Таким образом искомый вектор $\boldsymbol{l}$ находится так.

На основе неравенства (4.5.44) либо (4.5.48), (4.5.50) находим числа $\bar{s}_i$, $\bar{æ}_i^2$, $\bar{\xi}_i$ и формируем полином

$$d^l(s) = \prod_{i=1}^{\rho} \left(s^2 + 2\bar{\xi}_i \bar{æ}_i s + \bar{æ}_i^2\right) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + \bar{s}_i) = s^n + d_{n-1}^l s^{n-1} + \cdots + d_1^l s + d_0^l. \tag{4.5.55}$$

Сравним его с полиномом $d(s) + \check{l}(s)$ и получим

$$\tilde{\check{l}}_{i+1} = d_i^l - d_i \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{4.5.56}$$

Переходя к нахождению матрицы $\check{Q} - \boldsymbol{ll}'$, составим в соответствии с (4.5.42) разность

$$\theta(\omega^2) = d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) > 0,$$

и используя лемму, представим

$$\theta(\omega^2) = \nu(-s)\nu(s)\Big|_{s\,=\,j\omega}, \tag{4.5.57}$$

где $\nu(s)$ – гурвицев полином, который запишем как

$$\nu(s) = \nu_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \nu_1 s + \nu_0 = \boldsymbol{\nu}'\Big(E_n\widetilde{s} - \check{A}\Big)\check{\boldsymbol{b}}. \tag{4.5.58}$$

Это означает, что

$$d^u(-j\omega)d^u(j\omega) = d^l(-j\omega)d^l(j\omega) + \check{\boldsymbol{b}}'\Big(-E_n\widetilde{j\omega} - \check{A}\Big)\boldsymbol{\nu\nu}'\Big(E_n\widetilde{j\omega} - \check{A}\Big)\check{\boldsymbol{b}}. \tag{4.5.59}$$

Сравнивая это выражение с (4.5.35), получим

$$\check{Q} = \boldsymbol{\nu\nu}' + \tilde{\check{\boldsymbol{l}}}\tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'. \tag{4.5.60}$$

Теперь используем (4.5.36) и получим искомые

$$\tilde{\boldsymbol{l}}' = \tilde{\check{\boldsymbol{l}}}'T, \quad Q = T'\left(\boldsymbol{\nu\nu}' + \check{\boldsymbol{l}}\check{\boldsymbol{l}}'\right)T. \tag{4.5.61}$$

<u>Пример 4.5.2.</u> Построим функционал в смысле которого система (1.П.80), (1.П.83), рассмотренная в примере 1.П.2 является оптимальной. Запишем характеристический полином (1.П.81) этой системы

$$d^u(s) = (s + s_1)(s + s_2), \tag{4.5.62}$$

где

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0.5. \tag{4.5.63}$$

Примем

$$d^l(s) = (s + 0.5s_1)(s + 0.5s_2) = s^2 + 0.5(s_1 + s_2)s + 0.25s_1s_2.$$

Вычислим при $\varepsilon_i^2 = 0.5$ $\left(i = \overline{1,2}\right)$

$$\begin{aligned} d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) &= (\omega^2 + s_1^2)(\omega^2 + s_2^2) - (\omega^2 + 0.25s_1^2)(\omega^2 + 0.25s_2^2) = \\ &= 0.75(s_1^2 + s_2^2)\omega^2 + 0.9375s_1^2s_2^2 = (\nu_1 - \nu_2 j\omega)(\nu_1 + \nu_2 j\omega) = \nu_1^2 + \nu_2^2\omega^2. \end{aligned} \tag{4.5.64}$$

Отсюда

$$\nu_1 = \sqrt{0.9375 s_1^2 s_2^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{0.75(s_1^2 + s_2^2)}, \tag{4.5.65}$$

используя формулы (4.5.56), получим

$$\tilde{\check{l}}_1 = 0.25 s_1 s_2 - d_0, \quad \tilde{\check{l}}_2 = 0.5(s_1 + s_2) - d_1. \tag{4.5.66}$$

Таким образом искомый функционал имеет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\check{q}_{11} x_1^2 + 2\check{q}_{12} x_1 x_2 + \check{q}_{22} x_2^2 + 2\tilde{\check{l}}_1 x_1 u + 2\tilde{\check{l}}_2 x_2 u + u^2 \right) dt, \tag{4.5.67}$$

где с учётом численных значений параметров объекта (1.П.80) $d_0 = 0.4$, $d_1 = 150$ и чисел (4.5.63)

$$\begin{aligned} \check{q}_{11} &= \nu_0^2 + \tilde{\check{l}}_1^2 = 0.9375 \cdot 0.25 + 0.275^2, \\ \check{q}_{12} &= \nu_0 \nu_1 + \tilde{\check{l}}_1 \tilde{\check{l}}_2 = \sqrt{0.9375 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 1.25} + 149.25 \cdot 0.275, \\ \check{q}_{22} &= \nu_1^2 + \tilde{\check{l}}_2^2 = 0.75 \cdot 1.25 + 149.25^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tilde{\check{l}}_1 &= -0.275, \\ \tilde{\check{l}}_2 &= -149.25. \end{aligned} \tag{4.5.68}$$

Нетрудно сделать проверку и убедиться, что оптимальный, в смысле функционала (4.5.67), с параметрами (4.5.68), регулятор для объекта (1.П.80) совпадает с (1.П.83).

■

4.5.6. Объекты второго вида

Пусть задана асимптотически устойчивая система

$$y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + d_1 \dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \tag{4.5.69}$$

$$u^{(n)} + g_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + r_1 \dot{y} + r_0 y. \tag{4.5.70}$$

Её можно привести к виду

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \tag{4.5.71}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \quad u = \boldsymbol{d}_p \boldsymbol{x}_p. \tag{4.5.72}$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{x}_p(t)$ – n-мерные вектора переменных состояния объекта (4.5.69) и регулятора (4.5.70).

Исключим измеряемую переменную и введём вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_c{}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' & \boldsymbol{x}_p' \end{bmatrix}$. Получим уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = A_c \boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{b}_c u, \quad u = \boldsymbol{c}_c' \boldsymbol{x}_c, \tag{4.5.73}$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \boldsymbol{b}_p \boldsymbol{d} & A_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_c' = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{d}_p \end{bmatrix}, \tag{4.5.74}$$

которые совпадают с (4.5.28). Используем приведённую выше процедуру решения обратной задачи оптимального управления найдём функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left[\boldsymbol{x}_c' Q \boldsymbol{x}_c + 2\tilde{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{x}_c' u + u^2 \right] \, dt, \tag{4.5.75}$$

в смысле которого эта система оптимальная.

При переходе от уравнений (4.5.69), (4.5.70) к уравнениям (4.5.71), (4.5.72) вводится линейная зависимость векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_p$ от переменных $y(t)$, $u(t)$ и их производных. Используя эту зависимость исключим вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_p$ в функционале (4.5.75).

Приведём ещё один способ построения такого функционала.

Запишем уравнение регулятора (4.5.70) в виде двух уравнений

$$u^{(n)} + \mu_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + \mu_1 \dot{u} + \mu_0 u = \check{u}, \tag{4.5.76}$$

$$\check{u} = r_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + r_1 \dot{y} + r_0 y + \left[\mu_{n-1} - g_{n-1}^* \right] u^{(n-1)} + \cdots + \left[\mu_1 - g_1^* \right] \dot{u} + \left[\mu_0 - g_0^* \right] u, \tag{4.5.77}$$

где μ_i $\left(i = \overline{0, n-1} \right)$ – произвольно задаваемые положительные числа, такие, что корни уравнения $\mu(s) = s^n + \mu_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \mu_1 s + \mu_0 = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

Объединяя уравнения (4.5.69) и (4.5.76), получим новый ««объект»»

$$d(s) y = b(s) u, \quad \mu(s) u = \check{u}. \tag{4.5.78}$$

Введём обозначения

$$y = \check{x}_1, \ \dot{y} = \check{x}_2, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = \check{x}_n; \quad u = \check{x}_{n+1}, \ \dot{u} = \check{x}_{n+2}, \ \ldots, \ u^{(n-1)} = \check{x}_{2n}; \tag{4.5.79}$$

$$r_{i-1}^* = \check{c}_i, \qquad \mu_{i-1} - g_{i-1}^* = \check{c}_{n+i} \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.5.80}$$

Тогда уравнения (4.5.78), (4.5.77), эквивалентные уравнениям (4.5.69), (4.5.70) примут вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{\bar{A}} \check{\boldsymbol{x}} + \check{\boldsymbol{b}} \check{u}, \quad \check{u} = \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime} \check{\boldsymbol{x}}, \tag{4.5.81}$$

где

$$\check{\boldsymbol{x}} = \left[\begin{array}{c} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \\ \vdots \\ \check{x}_n \\ \hline \check{x}_{n+1} \\ \check{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{x}_{2n} \end{array} \right], \ \check{\bar{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & \cdots & -\mu_{n-1} \end{array} \right), \ \check{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right], \ \check{\boldsymbol{c}} = \left[\begin{array}{c} \check{c}_1 \\ \check{c}_2 \\ \vdots \\ \check{c}_n \\ \hline \check{c}_{n+1} \\ \check{c}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{c}_{2n} \end{array} \right].$$

Решая теперь обратную задачу для системы (4.5.80), получим функционал, содержащий переменные $y(t)$, $u(t)$ и их производные.

Доказательства к главе 4

4.Д. Доказательство теорем и утверждений

4.Д.1. Доказательство теоремы 4.1.2

Теорема 4.1.2 опирается на следующую теорему Ляпунова.

Теорема 4.Д.1. Для асимптотической устойчивости системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{4.Д.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы решением матричного уравнения (матричного уравнения Ляпунова)

$$PA + A'P = -Q \tag{4.Д.2}$$

(Q – положительно-определённая матрица), являлась положительно-определённая матрица P. ■

Доказательство. Достаточность условий теоремы следует из второго (прямого) метода Ляпунова, в соответствии с которым для асимптотической устойчивости системы достаточно существования положительно-определённой функции v, полная производная которой в силу уравнения (4.Д.1) – отрицательна.

Примем

$$v = \boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x} > 0 \tag{4.Д.3}$$

и вычислим

$$\frac{dv}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}'P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'P\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}'(PA + A'P)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x}. \tag{4.Д.4}$$

Для доказательства необходимости сформируем матрицу $e^{A't}Pe^{At}$, в которой

$$e^{At} = E_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

.

Очевидно, что $\dfrac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. Вычислим

$$-\frac{d}{dt}\left(e^{A't}Pe^{At}\right) = -e^{A't}(A'P + PA)e^{At} = e^{A't}Qe^{At}. \tag{4.Д.5}$$

Интегрируя это соотношение получим, учитывая асимптотическую устойчивость (4.Д.1)

$$-\int\limits_0^\infty \left(\frac{d}{dt}e^{A't}Pe^{At}\right)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{A't}Qe^{At}\,dt > 0,$$

и, таким образом,

$$P = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At}\, dt > 0. \tag{4.Д.6}$$

Нетрудно проверить, что это значение P удовлетворяет уравнению (4.Д.2) и таким образом теорема Ляпунова доказана.

Рассмотрим более общий случай, когда $u(t)$ – m-мерный вектор управления. Тогда уравнения (4.1.1), (4.1.2) объекта и регулятора имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{4.Д.7}$$

где B и C – матрицы чисел размеров $n \times m$.

Уравнения Ляпунова (4.1.8) принимают вид

$$P^{(\alpha+1)} A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)\prime} P^{(\alpha+1)} = -Q - C^{(\alpha)} C^{(\alpha)\prime} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \tag{4.Д.8}$$

где

$$C^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)} B, \tag{4.Д.9}$$

$$A^{(\alpha)} = A + BC^{(\alpha)\prime}. \tag{4.Д.10}$$

Переходя к доказательству теоремы 4.1.2 заметим также, что для полностью управляемого или стабилизируемого объекта (4.2.1) всегда можно найти (используя, например, методы модального управления) матрицу $C^{(0)}$, при которой выполняется условие $A^{(0)} = A + BC^{(0)}$ теоремы.

Рассмотрим уравнение (4.Д.8) на первых шагах итерационного процесса.

При $\alpha = 0$ это уравнение примет вид

$$P^{(1)} A^{(0)} + A^{(0)\prime} P^{(1)} = -Q - C^{(0)} C^{(0)\prime}. \tag{4.Д.11}$$

Так как матрица $A^{(0)}$ – гурвицева (по построению матрицы $C^{(0)}$), то в соответствии с теоремой Ляпунова

$$P^{(1)} > 0 \tag{4.Д.12}$$

($P^{(1)} > 0$ – сокращённое обозначение положительно-определённой матрицы), и тогда

$$C^{(1)} = -P^{(1)} B. \tag{4.Д.13}$$

Покажем теперь, что матрица $A^{(1)} = A + BC^{(1)\prime}$ – гурвицева.

Другими словами нужно показать, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left(A^{(1)} \right) < 0 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{4.Д.14}$$

Для этого рассмотрим сумму матриц $P^{(1)}A^{(1)} + A^{(1)\prime}P^{(1)}$, которую преобразуем с учётом (4.Д.11) и (4.Д.13)

$$\begin{aligned} P^{(1)}A^{(1)} + A^{(1)\prime}P^{(1)} &= P^{(1)}\left(A + BC^{(1)\prime}\right) + \left(A + BC^{(1)\prime}\right)' P^{(1)} = \\ &= P^{(1)}A + A'P^{(1)} - 2C^{(1)}C^{(1)\prime} = \\ &= P^{(1)}\left(A + BC^{(0)\prime}\right) + \left(A + BC^{(0)\prime}\right)' P^{(1)} + \\ &+ C^{(1)}C^{(0)\prime} + C^{(0)}C^{(1)\prime} - 2C^{(1)}C^{(1)\prime} = \\ &= -Q - \left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)\left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)' - C^{(1)}C^{(1)\prime} < 0. \end{aligned} \tag{4.Д.15}$$

Отсюда на основе теоремы Ляпунова заключаем, что матрица $A^{(1)}$ – гурвицева. При $\alpha = 1$ уравнение (4.1.8) записывается как

$$P^{(2)}A^{(1)} + A^{(1)\prime}P^{(2)} = -Q - C^{(1)}C^{(1)\prime}. \tag{4.Д.16}$$

В силу доказанного неравенства (4.Д.14) заключаем, как и ранее, что решение этого уравнения

$$P^{(2)} > 0, \tag{4.Д.17}$$

и тогда

$$C^{(2)} = -P^{(2)}B. \tag{4.Д.18}$$

Для доказательства того, что матрица $A^{(2)} = A + BC^{(2)\prime}$ – гурвицева, рассмотрим сумму матриц $P^{(2)}A^{(2)} + A^{(2)\prime}P^{(2)}$, для которой, повторяя преобразование (4.Д.15), получим

$$P^{(2)}A^{(2)} + A^{(2)\prime}P^{(2)} = -Q - \left(C^{(1)} - C^{(2)}\right)\left(C^{(1)} - C^{(2)}\right)' - C^{(2)}C^{(2)\prime} = -Q < 0. \tag{4.Д.19}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(A^{(2)}\right) < 0 \quad (i = \overline{1,n}). \tag{4.Д.20}$$

Продолжая этот процесс получим последовательность положительно-определённых матриц $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ...

Покажем теперь, что члены этой последовательности обладают свойством

$$P^{(k+1)} \le P^{(k)} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.Д.21}$$

Покажем вначале, что

$$P^{(2)} \le P^{(1)}. \tag{4.Д.22}$$

Для этого вычтем (4.Д.16) из (4.Д.15). Тогда

$$\left(P^{(1)} - P^{(2)}\right)A^{(1)} + A^{(1)\prime}\left(P^{(1)} - P^{(2)}\right) = -\left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)\left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)'.$$

Отсюда заключаем, что $\left(P^{(1)} - P^{(2)}\right) \ge 0$, так как $A^{(1)}$ – гурвицева, а $\left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)\left(C^{(0)} - C^{(1)}\right)' \ge 0$.

Доказательство (4.Д.21) при $k = 2, 3, \dots$ аналогично.

Симметричность, определённая положительность и невозрастающий характер последовательности $P^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ гарантирует существование предела

$$P = \lim_{k \to \infty} P^{(k)}.$$

Докажем в заключение единственность полученного решения. Допустим, что существуют две матрицы $P > 0$ и $\bar{P} > 0$, удовлетворяющие алгебраическому уравнению Риккати (4.1.5).

Этим матрицам соответствуют

$$C = -PB \quad \text{и} \quad \bar{C} = -\bar{P}B. \tag{4.Д.23}$$

На основе (4.1.5) получим

$$P(A + BC') + A'P = Q, \quad \bar{P}(A + B\bar{C}') + A'\bar{P} = Q.$$

Вычтем эти уравнения. Тогда, в силу их симметрии

$$\begin{aligned} 0 &= P(A + BC') + A'P - \left[\bar{P}(A + B\bar{C}') + A'\bar{P}\right] = \\ &= P(A + BC') - \bar{P}'A + \bar{P}BB'P - (A + B\bar{C}')'\bar{P} + A'P - \bar{P}BB'P = \\ &= (P - \bar{P})(A + BC') + (A + B\bar{C}')'(P - \bar{P}'). \end{aligned} \tag{4.Д.24}$$

Это матричное уравнение имеет единственное решение $P - \bar{P} = 0$. Действительно, матрицы $A + BC'$ и $-A - B\bar{C}'$ не имеют общих собственных чисел, так как $A + BC'$ и $A + B\bar{C}'$ – гурвицевы, а уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + BC')\boldsymbol{x} \quad \text{и} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = (A + B\bar{C}')\boldsymbol{x}, \tag{4.Д.25}$$

в которых C и $\bar{C}$ определяются на основе (4.Д.23) – асимптотически устойчивы. В этом нетрудно убедиться, если принять

$$v = \boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x}. \tag{4.Д.26}$$

Тогда, учитывая (4.1.5), получим

$$\frac{dv}{dt} = \boldsymbol{x}'[(A + BC')P + P(A + BC')] = -\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'CC'\boldsymbol{x} < 0. \tag{4.Д.27}$$

Аналогично можно принять $\bar{v} = \boldsymbol{x}'\bar{P}\boldsymbol{x} > 0$ и получить в силу второй из систем (4.Д.25) $\dot{\bar{v}} < 0$.

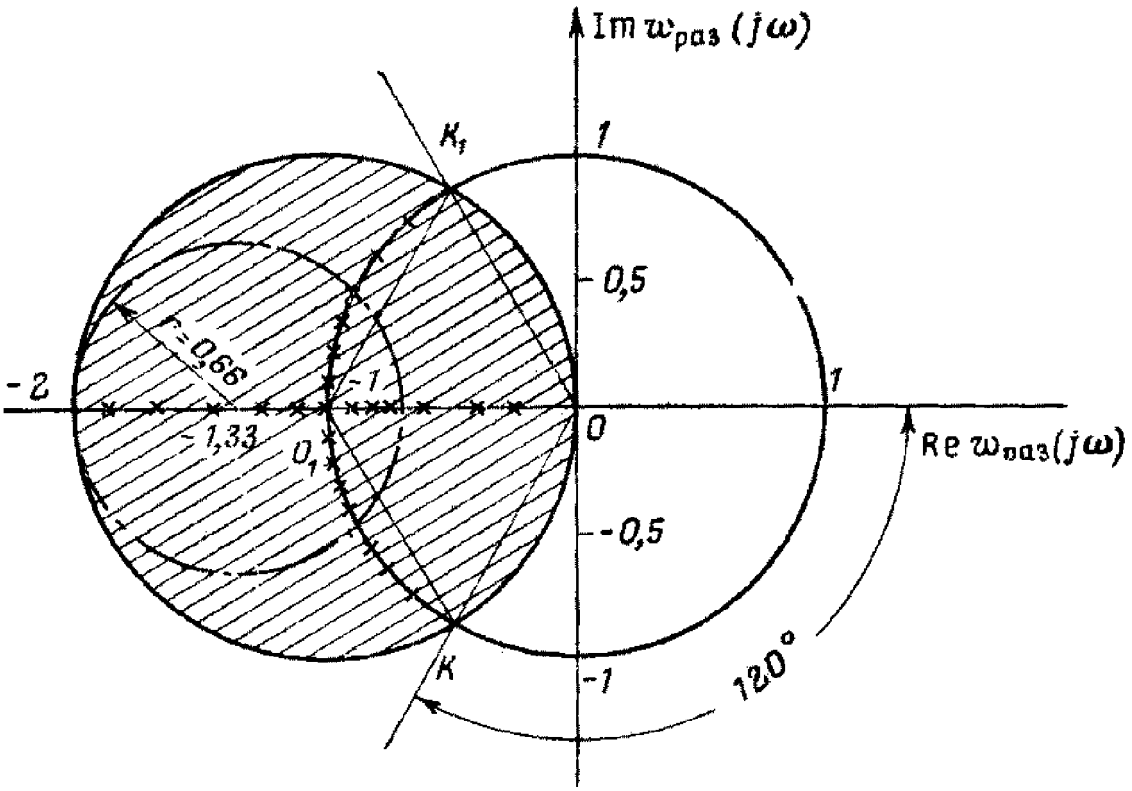

Рис. 4.Д.1.

4.Д.2. Доказательство теоремы 4.2.1

Приведём два способа её доказательства.

Первый способ основан на утверждении 4.2.2. Геометрическая интерпретация этого утверждения:

Годограф АФЧХ оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2) не пересекает запретного круга единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$.

На рис. 4.Д.1. указанный запретный круг заштрихован. Непосредственно из этого рисунка следуют неравенства (4.2.15), (4.2.16). Действительно, отрезок $(0, -2)$ вещественной оси находится внутри запретного круга, а это означает (4.2.16). Рассматривая равносторонний треугольник AOB получаем (4.2.15), так как дуги AB и AC, имеющие градусные меры равные $60°$, находятся внутри запретного круга.

Во втором способе доказательства теоремы 4.2.1 не используется понятие радиуса запасов устойчивости и утверждение 4.2.2. Этот способ опирается на тождестве (4.2.11), (4.2.12).

На множестве Ω_{cp} частот среза $a(\omega_{cp}) = 1$ и тогда на этом множестве получим, используя (4.2.12), (4.2.14)

$$\cos\varphi(\omega_{cp}) \geq -0.5. \tag{4.Д.28}$$

Исследуем это неравенство.

Пусть вначале $\cos\varphi(\omega_{cp}) = -0.5$.

Тогда $\varphi(\omega_{cp}) = \pm\arccos(-0.5)+2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, $\arccos(-0.5) = 120^\circ$ (так как $0 \le \arccos x \le \pi$) а из неравенства (4.Д.28) следует, что

$$\arg w_{раз}(j\omega_{cp}) \ge -120^\circ \quad \text{при} \quad \omega_{cp} \in \Omega_{cp}^{(1)}, \tag{4.Д.29}$$

$$\arg w_{раз}(j\omega_{cp}) \le 120^\circ \quad \text{при} \quad \omega_{cp} \in \Omega_{cp}^{(2)}. \tag{4.Д.30}$$

На основе (2.1.36) заключаем, что

$$\varphi \ge 60^\circ.$$

Переходя к доказательству свойства (4.2.16) запишем для множества частот $\omega_\phi \in \Omega_\phi$, на котором $\operatorname{Jm} w_{раз}(j\omega_\phi) = 0$ выражение (4.2.11)

$$2\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega_\phi) + \operatorname{Re}^2 w_{раз}(j\omega_\phi) = \Psi(\omega_\phi), \tag{4.Д.31}$$

отсюда

$$\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega_\phi) = -1 \pm \sqrt{1 + \Psi(\omega_\phi)}, \tag{4.Д.32}$$

и следовательно, в силу (4.2.14)

$$\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega_\phi) \le -2, \quad \operatorname{Re} w_{раз}(j\omega_\phi) \ge 0. \tag{4.Д.33}$$

Это означает, что АФЧХ оптимальной системы не пересекает интервала $(-2, 0)$ вещественной оси. Кроме того, второе из неравенств (4.Д.33) свидетельствует о том, что на множестве $\Omega_\phi^{(2)}$ $\operatorname{Re} w_{раз}\left(j\omega_\phi^{(2)}\right) = 0$. Учитывая, что $|\operatorname{Re} w_{раз}(j\omega_\phi)| = a(\omega_\phi)$, и следовательно $a\left(\omega_\phi^{(1)}\right) \le 2$, $a\left(\omega_\phi^{(2)}\right) = 0$, заключаем, используя (2.1.38) что $L \ge 2$.

Если множество $\Omega_\phi^{(1)}$ пусто (АФЧХ оптимальных систем является в соответствии с определением 2.П.3 – АФЧХ первого рода), то

$$L = \frac{1}{\left|\operatorname{Re} w_{раз}\left(j\omega_\phi^{(2)}\right)\right|} \to \infty. \tag{4.Д.34}$$

4.Д.3. Доказательство утверждения 4.2.4

Связь (4.2.8) для системы (4.1.57), (4.1.59), оптимальной в смысле функционала (4.1.55), имеет вид

$$\left[1-\tilde{\tilde{\boldsymbol{c}}}'\left(-Es-\tilde{\tilde{A}}\right)^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}\right]\left[1-\tilde{\tilde{\boldsymbol{c}}}'\left(Es-\tilde{\tilde{A}}\right)^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}\right] = 1+\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}'\left(-Es-\tilde{\tilde{A}}\right)^{-1}{}'\tilde{\tilde{Q}}\left(Es-\tilde{\tilde{A}}\right)^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}. \tag{4.Д.35}$$

Используя выражения (4.1.58), найдём

$$\left(Es-\tilde{\tilde{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(Es-\check{A}\right)^{-1} & \left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}s^{-1} & \left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}s^{-2} & \cdots & \left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}s^{-\psi} \\ 0 & s^{-1} & s^{-2} & \cdots & s^{-\psi} \\ 0 & 0 & s^{-1} & \cdots & s^{-(\psi-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.Д.36}$$

В справедливости этого выражения нетрудно убедиться, умножая его справа (или слева) на матрицу

$$\left(Es-\tilde{\check{A}}\right)=\begin{pmatrix} Es-\check{A} & -\check{\boldsymbol{b}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

В результате такого умножения получаем единичную матрицу. На основе (4.Д.36) получим

$$\left(Es-\tilde{\check{A}}\right)^{-1}\tilde{\check{\boldsymbol{b}}}=\begin{bmatrix}\left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}} \\ 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{\psi-1}\end{bmatrix}\varepsilon_{\psi}^{-1}s^{-\psi},\quad \tilde{\check{H}}\left(Es-\tilde{\check{A}}\right)^{-1}\tilde{\check{\boldsymbol{b}}}=\begin{bmatrix}\check{H}\left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}} \\ 1 \\ \varepsilon_1 s \\ \varepsilon_2 s^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{\psi-1}s^{\psi-1}\end{bmatrix}\varepsilon_{\psi}^{-1}s^{-\psi}, \tag{4.Д.37}$$

где $\check{H}=\operatorname{diag}\left[\ \sqrt{q_{11}}\ \ \sqrt{q_{22}}\ \ \cdots\ \ \sqrt{q_{\gamma\gamma}}\ \middle|\ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \right]$, $\tilde{\check{H}}'\tilde{\check{H}}=\tilde{\check{Q}}$. (4.Д.38)

Очевидно, что

$$\tilde{\check{\boldsymbol{c}}}'\left(Es-\tilde{\check{A}}\right)^{-1}\tilde{\check{\boldsymbol{b}}}=\left[\check{\boldsymbol{c}}'\left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}+\sum_{i=0}^{\psi-1}\check{c}_i s^i\right]\varepsilon_{\psi}^{-1}s^{-\psi},$$

$$\tilde{\check{\boldsymbol{b}}}'\left(-Es-\tilde{\check{A}}\right)^{-1}\tilde{\check{H}}'\tilde{\check{H}}\left(Es-\tilde{\check{A}}\right)^{-1}\tilde{\check{\boldsymbol{b}}}=$$

$$=\left[\check{\boldsymbol{b}}\left(-Es-\check{A}\right)^{-1}\check{H}'\check{H}\left(Es-\check{A}\right)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}+1-\varepsilon_1^2s^2+\cdots+(-1)^{\psi-1}\varepsilon_{\psi-1}^2s^{2(\psi-1)}\right](-1)^{\psi}\varepsilon_{\psi}^{-2}s^{-2\psi}. \tag{4.Д.39}$$

Подставляя эти выражения в (4.Д.35), получим, обозначая $\check{c}(s)=r(s)$ тождество (4.2.33).

4.Д.4. Доказательство утверждения 4.4.1

Представим тождество (4.2.33) с учётом (4.2.32) в виде

$$[d(-s)g(-s)-\tilde{r}(-s)]\,[d(s)g(s)-\tilde{r}(s)]=d(-s)d(s)\varepsilon(s^2)+q(s^2), \tag{4.Д.40}$$

$$\varepsilon(s^2)=1+\sum_{i=1}^{\psi}(-1)^i\varepsilon_i^2s^{2i},\quad q(s^2)=\sum_{i=1}^{\delta}(-1)^{i-1}q_{ii}s^{2(i-1)},\quad \psi\geq\delta. \tag{4.Д.41}$$

При $\varepsilon_i=0$ $\left(i=\overline{1,\psi}\right)$ это тождество примет вид

$$[d(-s)-r(-s)][d(s)-r(s)]=d(-s)d(s)+q(s^2). \tag{4.Д.42}$$

Нужно доказать, что при достаточно малых ε_i^0, удовлетворяющих неравенствам (4.4.43), полиномы $g(s)$ и $\tilde{r}(s)$ удовлетворяющие (4.Д.40), приближаются соответственно к полиномам $\varepsilon^0(s)$ и $r(s)$, где $r(s)$ – решение (4.Д.42).

Запишем с учётом (4.4.41) полином в правой части (4.Д.40)

$$\Delta(s) = d(-s)d(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s) + q(s^2). \tag{4.Д.43}$$

Введём полином

$$\Delta_1(s) = d(-s)d(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s) + q(s^2) + q(s^2)\left[-\varepsilon_1^2 s^2 + \cdots + (-1)^{\psi}\varepsilon_{\psi}^2 s^{2\psi}\right],$$

который при $\varepsilon_i \to 0$ $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$ приближается к (4.Д.43).

Представим правую часть (4.Д.42)

$$d(-s)d(s) + q(s^2) = \delta(-s)\delta(s), \tag{4.Д.44}$$

где $\delta(s)$ – гурвицев полином степени n.

Тогда из равенства $d^u(s) = \delta(s)$ следует

$$r(s) = d(s) - \delta(s). \tag{4.Д.45}$$

С другой стороны представим

$$\Delta_1(s) = \left[d(-s)d(s) + q(s^2)\right]\varepsilon(s^2) = \delta(-s)\delta(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s). \tag{4.Д.46}$$

Сравнивая это выражение с левой частью (4.Д.40) получим тождество

$$d(s)g(s) - \varepsilon(s) = \delta(s)\varepsilon^0(s), \tag{4.Д.47}$$

и используя утверждение 4.1.1 заключаем, что

$$g(s) = \varepsilon^0(s) + o^{\varepsilon}(s), \quad \tilde{r}(s) = r(s) + o^r(s), \tag{4.Д.48}$$

где $o^{\varepsilon}(s)$ и $o^r(s)$ – полиномы степеней ψ_n^{n-1} соответственно имеют при условии (4.4.43) достаточно малые коэффициенты.

4.Д.5. Доказательство утверждения 4.4.3

Введём обозначения

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{l}' & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{4.Д.49}$$

и запишем уравнения (4.4.87), (4.4.88) в более компактной форме

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{b}}u.$$

Условие управляемости пары $(\bar{A}, \bar{\boldsymbol{b}})$

$$\det\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} & \bar{A}\bar{\boldsymbol{b}} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{\boldsymbol{b}} & \bar{A}^{n}\bar{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \neq 0$$

представим с учётом обозначений (4.Д.49) в виде

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} & A^{n}\boldsymbol{b} \\ 0 & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{b} & \boldsymbol{l}'A\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{l}'A^{n-2}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{l}'A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (4.Д.50)$$

Используем теорему Гамильтона-Кэли и запишем

$$A^n + d_{n-1}A^{n-1} + d_{n-2}A^{n-2} + \cdots + d_2A^2 + d_1A + d_0E = 0. \qquad (4.Д.51)$$

Умножим первый столбец матрицы (4.Д.50) на d_0 и прибавим к последнему, затем умножим второй столбец на d_1 и прибавим к последнему, и т.д.

В результате (4.Д.50) примет вид

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{b} & \boldsymbol{l}'A\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{l}'A^{n-2}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{l}'A_*\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{l}'A_*\boldsymbol{b}, \qquad (4.Д.52)$$

где $A_* = \boldsymbol{l}'\left(Ed_1 + Ad_2 + \cdots + A^{n-2}d_{n-1} + A^{n-1}\right)\boldsymbol{b}$.

Покажем, что свободный член полинома $b_z(s) = \boldsymbol{l}'(\widetilde{Es - A})\boldsymbol{b}$ совпадает с $\boldsymbol{l}'A_*\boldsymbol{b}$ $(b_{z,0} = \boldsymbol{l}'A_*\boldsymbol{b})$.

В соответствии с (6.Д.45), (6.Д.46) присоединённая матрица

$$(\widetilde{Es - A}) = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma s^\gamma, \quad \text{где} \quad A_\gamma = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad (\gamma = \overline{0, n-2}), \quad A_{n-1} = E.$$

При $\gamma = 0$ получим из последнего выражения

$$A_0 = Ed_1 + Ad_2 + \cdots + A^{n-2}d_{n-1} + A^{n-1} = A_*. \qquad (4.Д.53)$$

Определитель в правой части (4.Д.52) отличен от нуля, так как первый сомножитель не равен нулю из-за полной управляемости объекта (4.4.87), а второй сомножитель

$$\boldsymbol{l}'A_*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{l}'A_0\boldsymbol{b} = b_{z,0} \neq 0.$$

Равенство (4.1.16) имеет в рассматриваемом случае вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \bar{H}' & \bar{A}'\bar{H}' & \bar{A}^{2\prime}\bar{H}' & \cdots & \bar{A}^{n\prime}\bar{H}' \end{pmatrix} = n, \qquad (4.Д.54)$$

где $\bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{A}' & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\sqrt{q} \end{pmatrix}$.

Вычислим

$$\bar{A}'\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^{2\prime}\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & A'\boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{A}^{n\prime}\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & A^{n-1\prime}\boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если объект (4.4.87) полностью наблюдаем, то следующие n столбцов линейно независимы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A'\boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} A^{n-1\prime}\boldsymbol{l}\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.Д.55}$$

4.Д.6. Доказательство утверждения 4.4.4

Сравним частотные передаточные функции двух систем.

Во-первых, система (4.4.93), (4.4.94) с законом управления

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^{(2)}, \tag{4.Д.56}$$

в котором матрица $\boldsymbol{c}'$ совпадает с матрицей в управлении (4.4.92).

Передаточная функция системы (4.4.93), (4.4.94), (4.Д.56) в разомкнутом состоянии имеет вид

$$w_{ym}(j\omega) = -\boldsymbol{c}'\left[Ej\omega - A^{(4)} - A^{(3)}\left(Ej\omega - A^{(1)}\right)^{-1} A^{(2)}\right]^{-1} \boldsymbol{b}^{(2)}, \tag{4.Д.57}$$

Во-вторых, система (4.4.91), (4.4.92), соответствующая передаточная матрица, которая записывается как

$$w(j\omega) = -\boldsymbol{c}'\left[Ej\omega + A^{(4)} + A^{(3)}\left(A^{(1)}\right)^{-1} A^{(2)}\right]^{-1} \boldsymbol{b}^{(2)}. \tag{4.Д.58}$$

Для удобства сравнения матриц (4.Д.57) и (4.Д.58) представим

$$\begin{aligned}
\left[Ej\omega - A^{(1)}\right]^{-1} &= \left(Ej\omega - \Psi\Lambda\Psi^{-1}\right)^{-1} = \Psi\left(Ej\omega - \Lambda\right)^{-1}\Psi^{-1} = \\
&= \Psi\left[\operatorname{diag}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{j\omega-\lambda_1} & \dfrac{1}{j\omega-\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{j\omega-\lambda_\delta} \end{pmatrix}\right]\Psi^{-1} = \\
&= \Psi\left[\operatorname{diag}\begin{pmatrix} \dfrac{-\lambda_1}{\omega^2+\lambda_1^2} & \dfrac{-\lambda_2}{\omega^2+\lambda_2^2} & \cdots & \dfrac{-\lambda_\delta}{\omega^2+\lambda_\delta^2} \end{pmatrix} + \right. \\
&\left. + j\omega\operatorname{diag}\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\omega^2+\lambda_1^2} & \dfrac{-1}{\omega^2+\lambda_2^2} & \cdots & \dfrac{-1}{\omega^2+\lambda_\delta^2} \end{pmatrix}\right]\Psi^{-1},
\end{aligned} \tag{4.Д.59}$$

где $\delta = n_{ym} - n$.

С учётом (4.Д.59) выражение (4.Д.57) примет вид

$$\begin{aligned}
w_{ym}(j\omega) = -\boldsymbol{c}'\Bigg[&Ej\omega + j\omega A^{(3)}\Psi\operatorname{diag}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega^2+\lambda_1^2} & \dfrac{1}{\omega^2+\lambda_2^2} & \cdots & \dfrac{1}{\omega^2+\lambda_\delta^2} \end{pmatrix}\Psi^{-1}A^{(2)} - \\
&- A^{(4)} + A^{(3)}\Psi\operatorname{diag}\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\omega^2+\lambda_1^2} & \dfrac{\lambda_2}{\omega^2+\lambda_2^2} & \cdots & \dfrac{\lambda_\delta}{\omega^2+\lambda_\delta^2} \end{pmatrix}\Psi^{-1}A^{(2)}\Bigg]\boldsymbol{b}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{4.Д.60}$$

С другой стороны, (4.Д.58) можно записать как

$$w(j\omega) = -\boldsymbol{c}'\left[Ej\omega - A^{(4)} - A^{(3)}\Psi\operatorname{diag}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_\delta} \end{bmatrix}\Psi^{-1}A^{(2)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(2)}. \tag{4.Д.61}$$

Сравним последние два выражения. Нетрудно заметить, что, если $|\lambda_i| \gg \tilde{\omega}_н$, то в диапазоне частот $\omega \in [0, \tilde{\omega}_н]$ – $\dfrac{\lambda_i}{\omega^2+\lambda_i^2} \approx \dfrac{1}{\lambda_i}$, а это означает, что в этом диапазоне вещественные части передаточных матриц (4.Д.60) и (4.Д.61) близки.

Переходя к сравнению мнимых частей этих передаточных матриц убедимся, что при выполнении условия (4.4.104) вторым слагаемым в (4.Д.60) можно пренебречь.

Действительно, матрица

$$j\omega\left[E+A^{(3)}\Psi\,\mathrm{diag}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_1^2} & \dfrac{1}{\lambda_2^2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_\delta^2}\end{pmatrix}\Psi^{-1}A^{(2)}\right]=j\omega(E+R)=j\omega\Gamma\left(E+\Lambda^{(R)}\right)\Gamma^{-1}, \tag{4.Д.62}$$

где

$$\Lambda^{(R)} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}\lambda_1^{(R)} & \lambda_2^{(R)} & \cdots & \lambda_n^{(R)}\end{bmatrix}, \tag{4.Д.63}$$

$$\Gamma\Lambda^{(R)}\Gamma^{-1} = R. \tag{4.Д.64}$$

Если выполнено условие (4.4.104), то

$$j\omega\Gamma\left[E+\Lambda^{(R)}\right]\Gamma^{-1} = j\omega\Gamma\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1+\lambda_1^{(R)} & 1+\lambda_2^{(R)} & \cdots & 1+\lambda_n^{(R)}\end{bmatrix}\Gamma^{-1} \approx Ej\omega. \tag{4.Д.65}$$

4.Д.7. Доказательство утверждений 4.4.5 и 4.4.6

Докажем эти утверждения в более общем случае, когда $\boldsymbol{u}(t)$ – m-мерный вектор управлений. В этом случае уравнения (4.4.105)-(4.4.107) имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u}), \tag{4.Д.66}$$

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{4.Д.67}$$

где $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u})$ – m-мерная вектор-функция, изображение которой по Лапласу

$$\Lambda\{\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u})\} = W_{возм}(s)\boldsymbol{u}(s). \tag{4.Д.68}$$

Будем полагать, что

$$W_{возм}(s) = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}w_{возм.1}(s) & w_{возм.2}(s) & \cdots & w_{возм.m}(s)\end{bmatrix}. \tag{4.Д.69}$$

Найдём условия, накладываемые на матрицу $W_{возм}(s)$, при которых система (4.Д.66), (4.Д.67) сохраняет асимптотическую устойчивость.

Утверждение 4.Д.1. Система (4.Д.66), (4.Д.67) асимптотически устойчива, если

$$W_{возм}(j\omega) + W'_{возм}(-j\omega) > E_m \tag{4.Д.70}$$

(E_m – единичная матрица размеров $m \times m$). ■

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)}$.

Если учесть, что она является решением уравнения (4.1.5), а в (4.Д.67) матрица $C = -PB$, можно записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)} &= \boldsymbol{x}'(\tau)P\boldsymbol{x}(\tau) - \int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}[\boldsymbol{x}'(t)P\boldsymbol{x}(t)]\,dt \geq \\
&\geq -\int\limits_0^\tau \{\boldsymbol{x}'(t)[PA + A'P]\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}'(t)PB\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\,dt = \\
&= -\int\limits_0^\tau \{\boldsymbol{x}'(t)[CC' - Q]\boldsymbol{x}(t) - 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\,dt = \\
&= \int\limits_0^\tau \{\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t) + 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\,dt.
\end{aligned} \tag{4.Д.71}$$

Если

$$\int\limits_0^\infty [-\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t) + 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\,dt > 0, \tag{4.Д.72}$$

то заключаем, полагая в (4.Д.71) $\tau \to \infty$, что

$$\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \int\limits_0^\infty \boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t)\,dt. \tag{4.Д.73}$$

Это в силу положительной определённости матрицы Q и ограниченности $\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)}$ означает асимптотическую устойчивость системы (4.Д.66), (4.Д.67).

Рассмотрим теперь неравенство (4.Д.72), которое является достаточным условием асимптотической устойчивости рассматриваемой системы.

Применим теорему Парсеваля. В соответствии с этой теоремой, если $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ – некоторые m-мерные вектор-функции, то

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \boldsymbol{\alpha}'(-j\omega)\boldsymbol{\beta}(j\omega)\,d\omega, \tag{4.Д.74}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(j\omega)$ и $\boldsymbol{\beta}(j\omega)$ – преобразования Фурье векторов $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ соответственно.

В (4.Д.72) вектор функции $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]$ после преобразования Фурье имеют вид $\boldsymbol{u}(j\omega)$ и $W_{возм}(j\omega)\boldsymbol{u}(j\omega)$.

Таким образом, условие (4.Д.72) записывается как

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty \{-\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t) + 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\,dt = \\
&= \int\limits_{-\infty}^\infty \{\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)] + \boldsymbol{\rho}'[\boldsymbol{u}(t)]\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t)\}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \{\boldsymbol{u}'(-j\omega)[W_{возм}(j\omega) + W'_{возм}(-j\omega) - E_m]\boldsymbol{u}'(j\omega)\}\,d\omega > 0.
\end{aligned} \tag{4.Д.75}$$

Последнее неравенство выполняется при условии (4.Д.70), что и доказывает утверждение 4.4.5.

Утверждение 4.4.6 формулируется для векторного управления следующим образом.

Утверждение 4.Д.2. Система (4.Д.66), (4.Д.67), регулятор (4.Д.67) которой получен на основе процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, асимптотически устойчива, если

$$W_{возм}(j\omega) + W'_{возм}(-j\omega) > 0. \tag{4.Д.76}$$

■

Доказательство. Возьмём квадратичную форму $\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)}$, матрица P, в которой является решением уравнения Ляпунова (4.1.40). Запишем цепочку неравенств (4.Д.71) и получим

$$\boldsymbol{x}^{(0)\prime}P\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \int\limits_0^\tau \{\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\}\, dt.$$

Если

$$\int\limits_0^\infty 2\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{u}(t)]\, dt > 0,$$

то система (4.Д.66), (4.Д.67) асимптотически устойчива. Используем теорему Парсеваля и приходим к неравенству (4.Д.76).

4.Д.8. Доказательство теоремы 4.5.1

Для доказательства сформулируем и докажем несколько важных теорем и утверждений.

Задача 4.Д.1. Пусть имеется полностью управляемый объект (4.1.1) и известен регулятор (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива. Требуется найти положительно-определённую, либо неотрицательную (но удовлетворяющую условию (4.1.16)) матрицу Q, такую, что закон управления (4.1.2) (или что тоже самое система управления (4.1.1), (4.1.2)) является оптимальным в смысле функционала (4.1.3). ■

Это частный случай обратной задачи оптимального управления.

Утверждение 4.Д.3. Необходимым и достаточным условием оптимальности заданного скалярного закона управления (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива, является существование матрицы P, удовлетворяющей следующим условиям

$$P > 0, \tag{4.Д.77}$$

$$-P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^*, \tag{4.Д.78}$$

$$-P(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{*\prime}) - (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{*\prime})'P = Q + \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}. \tag{4.Д.79}$$

■

Необходимость условий этого утверждения почти очевидна.

Действительно, если вектор $\boldsymbol{c}^*$ получен в результате процедуры 4.1.1, то в силу теоремы 4.1.1 выполняется условие (4.Д.?) а равенства (4.Д.78) и (4.Д.79) совпадают с (4.1.4) и (4.1.5) соответственно. Достаточность условий (4.Д.77)-(4.Д.79) следует из единственности матрицы $P > 0$, являющейся решением уравнения Ляпунова (4.Д.51) и единственности $P > 0$, являющейся решением уравнения (4.1.5).

В сущности, целью обратной задачи оптимального управления является нахождение связи между матрицей Q и вектором $\boldsymbol{c}$.

Такая связь, выражаемая условиями (4.Д.49)-(4.Д.51) содержит промежуточную матрицу P. Наиболее простое соотношение между матрицей Q и вектором $\boldsymbol{c}$, не содержащее матрицы P, доставляет условие оптимальности (4.2.9).

Теорема 4.Д.2. Необходимое и достаточное условие оптимальности заданного закона управления (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива состоит в том, чтобы при этом законе управления выполнялось условие (4.2.9).
■

Доказательство теоремы приведено в конце 4.Д.8.

Учитывая, что в (4.2.9) при $Q > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega) > 0 \tag{4.Д.80}$$

можно на основе теоремы получить ещё одно соотношение, выражающее условие оптимальности заданного закона управления.

Следствие 4.Д.1. Если при заданном векторе $\boldsymbol{c}^*$ система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива, то закон управления

$$u = \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x} \tag{4.Д.81}$$

будет оптимальным в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t) + u^2(t)\right]\, dt, \quad Q > 0 \tag{4.Д.82}$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$[1 + w_{раз}(-j\omega)][1 + w_{раз}(j\omega)] > 1. \tag{4.Д.83}$$

■

Переходя к доказательству теоремы 4.5.1 используем тождество (4.5.29), которое при $s = j\omega$ принимает вид

$$[1 + \bar{w}_{раз}(-j\omega)][1 + \bar{w}_{раз}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^{n} |h_i(j\omega)|^2, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{4.Д.84}$$

Из следствия 4.Д.1 заключаем, что теорема 4.5.1 будет доказана, если существует вектор $\tilde{\boldsymbol{l}}$ такой, что выполняется неравенство

$$[1+\bar{w}_{раз}(-j\omega)][1+\bar{w}_{раз}(j\omega)] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \tag{4.Д.85}$$

Процедура построения такого вектора $\tilde{\boldsymbol{l}}$ приведена в п. 4.5.5, что и завершает доказательство.

В заключение докажем теорему 4.Д.2.

Необходимость условий теоремы следует непосредственно из утверждения 4.2.1 и преобразований (4.2.4)-(4.2.7). Действительно, пусть

$$u = \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x} \tag{4.Д.86}$$

является оптимальным в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt \tag{4.Д.87}$$

законом управления объектом

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u. \tag{4.Д.88}$$

Тогда выполняются соотношения (4.Д.77)-(4.Д.79).

Исключая из (4.Д.51) вектор $\boldsymbol{c}^*$ с помощью (4.Д.?), придём к уравнению Риккати. (3.1.5). Осуществляя затем преобразования (4.2.4)-(4.2.7) получим (4.2.9). При этом оптимальная система (4.Д.86), (4.Д.88) асимптотически устойчива в силу (4.Д.26), (4.Д.27).

Переходя к доказательству *достаточности* допустим, что (4.Д.86) – заданный закон управления, при котором система (4.Д.86), (4.Д.88) асимптотически устойчива и пусть выполняется тождество (4.2.9), которое представим в виде

$$[1-\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1-\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = 1+\boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \tag{4.Д.89}$$

Пусть, с другой стороны, найдено управление

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \tag{4.Д.90}$$

для объекта (4.Д.88), оптимальное в смысле функционала (4.Д.87). Вектор $\boldsymbol{c}$ этого управления удовлетворяет как показано выше тождеству

$$[1-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = 1+\boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \tag{4.Д.91}$$

Теорема 4.Д.2 будет доказана, если удастся показать, что из тождества

$$[1-\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1-\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = [1-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)], \quad 0 \leq \omega \leq \infty \tag{4.Д.92}$$

следует

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^*. \tag{4.Д.93}$$

Доказательство последнего равенства опирается на лемму 4.5.1.

Запишем тождество (4.Д.61) после преобразования (4.5.36) как

$$\Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(-j\omega)\Big]\Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega)\Big] = 1 + \check{\boldsymbol{\beta}}'(-j\omega)\check{Q}\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{4.Д.94}$$

Аналогично представляется тождество (4.Д.91) и тогда (4.Д.64) принимает вид

$$\Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(-j\omega)\Big]\Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega)\Big] = \Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(-j\omega)\Big]\Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega)\Big]. \tag{4.Д.95}$$

Учитывая, что

$$[1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(s)] = \Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(s)\Big] = \frac{d^u(s)}{d(s)}, \tag{4.Д.96}$$

$$[1 - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(s)] = \Big[1 - \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(s)\Big] = \frac{d^{u*}(s)}{d(s)}, \tag{4.Д.97}$$

заключаем на основе (4.Д.67)

$$|d^u(j\omega)|^2 = |d^{u*}(j\omega)|^2 = \theta(\omega^2). \tag{4.Д.98}$$

Это означает, что неотрицательный полином $\theta(\omega^2)$ имеет два различных разложения. По условиям теоремы полином $d^{u*}(s)$ – гурвицев, а полином $d^u(s)$ – гурвицев по построению оптимальной системы и следовательно в силу леммы 4.5.1 $d^{u*}(s) = d(s)$. Отсюда следует, что

$$\check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(s) = \check{\boldsymbol{c}}'\check{\boldsymbol{\beta}}(s). \tag{4.Д.99}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в числителях этого равенства, получим

$$\check{\boldsymbol{c}}^* = \check{\boldsymbol{c}}.$$

Заключение к главе 4

Резюмируем изложенное в этой главе.

1. Получены границы (4.2.15)-(4.2.17) запасов устойчивости оптимальных систем, не зависящие от коэффициентов положительно-определённого функционала оптимизации.

2. Установлена связь точности (4.3.8) и качества (4.3.31) регулирования с коэффициентами функционала оптимизации.

3. На этой основе построена процедура 4.4.1 синтеза регуляторов для объектов первого вида по требованиям к точности, качеству и грубости и аналогичная процедура 4.4.2 для объектов второго вида. В обоих случаях объект должен быть устойчив по управлению. Для объектов первого вида это свойство проверяется на основе модели объекта, записанной относительно регулируемой переменной (по полиному $b_z(s)$).

4. Эти результаты легко развиваются для следящих систем (п. 4.4.5).

5. Построена процедура решения обратной задачи АКОР.

Таким образом, результатом этой части книги служат аналитические методы синтеза реализуемых регуляторов одномерных систем по критериям точности и качества при ограниченных внешних возмущениях. Эти методы могут строиться на двух основаниях: модальном либо оптимальном (АКОР) управлении. Первый более удобен для объектов второго вида, а второй – для объектов первого вида. Аналитический синтез, построенный на процедурах АКОР, обладает преимуществом, так как доставляет грубые (по частотным показателям) системы.

Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы

При управлении объектами с неопределёнными параметрами возможны две ситуации.

Во-первых, когда объект самотождественный и его частотные параметры могут быть получены экспериментально до начала работы объекта в системе управления.

Во-вторых, случай несамотождественного объекта, когда частотные параметры определяются и используются в процессе нормальной эксплуатации объекта в системе.

Пусть имеет место первая ситуация и экспериментально получены частотные параметры объекта. Для построения регулятора необходимо трансформировать аналитический синтез, изложенный в предыдущей части, в частотную область так, чтобы коэффициенты уравнений объекта трансформировались в частотные параметры. Полученный таким образом метод (метод частотных параметров) позволит разрешить задачи синтеза по частотным параметрам объекта.

Для несамотождественных объектов этот метод естественно становится основой прямых алгоритмов адаптивного управления.

Цель настоящей части:

- способ экспериментального определения частотных параметров и исследование сходимости процессов фильтрации при внешних возмущениях и помехах измерения,
- частотное представление методов пространства состояний (частотное модальное и частотное оптимальное управление) и построение на их основе метода частотных параметров,
- разработка критериев устойчивости систем, объекты которых заданы частотными параметрами,
- формирование алгоритмов частотного адаптивного управления.

5. Частотные параметры

Экспериментальное определение частотных параметров неустойчивых объектов вызывает определённые трудности. Если известно стабилизирующее управление, то эти трудности легко преодолевается: подадим на вход объекта, замкнутого этим управлением, гармонические сигналы и на выходах фильтров Фурье получим частотные параметры системы, на основе которых вычисляем стабилизированные частотные параметры объекта. Если такое управление неизвестно, то время эксперимента ограничено моментом, в который измерительное устройство ««входит в насыщение»» из-за расходящихся движений объекта. В связи с этим необходимы оценки времени определения частотных параметров (времени фильтрации) с учётом внешних возмущений и помех. Такие оценки позволяют выделить объекты, для которых можно определить частотные параметры.

Вторая проблема заключается в следующем. Внешние возмущения и помехи – неизвестные, ограниченные функции, разложимые в ряд Фурье. Может случиться так, что частота какой-либо гармоники внешнего возмущения или помехи совпадёт с частотой испытательного воздействия. Это приведёт к смещению оценок частотных параметров, которое вызвано методом их определения (методическая ошибка). Необходимо найти способы исключения таких смещений.

Цель этой главы

- способы экспериментального определения частотных параметров неустойчивых объектов,
- условия и оценки времени сходимости к ним,
- схемы экспериментов, исключающие методические ошибки в определении частотных параметров.

5.1. Частотная передаточная функция

5.1.1. Определения

Рассмотрим одномерную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{5.1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \quad u = \boldsymbol{d}_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{f}_p y, \quad \boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_p^{(0)}, \tag{5.1.2}$$

где $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}_p(t)$ – n- и n_p-мерные вектора; A, A_p – матрицы; $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_p$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}_p$ – вектора чисел; f_p – число.

Пусть объект управления (2.1.1) полностью управляем и наблюдаем. Это означает, что

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{d}' & A'\boldsymbol{d}' & \cdots & A^{n-1\prime}\boldsymbol{d}' \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.1.3}$$

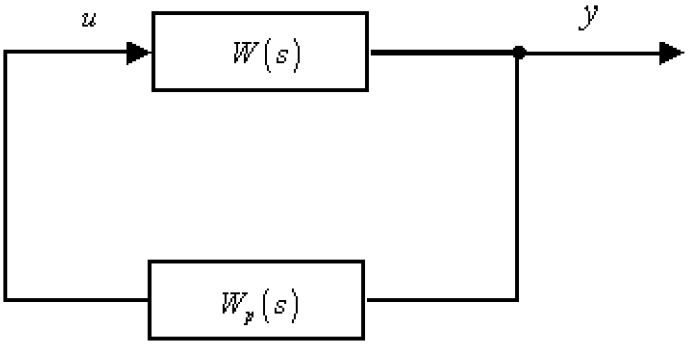

Рис. 5.1.1.

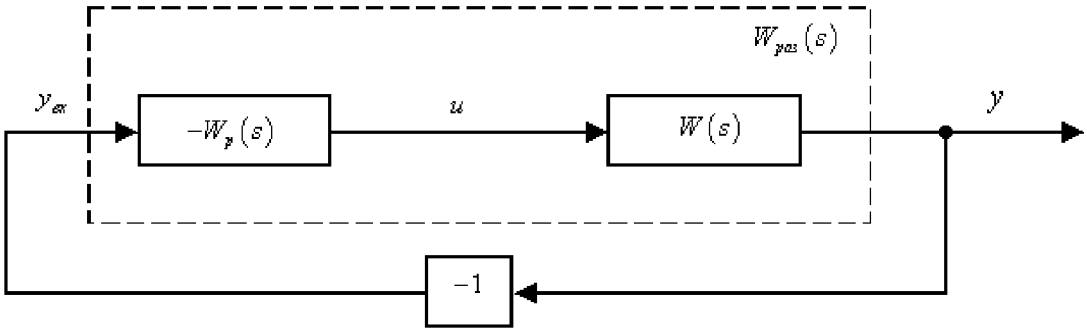

Рис. 5.1.2.

При этих условиях эквивалентным (5.1.1) описанием объекта является его передаточная функция.

Определение 5.1.1. Передаточной функцией $w(s)$ объекта называется выражение, связывающее изображение по Лапласу (при нулевых начальных условиях) его выходной – $y(s)$ – и входной – $u(s)$ – переменных. ■

Для получения $w(s)$ преобразуем (5.1.1) по Лапласу. Тогда при нулевых начальных условиях получим

$$y(s) = \left[\boldsymbol{d}(E_n s - A)^{-1}\boldsymbol{b}\right] u(s). \tag{5.1.4}$$

Таким образом

$$w(s) = \boldsymbol{d}(E_n s - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{5.1.5}$$

Пусть регулятор (5.1.2) полностью управляем сигналом y и полностью наблюдаем по сигналу u. Аналогично получаем передаточную функцию регулятора

$$w_p(s) = \boldsymbol{d}_p(E_{n_p} s - A_p)^{-1}\boldsymbol{b}_p + f_p. \tag{5.1.6}$$

Используем эти передаточные функции и представим структурную схему системы (5.1.1), (5.1.2) в виде эквивалентных схем, показанных на рис. 5.1.1., рис. 5.1.2., рис. 5.1.3.

Определение 5.1.2. Передаточной функцией $w_{раз}(s)$ разомкнутой системы (5.1.1), (5.1.2) называется выражение, связывающее изображение по Лапласу (при

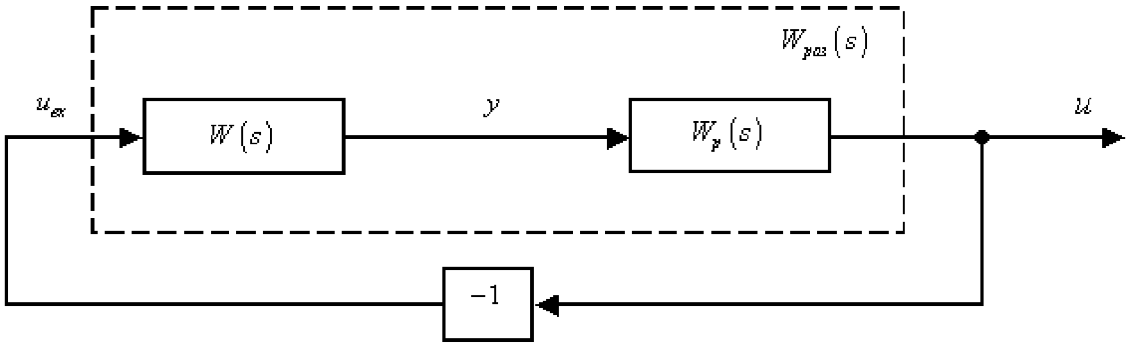

Рис. 5.1.3.

нулевых начальных условиях) сигнала на выходе объекта (или выходе регулятора) с сигналом на входе регулятора (или входе объекта), взятым с обратным знаком. ■

Если использовать структурные схемы рис. 5.1.1.б, рис. 5.1.1.в, то $w_{раз}(s)$ связывает $y(s)$ с $y_{вх}(s)$ (либо $u(s)$ с $u_{вх}(s)$). Непосредственно из этих схем следует, что

$$w_{раз}(s) = -w_p(s)w(s). \tag{5.1.7}$$

Определение 5.1.3. Если в (5.1.5), (5.1.7) положить $s = j\omega$ то они описывают при $0 \le \omega \le \infty$ частотные передаточные функции объекта, регулятора и разомкнутой системы соответственно.

Каждая из этих передаточных функций является комплексной функцией, которую можно представить в различных формах.

Так, для описания объекта будем использовать представление

$$w(j\omega) = r(\omega) + ji(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{5.1.8}$$

где

$$r(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega), \quad i(\omega) = \operatorname{Jm} w(j\omega), \tag{5.1.9}$$

а частотную передаточную функцию разомкнутой системы будем представлять как

$$w_{раз}(j\omega) = a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{5.1.10}$$

где амплитудно-частотная характеристика

$$a(\omega) = |w_{раз}(j\omega)|, \tag{5.1.11}$$

а фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg w_{раз}(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{5.1.12}$$

Если (5.1.1) – объект первого вида (все его переменные состояния измеряются), то *передаточным вектором* объекта называется выражение, которое связывает изображения по Лапласу (при нулевых начальных условиях) его выхода $\boldsymbol{x}(s)$ и входа

$u(s)$. Эта связь имеет вид

$$\boldsymbol{x}(s) = (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}u(s), \tag{5.1.13}$$

и таким образом вектор

$$\boldsymbol{\beta}(s) = (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5.1.14}$$

является передаточным вектором объекта.

Аналогично определяется *частотный передаточный вектор*

$$\boldsymbol{\beta}(j\omega) = (Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{5.1.15}$$

Связь между передаточными функциями и векторами объектов второго и первого видов имеет вид

$$w(j\omega) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\beta}(j\omega). \tag{5.1.16}$$

5.1.2. Смещённая частотная передаточная функция

Частотные передаточные функции введены определением 5.1.3 формально и для неустойчивых объектов или регуляторов не существуют. Рассмотрим это обстоятельство подробнее. Пусть объект (5.1.1) неустойчив и известна *степень неустойчивости объекта*, которую определим наименьшим числом $C_0 > 0$, таким, что

$$\lim_{t\to\infty} e^{-C_0 t}\boldsymbol{x}(t) = 0. \tag{5.1.17}$$

Число C_0 называют иногда *показателем роста вектор-функции* $\boldsymbol{x}(t)$

$$C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.1.18}$$

где s_i – собственные числа матрицы A.

Для неустойчивых объектов преобразование Лапласа вектора состояния объекта (5.1.1)

$$\boldsymbol{x}(s) = \int_0^\infty \boldsymbol{x}(t)e^{-st}\,dt$$

существует лишь при условии, что s – комплексное число $s = \lambda + j\omega$, в котором абсцисса сходимости

$$\lambda \geq C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.1.19}$$

В связи с этим будем использовать смещённую частотную передаточную функцию.

Определение 5.1.4. Передаточная функция $w(\lambda + j\omega)$, в которой λ – фиксированное число, удовлетворявшее неравенству
(5.1.19), а $\omega \in [0, \infty]$, называется *смещённой частотной передаточной функцией.* ■

Для объектов первого вида смещённый частотный передаточный вектор

$$\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}(\lambda + j\omega) = [E(\lambda + j\omega) - A]^{-1}\boldsymbol{b}, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{5.1.20}$$

Передаточные функции и вектора объектов второго и первого видов связаны соотношением

$$w^{\lambda}(j\omega) = w(\lambda + j\omega) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega). \tag{5.1.21}$$

Определение 5.1.5. Функции

$$\begin{array}{lll} r^{\lambda}(\omega) = \operatorname{Re} w^{\lambda}(j\omega) & [\text{либо} \quad r(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega)] & \\ i^{\lambda}(\omega) = \operatorname{Jm} w^{\lambda}(j\omega) & [\text{либо} \quad i(\omega) = \operatorname{Jm} w(j\omega)] & 0 \le \omega \le \infty \end{array}$$

называются *частотными функциями*, а вектора

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega) = \operatorname{Re} \boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega) & [\text{либо} \quad \boldsymbol{r}_x(\omega) = \operatorname{Re} \boldsymbol{\beta}(j\omega)] & \\ \boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega) = \operatorname{Jm} \boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega) & [\text{либо} \quad \boldsymbol{i}_x(\omega) = \operatorname{Jm} \boldsymbol{\beta}(j\omega)] & 0 \le \omega \le \infty \end{array}$$

– *частотными вектор-функциями.* ■

5.1.3. Модель системы разомкнутой на входе объекта*

Запишем уравнения (5.1.1), (5.1.2) в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}u_{вх}, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \quad u = \boldsymbol{d}_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{f}_p y, \tag{5.1.22}$$

$$u_{вх} = -u \tag{5.1.23}$$

Это соответствует схеме, приведённой на рис. 5.1.3.

Опустим последнее уравнение, что физически означает размыкание системы на входе объекта. Уравнение (5.1.22) – это модель *системы, разомкнутой на входе объекта.*

Убедимся, что передаточная функция, связывающая выход регулятора $u(s)$ с входом $u_{вх}(s)$ объекта совпадает с (5.1.7).

Вводя обозначения

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_p \end{bmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{d} & A_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_p\boldsymbol{d} & \boldsymbol{d}_p \end{bmatrix}, \tag{5.1.24}$$

запишем (5.1.22) в компактной форме

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} = A^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{b}^{(1)}u_{вх}, \quad u = \boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)}. \tag{5.1.22$'$}$$

Нетрудно видеть, что

$$u = \boldsymbol{d}^{(1)}\left[Es - A^{(1)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}u_{вх} = \begin{bmatrix} f_p\boldsymbol{d} & \boldsymbol{d}_p \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} Es - A & 0 \\ -\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{d} & Es - A_p \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} u_{вх}.$$

Учитывая тождество

$$\begin{pmatrix} Es - A & 0 \\ -\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{d} & Es - A_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (Es - A)^{-1} & 0 \\ (Es - A_p)^{-1}\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{d}(Es - A)^{-1} & (Es - A_p)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.1.25)$$

получим, с учётом обозначений (5.1.5), (5.1.6),

$$\boldsymbol{d}^{(1)}\left(Es - A^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)} = -w_p(s)w(s) = w_{раз}(s). \quad (5.1.26)$$

Рассмотрим теперь объект первого вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad (5.1.27)$$

замкнутый регулятором

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \quad (5.1.28)$$

где $\boldsymbol{c}'$ – заданный n-мерный вектор чисел.

Запишем эти уравнения в форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u_{вх}, \quad u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}; \quad (5.1.29)$$

$$u_{вх} = -u. \quad (5.1.30)$$

Уравнения (5.1.29) описывают разомкнутую на входе объекта систему (5.1.27), (5.1.29). При этом

$$u = -\boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}u_{вх}.$$

Таким образом, передаточная функция для систем с объектами первого вида

$$w_{раз}(s) = -\boldsymbol{c}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \quad (5.1.31)$$

5.1.4. Модель системы разомкнутой на входе регулятора*

Представим уравнения (5.1.1), (5.1.2) ещё в одной эквивалентной форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{b}_p y_{вх}, \quad u = \boldsymbol{d}_p\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{f}_p y_{вх}, \quad (5.1.32)$$

$$y_{вх} = -y, \quad (5.1.33)$$

которая соответствует схеме рис. 5.1.1.б

Уравнения (5.1.32) – это модель системы, разомкнутой на входе регулятора.

Вводя обозначения

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_p \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_p \\ 0 & A_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{b}\boldsymbol{f}_p \\ -\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad (5.1.34)$$

запишем уравнения (5.1.32) как

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(2)} = A^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{b}^{(2)}y_{вх}, \quad y = \boldsymbol{d}^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}. \quad (5.1.35)$$

Учитывая, что

$$\left[Es-A^{(2)}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} Es-A & -\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_p \\ 0 & Es-A_p \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} (Es-A)^{-1} & (Es-A)^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}_p(Es-A_p)^{-1} \\ 0 & (Es-A_p)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{5.1.36}$$

находим

$$y(s)=\boldsymbol{d}^{(2)}\left[Es-A^{(2)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(2)}y_{вх}=w_{раз}(s)y_{вх}.$$

5.1.5. Стабилизированный частотный передаточный вектор

Рассмотрим вновь преобразование Лапласа неустойчивого объекта

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u. \tag{5.1.37}$$

Такое преобразование существует лишь при условии (5.1.19).

Пусть объект (5.1.37) замкнут *стабилизирующим управлением*

$$u=\boldsymbol{c}^{c\prime}\boldsymbol{x}, \tag{5.1.38}$$

где $\boldsymbol{c}^{c\prime}$ – заданный n-мерный вектор чисел.

Определение 5.1.5. Управление (5.1.38) называется *стабилизирующим*, если система (5.1.37), (5.1.38) асимптотически устойчива. ■

Систему (5.1.37), (5.1.38) можно преобразовать по Лапласу при $s=j\omega$ и тогда существует вектор

$$\boldsymbol{\beta}^c(j\omega)=(Ej\omega-A)^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{5.1.39}$$

связывающий $\boldsymbol{x}(s)$ и $u(s)$ при $s=j\omega$, который будем называть *стабилизированным частотным передаточным вектором* неустойчивого объекта (5.1.37). Действительно, введём передаточный вектор $\boldsymbol{\beta}^o(s)$ объекта замкнутого стабилизирующим регулятором.

Этот вектор найдём из уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left(A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{o\prime}\right)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u_{вх}, \tag{5.1.40}$$

которое следует из (5.1.37), (5.1.38), если в (5.1.37) заменить u на $u+u_{вх}$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{\beta}^o(s)=\left(Es-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{o\prime}\right)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{5.1.41}$$

В соответствии с утверждением 3.4.1 вектора $\boldsymbol{\beta}(s)$ и $\boldsymbol{\beta}^o(s)$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\beta}^o(s)=\boldsymbol{\beta}(s)\left[1+w^o_{раз}(s)\right]^{-1}, \tag{5.1.42}$$

где $w^o_{раз}(s)=-\boldsymbol{c}^{o\prime}(Es-A)^{-1}\boldsymbol{b}$ – передаточная функция разомкнутой системы.

Связь (5.1.42) составляет основу для вычисления вектора $\boldsymbol{\beta}^c(j\omega)$ по экспериментально полученному вектору $\boldsymbol{\beta}^o(j\omega)$.

Действительно, запишем (5.1.42) в виде

$$\boldsymbol{\beta}^o(s) = \boldsymbol{\beta}(s)\left[1 - \boldsymbol{c}^{o\prime}\boldsymbol{\beta}(s)\right]^{-1} = \left[E - \boldsymbol{\beta}(s)\boldsymbol{c}^{o\prime}\right]^{-1}\boldsymbol{\beta}(s). \tag{5.1.43}$$

Умножая это соотношение слева на $[E - \boldsymbol{\beta}(s)\boldsymbol{c}^{o\prime}]$, получим

$$\left[E - \boldsymbol{\beta}(s)\boldsymbol{c}^{o\prime}\right]\boldsymbol{\beta}^o(s) = \boldsymbol{\beta}(s).$$

Отсюда находим выражение

$$\boldsymbol{\beta}^c(j\omega) = \frac{\boldsymbol{\beta}^o(j\omega)}{1 + \boldsymbol{c}^{o\prime}\boldsymbol{\beta}^o(j\omega)}, \tag{5.1.44}$$

которое используется для вычисления $\boldsymbol{\beta}^c(j\omega)$.

Равенство

$$\left[1 - \boldsymbol{c}^{o\prime}\boldsymbol{\beta}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{\beta}(s) = \left[E - \boldsymbol{\beta}(s)\boldsymbol{c}^{o\prime}\right]^{-1}\boldsymbol{\beta}(s),$$

нетрудно проверить, если умножить его слева на

$$\left[E - \boldsymbol{\beta}(s)\boldsymbol{c}^{o\prime}\right]\left[1 - \boldsymbol{c}^{o\prime}\boldsymbol{\beta}(s)\right].$$

Вектор $\boldsymbol{c}^o$ стабилизирующего управления (5.1.38) существует, если объект (5.1.37) полностью управляем или стабилизируем.

Определение 5.1.6. Вектора

$$\boldsymbol{r}^c(\omega) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\beta}^c(j\omega) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{i}^c(\omega) = \mathrm{Jm}\,\boldsymbol{\beta}^c(j\omega) \quad 0 \le \omega \le \infty$$

называются *стабилизированными частотными вектор-функциями.* ■

5.1.6. Стабилизированная частотная передаточная функция

Пусть объект второго вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} \tag{5.1.45}$$

неустойчив, но для него можно указать стабилизирующий регулятор (стабилизирующее управление)

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p^o\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p^o y, \quad u = \boldsymbol{d}_p^o\boldsymbol{x}_p + f_p^o y. \tag{5.1.46}$$

В этом случае существует функция

$$w^c(j\omega) = \boldsymbol{d}_p(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{5.1.47}$$

связывающая $y(s)$ и $u(s)$ при $s = j\omega$, которую будем называть стабилизированной частотной передаточной функцией объекта (5.1.45).

Представляя уравнение (5.1.45) объекта в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{b}u_{вх}, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}_0 \tag{5.1.48}$$

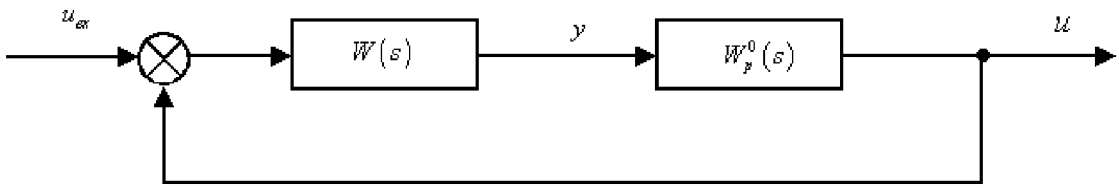

Рис. 5.1.4.

найдём передаточную функцию $w^o(s)$ замкнутой системы, связывающую $y(s)$ и $u_{вх}(s)$.

Для этого воспользуемся схемой, показанной на рис. 5.1.4.

В этой схеме учтено слагаемое $\boldsymbol{b}u_{вх}$ в (5.1.48). Непосредственно из рис. 5.1.4. следует $y(s) = w^o(s)u + \boldsymbol{bx}$. Здесь

$$w^o(s) = \frac{w(s)}{1 + w^o_{раз}(s)}, \tag{5.1.49}$$

где $w^o_{раз}(s) = -w^o_p(s)w(s)$, $w^o_p(s) = \boldsymbol{d}^o_p(Es - A^o_p)^{-1}\boldsymbol{b}^o_p + f^o_p$.

Если экспериментально получена функция $w^o(j\omega)$, то стабилизированная частотная передаточная функция неустойчивого объекта (5.1.45) вычисляется по формуле

$$w^c(j\omega) = \frac{w^o(j\omega)}{1 + w^o(j\omega)w^o_p(j\omega)}, \tag{5.1.50}$$

которая следует из (5.1.49).

В главе 3 было показано, что для полностью управляемого и полностью наблюдаемого объекта (5.1.45) всегда существует стабилизирующий регулятор (5.1.46).

Используя функцию (5.1.50) определим стабилизированные частотные функции объекта

$$r^c(\omega) = \operatorname{Re} w^c(j\omega), \quad i^c(\omega) = \operatorname{Jm} w^c(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{5.1.51}$$

5.2. Частотные параметры (ω-индексы)

5.2.1. Реакция на испытательное воздействие

Пусть все переменные состояния объекта (5.1.1) доступны непосредственному измерению. Тогда он описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}. \tag{5.2.1}$$

Приложим к объекту *экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие*

$$u = e^{\lambda t}\sin\omega t. \tag{5.2.2}$$

Утверждение 5.2.1. Реакция объекта (5.2.1) на воздействие (5.2.2) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{r}^\lambda_x(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}^\lambda_x(\omega)\cos\omega t\right] + e^{\lambda t}\boldsymbol{æ}^0(t), \tag{5.2.3}$$

где

$$\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Re}\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega), \quad \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Jm}\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega), \tag{5.2.4}$$

$$\boldsymbol{æ}^0(t) = e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\left[\boldsymbol{x}^{(0)}e^{-\lambda t_0} - \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t_0 - \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t_0\right]. \tag{5.2.5}$$

Если показатель экспоненты λ больше степени неустойчивости объекта (выполняется неравенство (5.1.19)), то

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{æ}^0(t) = \mathbf{0}. \tag{5.2.6}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.1

Выражение (5.2.3) даёт содержательное представление вектора $\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)$ введённого формально соотношением (5.1.20).

Если объект (5.2.1) – асимптотически устойчив, то можно положить $\lambda = 0$ и тогда решение (5.2.3) примет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{r}_x(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x(\omega)\cos\omega t] + \check{\boldsymbol{æ}}^0(t), \tag{5.2.7}$$

где

$$\boldsymbol{r}_x(\omega) = \operatorname{Re}\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad \boldsymbol{i}_x(\omega) = \operatorname{Jm}\boldsymbol{\beta}(j\omega), \tag{5.2.8}$$

$$\check{\boldsymbol{æ}}^0(t) = e^{A(t-t_0)}\left[\boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{r}_x(\omega)\sin\omega t_0 - \boldsymbol{i}_x(\omega)\cos\omega t_0\right]. \tag{5.2.9}$$

Если (5.1.1) – объект второго вида, то реакция на экспоненциально-гармоническое воздействие (5.2.2) записывается на основе (5.2.3) как

$$y(t) = e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{r}^\lambda(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}^\lambda(\omega)\cos\omega t\right] + e^{\lambda t}\boldsymbol{d}\boldsymbol{æ}^0(t), \tag{5.2.10}$$

где

$$r^\lambda(\omega) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Re}w^\lambda(j\omega), \quad i^\lambda(\omega) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Jm}w^\lambda(j\omega). \tag{5.2.11}$$

Для асимптотически устойчивых объектов получим при $\lambda = 0$

$$y(t) = r(\omega)\sin\omega t + i(\omega)\cos\omega t + \boldsymbol{d}\check{\boldsymbol{æ}}^0(t), \tag{5.2.12}$$

где

$$r(\omega) = \operatorname{Re}w(j\omega), \quad i(\omega) = \operatorname{Jm}w(j\omega). \tag{5.2.13}$$

Умножим реакции (5.2.3), (5.2.10) на $e^{\lambda t}$ и получим *экспоненциально взвешенные функции*

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t)e^{-\lambda t} = \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t + \boldsymbol{æ}^0(t), \tag{5.2.14}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t} = r^\lambda(\omega)\sin\omega t + i^\lambda(\omega)\cos\omega t + \boldsymbol{d}\boldsymbol{æ}^0(t). \tag{5.2.15}$$

5.2.2. Определение частотных параметров (ω-индексов)

Зафиксируем n произвольных частот ω_1, ω_2, ..., ω_n.

Для этих испытательных частот запишем (5.2.15) как

$$\tilde{y}(t) = r^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t + i^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{d}\text{æ}^0(t) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.16}$$

Числа $r^{\lambda}(\omega_k)$ и $i^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ в этом выражении являются частотными параметрами объекта (5.1.1). Они были введены формально определением 1.2.1 как значения частотных функций

$$r^{\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Re} w(\lambda + j\omega_k), \quad i^{\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Jm} w(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.17}$$

Выражение (5.2.16) даёт возможность содержательного определения частотных параметров.

Определение 5.2.1. Осуществим n экспериментов с объектом (5.1.1). В первом эксперименте приложим ко входу объекта экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t}\sin\omega_1 t. \tag{5.2.18}$$

Измеряемый выходной сигнал $y(t)$ умножим на $e^{-\lambda t}$ и, после затухания переходных процессов, найдём коэффициенты при $\sin\omega_1 t$ и $\cos\omega_1 t$ в сигнале $\tilde{y}(t)$. Повторим эксперимент для $\omega = \omega_2$, $\omega = \omega_3$ и т.д. После n экспериментов получим $2n$ чисел $r^{\lambda}(\omega_k)$ и $i^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, которые называются *частотными параметрами* или *ω-индексами* объекта (5.1.1). ■

Введём несколько понятий, позволяющих дать более строгое содержательное определение частотных параметров (ω-индексов).

Определение 5.2.2. Произвольный набор из n различных частот ω_1, ω_2, ..., ω_n из интервала $(0,\infty)$ называется *ω-тестом.* ■

Определение 5.2.3. Положительное число λ, удовлетворяющее неравенству (5.1.19), называется *λ-смещением.* ■

Определение 5.2.4. Частотные параметры (ω-индексы) объекта (5.1.1) – это значения частотных функций на ω-тесте и λ-смещении.

Значения частотных вектор-функций объекта (5.1.21) на ω-тесте и λ-смещении называются векторами частотных параметров (векторами ω-индексов). ■

Иногда объект будет подвергаться более чем n экспериментам.

Если это $2n$ – экспериментов, то набор $2n$ различных частот будем называть *2-х кратным ω-тестом.*

Соответствующие этим частотам значения частотных функций называется *2-х кратными частотными параметрами* (2-х кратными ω-индексами). Если число экспериментов больше n, но меньше $2n$, то будем называть такой набор испытательных частот расширенным ω-тестом, а значения частотных функций – *расширенными частотными параметрами (расширенными ω-индексами).*

Пример 5.2.1. Найдём ω-индексы велосипеда, описываемого уравнением (1.3.6) с известными коэффициентами. Последнее позволяет использовать для нахождения ω-индексов формальное определение 5.2.17. В п. 5.4 будут получены частотные параметры велосипеда для случая неизвестных коэффициентов уравнения (1.3.6). Для этой цели применяются фильтр Фурье и локальный фильтр.

Пусть конструктивные параметры велосипеда

$$c = 2 \text{ м}, \quad h = 0.6 \text{ м}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad v = 6 \text{ м/с}. \tag{5.2.19}$$

На основе формул (1.3.7) получим коэффициенты уравнений (1.3.6)

$$d_0 = -16\ 1/c^2, \quad b_0 = 30\ 1/c^2, \quad b_1 = 5\ 1/c. \tag{5.2.20}$$

При отсутствии внешних возмущений уравнения велосипеда имеют вид

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u. \tag{5.2.21}$$

Рассматриваемый объект неустойчив. Степень его неустойчивости

$$C_0 = \sqrt{|d_0|} = 4. \tag{5.2.22}$$

Примем

$$\lambda = 6. \tag{5.2.23}$$

Найдём смещённую передаточную функцию

$$\begin{gathered} w(\lambda + j\omega) = \frac{b_1(\lambda + j\omega) + b_0}{(\lambda + j\omega)^2 + d_0} = \\ = \frac{(b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 - \omega^2 + d_0) + 2b_1\lambda\omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega^2} + j\frac{b_1\omega(\lambda^2 - \omega^2 + d_0) - 2\lambda\omega(b_1\lambda + b_0)}{(\lambda^2 - \omega^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega^2}. \end{gathered} \tag{5.2.24}$$

Таким образом, частотные параметры велосипеда

$$r^\lambda(\omega_k) = \frac{(b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0) + 2b_1\lambda\omega_k^2}{(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega_k^2} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.2.25}$$

$$i^\lambda(\omega_k) = \frac{b_1\omega_k(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0) - 2\lambda\omega_k(b_1\lambda + b_0)}{(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega_k^2} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.2.26}$$

Полагая в качестве ω-теста

$$\omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \tag{5.2.27}$$

найдём ω-индексы

$$r^\lambda(\omega_1) = 0.85, \quad r^\lambda(\omega_2) = 0.22, \tag{5.2.28}$$

$$i^\lambda(\omega_1) = -1.4, \quad i^\lambda(\omega_2) = -0.88. \tag{5.2.29}$$

■

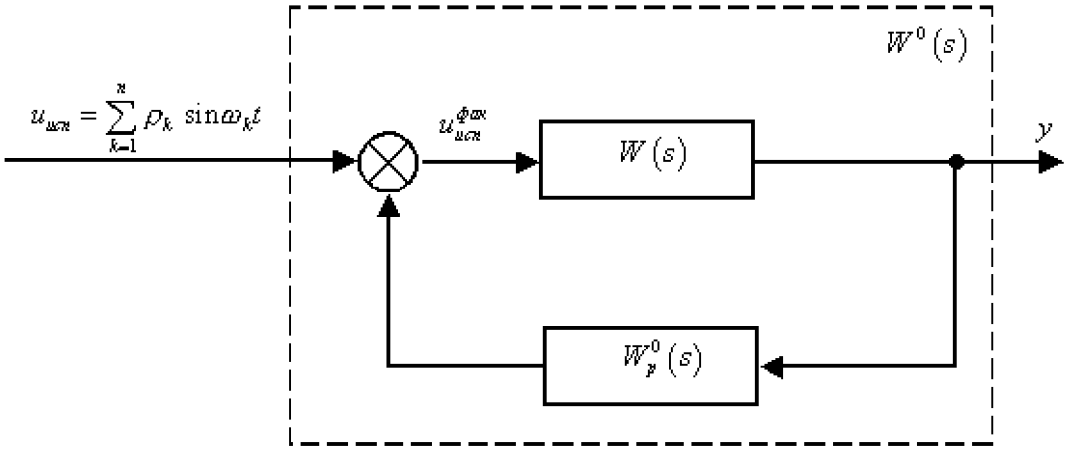

Рис. 5.2.1.

5.2.3. Стабилизированные ω-индексы (1-й способ вычисления)

Пусть для неустойчивого объекта (5.1.1) можно указать стабилизирующий регулятор (5.1.46).

Замкнутая таким регулятором асимптотически устойчивая система приведена на рис. 5.2.1., где $w_p^o(s) = \boldsymbol{d}_p^o(Es - A_p^o)^{-1}\boldsymbol{b}_p^o + f_p^o$.

Определим значения частотных функций этой системы на n частотах при нулевом λ-смещении

$$r^o(\omega_k) = \operatorname{Re} w^o(j\omega_k), \quad i^o(\omega_k) = \operatorname{Jm} w^o(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.30}$$

Используем выражения (5.1.50), (5.1.51) и найдём числа

$$r^c(\omega_k) = \operatorname{Re} \frac{r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)}{1 + [r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)] \cdot w_p^o(j\omega_k)} \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.2.31}$$

$$i^c(\omega_k) = \operatorname{Jm} \frac{r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)}{1 + [r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)] \cdot w_p^o(j\omega_k)} \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.2.32}$$

которые называются *стабилизированными частотными параметрами* (*стабилизированными ω-индексами*) неустойчивого объекта.

Пример 5.2.2. Пусть для велосипеда (5.2.21) известен стабилизирующий регулятор

$$g_1^o \dot{u} + g_0^o u = r_1^o \dot{y} + r_0^o y \tag{5.2.33}$$

с параметрами

$$g_1^o = 1, \quad g_0^o = 8; \qquad r_1^o = -3, \quad r_0^o = -13. \tag{5.2.34}$$

Передаточная функция велосипеда, замкнутого этим регулятором имеет в соответствии с (5.1.49), вид

$$w^o(s) = \frac{(b_1 s + b_0)(g_1^o s + g_0^o)}{(s^2 + d_0)(g_1^o s + g_0^o) - (r_1^o s + r_0^o)(b_1 s + b_0)}. \tag{5.2.35}$$

При численных значениях (5.2.20), (5.2.34) вычислим, полагая $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 6$,

$$r^o(\omega_1) = 0.597, \quad r^o(\omega_2) = 0.321, \tag{5.2.36}$$

$$i^o(\omega_1) = -0.416, \quad i^o(\omega_2) = -0.391. \tag{5.2.37}$$

Подставим эти числа в (5.2.31), (5.2.32) и получим стабилизированные частотные параметры велосипеда

$$r^c(\omega_1) = -1.2, \quad r^c(\omega_2) = -0.577, \tag{5.2.38}$$

$$i^c(\omega_1) = -0.6, \quad i^c(\omega_2) = -0.577. \tag{5.2.39}$$

■

5.2.4. Частотные параметры входа и выхода при $(\lambda = 0)$

Приведём второй способ вычисления стабилизированных ω -индексов. Он основан на частотных параметрах входа и выхода объекта.

Вновь рассмотрим схему, приведённую на рис. 5.2.1. В этой схеме на вход объекта в установившемся режиме поступает сигнал

$$u_{ucn}^{\text{ф}\,ak}(t) = u_{ucn}(t) + u(t) = \sum_{k=1}^{n}[\nu_k \sin\omega_k t + \gamma_k \cos\omega_k t], \tag{5.2.40}$$

в котором коэффициенты ν_k , γ_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ зависят от испытательных частот.

В установившемся режиме выход объекта

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n}[\alpha_k \sin\omega_k t + \beta_k \cos\omega_k t]. \tag{5.2.41}$$

Если в (5.2.40) $\nu_k = 1$ и $\gamma_k = 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, то коэффициенты в (5.2.41) совпадают с частотными параметрами объекта

$$\alpha_k = r(\omega_k), \quad \beta_k = i(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.42}$$

Определение 5.2.5. Коэффициенты ν_k и γ_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ входного воздействия (5.2.40) называются *частотными параметрами (ω -индексами) входа объекта.* ■

Определение 5.2.6. Коэффициенты α_k и β_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ при гармониках выхода (5.2.41) объекта, возбуждённого сигналом (5.2.40) называются *частотными параметрами (ω -индексами) выхода объекта.* ■

Утверждение 5.2.2. Частотные параметры объекта связаны ω -индексами его входа и выхода соотношениями

$$r^c(\omega_k) = \frac{\nu_k\alpha_k + \gamma_k\beta_k}{\nu_k^2 + \gamma_k^2}, \quad i^c(\omega_k) = \frac{\nu_k\beta_k - \gamma_k\alpha_k}{\nu_k^2 + \gamma_k^2} \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.43}$$

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.2.

Таким образом второй способ вычисления стабилизированных ω-индексов объекта заключается в следующем: экспериментально определяем частотные параметры входа ν_k, γ_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и выхода α_k, β_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ объекта, затем по формулам (5.2.43) находим ω-индексы.

Аналогично определяются ω-индексы входа п выхода регулятора.

Определение 5.2.7. Коэффициенты α_k^u, β_k^u $\left(k=\overline{1,n}\right)$ при гармониках выхода регулятора

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k^u\sin\omega_k t+\beta_k^u\cos\omega_k t\right] \tag{5.2.44}$$

называются *ω-индексами (частотными параметрами) выхода регулятора.* ■

Частотные параметры входа регулятора ν_k^u и γ_k^u $\left(k=\overline{1,n}\right)$ совпадают с частотными параметрами выхода объекта

$$\nu_k^u=\alpha_k,\quad \gamma_k^u=\beta_k\quad k=\overline{1,n}. \tag{5.2.45}$$

Заметим, что частотные параметры входа объекта связаны с параметрами выхода регулятора соотношениями

$$\nu_k=\alpha_k^u+\rho_k,\quad \gamma_k=\beta_k^u\quad k=\overline{1,n}. \tag{5.2.46}$$

Выразим ω-индексы выхода объекта и регулятора через параметры передаточных функций объекта и регулятора.

Из схемы на рис. 5.2.1. следует

$$u=w^u(s)u_{ucn},\quad y=w^o(s)u_{ucn}, \tag{5.2.47}$$

где

$$w^u(s)=\frac{w(s)w_p^o(s)}{1-w(s)w_p^o(s)},\quad w^o(s)=\frac{w(s)}{1-w(s)w_p^o(s)}. \tag{5.2.48}$$

Очевидно, что

$$\alpha_k=\operatorname{Re}w^o(j\omega_k),\quad \beta_k=\operatorname{Jm}w^o(j\omega_k)\quad k=\overline{1,n}, \tag{5.2.49}$$

$$\alpha_k^u=\operatorname{Re}w^u(j\omega_k),\quad \beta_k^u=\operatorname{Jm}w^u(j\omega_k)\quad k=\overline{1,n}. \tag{5.2.50}$$

Пример 5.2.3. Найдём стабилизированные ω-индексы велосипеда, используя описанный способ.

Сформируем

$$w^u(s)=\frac{(b_1s+b_0)(r_1^os+r_0^o)}{(s^2+d_0)(g_1^os+g_0^o)-(r_1^os+r_0^o)(b_1s+b_0)}, \tag{5.2.51}$$

и вычислим при $\omega_1=3$ и $\omega_2=6$

$$\begin{aligned}\alpha_1^u&=-1.259, & \beta_1^u&=0.476;\\ \alpha_2^u&=-0.939, & \beta_2^u&=0.616.\end{aligned} \tag{5.2.52}$$

Затем на основе (5.2.46) находим

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -0.259, \qquad & \gamma_1 &= 0.476; \\ \nu_2 &= 0.061, \qquad & \gamma_2 &= 0.618. \end{aligned} \tag{5.2.53}$$

Представим (5.2.36), (5.2.37) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r^o(\omega_1) = 0.597, \qquad & \beta_1 &= i^o(\omega_1) = -0.416; \\ \alpha_2 &= r^o(\omega_2) = 0.321, \qquad & \beta_2 &= i^o(\omega_2) = -0.320. \end{aligned}$$

Тогда по формулам (5.2.43) получим

$$\begin{aligned} r^c(\omega_1) &= -1.2, \qquad & i^c(\omega_1) &= -0.6; \\ r^c(\omega_2) &= -0.577, \qquad & i^c(\omega_2) &= -0.577. \end{aligned} \tag{5.2.54}$$

■

5.2.5. Частотные параметры входа и выхода при $(\lambda \neq 0)$

Пусть в схеме, приведённой на рис 5.2.1 воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k t. \tag{5.2.55}$$

Допустим также, что регулятор не обязательно стабилизирующий (поэтому верхний индекс в обозначении его передаточной функции допустим: $w_p^o(s) = w_p(s)$).

Экспериментально-взвешенный выход объекта имеет (при достаточно большом t) вид

$$\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_k^\lambda \sin \omega_k t + \beta_k^\lambda \cos \omega_k t\right]. \tag{5.2.56}$$

Здесь α_k^λ и β_k^λ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – частотные параметры выхода объекта. Они связаны с передаточными функциями системы соотношениями, аналогичными (5.2.49), (5.2.50)

$$\alpha_k^\lambda = r^{o\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Re} w^o(\lambda + j\omega_k), \quad \beta_k^\lambda = i^{o\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Jm} w^o(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.57}$$

Экспоненциально-взвешенный вход объекта

$$\tilde{u}_{ucn}^{\text{ф ак}}(t) = u_{ucn}^{\text{ф ак}}(t)e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{n} \left[\nu_k^\lambda \sin \omega_k t + \gamma_k^\lambda \cos \omega_k t\right], \tag{5.2.58}$$

где $\nu_k = 1$ и $\gamma_k = 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – частотные параметры входа объекта.

Очевидно, что частотные параметры объекта

$$r^\lambda(\omega_k) = \frac{\nu_k^\lambda \alpha_k^\lambda + \gamma_k^\lambda \beta_k^\lambda}{(\nu_k^\lambda)^2 + (\gamma_k^\lambda)^2}, \quad i^\lambda(\omega_k) = \frac{\nu_k^\lambda \beta_k^\lambda - \gamma_k^\lambda \alpha_k^\lambda}{(\nu_k^\lambda)^2 + (\gamma_k^\lambda)^2} \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2.59}$$

5.2.6. Функции перехода к частотным параметрам*

Рассмотрим выражение (5.2.7), полагая, для простоты $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Тогда оно примет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{r}_x(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x(\omega)\cos\omega t - \left[\boldsymbol{r}_x^A(\omega)\sin\omega t_0 + \boldsymbol{i}_x^A(\omega)\cos\omega t_0\right], \tag{5.2.60}$$

где

$$\boldsymbol{r}_x^A(\omega) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{r}_x(\omega), \quad \boldsymbol{i}_x^A(\omega) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{i}_x(\omega). \tag{5.2.61}$$

Это соотношение можно представить так

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = &\left[\boldsymbol{r}_x(\omega) - \boldsymbol{r}_x^A(\omega)\cos\omega(t-t_0) - \boldsymbol{i}_x^A(\omega)\sin\omega(t-t_0)\right]\sin\omega t + \\ &+ \left[\boldsymbol{i}_x(\omega) + \boldsymbol{r}_x^A(\omega)\sin\omega(t-t_0) - \boldsymbol{i}_x^A(\omega)\cos\omega(t-t_0)\right]\cos\omega t = \\ &= \boldsymbol{r}_x(t,\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x(t,\omega)\cos\omega t.\end{aligned} \tag{5.2.62}$$

Здесь

$$\boldsymbol{r}_x(t,\omega) = \boldsymbol{r}_x(\omega) - e^{A(t-t_0)}\left[\boldsymbol{r}_x(\omega)\cos\omega(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x(\omega)\sin\omega(t-t_0)\right], \tag{5.2.63}$$

$$\boldsymbol{i}_x(t,\omega) = \boldsymbol{i}_x(\omega) - e^{A(t-t_0)}\left[-\boldsymbol{r}_x(\omega)\sin\omega(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x(\omega)\cos\omega(t-t_0)\right]. \tag{5.2.64}$$

Умножим эти выражения на вектор строку $\boldsymbol{d}$ и зафиксируем ω. Тогда для объекта (5.1.1) получим

$$r^\lambda(t,\omega_k) = r^\lambda(\omega_k) - \boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k(t-t_0)\right] \quad k=\overline{1,n}, \tag{5.2.65}$$

$$i^\lambda(t,\omega_k) = i^\lambda(\omega_k) - \boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\left[-\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k(t-t_0)\right] \quad k=\overline{1,n}, \tag{5.2.66}$$

с учётом которых можно записать (2.2.15) при $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{0}$ как

$$\tilde{y}(t) = r^\lambda(t,\omega_k)\sin\omega_k t + i^\lambda(t,\omega_k)\cos\omega_k t. \tag{5.2.67}$$

Определение 5.2.8. Функции $r^\lambda(t,\omega_k)$, $i^\lambda(t,\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ называются *функциями перехода к частотным параметрам* (или просто функциями перехода). ■

Аналогично определяются вектор-функции перехода для объекта (5.2.1). Действительно, из (5.2.63) и (5.2.64) следует

$$\boldsymbol{r}_x^\lambda(t,\omega_k) = \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k) - e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k(t-t_0)\right] \quad k=\overline{1,n} \tag{5.2.68}$$

$$\boldsymbol{i}_x^\lambda(t,\omega_k) = \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k) - e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\left[-\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k(t-t_0)\right] \quad k=\overline{1,n} \tag{5.2.69}$$

Очевидно, что функции перехода сходятся при $\lambda > C_0$ к частотным параметрам

$$\lim_{t\to\infty} r^\lambda(t,\omega_k) = r^\lambda(\omega_k), \quad \lim_{t\to\infty} i^\lambda(t,\omega_k) = i^\lambda(\omega_k) \quad k=\overline{1,n}. \tag{5.2.70}$$

Соотношения (5.2.65), (5.2.66), которые определяют функции перехода, были получены формальными преобразованиями (5.2.62). Опишем на примере объекта первого порядка способ более естественного (содержательного) построения выражений (5.2.65), (5.2.66).

Пример 5.2.4. Рассмотрим объект

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(t_0) = 0, \tag{5.2.71}$$

в котором $x(t)$, a, b – скаляры.

Смещённая частотная передаточная функция объекта имеет в соответствии с (5.1.20) вид

$$\beta^\lambda(j\omega) = \frac{b}{j\omega + \lambda - a} = \frac{b(\lambda - a)}{(\lambda - a)^2 + \omega^2} + j\frac{-b\omega}{(\lambda - a)^2 + \omega^2} = r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega). \tag{5.2.72}$$

Таким образом, частотные параметры объекта (5.2.71)

$$r^\lambda(\omega_1) = \frac{b(\lambda - a)}{(\lambda - a)^2 + \omega_1^2}, \quad i^\lambda(\omega_1) = \frac{-b\omega_1}{(\lambda - a)^2 + \omega_1^2}. \tag{5.2.73}$$

Найдём функции перехода к этим ω -индексам, обозначая их для сокращения как $r(t)$ и $i(t)$ вместо $r^\lambda(t, \omega_1)$ и $i^\lambda(t, \omega_1)$.

Решение уравнения

$$\dot{x} = ax + be^{\lambda t}\sin\omega t \tag{5.2.74}$$

будем искать в виде

$$x(t) = r(t)\sin\omega t + i(t)\cos\omega t. \tag{5.2.75}$$

Подставляя (2.2.75) в (2.2.74) и сравнивая коэффициенты при соответствующих гармониках, получим дифференциальные уравнения для функций перехода

$$\dot{r} = \mu r + \omega i + b, \quad \dot{i} = -\omega r + \mu i, \quad r(t_0) = i(t_0) = 0, \quad \mu = a - \lambda. \tag{5.2.76}$$

Фундаментальная матрица этой системы имеет, как показано в п. 5.П.1, вид (5.П.18)

$$x(t) = e^{\mu t}\begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу в формулу Коши, запишем

$$\begin{bmatrix} r(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \\ \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \end{pmatrix} \cdot e^{\mu(t-\tau)} \cdot \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} d\tau =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b\cos(t-\tau) \\ -e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b\sin(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau. \tag{5.2.77}$$

Рассмотрим подробнее выражение

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b \cos\omega(t-\tau)\, d\tau = \\
&= e^{(a-\lambda)t} b \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(a-\lambda)\tau} (\sin\omega t \sin\omega\tau + \cos\omega t \cos\omega\tau)\, d\tau = \\
&= e^{(a-\lambda)t} b \left[\sin\omega t \int\limits_{t_0}^{t} e^{(\lambda-a)\tau} \sin\omega\tau\, d\tau + \cos\omega t \int\limits_{t_0}^{t} e^{(\lambda-a)\tau} \cos\omega\tau\, d\tau \right] = \\
&= e^{(a-\lambda)t} b \left\{ \sin\omega t \left[\frac{e^{(\lambda-a)\tau}}{(\lambda-a)^2+\omega^2} [(\lambda-a)\sin\omega\tau - \omega\cos\omega\tau] \right] \Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t} + \right. \\
&+ \left. \cos\omega t \left[\frac{e^{(\lambda-a)\tau}}{(\lambda-a)^2+\omega^2} [\omega\sin\omega\tau - (\lambda-a)\cos\omega\tau] \right] \Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t} \right\} = \\
&= \frac{b}{(\lambda-a)^2+\omega^2} \left\{ (\lambda-a) - e^{(a-\lambda)(t-t_0)} [(\lambda-a)\cos\omega(t-t_0) - \omega\sin\omega(t-t_0)] \right\} = \\
&= r^{\lambda}(\omega) - e^{(a-\lambda)(t-t_0)} \left[r^{\lambda}(\omega)\cos\omega(t-t_0) + i^{\lambda}(\omega)\sin\omega(t-t_0) \right].
\end{aligned}
\tag{5.2.78}
$$

Сравнивая последнее выражение с правой частью (2.2.65) заключаем, что при $\omega = \omega_1$ они совпадают. Аналогично доказывается, что $i^{\lambda}(t, \omega_1)$, определяемое (2.2.66) совпадает с решением $i(t)$. ■

5.2.7. Время сходимости к частотным параметрам*

Если (5.2.1) является асимптотически устойчивым объектом первого порядка $(n = 1)$, то функции перехода при $\lambda = 0$ принимают особенно простой вид. Так, в частности

$$
\boldsymbol{r}_x(t, \omega_1) = \boldsymbol{r}_x(\omega_1) - e^{a(t-t_0)} [\boldsymbol{r}_x(\omega_1)\cos\omega_1(t-t_0) + \boldsymbol{i}_x(\omega_1)\sin\omega_1(t-t_0)]. \tag{5.2.79}
$$

Из (5.2.79) следует, что время сходимости функции перехода по ω-индексу $\boldsymbol{r}_x(\omega_1)$ определяется коэффициентом a и значениями частотных параметров.

Определение 5.2.9. *Временем сходимости к частотным параметрам* (t_{cx}) называется время, через которое модуль разности между частотными параметрами и соответствующими функциями перехода становится меньше некоторого наперёд заданного числа $\varepsilon_{cx} > 0$.

Для объектов первого вида это означает, что

$$
\left| r_{xl}^{\lambda}(t_{cx}, \omega_k) - r_{xl}^{\lambda}(\omega_k) \right| \le \varepsilon_{cx}, \quad \left| i_{xl}^{\lambda}(t_{cx}, \omega_k) - i_{xl}^{\lambda}(\omega_k) \right| \le \varepsilon_{cx} \quad l, k = \overline{1, n}, \tag{5.2.80}
$$

где r_{xl} и i_{xl} – компоненты векторов $\boldsymbol{r}_x$ и $\boldsymbol{i}_x$, а для объектов (5.1.1)

$$
\left| r^{\lambda}(t_{cx}, \omega_k) - r^{\lambda}(\omega_k) \right| \le \varepsilon_{cx}, \quad \left| i^{\lambda}(t_{cx}, \omega_k) - i^{\lambda}(\omega_k) \right| \le \varepsilon_{cx} \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.2.81}
$$

■

Ограничиваясь для простоты рассмотрением лишь $\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)$ и $r^\lambda(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ запишем последние неравенства, используя (5.2.68), (5.2.65), в явной форме

$$\left|\left\{e^{(A-E\lambda)t_{cx}}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t_{cx}+\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t_{cx}\right]\right\}_l\right|\le\varepsilon_{cx}\quad l,k=\overline{1,n},\tag{5.2.82}$$

$$\left|\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)t_{cx}}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t_{cx}+\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t_{cx}\right]\right|\le\varepsilon_{cx}\quad k=\overline{1,n},\tag{5.2.83}$$

где $\{\cdot\}_l$ – l-тая компонента вектора в фигурных скобках.

Для асимптотически устойчивых объектов время t_{cx}, определяемое из (5.2.82) либо (5.2.83) при $\lambda=0$ будем называть *естественным временем сходимости* к частотным параметрам. Это время, обозначаемое далее как t_{cx}^0, определяется внутренними свойствами объекта.

Время сходимости можно существенно сократить по сравнению с естественным, если использовать экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие и экспоненциально-взвешенную функцию выхода.

Убедимся в этом на примере объекта первого порядка. Неравенства (5.2.80) при $\lambda=0$ имеют, как следует из (5.2.79), вид

$$e^{at_{cx}^0}\left|r_x(\omega_1)\cos\omega_1 t_{cx}^0+i_x(\omega_1)\sin\omega_1 t_{cx}^0\right|\le\varepsilon_{cx}.\tag{5.2.84}$$

Если ввести, амплитуду

$$a_x(\omega_1)=\sqrt{r_x^2(\omega_1)+i_x^2(\omega_1)},$$

то из (5.2.84) следует оценка

$$t_{cx}^0\le\frac{\ln\varepsilon_{cx}-\ln a_x(\omega_1)}{a}.\tag{5.2.85}$$

Если используется экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие, то из (5.2.82) следует при $n=1$

$$\left|e^{(a-\lambda)t_{cx}}a_x^\lambda(\omega_1)\sin\left(\omega_1 t+\varphi^\lambda(\omega_1)\right)\right|\le\varepsilon_{cx},$$

где $a_x^\lambda=\sqrt{r_x^{\lambda 2}+i_x^{\lambda 2}}$, $\varphi^\lambda=\operatorname{arctg}\dfrac{i_x^\lambda}{r_x^\lambda}$, и оценка t_{cx} принимает вид

$$t_{cx}^\lambda=\frac{\ln\varepsilon_{cx}-\ln a_x^\lambda(\omega_1)}{a-\lambda}.\tag{5.2.86}$$

Проанализируем это выражение при $\lambda\to\infty$.

Пусть выполнено естественное условие

$$\sqrt{r^{\lambda 2}(\omega_k)+i^{\lambda 2}(\omega_k)}>\varepsilon_{cx}>0\quad k=\overline{1,n},\tag{5.2.87}$$

которое для рассматриваемого случая $n=1$ принимает вид $a_x^\lambda>\varepsilon_{cx}$.

Из выражения (5.2.73) следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a_x^\lambda = 0$. Учитывая это, заключаем на основе (5.2.86), что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} t_{cx}^\lambda = 0$.

Это свойство сохраняется и для неустойчивых объектов. В общем случае, когда $n > 1$, справедливо аналогичное утверждение.

Теорема 5.2.1. Время сходимости t_{cx}^λ к частотным параметрам может быть сделано сколь угодно малым, если выбрать достаточно большим показатель экспоненты λ в экспоненциально-гармоническом испытательном воздействии. ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.3.

5.2.8. Частотные параметры разомкнутой системы*

Разомкнутая по входу объекта система (5.1.1), (5.1.2) описывается уравнениями (5.1.22). В компактной форме эти уравнения записываются, в соответствии с (5.1.24), как

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} = A^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{b}^{(1)}u_{\text{бх}}, \quad u = \boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)}. \tag{5.2.88}$$

Используя утверждение 5.2.1, заключаем, что при

$$u_{\text{бх}} = e^{\lambda t}\sin\omega t \tag{5.2.89}$$

объединённый вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$ имеет вид

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{r}_x^{(1)}(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x^{(1)}(\omega)\cos\omega t\right] + e^{\lambda t}\boldsymbol{æ}^{(1)}(t), \tag{5.2.90}$$

где

$$\boldsymbol{r}_x^{(1)}(\omega) = \operatorname{Re}\boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega), \quad \boldsymbol{i}_x^{(1)}(\omega) = \operatorname{Jm}\boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega), \tag{5.2.91}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega) = \left[Es - A^{(1)}\right]^{-1}\boldsymbol{b}^{(1)}, \quad s = \lambda + j\omega, \tag{5.2.92}$$

$$\boldsymbol{æ}^{(1)}(t) = e^{[A^{(1)}-E\lambda](t-t_0)}\left[\boldsymbol{x}^{(1)}(t_0) - \boldsymbol{r}_x^{(1)}(\omega)\sin\omega t_0 - \boldsymbol{i}_x^{(1)}(\omega)\cos\omega t_0\right]. \tag{5.2.93}$$

Таким образом, реакция разомкнутой системы на экспоненциально-гармоническое воздействие (5.2.89)

$$u(t) = e^{\lambda t}\left[r^{(1)}(\omega)\sin\omega t + i^{(1)}(\omega)\cos\omega t\right] + e^{\lambda t}\boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{æ}^{(1)}(t), \tag{5.2.94}$$

где

$$r^{(1)}(\omega) = \boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{r}_x^{(1)}(\omega), \quad i^{(1)}(\omega) = \boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{i}_x^{(1)}(\omega). \tag{5.2.95}$$

На основе соотношения (5.1.26) заключаем

$$r^{(1)}(\omega) = \operatorname{Re} w_{\text{раз}}^\lambda(j\omega), \quad i^{(1)}(\omega) = \operatorname{Jm} w_{\text{раз}}^\lambda(j\omega). \tag{5.2.96}$$

Экспоненциально взвешивая реакцию $u(t)$, получим

$$\tilde{u}(t) = e^{-\lambda t}u(t) = r^{(1)}(\omega)\sin\omega t + i^{(1)}(\omega)\cos\omega t + \boldsymbol{d}^{(1)}\boldsymbol{æ}^{(1)}(t). \tag{5.2.97}$$

Свободная составляющая $\text{æ}^{(1)}(t)$ в этом выражении затухает, если выполняется условие

$$\lambda > C^c, \tag{5.2.98}$$

где C^c – *степень неустойчивости разомкнутой системы.*

Для определения числа C^c рассмотрим характеристический полином $d^c(s)$ разомкнутой системы

$$d^c(s) = \det\left[Es - A^{(1)}\right].$$

Используя обозначения (5.1.23), запишем

$$d^c(s) = \det(Es - A)\det(Es - A_p) = d(s)g(s), \tag{5.2.99}$$

$$d(s) = \det(Es - A), \quad g(s) = \det(Es - A_p). \tag{5.2.100}$$

Это характеристические полиномы объекта и регулятора соответственно.

Если $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, ..., $\bar{s}_n$ корни полинома $d(s)$, а s_1^p, s_2^p, ..., $s_{n_\text{p}}^p$ – корни $g(s)$, то

$$c^c > \max\left\{\operatorname{Re}\bar{s}_1, \operatorname{Re}\bar{s}_2, \ldots, \operatorname{Re}\bar{s}_n;\ \operatorname{Re}s_1^p, \operatorname{Re}s_2^p, \ldots, \operatorname{Re}s_{n_\text{p}}^p\right\}. \tag{5.2.101}$$

Зафиксируем $n + n_p$ произвольных частот ω_1, ω_2, ..., ω_{n+n_p} в (5.2.97), тогда коэффициенты $r^{(1)}(\omega_k)$, $i^{(1)}(\omega_k)$ в выражении

$$\tilde{u}(t) = r^{(1)}(\omega_k)\sin\omega_k t + i^{(1)}(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{d}^{(1)}\text{æ}^{(1)}(t) \quad k = \overline{1,n} \tag{5.2.102}$$

называются частотными параметрами (ω-индексами) разомкнутой системы.

Эти же числа получаются, если возбудить разомкнутую на входе регулятора систему сигналом

$$y_{вх} = e^{\lambda t}\sin\omega t,$$

то после взвешивания выхода объекта получим

$$\tilde{y}(t) = r^{(1)}(\omega_k)\sin\omega_k t + i^{(1)}(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{d}^{(2)}\text{æ}^{(2)}(t) \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.2.103}$$

где $\text{æ}^{(2)}(t)$ – функция, исчезающая при условии (2.2.68).

Если сигнал (5.2.89) подать на вход разомкнутой системы с объектом (5.2.1) первого вида, то взвешенный выход регулятора

$$\tilde{u}(t) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{c}'\text{æ}^0(t). \tag{5.2.104}$$

5.3. Фильтр Фурье

5.3.1. Схема эксперимента

Рассмотрим объект управления

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \tag{5.3.1}$$

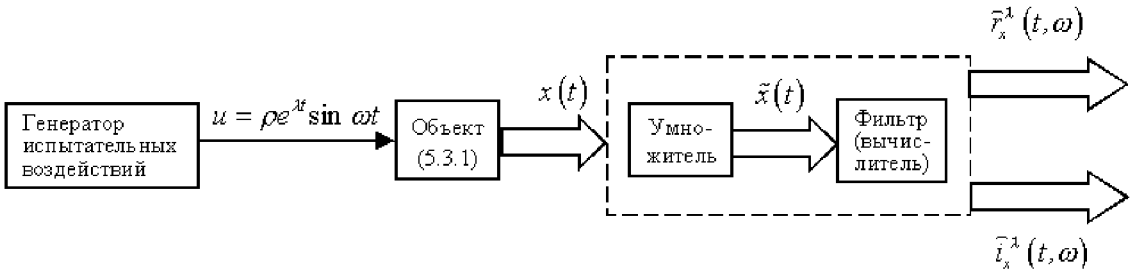

Рис. 5.3.1.

параметры которого неизвестны.

На рис. 5.3.1. приведена структурная схема установки для экспериментального определения частотных вектор-функций $\boldsymbol{r}_x(\omega)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega)$.

Она содержит:

1. Генератор испытательных воздействий, формирующий экспоненциально-гармоническое воздействие
$$u(t) = u_{исп}(t) = \rho e^{\lambda t} \sin \omega t, \tag{5.3.2}$$
где ρ и λ – некоторые положительные числа.

2. Умножитель, на вход которого подается измеренный вектор переменных объекта (5.3.1), а выходом является *экспоненциально-взвешенный* вектор
$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) e^{-\lambda t}.$$

3. Фильтр (вычислитель), выходом которого являются оценки $\hat{\boldsymbol{r}}_x^\lambda(t,\omega)$, $\hat{\boldsymbol{i}}_x^\lambda(t,\omega)$ частотных вектор-функций $\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)$, $\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)$.

Выход умножителя описывается выражением (5.2.14)
$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \rho \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \rho \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t + \boldsymbol{æ}^0(t), \tag{5.3.3}$$
где
$$\boldsymbol{æ}^0(t) = e^{(A-E\lambda)t} e^{-At_0} \left[\boldsymbol{x}(t_0) - \left(e^{\lambda t_0} \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - e^{\lambda t_0} \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 \right) \rho \right]. \tag{5.3.4}$$

Ниже рассматривается два типа фильтров: фильтр Фурье и локальный фильтр.

Наряду с объектом (5.3.1) будем рассматривать одномерные объекты второго вида, описываемые уравнениями
$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}. \tag{5.3.5}$$

В этом случае структурная схема, приведённая на рис. 5.3.1. принимает вид рис. 5.3.2.

На рис. 5.3.2. переменная $\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t}$.

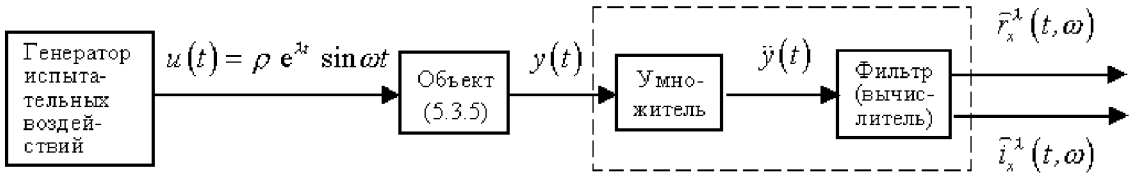

Рис. 5.3.2.

5.3.2. Алгоритм фильтрации

Фильтр Фурье описывается соотношениями

$$\hat{\boldsymbol{r}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho}\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\boldsymbol{x}}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau, \quad \hat{\boldsymbol{i}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho}\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\boldsymbol{x}}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{5.3.6}$$

Для удобства введём n-мерные вектора $\boldsymbol{x}^s(t)$ и $\boldsymbol{x}^c(t)$ и представим интегральные соотношения (5.3.6) в дифференциальной форме

$$\hat{\boldsymbol{r}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho}\boldsymbol{x}^s(t), \quad \hat{\boldsymbol{i}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho}\boldsymbol{x}^c(t), \tag{5.3.7}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^s(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t)\sin\omega t, \quad \dot{\boldsymbol{x}}^c(t) = \tilde{\boldsymbol{x}}(t)\cos\omega t, \quad \boldsymbol{x}^s(t_0) = \boldsymbol{x}^c(t_0) = \boldsymbol{0}. \tag{5.3.8}$$

Исследуем свойства фильтра Фурье.

Утверждение 5.3.1. Оценки $\hat{\boldsymbol{r}}^{\lambda}(t,\omega)$ и $\hat{\boldsymbol{i}}^{\lambda}(t,\omega)$ сходятся к частотным вектор-функциям

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\boldsymbol{r}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega), \quad \lim_{t\to\infty} \hat{\boldsymbol{i}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega), \tag{5.3.9}$$

если выполняются неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \boldsymbol{æ}^0(t)\sin\omega t\, dt < \infty, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} \boldsymbol{æ}^0(t)\cos\omega t\, dt < \infty. \tag{5.3.10}$$

■

Убедимся в справедливости этого утверждения. Подставляя в (5.3.6) выражение (5.3.3), получим

$$\hat{\boldsymbol{r}}_x^{\lambda}(t,\omega) = \frac{2}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} \left[\boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega)\sin^2\omega\tau + \boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega)\sin\omega\tau\cos\omega\tau + \boldsymbol{æ}^0(\tau)\sin\omega\tau\right] d\tau =$$

$$= \boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega) - \frac{\boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega)}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\cos 2\omega\tau\, d\tau + \frac{\boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega)}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\sin 2\omega\tau\, d\tau + \frac{2}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{æ}^0(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau. \tag{5.3.11}$$

Так как $\left|\int\limits_{t_0}^{t}\sin 2\omega\tau\, d\tau\right| \le \dfrac{1}{\omega}$ и $\left|\int\limits_{t_0}^{t}\cos 2\omega\tau\, d\tau\right| \le \dfrac{1}{\omega}$, то при условии (5.3.10) выполняется первое из равенств (5.3.9). Аналогично доказывается справедливость второго из этих соотношений.

Утверждение 5.3.2. Если показатель λ экспоненты испытательного воздействия и умножителя больше степени неустойчивости объекта

$$\lambda \geq C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.3.12}$$

то выполняются соотношения (5.3.10). ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.4.

Для объекта (5.3.5) фильтр Фурье описывается аналогичными (5.3.7) и (5.3.8) уравнениями

$$\hat{r}^\lambda(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho} y^s(t), \quad \hat{i}^\lambda(t,\omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho} y^c(t), \tag{5.3.13}$$

$$\dot{y}^s(t) = \tilde{y}(t)\sin\omega t, \quad \dot{y}^c(t) = \tilde{y}(t)\cos\omega t, \quad y^s(t_0) = y^c(t_0) = 0. \tag{5.3.14}$$

Очевидно, что при условии (5.3.12)

$$\lim_{t\to\infty} \hat{r}^\lambda(t,\omega) = r^\lambda(\omega), \quad \lim_{t\to\infty} \hat{i}^\lambda(t,\omega) = i^\lambda(\omega). \tag{5.3.15}$$

5.3.3. Время фильтрации

Определим погрешность

$$\boldsymbol{e}_x^r(t) = \hat{\boldsymbol{r}}_x^\lambda(t,\omega) - \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) \tag{5.3.16}$$

вычисления частотных функций. На основе (5.3.11) получим выражение методической погрешности фильтра Фурье

$$\boldsymbol{e}_x^r(t) = -\frac{\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \cos 2\omega\tau\, d\tau + \frac{\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \sin 2\omega\tau\, d\tau + \frac{2}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{æ}^0(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau. \tag{5.3.17}$$

Определим время фильтрации – $T_ф$ как время, через которое выполняются неравенства

$$|e_{xi}^r(T_ф)| \leq \varepsilon_ф^r \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.3.18}$$

где e_{xi}^r – компоненты вектора $\boldsymbol{e}_x^r$, а $\varepsilon_ф$ – некоторое достаточно малое положительное число, характеризующее допустимую погрешность определения частотных функций.

На основе (5.3.17) получим

$$|e_{xi}^r(t)| \leq \frac{1}{2\omega}\frac{\left|r_{xi}^\lambda(\omega)\right| + \left|i_{xi}^\lambda(\omega)\right|}{t-t_0} + \frac{2}{t-t_0}\left|\int_{t_0}^{t} æ_i^0(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\right| \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть процесс фильтрации начинается в момент времени $t = t_{cx}$, когда функции перехода сошлись к частотным параметрам. Тогда, с учётом (5.2.82), (5.2.5) запишем

$$|e_{xi}^r(t)| \leq \frac{1}{2\omega}\frac{\left|r_{xi}^\lambda(\omega)\right| + \left|i_{xi}^\lambda(\omega)\right|}{t-t_{cx}} + \frac{2\varepsilon_{cx}}{t-t_{cx}} \quad i = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует оценка времени фильтрации

$$T_{\phi}^{r_x} \geq \frac{\frac{1}{2\omega}\left\{\left|r_{xi}^{\lambda}(\omega)\right| + \left|i_{xi}^{\lambda}(\omega)\right|\right\} + 2\varepsilon_{cx}}{\varepsilon_{\phi}} + t_{cx} \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.3.19}$$

Для объекта (5.3.5)

$$T_{\phi}^{r} \leq \frac{\frac{1}{2\omega}\left\{\left|r^{\lambda}(\omega)\right| + \left|i^{\lambda}(\omega)\right|\right\} + 2\varepsilon_{cx}}{\varepsilon_{\phi}} + t_{cx}. \tag{5.3.20}$$

Аналогично находим оценки времени фильтрации T_{ϕ}^{i} компонент $i_{xk}^{\lambda}(\omega)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ и частотного параметра $i(\omega)$. Тогда для объектов первого и второго вида получим соответственно

$$T_{\phi} = \max\left\{T_{\phi}^{r_x},\, T_{\phi}^{i_x}\right\}, \quad T_{\phi} = \max\left\{T_{\phi}^{r},\, T_{\phi}^{i}\right\}. \tag{5.3.21}$$

5.3.4. Влияние внешних возмущений и помех

Рассмотрим фильтрацию частотных функций в условиях, когда объект подвержен внешним возмущениям, а измерение его выхода осуществляется с ошибками. В этом случае объект описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{m}f, \quad y = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} + æ, \tag{5.3.22}$$

где $f(t)$ – внешнее возмущение, являющееся непрерывной и ограниченной функцией, описываемой соотношениями (1.1.4), (1.1.5), а $æ(t)$ – помеха измерения, которая описывается аналогичными соотношениями

$$|æ(t)| \leq æ^{*}, \tag{5.3.23}$$

$$æ(t) = \sum_{i=1}^{\mu_2}\left(\rho_i^{(1)}\sin\omega_i^{æ}t + \rho_i^{(2)}\cos\omega_i^{æ}t\right), \tag{5.3.24}$$

где $æ^{*}$ – заданное число, а $\rho_i^{(1)}$, $\rho_i^{(2)}$, $\omega_i^{æ}$ $\left(i = \overline{1,\mu_2}\right)$ – неизвестные числа.

Наложим ограничение на частоты испытательных воздействий, внешних возмущений и помех. В связи с этим обозначим $s_i = \lambda_i^{o} + j\omega_i^{o}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – корни характеристического полинома $\det(Es - A)$ объекта (5.3.22). Далее будем полагать, что выполнено следующее требование.

<u>Свойство 5.3.1.</u> Частоты испытательных воздействий, внешних возмущений и помех не совпадают с собственными частотами объекта ω_i^{o} $\left(i = \overline{1,n_1}\right)$, для которых

$$\det(E_j\omega_i^{o} - A) = 0 \quad i = \overline{1,n_1}.$$

Это означает, что

$$\omega_i^{o} \neq \omega_k, \quad \omega_i^{o} \neq \omega_{\alpha}^{f}, \quad \omega_i^{o} \neq \omega_{\beta}^{æ} \quad i = \overline{1,n_1} \quad k = \overline{1,n} \quad \alpha = \overline{1,\mu_1} \quad \beta = \overline{1,\mu_2}.$$

■

Эти неравенства исключают вхождение объекта в резонанс на его резонансных частотах ω_i^o $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Найдём уравнения, описывающие сигнал $\tilde{y}(t)$ (см. рис. 5.3.2.) на входе фильтра Фурье. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - E\lambda)\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}\rho\sin\omega t + \boldsymbol{m}\tilde{f}, \quad \tilde{y} = \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{æ}, \tag{5.3.25}$$

где

$$\tilde{f} = fe^{-\lambda t}, \quad \tilde{æ} = æe^{-\lambda t}. \tag{5.3.26}$$

Действительно, по определению

$$\tilde{y} = ye^{-\lambda t} = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{x} + æ)e^{-\lambda t} = \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{æ}.$$

С другой стороны, вычислим

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\dot{\boldsymbol{x}} - \lambda\boldsymbol{x})e^{-\lambda t} = [(A - E\lambda)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{m}f]e^{-\lambda t}.$$

Отсюда, при $u = \rho e^{\lambda t}\sin\omega t$, следует первое из уравнений (5.3.25).

Сигнал на выходе фильтра Фурье имеет аналогично (5.3.11) вид

$$\begin{aligned}\hat{r}^{\lambda}(t,\omega) = r^{\lambda}(\omega) + \frac{1}{t-t_0}\Bigg[-r^{\lambda}(\omega)\int\limits_{t_0}^{t}\cos 2\omega\tau\, d\tau + i^{\lambda}(\omega)\int\limits_{t_0}^{t}\sin 2\omega\tau\, d\tau + \\ + 2\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{d}\boldsymbol{æ}^0(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau + 2\int\limits_{t_0}^{t}\tilde{æ}^f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau + 2\int\limits_{t_0}^{t}\tilde{æ}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\Bigg],\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

где

$$\tilde{æ}^f(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}\boldsymbol{m}\tilde{f}(\tau)\, d\tau. \tag{5.3.28}$$

Проанализируем составляющие погрешностей фильтрации, обусловленное внешними воздействиями и помехами. Пусть объект (5.3.22) асимптотически устойчив, а $\lambda = 0$.

В этом случае ошибка фильтрации имеет вид

$$e(t) = \hat{r}(t,\omega) - r(\omega) = e_{сб}(t) + \frac{2}{t-t_0}\left[\int\limits_{t_0}^{t}æ^f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}æ(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\right], \tag{5.3.29}$$

где

$$e_{сб}(t) = \frac{1}{t-t_0}\left[-r(\omega)\int\limits_{t_0}^{t}\cos 2\omega\tau\, d\tau + i(\omega)\int\limits_{t_0}^{t}\sin 2\omega\tau\, d\tau + 2\int\limits_{t_0}^{t}æ^0(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\right], \tag{5.3.30}$$

$$æ^f(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{d}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{m}f(\tau)\, d\tau. \tag{5.3.31}$$

Внешнее возмущение описывается выражением (1.1.5). Далее будем полагать в нём $\delta_0 = 0$, $\delta_i^{(1)} = 1$, $\delta_i^{(2)} = 0$ $\left(i = \overline{1, \mu_1}\right)$.

Тогда

$$æ^f(\tau) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left[r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t\right] + æ^{0f}(t), \tag{5.3.32}$$

где

$$æ^{0f}(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \boldsymbol{d} e^{A(t-t_0)} \left[-\boldsymbol{r}_{xf}(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t_0 - \boldsymbol{i}_{xf}(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t_0\right], \tag{5.3.33}$$

$$r_f(\omega_i^f) = \operatorname{Re} \boldsymbol{d} \left(E_j \omega_i^f - A\right)^{-1} \boldsymbol{m}, \quad r_{xf}(\omega_i^f) = \operatorname{Re} \left(E_j \omega_i^f - A\right)^{-1} \boldsymbol{m}, \tag{5.3.34}$$

$$i_f(\omega_i^f) = \operatorname{Jm} \boldsymbol{d} \left(E_j \omega_i^f - A\right)^{-1} \boldsymbol{m}, \quad i_{xf}(\omega_i^f) = \operatorname{Jm} \left(E_j \omega_i^f - A\right)^{-1} \boldsymbol{m}. \tag{5.3.35}$$

Утверждение 5.3.3. Если частота испытательного воздействия ω не совпадает с частотами внешних возмущений и помех – ω_i^f, $\omega_j^æ$ $\left(i = \overline{1, \mu_1},\ j = \overline{1, \mu_2}\right)$, то ошибка вычисления (фильтрации) частотных функций обладает свойством

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0.$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.5.

Возвращаясь к общему случаю, когда показатель экспоненты $\lambda \neq 0$ и удовлетворяет неравенству (5.3.12), заметим, что функции $\tilde{æ}^f(t)$ и $\tilde{æ}(t)$, входящие в выражение (5.3.27) для погрешности фильтрации, обладают следующим почти очевидным свойством

Утверждение 5.3.4. Составляющие выхода умножителя, обусловленные внешними возмущениями и помехами, исчезающие функции

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{æ}^f(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \tilde{æ}(t) = 0. \tag{5.3.36}$$

■

Второе из этих соотношений следует из (5.3.26), а доказательство первого равенства приведено в 5.Д.6.

5.3.5. Фильтрация при параллельном испытательном воздействии

Можно выделить два вида испытательных воздействий: последовательное и параллельное.

Последовательное испытательное воздействие $u^{(k)}(t) = \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t$ прикладывается к объекту в течение интервалов времени $\left[t_{k-1}^u, t_k^u\right]$.

Оно описывается как

$$u_{ucn}(t) = \sum_{k=1}^{n} u^{(k)}(t), \tag{5.3.37}$$

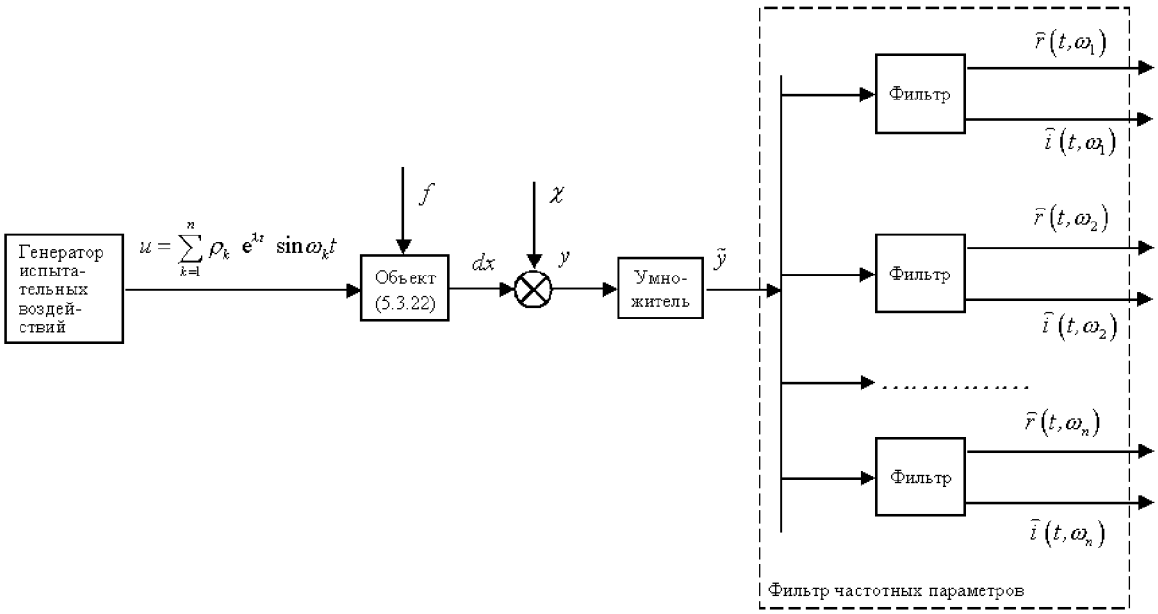

Рис. 5.3.3.

где

$$u^{(k)}(t) = \begin{cases} \rho_k e^{\lambda t} \sin\omega_k t & \text{при} \quad t \in \left[t_{k-1}^u, t_k^u\right]; \\ 0 & \text{при} \quad t \notin \left[t_{k-1}^u, t_k^u\right]. \end{cases} \tag{5.3.38}$$

Далее для определённости будем полагать, что испытательные гармоники обладают свойством:

<u>Свойство 5.3.2.</u>

а) частоты ω_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ испытательных воздействий упорядочены: $\omega_1 < \omega_2 < \cdots$ $\cdots < \omega_{n-1} < \omega_n$,

б) частоты ω_k $\left(k = \overline{2,n}\right)$ кратны ω_1 $\left(\dfrac{\omega_k}{\omega_1} = \alpha_k\right.$, где α_k $\left(k = \overline{2,\gamma}\right)$ – целые числа$\left.\right)$,

в) правые концы – $t^{(k)}$ – интервалов приложения k-той гармоники $\left(k = \overline{1,n}\right)$ при последовательном испытательном воздействии кратны $\dfrac{2\pi}{\omega_n}$, $at^{(1)} = t_0$.

■

Для определения частотных параметров можно испытательные гармоники прикладывать к объекту не последовательно во времени, а одновременно (параллельно). В этом случае

$$u_{ucn}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin\omega_k t. \tag{5.3.39}$$

Такой сигнал будем называть *параллельным испытательным воздействием.*

При параллельных испытательных воздействиях схема, приведённая на рис. 5.3.2. принимает с учётом внешних возмущений и помех вид, показанный на рис. 5.3.3.

Уравнения (5.3.25) для сигнала на выходе умножителя запишем как

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - E\lambda)\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}\sum_{k=1}^{n}\rho_k \sin\omega_k t + \boldsymbol{m}\tilde{f}, \quad \tilde{y} = \boldsymbol{d}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{æ}. \tag{5.3.40}$$

Учитывая выражение (5.3.4) и обозначения (5.3.26) и (5.3.28) представим решение этих уравнений в виде

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) = &\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[\boldsymbol{r}^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t + \boldsymbol{i}^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t\right] - \\ &- \boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[\boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t_0 + \boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t_0\right] + \\ &+ \boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \tilde{æ}^f(t) + \tilde{æ}(t).\end{aligned} \tag{5.3.41}$$

5.3.6. Время фильтрации при внешних возмущениях

После затухания переходных процессов получим при достаточно большом λ установившийся выход

$$\tilde{y}_{ycm}(t) = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[r^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t + i^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t\right]. \tag{5.3.42}$$

Если $\lambda = 0$, то установившийся сигнал содержит дополнительные слагаемые, вызванные внешними возмущениями и помехами

$$\begin{aligned}y_{ycm}(t) = &\sum_{k=1}^{n}\rho_k[r(\omega_k)\sin\omega_k t + i(\omega_k)\cos\omega_k t] + \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu_1}\left[r_f(\omega_i^f)\sin\omega_i^f t + i_f(\omega_i^f)\cos\omega_i^f t\right] + \sum_{i=1}^{\mu_2}\left[\rho_i^{(1)}\sin\omega_i^{æ} t + \rho_i^{(2)}\cos\omega_i^{æ} t\right].\end{aligned} \tag{5.3.43}$$

Сигнал на выходе фильтра – 1 имеет при $\lambda = 0$ вид

$$\begin{aligned}\hat{r}(t,\omega_1) = r(\omega_1) + \frac{2}{\rho_1(t-t_0)}\Bigg\{&-\frac{\rho_1}{2}r(\omega_1)\int_{t_0}^{t}\cos 2\omega_1\tau\, d\tau + \frac{\rho_1}{2}i(\omega_1)\int_{t_0}^{t}\sin 2\omega_1\tau\, d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\left\langle\sum_{k=2}^{n}\rho_k[r(\omega_k)\sin\omega_k\tau + i(\omega_k)\cos\omega_k\tau]\right\rangle\sin\omega_1\tau\, d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\left\langle\sum_{i=1}^{\mu_1}\left[r_f(\omega_i^f)\sin\omega_i^f\tau + i_f(\omega_i^f)\cos\omega_i^f\tau\right]\right\rangle\sin\omega_1\tau\, d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\left\langle\sum_{i=1}^{\mu_2}\left[\rho_i^{(1)}\sin\omega_i^{æ}\tau + \rho_i^{(2)}\cos\omega_i^{æ}\tau\right]\right\rangle\sin\omega_1\tau\, d\tau\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.3.44}$$

Отсюда получим, аналогичное (5.3.19) выражение для времени фильтрации

$$T_{1ф}^{\hat{r}} \geq \frac{\frac{1}{2\omega_1}[|r(\omega_1)| + |i(\omega_1)|] + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{4\rho_k}{\rho_1|\omega_k - \omega_1|}[|r(\omega_k)| + |i(\omega_k)|]}{\varepsilon_ф} +$$
$$+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{\mu_1} \frac{4}{\rho_1|\omega_i^f - \omega_1|}\left[\left|r_f(\omega_i^f)\right| + \left|i_f(\omega_i^f)\right|\right]}{\varepsilon_ф} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\mu_2} \frac{4}{\rho_1|\omega_i^æ - \omega_1|}\left[\left|\rho_i^{(1)}\right| + \left|\rho_i^{(2)}\right|\right]}{\varepsilon_ф} +$$
$$+ \frac{2n\varepsilon_{сх}}{\varepsilon_ф} + t_{сх}^0. \tag{5.3.45}$$

Аналогично находим оценку времени фильтрации на втором выходе (выходе $\hat{i}(t, \omega_1)$ первого фильтра $T_{1ф}^{\hat{i}}$ и т.д. Тогда время фильтрации определяет наибольшее для всех фильтров

$$T_ф^o = \max\left\{T_{1ф}^{\hat{r}},\, T_{1ф}^{\hat{i}};\, T_{2ф}^{\hat{r}},\, T_{2ф}^{\hat{i}};\, \ldots;\, T_{nф}^{\hat{r}},\, T_{nф}^{\hat{i}}\right\}. \tag{5.3.46}$$

5.3.7. Учёт ограничений на управление и измерение*

Использование экспоненциально-гармонического испытательного воздействия предполагает неограниченные ресурсы управления.

Ограниченность этих ресурсов накладывает ограничение на степень неустойчивости объектов, для которых можно экспериментально определить частотные параметры.

Пусть к объекту (5.3.22) приложено

$$u(t) = \sigma^u(u_{ucn}), \tag{5.3.47}$$

где

$$\sigma^u\left(u_{ucn} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t\right) = \begin{cases} -u_{нас} & \text{при} \quad u_{ucn} \leq -u_{нас}, \\ 0 & \text{при} \quad |u_{ucn}| \leq u_{неч}, \\ u_{нас} & \text{при} \quad u_{ucn} \geq u_{нас}. \end{cases} \tag{5.3.48}$$

Здесь $u_{неч}$ и $u_{нас}$ – заданные числа, характеризующие зону нечувствительности и зону насыщения управления.

Функция (5.3.48) показана на рис. 5.3.4.

Оценим время $t_{нас}^u$, через которое $u_{ucn}(t)$ достигает насыщения. Обозначим

$$\rho_{\max} = \max\{\rho_1,\, \rho_2,\, \ldots,\, \rho_n\}. \tag{5.3.49}$$

Тогда из соотношения $u_{нас} = u_{ucn}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t \leq n\rho_{\max} e^{\lambda t}$ получим

$$t_{нас}^u \geq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{u_{нас}}{n\rho_{\max}}. \tag{5.3.50}$$

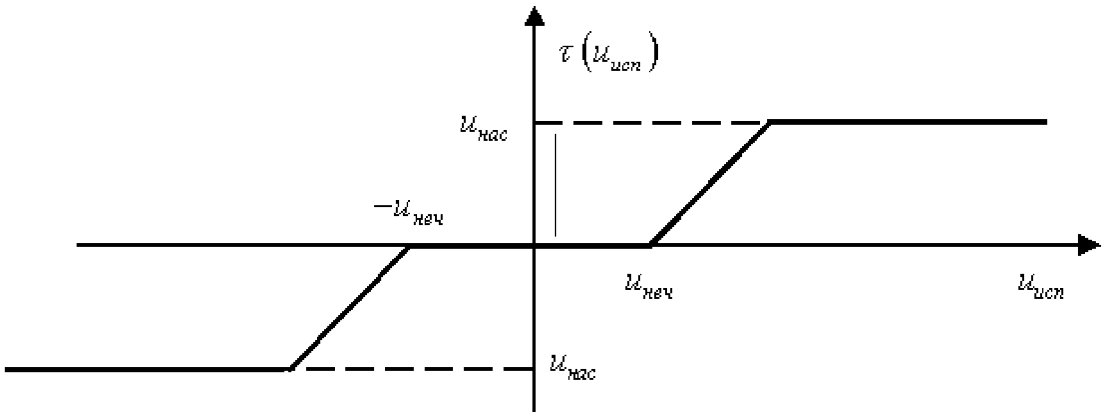

Рис. 5.3.4.

Из-за зоны нечувствительности испытательное воздействие прикладывается к объекту не в момент начала работы генератора испытательных воздействий $(t_0 = 0)$, а в момент $t^u_{неч}$, где $t_{неч}$ – минимальное время, при котором

$$|u_{исп}(t_0 + t^u_{неч})| = \left|\sum_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda(t_0+t_{неч})} \sin\omega_k(t_0 + t_{неч})\right| = u_{неч}. \tag{5.3.51}$$

Определение 5.3.1. Время

$$t^u_{пол} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{u_{нас}}{n\rho_{\max}} - t^u_{неч}, \tag{5.3.52}$$

называется *полезным временем испытательного воздействия.* ■

Введём в рассмотрение уравнение измерительного устройства

$$y_{изм}(t) = \sigma^y(y), \tag{5.3.53}$$

в котором

$$\sigma^u(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |y(t)| \le y_{неч}, \\ y(t) & \text{при} \quad y_{неч} \le |y(t)| \le y_{нас}, \\ +u_{нас} & \text{при} \quad y(t) \ge y_{нас}, \\ -u_{нас} & \text{при} \quad y(t) \le -y_{нас}. \end{cases} \tag{5.3.54}$$

Здесь $y_{неч}$ и $y_{нас}$ – заданные числа, характеризующие зону нечувствительности и зону насыщения измерительного устройства.

Для оценки времени $t^y_{нас}$, через которое выход объекта достигает зоны насыщения измерительного устройства, воспользуемся выражением (5.3.4) выхода умножителя. Положим, для простоты, что внешние возмущения и помехи отсутствуют, а

$$\begin{aligned} y(t) = e^{\lambda t}\tilde{y}(t) = e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[r^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t + i^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t\right] - \\ - \boldsymbol{d}e^{A(t-t_0)}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left[\boldsymbol{r}^\lambda_x(\omega_k)\sin\omega_k t_0 + \boldsymbol{i}^\lambda_x(\omega_k)\cos\omega_k t_0\right]. \end{aligned} \tag{5.3.55}$$

Обозначим

$$r_{\max} = \max\left\{r^{\lambda}(\omega_1),\ r^{\lambda}(\omega_2),\ \ldots,\ r^{\lambda}(\omega_n);\ i^{\lambda}(\omega_1),\ i^{\lambda}(\omega_2),\ \ldots,\ i^{\lambda}(\omega_n)\right\}.$$

Тогда, пренебрегая второй суммой в (5.3.55), получим

$$t^{y}_{нас} \geq \frac{1}{\lambda}\ln\frac{y_{нас}}{2n\rho_{\max}r_{\max}}. \tag{5.3.56}$$

Сигнал с измерительного устройства поступает на умножитель, начиная с момента времени $t^{u}_{неч}$, которое находится как наименьшее по модулю решение уравнения

$$y(t^{y}_{неч}) = y_{неч}. \tag{5.3.57}$$

Определение 5.3.2. Время

$$t^{y}_{пол} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{y_{нас}}{2n\rho_{\max}r_{\max}} - t^{y}_{неч} \tag{5.3.58}$$

называется *полезным временем измерения.* ■

Выражения (5.3.45), (5.3.46) дают оценку времени фильтрации при $\lambda = 0$. Аналогичные выражения можно привести для $\lambda \neq 0$ и получить оценку $T^{\lambda}_{ф}$.

Определение 5.3.3. Будем говорить, что ограничения на управление и измерение согласованы со степенью неустойчивости объекта и уровнем внешних возмущений, если время фильтрации не превышает полезного времени испытательного воздействия и измерений

$$T^{\lambda}_{ф} < t^{u}_{пол}, \quad T^{\lambda}_{ф} < t^{y}_{пол}. \tag{5.3.59}$$

■

5.3.8. Управление генератором

До сих пор предполагалось, что частоты испытательных воздействий не совпадают с частотами ω^{f}_{i}, $\omega^{æ}_{j}$ $\left(i = \overline{1,\mu_1},\ \ j = \overline{1,\mu_2}\right)$ внешних возмущений и помех, а также с собственными частотами объекта ω^{o}_{i} $\left(i = \overline{1,n_1}\right)$.

Указанные частоты неизвестны и поэтому возможна ситуация, когда какая-либо из испытательных частот совпадает с одной из них.

Пусть испытательная частота

$$\omega = \omega^{f}_{\nu} \quad \nu \in \overline{1,\mu_1}. \tag{5.3.60}$$

В этом случае возникает смещение оценок частотных параметров на величины, зависящие от $r_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)$ и $i_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)$, и тогда в частности

$$\hat{r}(\omega) = r(\omega) + \frac{1}{\rho}\left[\delta^{(1)}_{\nu} r_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)\delta^{(2)}_{\nu} i_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)\right], \tag{5.3.61}$$

где числа $r_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)$ и $i_f\left(\omega^{f}_{\nu}\right)$ определяются выражениями (5.3.34), (5.3.35).

Можно указать несколько способов получения несмещённых оценок.

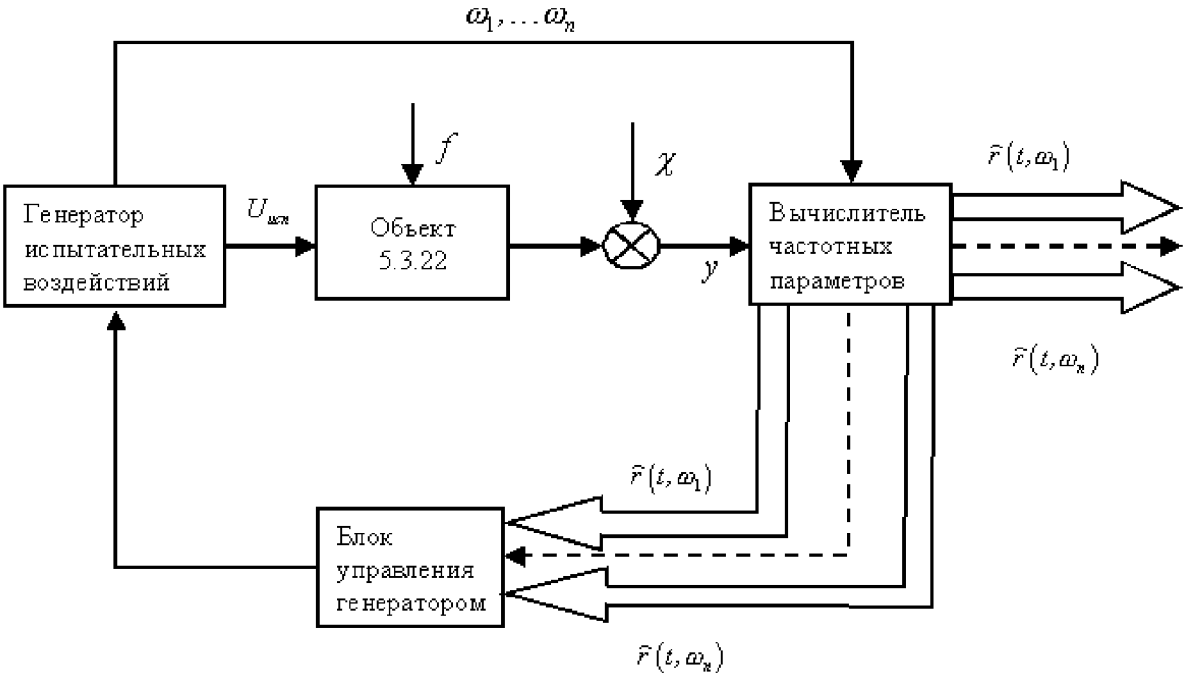

Рис. 5.3.5.

1 способ. Экспериментальное определение частот внешних воздействий, помех и собственных частот объекта и соответствующий выбор частот испытательного воздействия (алгоритм с паузами).

2 способ. Исключение смещения оценок путём изменения на 180° фазы испытательного воздействия (алгоритм с последовательными парами). Эти алгоритмы реализуются в блоке управления генератором испытательных частот.

5.3.9. Алгоритм с паузами

Дополним схему экспериментальной установки, приведённой на рис. 5.3.3. блоком управления генератором испытательных воздействий. Тогда она примет вид, показанный на рис. 5.3.5. Блок управления отключает сигнал $u_{исп}(t)$ с выхода генератора на некоторое время, которое называем *временем паузы генератора* – $T_{п.г}$.

В это время проверяется совпадение частот внешних возмущений, помех и собственных частот объекта с частотами, на которые настроен фильтр Фурье. Если имеется совпадение хотя бы с одной из частот фильтра Фурье, например, с частотой ω_δ, то эта частота изменяется так, чтобы сигналы $r(t,\omega_\delta)$, $i(t,\omega_\delta)$ с выходов δ-го фильтра стали меньше допустимой погрешности фильтрации $\varepsilon_ф$.

Естественно, что время паузы генератора должно быть бóльшим времени сходимости частотных параметров и времени фильтрации

$$T_{п.г} > t^0_{сх} + T^0_ф. \qquad (5.3.62)$$

При многорежимных внешних возмущениях (1.1.6) и помехах, а также для многорежимных объектов паузы генератора повторяются с периодом

$$T_{o.n} = T_{n.г} + T_{p.г}, \tag{5.3.63}$$

где $T_{p.г}$ – время работы генератора $[u_{ucn}(t) \neq 0]$.

Период $T_{o.n}$ не должен превышать длительности режимов внешних возмущений $(t_k^f - t_{k-1}^f)$, помех $(t_k^æ - t_{k-1}^æ)$ и объекта $(t_k - t_{k-1})$

$$T_{o.n} \leq t_k^f - t_{k-1}^f, \quad T_{o.n} \leq t_k^æ - t_{k-1}^æ, \quad T_{o.n} \leq t_k - t_{k-1} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5.3.64}$$

Таким образом, алгоритм с паузами имеет вид

$$u_{ucn}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad kT_{o.n} \leq t \leq kT_{o.n} + T_{n.г}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i e^{\lambda t} \sin \omega_i^k t & \text{при} \quad kT_{o.n} + T_{n.г} \leq t < (k+1)T_{o.n} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots , \tag{5.3.65}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_i^k &= \omega_i^{k-1}, \quad \text{если} \\ &\hat{r}(kT_{o.n} + T_{n.г}, \omega_i) \leq \varepsilon_ф \quad \text{и} \quad \hat{i}(kT_{o.n} + T_{n.г}, \omega_i) \leq \varepsilon_ф \quad (i = \overline{1, n}), \end{aligned} \tag{5.3.66}$$

$$\begin{aligned} \omega_i^k &= \omega_i^{k-1} + \Delta\omega_i^k, \quad \text{для тех} \quad i \in \overline{1, n}, \quad \text{для которых сигналы} \\ &\hat{r}(kT_{o.n} + T_{n.г}, \omega_i) > \varepsilon_ф \quad \text{либо} \quad \hat{i}(kT_{o.n} + T_{n.г}, \omega_i) > \varepsilon_ф . \end{aligned} \tag{5.3.67}$$

5.3.10. Последовательные пары испытаний

Пусть частота ω_1^f внешнего возмущения совпадает с частотой ω_1 испытательного воздействия. Установившийся сигнал на выходе первого фильтра схемы рис. 5.3.3. имеет в соответствии с (5.3.44) вид

$$\begin{aligned} \hat{r}(t, \omega_1) = r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} + \\ + \frac{2}{t - t_0} \left\{ - \left[r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{t_0}^{t} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau + \left[i(\omega_1) + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{t_0}^{t} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau \right\} + \\ + \frac{2}{\rho_1 (t - t_0)} \left[\psi_{ucn}(t, \omega_1) + \psi^f(t, \omega_1) + \psi^æ(t, \omega_1) \right], \quad t > t_{cx}^0, \end{aligned} \tag{5.3.68}$$

где

$$\psi_{ucn}(t, \omega_1) = \int\limits_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{k=2}^{n} \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k \tau + i(\omega_k) \cos \omega_k \tau] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau,$$

$$\psi^f(t, \omega_1) = \int\limits_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=2}^{\mu_1} \left[r(\omega_i^f) \sin \omega_i^f \tau + i(\omega_i^f) \cos \omega_i^f \tau \right] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau,$$

$$\psi^æ(t, \omega_1) = \int\limits_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=2}^{\mu_2} \left[\rho_i^{(1)} \sin \omega_i^æ \tau + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^æ \tau \right] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau.$$

В момент времени $t = T_n$ $\left(T_n \geq t_0^{cx} + T_{ф}^0\right)$ приложим к объекту (5.3.22) воздействие

$$u_{ucn}^-(t) = -\rho_1 \sin \omega_1 t + \sum_{k=2}^{n} \rho_k \sin \omega_k t, \quad t \geq T_n, \tag{5.3.69}$$

которое отличается от (5.2.39) лишь знаком при ρ_1 $(\lambda = 0$ при $t \geq t_0 = 0)$.

Установившийся сигнал на выходе фильтра-1

$$\hat{r}^-(t, \omega_1) = r(\omega_1) - \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} +$$
$$+ \frac{2}{t - T_n} \left\{ \left[-r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{T_n}^{t} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau + \left[i(\omega_1) - \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{T_n}^{t} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau \right\} -$$
$$- \frac{2}{\rho_1 (t - T_n)} \left[\psi_{ucn}(t) + \psi^f(t) + \psi^{æ}(t) \right], \quad t \geq T_n. \tag{5.3.70}$$

Вычислим полусумму

$$\frac{\hat{r}(T_n, \omega_1) + \hat{r}^-(2T_n, \omega_1)}{2} = r(\omega_1) +$$
$$+ \frac{1}{T_n} \left\{ \left[-r(\omega_1) - \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \left\langle \int\limits_{0}^{T_n} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau + \left[-r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{T_n}^{2T_n} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left[i(\omega_1) + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \left\langle \int\limits_{0}^{T_n} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau + \left[i(\omega_1) - \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int\limits_{T_n}^{2T_n} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau \right\rangle \right\} +$$
$$+ \frac{1}{\rho_1 T_n} \left\{ \left[\psi_{ucn}(T_n, \omega_1) - \psi_{ucn}(2T_n, \omega_1) \right] + \left[\psi^f(T_n, \omega_1) - \psi^f(2T_n, \omega_1) \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\psi^{æ}(T_n, \omega_1) - \psi^{æ}(2T_n, \omega_1) \right] \right\}. \tag{5.3.71}$$

Нетрудно видеть, что это выражение не содержит смещения частотного параметра $r(\omega_1)$.

Оценим остальные слагаемые этого выражения.

Определение 5.3.4. Пусть имеется некоторая функция $\mu(t)$. Будем говорить, что *средневзвешенное* (по элементарным тригонометрическим функциям) значение функции $\mu(t)$) *квазистационарно*, если на интервале $[0, 2T_n]$

$$\frac{1}{T_n} \left| \int\limits_{0}^{T_n} \mu(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau - \int\limits_{T_n}^{2T_n} \mu(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \right| \leq \varepsilon_{ф}^{(1)}, \tag{5.3.72}$$

$$\frac{1}{T_n} \left| \int\limits_{0}^{T_n} \mu(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau - \int\limits_{T_n}^{2T_n} \mu(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \right| \leq \varepsilon_{ф}^{(1)}, \tag{5.3.73}$$

где $\varepsilon_{ф}^{(1)}$ – некоторое положительное число. ■

Если внешнее возмущение $f(t)$, помеха $æ(t)$ и $n - 1$ гармоник испытательного воздействия являются средневзвешенными квазистационарными функциями, то

искомый частотный параметр

$$r(\omega_1) = \frac{\hat{r}(T_n, \omega_1) + \hat{r}^-(2T_n, \omega_1)}{2} + \varepsilon_{\phi}^n, \tag{5.3.74}$$

где

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\phi}^n| \le \frac{1}{T_n} \left| -r(\omega_1) \left(\int\limits_0^{T_n} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau + \int\limits_{T_n}^{2T_n} \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau \right) \right| + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \varepsilon_{\phi}^{(1)} + \\ + \left| i(\omega_1) \left(\int\limits_0^{T_n} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau + \int\limits_{T_n}^{2T_n} \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau \right) \right| + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \varepsilon_{\phi}^{(1)} + \frac{3}{\rho_1} \varepsilon_{\phi}^{(1)}. \end{aligned} \tag{5.3.75}$$

5.4. Локальный фильтр*

5.4.1. Алгоритм для устойчивых объектов

Рассмотрим выход асимптотически устойчивого объекта (5.3.22) при параллельном испытательном воздействии (5.3.39). При $\lambda = 0$ запишем аналогично (5.3.43) с учётом (5.3.33), (5.3.34)

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k t + i(\omega_k) \cos \omega_k t] + æ_{ycm}(t) + æ_y^0(t), \tag{5.4.1}$$

где

$$æ_y^0(t) = \boldsymbol{d} e^{A(t-t_0)} \left[\boldsymbol{x}(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \boldsymbol{r}_x(\omega_k) \sin \omega_k t_0 - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \boldsymbol{i}_x(\omega_k) \cos \omega_k t_0 \right] + \boldsymbol{æ}^{0f}(t), \tag{5.4.2}$$

$$æ_{ycm}(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left[r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t \right] + æ(t). \tag{5.4.3}$$

Введём в рассмотрение отрезки времени

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega_1}, \tag{5.4.4}$$

$$T_\alpha = \frac{T_\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{n\omega_1}. \tag{5.4.5}$$

и запишем значения выхода (5.4.1) объекта в моменты времени $t + lT_\alpha$ $\left(l = \overline{1, 2n+1}\right)$

$$\begin{aligned} y(t + lT_\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k (t + lT_\alpha) + i(\omega_k) \cos \omega_k (t + lT_\alpha)] + \\ + æ_{ycm}(t + lT_\alpha) + æ_y^0(t + lT_\alpha) \quad l = \overline{1, 2n+1}. \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Наложим дополнительное ограничение на внешние возмущения и помехи, полагая их малоизменяющимися в течении периода T_ω наиболее медленно изменяющейся гармонической составляющей испытательного воздействия.

Определение 5.4.1. Внешние возмущения и помехи называются *квазистационарными на интервале* T_ω, если выполняется неравенство

$$|æ_{ycm}(t+T_\omega) - æ_{ycm}(t)| \le \varepsilon^{fæ}, \tag{5.4.7}$$

где $\varepsilon^{fæ}$ – некоторое достаточно малое число. (5.4.8) ■

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 5.4.1. Всегда существует достаточно большая частота ω_1 испытательного воздействия (обладающего свойством 5.3.2), удовлетворяющая неравенствам

$$\omega_1 > \omega_i^f, \quad \omega_1 > \omega_j^f \quad i = \overline{1,\mu_1} \quad j = \overline{1,\mu_2}, \tag{5.4.9}$$

при которых внешние возмущения и помехи являются квазистационарными на интервале $T_{\omega_n} = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$. ■

Неравенства (5.4.9) позволяют снимать ограничения на внешние возмущения и помехи путём наложения ограничений на выбор испытательных частот.

Алгоритм работы локального вычислителя частотных параметров состоит в решении системы $2n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[\hat{r}(t,\omega_k)\sin\omega_k(t+lT_\alpha) + \hat{i}(t,\omega_k)\cos\omega_k(t+lT_\alpha)\right] + \hat{æ}_{ycm}(t) = y(t+lT_\alpha) \quad l = \overline{1,2n+1}. \tag{5.4.10}$$

Утверждение 5.4.2. Если внешние возмущения и помехи квазистационарны на интервале $T\omega$, то решение уравнений (5.4.10) доставляет оценки частотных параметров, сходящие к истинным значениям

$$\lim_{t\to\infty} \hat{r}(t,\omega_k) = r(\omega_k), \quad \lim_{t\to\infty} \hat{i}(t,\omega_k) = i(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.4.11}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.7. Из этого доказательства следует, в частности, что время сходимости оценок к частотным параметрам определяется функцией $æ_y^0(t)$.

5.4.2. Алгоритм для неустойчивых объектов

Если объект управления неустойчив, то при $\lambda \ne 0$ уравнения, описывающие сигнал на выходе умножителя (на входе локального фильтра), имеют вид (5.3.41). Алгоритм локального вычислителя частотных параметров состоит теперь в решении линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[\hat{r}^\lambda(t,\omega_k)\sin\omega_k(t+lT_\alpha) + \hat{i}^\lambda(t,\omega_k)\cos\omega_k(t+lT_\alpha)\right] = \tilde{y}(t+lT_\alpha) \quad l = \overline{1,2n}. \tag{5.4.12}$$

Теорема 5.4.1. Решение системы уравнений (5.4.12) обладает свойством

$$\lim_{t\to\infty} \hat{r}^{\lambda}(t,\omega_k) = r^{\lambda}(\omega_k), \quad \lim_{t\to\infty} \hat{i}^{\lambda}(t,\omega_k) = i^{\lambda}(\omega_k) \quad k=\overline{1,n}. \tag{5.4.13}$$

При этом время сходимости к частотным параметрам может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого показателя экспоненты λ. ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.8. Заметим, что при $\lambda \neq 0$ не требуется квазистационарности внешних возмущений и помех.

Если же они квазистационарны, то можно решать аналогичную (5.2.54) систему $2n+1$ уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[\hat{r}^{\lambda}(t,\omega_k)\sin\omega_k(t+lT_\alpha) + \hat{i}^{\lambda}(t,\omega_k)\cos\omega_k(t+lT_\alpha)\right] + \\ +\hat{æ}_{ycm}(t)e^{-\lambda(t+lT_\alpha)} = \tilde{y}(t+lT_\alpha) \quad l=\overline{1,2n+1}.\end{gathered} \tag{5.4.14}$$

5.4.3. Сравнение с фильтром Фурье

Сравним описанные два способа вычисления частотных параметров по времени фильтрации в предположении, что при использовании фильтра Фурье функции перехода к частотным параметрам сошлись к этим параметрам. Это означает, что процесс вычисления с фильтром Фурье начинается через время t_{cx}.

Рассмотрим вначале случай, когда объект (5.3.22) асимптотически устойчив, а $\lambda=0$.

Из выражения (5.3.45) для времени фильтрации следует, что оно прямо пропорционально зависит от уровня помех и внешних возмущений, а также значений частотных параметров. Время фильтрации при использовании локального фильтра слабо зависит от указанных воздействий на объект и помех измерения. От них зависят лишь параметры исчезающей функции $æ_y^0(t)$. При этом характер функции $æ_y^0(t)$ определяется собственными числами матрицы объекта и поэтому для локального фильтра время фильтрации определяется естественным временем сходимости функций перехода к частотным параметрам.

Это свойство локального фильтра объясняется тем, что в процессе его работы вычисляются не только частотные параметры, но и установившаяся реакция объекта на внешние возмущения и помехи – $æ_{ycm}(t)$. В фильтре Фурье эта функция воспринимается как некоторая помеха, которую приходится отделять (фильтровать) от полезного сигнала. Этим сигналом является лишь составляющая выходного сигнала объекта, содержащая частоту ω_i, на которую настроен i-тый фильтр Фурье. При этом составляющие выходного сигнала, содержащие гармоники остальных испытательных частот при параллельном испытательном воздействии также должны отфильтровываться i-тым фильтром.

««Цена»» малого времени фильтрации при использовании локального фильтра – его слабая помехозащищённость. В связи с этим для точной работы локального

вычислителя необходима квазистационарность (низкочастотность) внешних возмущений.

Фильтр Фурье менее чувствителен к высокочастотным внешним возмущениям помехам. Действительно, как следует из (5.3.45) оценка времени фильтрации уменьшается с ростом частот.

При $\lambda \neq 0$ высокочастотные помехи и внешние возмущения сглаживаются (экспоненциально взвешиваются) умножителем выходного сигнала и локальный фильтр становится более эффективным.

Сглаженный сигнал, поступающий на фильтр Фурье, позволяет сократить время фильтрации, однако при этом остаются не взвешенными составляющие выходного сигнала, не соответствующие номеру фильтра.

5.4.4. Метод наименьших квадратов

Для использования локального фильтра испытательные частоты должны быть выше частот внешних возмущений и помех. Это условие в ряде случаев трудно выполнить.

Нарушение неравенств (5.4.9) приводит к ошибкам (смещению) в определении частотных параметров. Для уменьшения этих ошибок применим метод наименьших квадратов и в результате получим фильтр Фурье.

Для простоты изложения рассмотрим скалярный объект (5.3.22) при внешнем воздействии

$$\dot{x} = ax + bu + m \sin \omega^f t, \quad y = x. \tag{5.4.15}$$

Здесь a, b, m, ω^f – неизвестные числа $(a < 0)$.

Выражение (5.4.1) имеет при $u = \sin \omega_1 t$ вид

$$y(t) = r \sin \omega_1 t + i \cos \omega_1 t + \eta(t), \tag{5.4.16}$$

где

$$\begin{gathered} r = r(\omega_1), \quad i = i(\omega_1), \quad \eta(t) = æ_{ycm}(t) + æ_y^0(t), \\ æ_y^0(t) = e^{a(t-t_0)} \left[x(t_0) - r \sin \omega_1 t_0 - i \cos \omega_1 t_0 - r_f \sin \omega_1^f t_0 - i_f \cos \omega_1^f t_0 \right], \\ r_f = r_f(\omega^f), \quad i_f = i_f(\omega^f), \quad æ_{ycm}(t) = r_f \sin \omega^f t - i_f \cos \omega^f t. \end{gathered}$$

Система уравнений (5.4.6) для определения частотных параметров имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y(t + \ \ T_\alpha) &= r \sin \omega_1 (t + \ \ T_\alpha) + i \cos \omega_1 (t + \ \ T_\alpha) + \eta(t + \ \ T_\alpha) \\ y(t + 2T_\alpha) &= r \sin \omega_1 (t + 2T_\alpha) + i \cos \omega_1 (t + 2T_\alpha) + \eta(t + 2T_\alpha) \\ y(t + 3T_\alpha) &= r \sin \omega_1 (t + 3T_\alpha) + i \cos \omega_1 (t + 3T_\alpha) + \eta(t + 3T_\alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{5.4.17}$$

Пусть условие (5.4.9) нарушается и, следовательно,

$$\omega_1 < \omega^f. \tag{5.4.18}$$

Тогда функция $\eta(t)$ не является квазистационарной. Используем для оценки r и i любую пару уравнений системы (5.4.17). Эти оценки существенно зависят от выбора уравнений и ««помех»» $\eta(t)$.

Для получения наилучших оценок применим метод наименьших квадратов. Положим $T_\alpha \to \infty$ и сформируем

$$J = \int\limits_0^{t_1} \Big[y(t) - \hat{r}\sin\omega_1 t - \hat{i}\cos\omega_1 t\Big]^2 dt, \tag{5.4.19}$$

где t_1 – некоторое число ($t_1 > T_\omega$, можно принять, например, $t_1 \to \infty$).

Найдём $\hat{r}$ и $\hat{i}$, при которых функционал (5.4.19) принимает наименьшее значение. Необходимое для этого условие

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{r}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \hat{i}} = 0$$

имеет в развёрнутой форме вид

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[y(t) - \hat{r}\sin\omega_1 t - \hat{i}\cos\omega_1 t\Big]\sin\omega_1 t\, dt = 0, \tag{5.4.20}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[y(t) - \hat{r}\sin\omega_1 t - \hat{i}\cos\omega_1 t\Big]\cos\omega_1 t\, dt = 0. \tag{5.4.21}$$

Рассмотрим подробнее первое из этих уравнений. Разделим его на $\dfrac{t_1 - t_0}{2}$ и запишем

$$\frac{2}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\sin\omega_1 t\, dt = \frac{2\hat{r}}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \sin^2\omega_1 t\, dt + \frac{2\hat{i}}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \sin\omega_1 t\cos\omega_1 t\, dt =$$
$$= \hat{r} - \frac{\hat{r}}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \cos 2\omega_1 t\, dt + \frac{\hat{i}}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \sin 2\omega_1 t\, dt.$$

Отсюда получим

$$\hat{r} = \lim_{t_1\to\infty} \frac{2}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\sin\omega_1 t\, dt. \tag{5.4.22}$$

Аналогично найдём

$$\hat{i} = \lim_{t_1\to\infty} \frac{2}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} y(t)\cos\omega_1 t\, dt. \tag{5.4.23}$$

Сравнивая эти выражения с (5.3.6), заключаем, что фильтр Фурье доставляет наилучшую (в смысле функционала (5.4.19) при $t_1 \to \infty$) оценку частотных параметров. Эта связь локального фильтра и фильтра Фурье сохраняется и в общем случае ($n > 1$).

5.4.5. Идентификация

Применим метод наименьших квадратов для непосредственного определения параметра (идентификации) скалярного объекта (5.4.15). Положим $u(t) = 0$ и будем считать, что можно точно вычислить производную измеряемой переменной $y(t)$.

Сформируем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{y}(t) - \hat{a}y(t)]^2 \, dt, \tag{5.4.24}$$

и найдём наилучшую оценку $(\hat{a})$ параметра a.

Вычислим

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2 \int_{t_0}^{t_1} [\dot{y}(t) - \hat{a}y(t)] \, y(t) \, dt = 0.$$

Отсюда

$$\hat{a} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \dot{y}y \, dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 \, dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} (ay + mf)y \, dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 \, dt} = a + \frac{m \int_{t_0}^{t_1} fy \, dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 \, dt} = a + \varepsilon. \tag{5.4.25}$$

Определим погрешность ε для двух случаев: а) $f(t)$ – единичная ступенчатая функция $[f(t) = 1(t)]$, б) $f(t) = \sin \omega^f t$.

В первом случае

$$y(t) = -\frac{m}{a}(1 - e^a t), \quad t_0 = 0, \quad x(t_0) = 0, \tag{5.4.26}$$

и тогда

$$\varepsilon = -a \frac{\int_0^{t_1} (1 - e^a t) \, dt}{\int_0^{t_1} (1 - e^a t)^2 \, dt} = -a \left. \frac{t - \frac{1}{a}e^{at}}{t - \frac{2}{a}e^{at} + \frac{1}{2a}e^{2at}} \right|_{t=0}^{t=t_1} = -a \left[\frac{2(at_1 - e^{at_1})}{2at_1 - 4e^{at_1} + e^{2at_1}} - \frac{2}{3} \right]. \tag{5.4.27}$$

При $t_1 \to \infty$ получим при $a < 0$

$$\varepsilon_\infty = -\frac{a}{3}. \tag{5.4.28}$$

Таким образом, погрешность в определении параметра составляет 30%.

Пусть теперь $f(t) = \sin \omega^f t$. В этом случае в соответствии с (5.2.3) запишем при $\lambda = 0$

$$y(t) = r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at}.$$

Погрешность

$$\varepsilon = \frac{m \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at} \right) \sin \omega^f t \, dt}{\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at} \right)^2 \, dt}.$$

При $t_1 \to \infty$ нетрудно получить[1]

$$\varepsilon_\infty = \frac{r_f \cdot m}{r_f^2 + i_f^2}. \tag{5.4.29}$$

Приложения к главе 5

5.П.1. Формула Коши

5.П.1.1. Вид формулы

Рассмотрим нестационарный объект, описываемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}. \tag{5.П.1}$$

Решение этого уравнения описывается формулой Коши

$$\boldsymbol{x}(t) = \Theta(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t, \tau) B(\tau) \boldsymbol{u}(\tau) \, d\tau, \tag{5.П.2}$$

в которой $\Theta(t, t_0)$ – нормированная фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}. \tag{5.П.3}$$

В стационарном случае, когда $A(t) = A$, $B(t) = B$

$$\Theta(t, t_0) = e^{A(t - t_0)}, \tag{5.П.4}$$

и формула Коши принимает вид

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t - t_0)} \boldsymbol{x}^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t - \tau)} B \boldsymbol{u}(\tau) \, d\tau. \tag{5.П.5}$$

Для доказательства (5.П.2) напомним понятие нормированной матрицы.

[1] учитывая, что $\sin^2 \omega^f t = \dfrac{1 - \cos 2\omega^f t}{2}$, $\cos^2 \omega^f t = \dfrac{1 + \cos 2\omega^f t}{2}$

5.П.1.2. Нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (5.П.3)

Пусть $\Psi_{[1]}(t)$, $\Psi_{[2]}(t)$, ..., $\Psi_{[n]}(t)$ – n линейно независимых векторов, являющихся решением однородного уравнения (5.П.3). Такие вектора могут быть получены, например, следующим образом: вектор $\Psi_{[1]}(t)$ – решение уравнения (5.П.3) при начальных условиях $x_1(t_0) = 1$, $x_2(t_0) = 0$, ..., $x_n(t_0) = 0$; вектор $\Psi_{[2]}(t)$ – решение (5.П.3) при $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 1$, ..., $x_n(t_0) = 0$; и т.д.; а $\Psi_{[n]}(t)$ – решение (5.П.3) при начальных условиях $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$, ..., $x_n(t_0) = 1$.

Матрица $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \Psi_{[1]}(t) & \Psi_{[2]}(t) & \cdots & \Psi_{[n]}(t) \end{pmatrix}$ называется *фундаментальной матрицей* решения уравнения (5.П.3).

По построению она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A(t)\Psi(t). \tag{5.П.6}$$

Общее решение (5.П.3) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t) = \Psi(t)\boldsymbol{c}, \tag{5.П.7}$$

где $\boldsymbol{c}$ – некоторый вектор чисел, определяемый начальным вектором $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Нетрудно проверить, что (5.П.6) удовлетворяет (5.П.3). Полагая в (5.П.7) $t = t_0$, получим $\boldsymbol{c} = \Psi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$ и тогда окончательно

$$\boldsymbol{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \Theta(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0),$$

где

$$\Theta(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0). \tag{5.П.8}$$

Заметим, что $\Theta(t_0, t_0) = E$.

Для стационарных систем можно указать явный вид фундаментальной матрицы. Действительно, определим вектора $\Psi_{[1]}(t)$, $\Psi_{[2]}(t)$, ..., $\Psi_{[n]}(t)$, составляющие фундаментальную матрицу соотношениями

$$\Psi_{[i]}(t) = \Gamma_{[i]}e^{s_i t} \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.П.9}$$

где s_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – корни полинома $\det(Es - A)$, $\Gamma_{[i]}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – n-мерные вектора, определяемые как решения уравнений

$$(Es_i - A)\Gamma_{[i]} = \mathbf{0} \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.П.10}$$

Так как решение этих уравнений не единственно, то существует бесчисленное множество фундаментальных матриц. Одной из них является матрица

$$\Psi(t) = e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots \tag{5.П.11}$$

Вычисляя производную этой матрицы

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A + A^2 t + \frac{1}{2!}A^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \cdots = Ae^{At},$$

убеждаемся, что (5.П.11) является решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A\Psi(t).$$

Нетрудно проверить, что

$$\Theta(t, t_0) = e^{At}\left(e^{At_0}\right)^{-1} = e^{A(t-t_0)}. \tag{5.П.12}$$

5.П.1.3. Доказательство формулы Коши

Запишем (5.П.2) с учётом (5.П.8) в развёрнутой форме

$$\boldsymbol{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \Psi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau. \tag{5.П.13}$$

Дифференцируя это выражение с учётом (2.П.6), получим

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \\
&+ \dot{\Psi}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau + \Psi(t)\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau\right] = \\
&= A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \\
&+ A(t)\Psi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau + \Psi(t)\Psi^{-1}(t)B(t)\boldsymbol{u}(t) = \\
&= A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t),
\end{aligned} \tag{5.П.14}$$

что и требовалось доказать.

<u>Пример 5.П.1.</u> Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + \omega x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \lambda x_2, \tag{5.П.15}$$

где λ, ω и b_1 – заданные числа. Пусть для простоты $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$. Соответствующая однородная система имеет вид

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \lambda x_2, \tag{5.П.16}$$

Полином

$$\det(Es - A) = \det\begin{pmatrix} s-\lambda & -\omega \\ \omega & s-\lambda \end{pmatrix} = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2 + \omega^2 \tag{5.П.17}$$

имеет корни

$$s_1 = \lambda + j\omega, \quad s_2 = \lambda - j\omega.$$

Фундаментальная матрица решений системы (5.П.16)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\sin\omega t & e^{\lambda t}\cos\omega t \\ e^{\lambda t}\cos\omega t & -e^{\lambda t}\sin\omega t \end{pmatrix}. \tag{5.П.18}$$

Действительно, вычисляя производную этой матрицы

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}[\ \lambda\sin\omega t + \omega\cos\omega t] & e^{\lambda t}[\ \lambda\cos\omega t - \omega\sin\omega t] \\ e^{\lambda t}[-\omega\sin\omega t + \lambda\cos\omega t] & e^{\lambda t}[-\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t] \end{pmatrix}$$

убеждаемся, что

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}\Psi(t).$$

Формула Коши, описывающая решение уравнений (5.Д.15) имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ \cos\omega t & -\sin\omega t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \\ \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau. \tag{5.П.19}$$

■

Пример 5.П.2. Применим формулу Коши для построения дискретной модели велосипеда из примера 5.2.1.

Приведём уравнение (5.2.21) к форме Коши. Для этого введём обозначения

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y} - b_1 u. \tag{5.П.20}$$

Тогда получим

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = -d_0 x_1 + b_0 u. \tag{5.П.21}$$

Фундаментальная матрица решений этой системы

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & e^{-\nu t} \\ \nu e^{\nu t} & -\nu e^{-\nu t} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \nu e^{-\nu t} & e^{-\nu t} \\ \nu e^{\nu t} & -e^{\nu t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\nu}, \tag{5.П.22}$$

где $\nu = \sqrt{d_0}$.

Полагая в (5.П.13) $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, запишем

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \Psi[(k+1)T]\Psi^{-1}(kT)\boldsymbol{x}(kT) + \Psi[(k+1)T] \int\limits_{kT}^{(k+1)T} \Psi^{-1}(t)\boldsymbol{b}u(t)\, dt. \tag{5.П.23}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int \Psi^{-1}(t)\boldsymbol{b}u(t)\, dt = \begin{pmatrix} -e^{-\nu t} & -\dfrac{1}{\nu}e^{-\nu t} \\ e^{\nu t} & -\dfrac{1}{\nu}e^{\nu t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\nu}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \frac{1}{2\nu} \begin{pmatrix} e^{\nu(k+1)T} & e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -\nu e^{-\nu(k+1)T} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nu e^{-\nu kT} & e^{-\nu kT} \\ \nu e^{\nu kT} & -e^{\nu kT} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} +$$
$$+ \frac{1}{\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} e^{\nu(k+1)T} & e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -\nu e^{-\nu(k+1)T} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left\{ \begin{pmatrix} -\nu e^{-\nu(k+1)T} & -e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -e^{\nu(k+1)T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\nu e^{-\nu kT} & -e^{-\nu kT} \\ \nu e^{\nu kT} & -e^{\nu kT} \end{pmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} b_1 u(kT) \\ b_0 u(kT) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \nu T & \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T \\ \operatorname{sh} \nu T & \operatorname{ch} \nu T \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T & \nu^{-2}(\operatorname{ch} \nu T - 1) \\ \operatorname{ch} \nu T - 1 & \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 u(kT) \\ b_0 u(kT) \end{bmatrix}. \tag{5.П.24}$$

■

5.П.2. Дискретные объекты

5.П.2.1. Частотные параметры

Рассмотрим дискретный объект

$$\boldsymbol{x}(kT) = A^{\partial} \boldsymbol{x}[(k-1)T] + \boldsymbol{b}^{\partial} u[(k-1)T] \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.П.25}$$

$$y(kT) = \boldsymbol{d}^{\partial} \boldsymbol{x}[kT] \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.П.26}$$

где $\boldsymbol{x}[kT] \quad k = 1, 2, \dots$ – n-мерный вектор переменных состояния, T – интервал дискретности.

Применяя z-преобразование, получим при нулевых начальных условиях передаточную функцию

$$w(z^{-1}) = \boldsymbol{d}^{\partial} \left(E - z^{-1} A^{\partial}\right)^{-1} z^{-1} \boldsymbol{b}^{\partial}, \tag{5.П.27}$$

связывающую z-преобразование измеряемой переменной $y(t)$ и управление $u(t)$

$$y = w(z^{-1}) u.$$

Введём обозначение $z^{-1} = q$. Тогда

$$w(z^{-1}) = w(q) = \boldsymbol{d}^{\partial} \left(E - q A^{\partial}\right)^{-1} q \boldsymbol{b}^{\partial}. \tag{5.П.28}$$

Частотные параметры (ω-индексы) дискретного объекта определим как значения передаточной функции (5.П.28) при

$$q_i = e^{-(\lambda + j\omega_i)T} \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.П.29}$$

где положительное число λ определяется из условия сходимости z-преобразования. Это условие аналогично (5.1.19)

$$e^{\lambda T} \geq z_0 > \max |z_i|, \tag{5.П.30}$$

где z_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – корни полинома

$$d(z)=\det(Ez-A^{\partial}). \tag{5.П.31}$$

Итак, частотные параметры (ω-индексы) дискретного объекта

$$r_{\partial}^{\lambda}(\omega_i)=\operatorname{Re} w\left(e^{-(\lambda+j\omega_i)T}\right),\quad i_{\partial}^{\lambda}(\omega_i)=\operatorname{Jm} w\left(e^{-(\lambda+j\omega_i)T}\right)\quad i=\overline{1,n}. \tag{5.П.32}$$

Приложим к нему испытательное воздействие

$$u(kT)=e^{\lambda kT}\sin\omega kT\quad k=0,1,\dots,\quad \omega>3T. \tag{5.П.33}$$

Утверждение 5.П.1. Реакция дискретного объекта (5.П.25), (5.П.26), на испытательное воздействие (5.П.33) имеет вид

$$y(kT)=e^{\lambda kT}\left[r_{\partial}^{\lambda}(\omega)\sin\omega kT+i_{\partial}^{\lambda}(\omega)\cos\omega kT\right]+e^{\lambda kT}æ^{0}(kT)\quad k=0,1,\dots, \tag{5.П.34}$$

где

$$æ^{0}(kT)=(A^{\partial})^{k}\left[\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{i}_{\partial x}^{\lambda}(\omega)\right]e^{-\lambda kT}, \tag{5.П.35}$$

$$\boldsymbol{i}_{\partial x}^{\lambda}(\omega)=\operatorname{Jm}\boldsymbol{\beta}_{\partial}^{\lambda}(j\omega)=\operatorname{Jm}\left[E-e^{-(\lambda+j\omega)T}A^{\partial}\right]\boldsymbol{b}^{\partial}. \tag{5.П.36}$$

Если выполняется неравенство (5.П.30), то

$$\lim_{k\to\infty} æ^{0}(kT)=0. \tag{5.П.37}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.9.

Умножим реакцию (5.П.34) на $e^{-\lambda kT}$ $(k=0,1,\dots)$, получим экспоненциально-взвешенную функцию

$$\tilde{y}(kT)=y(kT)e^{-\lambda kT}=r_{\partial}^{\lambda}(\omega)\sin\omega kT+i_{\partial}^{\lambda}(\omega)\cos\omega kT+æ^{0}(kT)\quad k=0,1,\dots. \tag{5.П.38}$$

5.П.2.2. Уравнения ««вход-выход»»

Уравнения (5.П.1). (5.П.2) имеют в форме ««вход-выход»» вид

$$\begin{gathered}y(kT)+d_1y[(k-1)T]+\dots+d_ny[(k-n)T]=\\=b_1u[(i-æ-1)T]+\dots+b_nu[(i-æ-n)T]\quad k=0,1,\dots.\end{gathered} \tag{5.П.39}$$

где $æT$ – запаздывание в управлении.

Коэффициенты этого уравнения нетрудно получить, если сравнить z-преобразование этого уравнения (при $æ=0$) с числителем и знаменателем передаточной функции (5.П.3).

Тогда

$$d(q) = 1 + d_1 q + \cdots + d_n q^n = \det(E - qA), \tag{5.П.40}$$

$$b(q) = b_1 q + \cdots + b_n q^n = \boldsymbol{d}\widetilde{(E - qA)}\boldsymbol{b}q. \tag{5.П.41}$$

Пример 5.П.3. Дискретная модель велосипеда (5.2.21) описывается при запаздывании ($æ = 1$) в управлении системой

$$\begin{cases} x_1(kT) = a_{11}^{\partial} x_1[(k-1)T] + a_{12}^{\partial} x_2[(k-1)T] + b_1^{\partial} u[(k-2)T], \\ x_2(kT) = a_{21}^{\partial} x_1[(k-1)T] + a_{22}^{\partial} x_2[(k-1)T] + b_2^{\partial} u[(k-2)T], \\ y(kT) = x_1(kT), \end{cases} \tag{5.П.42}$$

где

$$a_{11}^{\partial} = \operatorname{ch} \nu T, \quad a_{12}^{\partial} = \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T, \quad a_{21}^{\partial} = \nu \operatorname{sh} \nu T, \quad a_{22}^{\partial} = \operatorname{ch} \nu T, \tag{5.П.43}$$

$$b_1^{\partial} = b_1 \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T + b_0 \nu^{-2} (\operatorname{ch} \nu T - 1), \quad b_2^{\partial} = b_1 (\operatorname{ch} \nu T - 1) + b_0 \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T, \tag{5.П.44}$$

и[2] $\nu = \sqrt{|d_0|}$.

Передаточная функция

$$\begin{aligned} w(q) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - qa_{11}^{\partial} & -qa_{12}^{\partial} \\ -qa_{21}^{\partial} & 1 - qa_{22}^{\partial} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} b_1^{\partial} \\ b_2^{\partial} \end{bmatrix} \cdot q^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - qa_{22}^{\partial} & qa_{12}^{\partial} \\ qa_{21}^{\partial} & 1 - qa_{11}^{\partial} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1^{\partial} \\ b_2^{\partial} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \frac{q^2}{\left(a_{11}^{\partial} a_{22}^{\partial} - a_{12}^{\partial} a_{21}^{\partial}\right) q^2 - \left(a_{11}^{\partial} + a_{22}^{\partial}\right) q + 1} = q \frac{b_2 q^2 + b_1 q}{d_2 q^2 + d_1 q + 1}. \end{aligned} \tag{5.П.45}$$

Здесь

$$b_1 = b_1^{\partial}, \quad b_2 = a_{12}^{\partial} b_2^{\partial} - a_{22}^{\partial} b_1^{\partial}; \qquad d_1 = -a_{11}^{\partial} - a_{22}^{\partial}, \quad d_2 = a_{11}^{\partial} a_{22}^{\partial} - a_{12}^{\partial} a_{21}^{\partial}. \tag{5.П.46}$$

Используем выражения (5.5.19), (5.5.20) и получим

$$\begin{cases} b_1 = d_0^{-1}[b_0(\operatorname{ch} \nu T - 1) + b_1 \nu \operatorname{sh} \nu T], & b_2 = d_0^{-1}[b_0(\operatorname{ch} \nu T - 1) - b_1 \nu \operatorname{sh} \nu T]; \\ d_1 = -2 \operatorname{ch} \nu T, & d_2 = 1. \end{cases} \tag{5.П.47}$$

Пусть интервал дискретности

$$T = 0.1. \tag{5.П.48}$$

При параметрах (5.2.20) велосипеда ($d_0 = -16$, $b_0 = 30$, $b_1 = 5$) получим по формулам (5.5.23)

$$d_1 = -2.166, \quad d_2 = 1; \qquad b_1 = 0.666, \quad b_2 = -0.362. \tag{5.П.49}$$

[2]Вывод выражений (5.П.43), (5.П.44) при $æ = 0$ приведён в примере 5.П.2.

Зададимся испытательными частотами (ω-тестом)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{4T} = 15.71, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{8T} = 7.58, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{12T} = 5.236, \tag{5.П.50}$$

и вычислим, принимая как и в (5.2.23), $\lambda = 6$

$$q_1 = e^{-(\lambda+j\omega_1)T} = e^{-\lambda T}(\cos\omega_1 T - j\sin\omega_1 T) = -j0.549, \tag{5.П.51}$$

$$q_2 = e^{-(\lambda+j\omega_2)T} = 0.388 - j0.388, \quad q_3 = 0.475 - j0.274. \tag{5.П.52}$$

Подставляя эти значения в (5.2.21), получим

$$\begin{aligned} w(q_1) &= -0.1111 + j0.1034, \\ w(q_2) &= -0.2485 - j0.2519, \\ w(q_3) &= -0.2052 - j0.3752. \end{aligned} \tag{5.П.53}$$

Таким образом, частотные параметры (5.П.54)

$$\begin{aligned} r_\partial^\lambda(\omega_1) &= -0.1111, & i_\partial^\lambda(\omega_1) &= 0.1034; \\ r_\partial^\lambda(\omega_2) &= -0.2485, & i_\partial^\lambda(\omega_2) &= -0.1519; \\ r_\partial^\lambda(\omega_3) &= -0.2052, & i_\partial^\lambda(\omega_3) &= -0.3752. \end{aligned} \tag{5.П.55}$$

■

5.П.2.3. Дискретный фильтр Фурье

Схема экспериментального определения частотных функций дискретного объекта совпадает со схемой, приведённой на рис. 5.3.2., где нужно заменить t на kT.

Дискретный фильтр Фурье в этой схеме описывается аналогично (5.3.6) при $t_0 = 0$

$$\hat{r}^\lambda(kT,\omega) = \frac{2}{\rho k}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{y}(iT)\sin\omega iT, \quad \hat{i}^\lambda(kT,\omega) = \frac{2}{\rho k}\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{y}(iT)\cos\omega iT \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{5.П.56}$$

Интуитивно ясно, что

$$\lim_{k\to\infty}\hat{r}^\lambda(kT,\omega) = r_\partial^\lambda(\omega). \tag{5.П.57}$$

Однако доказать это соотношение затруднительно. Действительно, подставим в (5.П.56) выражение (5.5.14)

$$\begin{aligned} \hat{r}^\lambda(kT,\omega) &= \frac{2}{\rho k}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\rho r_\partial^\lambda(\omega)\sin\omega iT + \rho i_\partial^\lambda(\omega)\cos\omega iT + æ^0(iT)\right]\sin\omega iT = \\ &= \frac{2}{k}\left\{r_\partial^\lambda(\omega)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1-\cos 2\omega iT}{2} + i_\partial^\lambda(\omega)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\sin 2\omega iT}{2} + \sum_{i=0}^{k-1}æ^0(iT)\sin\omega iT\right\}. \end{aligned} \tag{5.П.58}$$

Пусть α – некоторое целое чётное положительное число ($\alpha > r$) и $\omega = \dfrac{\pi}{\alpha T}$.

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{\alpha}\cos 2\omega iT=\sum_{i=0}^{\alpha}\cos\frac{2\pi}{\alpha}i=0,\quad \sum_{i=0}^{\alpha}\sin 2\omega iT=\sum_{i=0}^{\alpha}\sin\frac{2\pi}{\alpha}i=0.$$

Если $k=1$ делится на α, то

$$\sum_{i=0}^{k-1}\cos 2\omega iT=\sum_{i=0}^{k-1}\sin 2\omega iT=0.$$

Таким образом, можно указать числа k, при которых

$$\hat{r}^{\lambda}(kT,\omega)=r_{\partial}^{\lambda}(\omega)+\frac{2}{k}\sum_{i=0}^{k-1}æ^{0}(iT)\sin\omega iT. \tag{5.П.59}$$

Для сходимости выхода дискретного фильтра к частотной функции $r_{\partial}^{\lambda}(\omega)$ достаточно, чтобы, аналогично (5.3.10), выполнялось неравенство

$$\sum_{i=0}^{k\to\infty}æ^{0}(iT)\sin\omega iT<\infty. \tag{5.П.60}$$

Для доказательства этого неравенства можно повторить для дискретного случая преобразования разделов 5.Д.2 и 5.Д.3.

5.П.2.4. Рекуррентный фильтр Фурье

Запишем первое из выражений (5.П.56) в рекуррентной форме. Обозначим $\Delta(i)=$ $=\tilde{y}(iT)\sin\omega iT$. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{r}^{\lambda}(kT,\omega)&=\frac{2}{\rho k}\sum_{i=0}^{k-1}\Delta(i)=\frac{2}{\rho k}\sum_{i=0}^{k-2}\Delta(i)+\frac{2}{\rho k}\Delta(k-1)=\\&=\frac{k-1}{k}\left[\frac{2}{\rho(k-1)}\sum_{i=0}^{k-2}\Delta(i)+\frac{2}{\rho(k-1)}\Delta(k-1)\right]=\\&=\frac{k-1}{k}\left\{\hat{r}^{\lambda}[(k-1)T,\omega]+\frac{2}{\rho(k-1)}\Delta(k-1)\right\}=\\&=\hat{r}^{\lambda}[(k-1)T,\omega]-\frac{1}{k}\left\{\hat{r}^{\lambda}[(k-1)T,\omega]+\frac{2}{\rho}\Delta(k-1)\right\}.\end{aligned}$$

Итак, имеем разностное уравнение

$$\begin{gathered}\hat{r}^{\lambda}(kT,\omega)=\hat{r}^{\lambda}[(k-1)T,\omega]-\frac{1}{k}\left\{\hat{r}^{\lambda}[(k-1)T,\omega]+\frac{2}{\rho}\tilde{y}[(k-1)T]\sin\omega(k-1)T\right\}\\ k=1,2,\ldots,\quad \hat{r}^{\lambda}(0,\omega)=\hat{r}_{0}^{\lambda}.\end{gathered} \tag{5.П.61}$$

Полином (5.П.31) этого уравнения – $d(z)=z-\dfrac{k-1}{k}$ – имеет корень, меньший единицы, и поэтому при ограниченной функции $\tilde{y}(kT)\sin\omega kT$ $(k=1,2,\ldots)$, решение уравнения (5.П.61) – ограничено.

Приведём аналогичное уравнение для непрерывного случая.

Дифференцируя первое из выражений (5.П.37), получим при $t = 0$

$$\dot{\hat{r}}^{\lambda}(t,\omega) = -\frac{2}{t^2}y^s(t) + \frac{2}{t}\dot{y}^s(t) = -\frac{1}{t}\hat{r}^{\lambda}(t,\omega) + \frac{2}{t}\tilde{y}(t)\sin\omega t.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение фильтра Фурье имеет вид

$$\dot{\hat{r}}^{\lambda}(t,\omega) = -\frac{1}{t}\hat{r}^{\lambda}(t,\omega) + \frac{2}{t}\tilde{y}(t)\sin\omega t, \quad \hat{r}^{\lambda}(0,\omega) = \hat{r}_0^{\lambda}. \tag{5.П.62}$$

Доказательства к главе 5

5.Д. Доказательства теорем и утверждений

5.Д.1. Доказательство утверждения 5.2.1

Допустим вначале, что объект (5.2.1) асимптотически устойчив. Рассмотрим решение уравнения (5.2.1), обозначаемое как $\boldsymbol{x}^+(t)$, при

$$u = e^{j\omega t}. \tag{5.Д.1}$$

Покажем, что

$$\boldsymbol{x}^+(t) = \boldsymbol{\beta}(j\omega)e^{j\omega t} + \boldsymbol{æ}^+(t), \tag{5.Д.2}$$

где $\boldsymbol{æ}^+(t)$ – n-мерный вектор, обладающий свойством

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{æ}^+(t) = 0. \tag{5.Д.3}$$

Для этого запишем на основе формулы Коши (приведённой в 5.П.1.1) при $\boldsymbol{x}(t_0) = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^+(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}e^{j\omega\tau}\,d\tau = e^{At}\left[(Ej\omega - A)^{-1}e^{(Ej\omega-A)\tau}\boldsymbol{b}\right]\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \\ &= e^{j\omega t}(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b} - e^{At}(Ej\omega - A)^{-1}e^{(Ej\omega-A)t_0}\boldsymbol{b},\end{aligned} \tag{5.Д.4}$$

где

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots \tag{5.Д.5}$$

Кроме того, при выходе (5.Д.4) учитывалась коммутативность матриц $(Ej\omega - A)^{-1}$ и $e^{(Ej\omega-A)t}$.

Используя это свойство, запишем (5.Д.4), вводя обозначение

$$\Gamma(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad \boldsymbol{æ}^+(t) = \Gamma(t-t_0)\boldsymbol{\beta}(j\omega)e^{j\omega t_0}, \tag{5.Д.6}$$

в виде (5.Д.2). В силу асимптотической устойчивости объекта $\lim\limits_{t\to\infty}\Gamma(t-t_0) = 0$ и поэтому справедливо (5.Д.3).

Рассмотрим теперь вектор $\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega)$. Для этого найдём решение уравнения (5.2.1) при

$$u = e^{(\lambda+j\omega)t}. \tag{5.Д.7}$$

Решение уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\lambda}^{+} = A\boldsymbol{x}_{\lambda}^{+} + \boldsymbol{b}e^{(\lambda+j\omega)t} \tag{5.Д.8}$$

имеет, при нулевых начальных условиях, вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{\lambda}^{+}(t) &= e^{At}\int\limits_{t_0}^{t} e^{(E\lambda-A)\tau}\boldsymbol{b}e^{j\omega\tau}\,d\tau = \\ &= (Ej\omega - A + E\lambda)^{-1}\boldsymbol{b}e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{At}(Ej\omega - A + E\lambda)^{-1}e^{(Ej\omega-A+E\lambda)t_0}\boldsymbol{b} = \\ &= \boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0}.\end{aligned} \tag{5.Д.9}$$

Нетрудно видеть, что это выражение совпадает при $\boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{0}$ с (5.Д.4), если в последнем заменить A на $A - E\lambda$.

Составим выражение

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{+}(t) = \boldsymbol{x}_{\lambda}^{+}(t)e^{-\lambda t} = \boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega)e^{j\omega t} + \tilde{\boldsymbol{æ}}^{+}(t), \tag{5.Д.10}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{æ}}^{+}(t) = e^{(A-E\lambda)t}e^{At_0}\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0}. \tag{5.Д.11}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{\boldsymbol{æ}}^{+}(t) = \mathbf{0}. \tag{5.Д.12}$$

Действительно, собственные числа $\tilde{s}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ матрицы $\tilde{A} = A - E\lambda$ связаны с собственными числами (s_i) матрицы A соотношением

$$\tilde{s}_i = s_i - \lambda \quad i = \overline{1,n},$$

и поэтому в силу (5.1.19)

$$\operatorname{Re}\tilde{s}_i < 0 \quad i = \overline{1,n}. \tag{5.Д.13}$$

Функции (5.Д.1), либо (5.Д.7) не могут быть реализованы физически, а может быть реализовано испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t}\sin\omega t = \frac{e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j}. \tag{5.Д.14}$$

Для нахождения реакции объекта на это воздействие запишем решение уравнения (5.2.1) при

$$u(t) = e^{(\lambda-j\omega)t}. \tag{5.Д.15}$$

Очевидно, что решение $\boldsymbol{x}_{\lambda}^{-}(t)$ с точностью до знака перед ω совпадает с (5.Д.9)

$$\boldsymbol{x}_{\lambda}^{-}(t) = \boldsymbol{\beta}^{\lambda}(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)t} - e^{A(t-t_0)}\left[\boldsymbol{\beta}^{\lambda}(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)t_0} - \boldsymbol{x}(t_0)\right]. \tag{5.Д.16}$$

Таким образом, искомая реакция

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{\boldsymbol{x}_\lambda^+(t) - \boldsymbol{x}_\lambda^-(t)}{2j} = \frac{\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t} - \boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j} -$$
$$-e^{A(t-t_0)}\,\mathrm{Jm}\left[\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0}\right] = \mathrm{Jm}\left[\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t}\right] - e^{A(t-t_0)}\,\mathrm{Jm}\left[\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0}\right]. \tag{5.Д.17}$$

Используя (5.2.4) получим при ненулевых начальных условиях искомое выражение (5.2.3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t\right] + \\ &+ e^{A(t-t_0)}\left[\boldsymbol{x}(t_0) - e^{\lambda t_0}\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t_0 - e^{\lambda t_0}\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t_0\right].\end{aligned} \tag{5.Д.18}$$

На основе неравенства (5.Д.13) заключаем непосредственно из выражения (5.2.4), что функция $\boldsymbol{æ}^0(t)$ обладает свойством (5.2.6).

5.Д.2. Доказательство утверждения 5.2.2

Найдём реакцию объекта (5.2.1) на испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t}(\nu\sin\omega t + \gamma\cos\omega t) = \nu\frac{e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j} + \gamma\frac{e^{(\lambda+j\omega)t} + e^{(\lambda-j\omega)t}}{2}.$$

Аналогично (5.Д.17) запишем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \nu\frac{\boldsymbol{x}_\lambda^+(t) - \boldsymbol{x}_\lambda^-(t)}{2j} + \gamma\frac{\boldsymbol{x}_\lambda^+(t) + \boldsymbol{x}_\lambda^-(t)}{2} = \\ &= e^{\lambda t}\left[\nu\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t + \nu\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t\right] + e^{\lambda t}\left[\gamma\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t - \gamma\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t\right] + \\ &+ e^{A(t-t_0)}\left[\boldsymbol{x}(t_0) + \nu e^{\lambda t_0}\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t_0 - \nu e^{\lambda t_0}\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t_0\right] - \\ &- e^{A(t-t_0)}\left[\gamma e^{\lambda t_0}\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t_0 - \gamma e^{\lambda t_0}\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t_0\right].\end{aligned}$$

Умножим эту функцию на $e^{-\lambda t}$ и получим в установившемся режиме

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \left[\nu\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega) - \gamma\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\right]\sin\omega t + \left[\nu\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega) + \gamma\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\right]\cos\omega t.$$

Для объекта (5.1.1)

$$\tilde{y}(t) = \left[\nu r^\lambda(\omega) - \gamma i^\lambda(\omega)\right]\sin\omega t + \left[\nu i^\lambda(\omega) + \gamma r^\lambda(\omega)\right]\cos\omega t.$$

С другой стороны, принимая выход

$$\tilde{y}(t) = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t,$$

запишем

$$\alpha = \nu r^\lambda(\omega) - \gamma i^\lambda(\omega), \quad \beta = \nu i^\lambda(\omega) + \gamma r^\lambda(\omega).$$

Отсюда (при $\lambda = 0$) получаем соотношения (5.2.43).

5.Д.3. Доказательство теоремы 5.2.1

Рассмотрим неравенства (5.2.82). Отметим вначале, что элементы $\gamma_{\rho j}(t_{cx})$ $\left(\rho, j = \overline{1,n}\right)$ матрицы

$$\Gamma(t_{cx}) = e^{At_{cx}} \tag{5.Д.19}$$

имеют при различных собственных числах $s_q = \alpha_q^0 + j\omega_q^0$ $\left(q = \overline{1,n}\right)$ матрицы A, вид

$$\gamma_{\rho j}(t_{cx}) = \sum_{q=1}^{n} \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sin\omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \cos\omega_q^0 t_{cx}\right] \quad \rho, j = \overline{1,n} \tag{5.Д.20}$$

Подставляя эти выражения в (5.2.82), запишем

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} \left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t_{cx} + i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t_{cx}\right]\cdot \\ \cdot\sum_{q=1}^{n} \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t_{cx}} \sin\omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t_{cx}} \cos\omega_q^0 t_{cx}\right] \le \varepsilon_{cx} \quad \rho, k = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{5.Д.21}$$

где r_{xj}^{λ} и i_{xj}^{λ} $\left(j = \overline{1,n}\right)$ – компоненты векторов $\boldsymbol{r}_x^{\lambda}$ и $\boldsymbol{i}_x^{\lambda}$.

Оценим левые части этих неравенств.

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} \left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t_{cx} + i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t_{cx}\right]\cdot \\ \cdot\sum_{q=1}^{n} \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t_{cx}} \sin\omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t_{cx}} \cos\omega_q^0 t_{cx}\right] = \\ = e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2}\cdot \sin[\omega_k t_{cx} + \varphi_j(\omega_k)]\cdot \\ \cdot\sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \cdot \sqrt{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)}\right]^2 + \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)}\right]^2}\cdot \sin[\omega_q^0 t_{cx} + \varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0)] = \\ = e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2}\cdot \sqrt{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)}\right]^2 + \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)}\right]^2}\cdot \\ \cdot\sin[\omega_k t_{cx} + \varphi_j(\omega_k)]\cdot\sin[\omega_q^0 t_{cx} + \varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0)] \le \\ \le e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}\right]^2}\cdot \sqrt{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)}\right]^2 + \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)}\right]^2} \le \\ \le e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \nu_{q\rho}^{\lambda} \quad \rho = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{5.Д.22}$$

где

$$\varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0) = \operatorname{arctg}\frac{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)}\right]^2}{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)}\right]^2} \quad q, \rho, j = \overline{1,n}, \quad \varphi_j(\omega_k) = \operatorname{arctg}\frac{i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)}{r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)} \quad j, k = \overline{1,n}, \tag{5.Д.23}$$

$$\begin{gathered} r_{xj}^{\lambda} = \max_{\omega_1 \le \omega_k \le \omega_n} \left|r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right|, \quad i_{xj}^{\lambda} = \max_{\omega_1 \le \omega_k \le \omega_n} \left|i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right| \quad j, k = \overline{1,n}, \\ \nu_{q\rho}^{\lambda} = \max_{1 \le j \le n} \sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}\right]^2}\cdot \sqrt{\left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)}\right]^2 + \left[\tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)}\right]^2} \quad q, \rho = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{5.Д.24}$$

Обозначая

$$\alpha^0 = \max\left\{\alpha_1^0,\, \alpha_2^0,\, \ldots,\, \alpha_n^0\right\}, \tag{5.Д.25}$$

получим для последнего из соотношений (5.Д.22)

$$e^{-\lambda t_{\text{cx}}} \sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0 t_{\text{cx}}} \nu_{q\rho}^{\lambda} = e^{(\alpha_0-\lambda)t_{\text{cx}}} \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\alpha_0)t_{\text{cx}}} \nu_{q\rho}^{\lambda} \le e^{(\alpha_0-\lambda)t_{\text{cx}}} \sum_{q=1}^{n} \nu_{q\rho}^{\lambda} \quad \rho = \overline{1,n}.$$

Будем искать t_{cx}^{λ} как наибольшее из решений уравнений

$$e^{(\alpha_0-\lambda)t_{\text{cx}}} \sum_{q=1}^{n} \nu_{q\rho}^{\lambda} \le \varepsilon_{cx} \quad \rho = \overline{1,n}. \tag{5.Д.26}$$

Очевидно, что

$$t_\rho \le \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln \sum\limits_{q=1}^{n} \nu_{q\rho}^{\lambda}}{\alpha_0 - \lambda} \quad \rho = \overline{1,n}. \tag{5.Д.27}$$

и время сходимости

$$t_{cx}^{\lambda} = \max\left\{t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n\right\}. \tag{5.Д.28}$$

Время сходимости для объектов второго вида [объекта (5.1.1)] определяется из неравенства (5.2.93). Преобразуем его левую часть с учётом (5.Д.20)

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{d} e^{(A-E\lambda)t}\left[\boldsymbol{r}_x^{\lambda}(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{i}_x^{\lambda}(\omega_k)\sin\omega_k t\right] = \\
= e^{-\lambda t}\sum_{l=1}^{n}\gamma_{lj}(t)\cdot\sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2}\cdot\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\
= \sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} e^{\left(\alpha_q^0-\lambda\right)t}\cdot\sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2}\cdot\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot \\
\cdot\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)]\cdot\sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] = \\
= \sum_{q=1}^{n} e^{\left(\alpha_q^0-\lambda\right)t}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_l\cdot\sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}(\omega_k)\right]^2}\cdot\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot \\
\cdot\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)]\cdot\sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \le \\
\le \sum_{q=1}^{n} e^{\left(\alpha_q^0-\lambda\right)t}\sum_{l,j=1}^{n}|d_l|\cdot\sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}\right]^2}\cdot\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2} = \\
= \sum_{q=1}^{n} e^{\left(\alpha_q^0-\lambda\right)t}\nu_q^{\lambda} \le e^{(\alpha^0-\lambda)t}\sum_{q=1}^{n}\nu_q^{\lambda},
\end{gathered} \tag{5.Д.29}$$

где

$$\nu_q^{\lambda} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|d_l|\cdot\sqrt{\left[r_{xj}^{\lambda}\right]^2 + \left[i_{xj}^{\lambda}\right]^2}\cdot\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2} \quad q = \overline{1,n}. \tag{5.Д.30}$$

Определяя t_{cx} из неравенства

$$e^{(\alpha_0-\lambda)t}\sum_{q=1}^{n}\nu_q^{\lambda} \le \varepsilon_{cx},$$

находим, что

$$t_{cx} \le \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln \sum\limits_{q=1}^{n} \nu_q^\lambda}{\alpha_0 - \lambda}. \tag{5.Д.31}$$

Исследуем зависимость ν_q^λ от λ.

Утверждение 5.Д.1.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \nu_q^\lambda = 0 \quad q = \overline{1,n}. \tag{5.Д.32}$$

■

Переходя к доказательству заметим, что в выражении (5.Д.30) для ν_q^λ от λ зависят лишь сомножители

$$a_{x\mu}^\lambda = \sqrt{\left[r_{x\mu}^\lambda\right]^2 + \left[i_{x\mu}^\lambda\right]^2} \quad \mu = \overline{1,n},$$

являющиеся амплитудно-частотными характеристиками компонент вектора $\boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega) = [E(\lambda - j\omega) - A]^{-1}\boldsymbol{b}$, которые представим как

$$\beta_\mu^\lambda(j\omega) = \beta_\mu(s) = \frac{b_\mu(s)}{d(s)} = \frac{b_\gamma^\mu s^\gamma + \dots + b_1^\mu s + b_0^\mu}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0} \tag{5.Д.33}$$
$$\mu = \overline{1,n}, \quad \gamma \le n-1, \quad s = \lambda + j\omega,$$

где $d(s) = \det(Es - A)$, $b_\mu(s) = (\widetilde{Es - A})^{[\mu]}\boldsymbol{b}$, $(\widetilde{Es - A})^{[\mu]}$ – μ-тая строка присоединённой матрицы[3] $(\widetilde{Es - A})$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\beta_\mu^\lambda(j\omega) &= \frac{b_\gamma^\mu(\lambda + j\omega)^\gamma + b_{\gamma-1}^\mu(\lambda + j\omega)^{\gamma-1} + \dots + b_1^\mu(\lambda + j\omega) + b_0^\mu}{(\lambda + j\omega)^n + d_{n-1}(\lambda + j\omega)^{n-1} + \dots + d_1(\lambda + j\omega) + d_0} = \\ &= \frac{\left(b_\gamma^\mu\lambda^\gamma + \bar{b}_{\gamma-1}^\mu\lambda^{\gamma-1} + \dots + \bar{b}_1^\mu\lambda + \bar{b}_0^\mu\right) + j\left(\tilde{b}_{\gamma-1}^\mu\lambda^{\gamma-1} + \dots + \tilde{b}_1^\mu\lambda + \tilde{b}_0^\mu\right)}{\left(\lambda^n + \bar{d}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{d}_1\lambda + \bar{d}_0\right) + j\left(\tilde{d}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \tilde{d}_1\lambda + \tilde{d}_0\right)} = \\ &= a_{x\mu}^\lambda(\omega)e^{j\varphi_{x\mu}^\lambda}(\omega) \quad \mu = \overline{1,n},\end{aligned} \tag{5.Д.34}$$

где $\bar{d}_i$, $\tilde{d}_i$ $\left(i = \overline{0,n-1}\right)$ и $\bar{b}_j^\mu$, $\tilde{b}_j^\mu$ $\left(j = \overline{0,\gamma-1}\right)$ – коэффициенты, зависящие от ω и параметров d_i $\left(i = \overline{0,n-1}\right)$ и b_j $\left(j = \overline{0,\gamma-1}\right)$.

Так как $\gamma \le n-1$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a_{x\mu}^\lambda(\omega) = 0$ для каждого фиксированного ω и таким образом (5.Д.32) доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда среди собственных чисел матрицы A имеются кратные. Пусть для простоты кратным является одно собственное число, например, s_1, а остальные собственные числа простые. Пусть кратность s_1 равна ρ_1. Тогда

[3]Присоединённая матрица определяется из равенства $(\widetilde{Es - A})(Es - A) = Ed(s)$.

(5.Д.20) примет вид

$$\begin{aligned}\gamma_{lj}(t) = &\left[c_{1lj}^{(1)} + c_{2lj}^{(1)}t + \dots + c_{\rho_1 lj}^{(1)}t^{\rho_1-1}\right] e^{\alpha_1^0 t}\sin\omega_1^0 t + \\ &+ \left[c_{1lj}^{(2)} + c_{2lj}^{(2)}t + \dots + c_{\rho_1 lj}^{(2)}t^{\rho_1-1}\right] e^{\alpha_1^0 t}\cos\omega_1^0 t + \\ &+ \sum_{q=\rho_1+1}^{n}\left[\nu_{qlj}^{(1)}e^{\alpha_q^0 t}\sin\omega_q^0 t + \nu_{qlj}^{(2)}e^{\alpha_q^0 t}\cos\omega_q^0 t\right] = \\ &= \sum_{q=1}^{\rho_1}\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}\sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \\ &+ \sum_{q=\rho_1-1}^{n}\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot e^{\alpha_q^0 t}\sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \quad l,j=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{5.Д.35}$$

Подставляя это выражение в левую часть (5.2.53), получим аналогично (5.Д.29)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)t}\left[\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t + \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t\right] = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{l=1}^{n}d_l\sum_{j=1}^{n}\gamma_{lj}(t)a_{xj}^\lambda(\omega_k)\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{l=1}^{n}d_l\left\{\sum_{q=1}^{\rho_1}\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}\sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \right. \\ &\left. + \sum_{q=\rho_1+1}^{n}\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot e^{\alpha_q^0 t}\sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)]\right\}a_{xj}^\lambda(\omega_k)\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{\rho_1}t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}d_l\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k)\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)]\sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \\ &+ e^{-\lambda t}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=\rho_1}^{n}e^{\alpha_q^0 t}d_l\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k)\sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)]\sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \le\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le e^{-\lambda t}\sum_{l,j=1}^{n}\sum_{q=1}^{\rho_1}t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}|d_l|\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) + \\ &+ e^{-\lambda t}\sum_{l,j=1}^{n}\sum_{q=\rho_1+1}^{n}e^{\alpha_q^0 t}|d_l|\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{q=1}^{\rho_1}t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}\sum_{l,j=1}^{n}|d_l|\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) + \\ &+ e^{-\lambda t}\sum_{q=\rho_1+1}^{n}e^{\alpha_q^0 t}\sum_{l,j=1}^{n}|d_l|\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) = \\ &= e^{-\lambda t}\sum_{q=1}^{\rho_1}t^{q-1}e^{\alpha_1^0 t}\nu_q^\lambda + e^{-\lambda t}\sum_{q=\rho_1+1}^{n}e^{\alpha_q^0 t}\nu_q^\lambda \quad k=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{5.Д.36}$$

где

$$\nu_q^\lambda = \begin{cases}\sum\limits_{l,j=1}^{n}|d_l|\sqrt{\left[c_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[c_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) & \text{при} \quad q=\overline{1,\rho}, \\ \sum\limits_{l,j=1}^{n}|d_l|\sqrt{\left[\nu_{qlj}^{(1)}\right]^2 + \left[\nu_{qlj}^{(2)}\right]^2}\cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) & \text{при} \quad q=\overline{\rho+1,n}.\end{cases} \tag{5.Д.37}$$

Покажем, что всегда можно найти число α_0^0 такое, что выполняется неравенство

$$\sum_{q=1}^{\rho_1}t^{q-1}\nu_q^\lambda \le e^{\alpha_0^0 t}\nu_1^\lambda. \tag{5.Д.38}$$

Действительно, представим

$$e^{\alpha_0^0 t} = 1 + \alpha_0^0 t + \frac{(\alpha_0^0)^2}{2!}t^2 + \frac{(\alpha_0^0)^3}{3!}t^3 + \dots + \frac{(\alpha_0^0)^{\rho-1}}{(\rho-1)!}t^{\rho-1} + \dots$$

и выберем α_0^0 из условий

$$\frac{(\alpha_0^0)^i}{i!} \geq \frac{\nu_i^\lambda}{\nu_1^\lambda} \quad i = \overline{1, \rho_1 - 1}. \tag{5.Д.39}$$

Используя (5.Д.36), запишем, что

$$\begin{gathered} e^{-\lambda t}\sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t}\nu_q^\lambda + e^{-\lambda t}\sum_{q=\rho_1+1}^{n} e^{\alpha_q^0 t}\nu_q^\lambda \leq \\ \leq e^{-\lambda t}\left(e^{(\alpha_1^0+\alpha_0^0)t}\nu_1^\lambda + \sum_{q=\rho_1+1}^{n} e^{\alpha_q^0 t}\nu_q^\lambda\right) \leq e^{(\alpha^0-\lambda)t}\left(\nu_1^\lambda + \sum_{q=\rho_1+1}^{n}\nu_q^\lambda\right), \end{gathered} \tag{5.Д.40}$$

где $\alpha^0 = \max\left\{\alpha_1^0 + \alpha_0^0,\ \alpha_{\rho+1}^0,\ \dots,\ \alpha_n^0\right\}$.

5.Д.4. Доказательство утверждения 5.3.2

Вводя вектор

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x}(t_0)e^{-\lambda t_0} - \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega)\sin\omega t_0 - \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega)\cos\omega t_0, \tag{5.Д.41}$$

представим выражение (5.3.4) в более компактной форме

$$\boldsymbol{æ}^0(t) = e^{(A-E\lambda)(t-t_0)}\boldsymbol{\delta} = e^{A(t-t_0)}e^{-\lambda(t-t_0)}\boldsymbol{\delta} = e^{-\lambda(t-t_0)}\Gamma(t-t_0)\boldsymbol{\delta}, \tag{5.Д.42}$$

где элементы матрицы $\Gamma(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$ имеют, в соответствии с (5.Д.20), вид

$$\gamma_{\rho j}(t-t_0) = \sum_{q=1}^{n}\left[\tilde\nu_{q\rho j}^{(1)} e^{\alpha_q^0(t-t_0)}\sin\omega_q^0(t-t_0) + \tilde\nu_{q\rho j}^{(2)} e^{\alpha_q^0(t-t_0)}\cos\omega_q^0(t-t_0)\right] \quad \rho, j = \overline{1, n}.$$

С учётом этого выражения можно записать компоненты вектора $\boldsymbol{æ}^0(t)$ как

$$\begin{aligned} æ_\rho^0(t) &= e^{-\lambda(t-t_0)}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\gamma_{\rho j}(t-t_0) = \\ &= e^{-\lambda(t-t_0)}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\sum_{q=1}^{n} e^{\alpha_q^0(t-t_0)}\left[\tilde\nu_{q\rho j}^{(1)}\sin\omega_q^0(t-t_0) + \tilde\nu_{q\rho j}^{(2)}\cos\omega_q^0(t-t_0)\right] \quad \rho = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{5.Д.43}$$

Заменим определённый интеграл в (5.3.10) на неопределённый и получим для первого из этих неравенств

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t} æ_\rho^0(t)\sin\omega t\,dt = \int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}e^{-\alpha_q^0 t_0}\cdot \\ \cdot\left[\tilde\nu_{q\rho j}^{(1)}\sin\omega_q^0(t-t_0)\sin\omega t + \tilde\nu_{q\rho j}^{(2)}\cos\omega_q^0(t-t_0)\sin\omega t\right]dt. \end{gathered} \tag{5.Д.44}$$

Найдём выражения для интегралов, входящих в это соотношение и аналогичное выражение для второго из неравенств (5.3.10)

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\sin\omega^0\tau\sin\omega\tau\,d\tau,\qquad \int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\cos\omega^0\tau\sin\omega\tau\,d\tau, \tag{5.Д.45}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\sin\omega^0\tau\cos\omega\tau\,d\tau,\qquad \int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\cos\omega^0\tau\cos\omega\tau\,d\tau. \tag{5.Д.46}$$

Для этого воспользуемся соотношениями

$$\sin\omega^0\tau\sin\omega\tau = \frac{1}{2}[\quad\cos(\omega^0-\omega)\tau-\cos(\omega^0+\omega)\tau], \tag{5.Д.47}$$

$$\cos\omega^0\tau\sin\omega\tau = \frac{1}{2}[-\sin(\omega^0-\omega)\tau+\sin(\omega^0+\omega)\tau], \tag{5.Д.48}$$

$$\sin\omega^0\tau\cos\omega\tau = \frac{1}{2}[\quad\sin(\omega^0-\omega)\tau+\sin(\omega^0+\omega)\tau], \tag{5.Д.49}$$

$$\cos\omega^0\tau\cos\omega\tau = \frac{1}{2}[\quad\cos(\omega^0-\omega)\tau+\cos(\omega^0+\omega)\tau]. \tag{5.Д.50}$$

Тогда нахождение интегралов сводится к вычислению

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\sin\omega_\Delta\tau\,d\tau = \frac{e^{\alpha\tau}}{\omega_\Delta^2+\alpha^2}(\alpha\sin\omega_\Delta\tau+\omega_\Delta\cos\omega_\Delta\tau)\Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \\ = \frac{e^{\alpha t}}{\omega_\Delta^2+\alpha^2}(\alpha\sin\omega_\Delta t+\omega_\Delta\cos\omega_\Delta t) - \frac{e^{\alpha t_0}}{\omega_\Delta^2+\alpha^2}(\alpha\sin\omega_\Delta t_0+\omega_\Delta\cos\omega_\Delta t_0),\end{gathered} \tag{5.Д.51}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\cos\omega_\Delta\tau\,d\tau = \frac{e^{\alpha t}}{\omega_\Delta^2+\alpha^2}(\alpha\cos\omega_\Delta t+\omega_\Delta\sin\omega_\Delta t)- \\ -\frac{e^{\alpha t_0}}{\omega_\Delta^2+\alpha^2}(\alpha\cos\omega_\Delta t_0+\omega_\Delta\cos\omega_\Delta t_0),\quad \omega_\Delta=\omega^0\pm\omega.\end{gathered} \tag{5.Д.52}$$

При $t\to\infty$ значения этих интегралов конечны (так как $\alpha<0$) и поэтому конечны (5.Д.45), (5.Д.46), а это означает, что при $t\to\infty$ интеграл (5.Д.44) ограничен. Аналогично доказывается второе из соотношений (5.3.10).

Это доказательство можно обобщить на случай кратных собственных чисел матрицы A.

5.Д.5. Доказательство утверждения 5.3.3

Проанализируем выражение (5.3.29) для ошибки фильтрации.

Первое слагаемое – $e_{сб}(t)$ – в правой части этого выражения обладает в соответствии с утверждениями 5.3.1 и 5.3.2 свойством

$$\lim_{t\to\infty} e_{сб}(t) = 0. \tag{5.Д.53}$$

Исследуем второе слагаемое

$$e_f(t) = \frac{2}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} æ^f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau. \tag{5.Д.54}$$

Используя выражение (5.3.32) для $æ^f(t)$ и соотношения (5.Д.47)-(5.Д.52) заключаем повторяя доказательство утверждения 5.3.2, что

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} æ^f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau < \infty, \tag{5.Д.55}$$

и, следовательно

$$\lim_{t\to\infty} e_f(t) = 0. \tag{5.Д.56}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{t\to\infty} e_{æ}(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} æ(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau = 0. \tag{5.Д.57}$$

5.Д.6. Доказательство утверждения 5.3.4

Выражение функции $\tilde{æ}^f(t)$ имеет в соответствии с (5.3.28) вид

$$\tilde{æ}^f(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}\boldsymbol{m}\tilde{f}(\tau)\, d\tau. \tag{5.Д.58}$$

Вычислим ядро этой функции $\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}\boldsymbol{m}$. Используя выражение (5.Д.20) для элементов матрицы $\Gamma(t-\tau) = e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}$, запишем аналогично (5.Д.29)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}\boldsymbol{m} &= \sum_{q=1}^{n}\left[\left(\sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{j=1}^{n}\tilde{\nu}_{qlj}^{(1)} m_j\right) e^{(\alpha_q^0-\lambda)(t-\tau)}\sin\omega_q^0(t-\tau) + \right.\\ &\left. + \left(\sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{j=1}^{n}\tilde{\nu}_{qlj}^{(2)} m_j\right) e^{(\alpha_q^0-\lambda)(t-\tau)}\cos\omega_q^0(t-\tau)\right] = \\ &= \sum_{q=1}^{n}\left[\nu_q^{(1)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)(t-\tau)}\sin\omega_q^0(t-\tau) + \nu_q^{(2)} e^{(\alpha_q^0-\lambda)(t-\tau)}\cos\omega_q^0(t-\tau)\right],\end{aligned} \tag{5.Д.59}$$

где

$$\nu_q^{(1)} = \sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{j=1}^{n}\tilde{\nu}_{qlj}^{(1)} m_j, \quad \nu_q^{(2)} = \sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{j=1}^{n}\tilde{\nu}_{qlj}^{(2)} m_j. \tag{5.Д.60}$$

Ограничиваясь для простоты одночастотным возмущающим воздействием

$$f(t) = \delta\sin\omega^f t, \tag{5.Д.61}$$

получим выражение

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}\boldsymbol{m}\tilde{f}(\tau) = \\
&= \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)(t-\tau)}e^{-\lambda\tau}\left[\nu_q^{(1)}\sin\omega_q^0(t-\tau)\sin\omega^f\tau + \nu_q^{(2)}\cos\omega_q^0(t-\tau)\sin\omega^f\tau\right] = \qquad (5.Д.62)\\
&= \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\nu_q^{(1)}\sin\omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau - \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\nu_q^{(1)}\cos\omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0\tau}\sin\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau + \\
&+ \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\nu_q^{(2)}\cos\omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau + \sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\nu_q^{(2)}\sin\omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0\tau}\sin\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим интеграл первого слагаемого в этом выражении

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\sum_{q=1}^{n} e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\nu_q^{(1)}\sin\omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau\,d\tau = \\
&= \sum_{q=1}^{n}\nu_q^{(1)}e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\sin\omega_q^0 t\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau\,d\tau.
\end{aligned}
\qquad (5.Д.63)
$$

Используя (5.Д.49) и (5.Д.51) получим, что

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\Bigg[&\frac{e^{-\alpha_q^0 t}}{\bar{\omega}_\Delta^2+\alpha_q^{02}}\left(-\alpha_q^0\sin\bar{\omega}_\Delta t + \bar{\omega}_\Delta\cos\bar{\omega}_\Delta t\right) - \\
&-\frac{e^{-\alpha_q^0 t_0}}{\bar{\omega}_\Delta^2+\alpha_q^{02}}\left(-\alpha_q^0\sin\bar{\omega}_\Delta t_0 + \bar{\omega}_\Delta\cos\bar{\omega}_\Delta t_0\right) + \\
&+\frac{e^{-\alpha_q^0 t}}{\overset{+}{\omega}{}_\Delta^2+\alpha_q^{02}}\left(-\alpha_q^0\sin\overset{+}{\omega}_\Delta t + \overset{+}{\omega}_\Delta\cos\overset{+}{\omega}_\Delta t\right) - \\
&-\frac{e^{-\alpha_q^0 t_0}}{\overset{+}{\omega}{}_\Delta^2+\alpha_q^{02}}\left(-\alpha_q^0\sin\overset{+}{\omega}_\Delta t_0 + \overset{+}{\omega}_\Delta\cos\overset{+}{\omega}_\Delta t_0\right)\Bigg],
\end{aligned}
\qquad (5.Д.64)
$$

где $\bar{\omega}_\Delta = \omega^f - \omega_q^0$, $\overset{+}{\omega}_\Delta = \omega^f + \omega_q^0$.

Подставляя (5.Д.44) в (5.Д.63) заключаем при выполнении свойства 5.3.1, что

$$
\lim_{t\to\infty}\sum_{q=1}^{n}\nu_q^{(1)}e^{(\alpha_q^0-\lambda)t}\sin\omega_q^0 t\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_q^0\tau}\cos\omega_q^0\tau\sin\omega^f\tau\,d\tau = 0. \qquad (5.Д.65)
$$

Рассматривая последовательно интегралы остальных слагаемых в (5.Д.62), приходим к утверждению 5.3.3.

5.Д.7. Доказательство утверждения 5.4.2

Запишем уравнения (5.4.6), (5.4.10) в матричной форме. В связи с этим введём обозначения

$$\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} r(\omega_1) \\ r(\omega_2) \\ \vdots \\ r(\omega_n) \\ \hline i(\omega_1) \\ i(\omega_2) \\ \vdots \\ i(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{h}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{r}(t,\omega_1) \\ \hat{r}(t,\omega_2) \\ \vdots \\ \hat{r}(t,\omega_n) \\ \hline \hat{i}(t,\omega_1) \\ \hat{i}(t,\omega_2) \\ \vdots \\ \hat{i}(t,\omega_n) \end{bmatrix}; \tag{5.Д.66}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{bmatrix} y(t+\ \ T_\alpha) \\ y(t+2\ \ T_\alpha) \\ \vdots \\ y(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{æ}}_y^0(t) = \begin{bmatrix} æ_y^0(t+\ \ T_\alpha) \\ æ_y^0(t+2\ \ T_\alpha) \\ \vdots \\ æ_y^0(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{æ}}_{ycm}(t) = \begin{bmatrix} æ_{ycm}(t+\ \ T_\alpha) \\ æ_{ycm}(t+2\ \ T_\alpha) \\ \vdots \\ æ_{ycm}(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}; \tag{5.Д.67}$$

$$M(t) = \left(\begin{array}{cccc} \rho_1 \sin\omega_1(t+\ \ T_\alpha) & \rho_2 \sin\omega_2(t+\ \ T_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin\omega_n(t+\ \ T_\alpha) \\ \rho_1 \sin\omega_1(t+2\ \ T_\alpha) & \rho_2 \sin\omega_2(t+2\ \ T_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin\omega_n(t+2\ \ T_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1 \sin\omega_1(t+2nT_\alpha) & \rho_2 \sin\omega_2(t+2nT_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin\omega_n(t+2nT_\alpha) \\ \rho_1 \cos\omega_1(t+\ \ T_\alpha) & \rho_2 \cos\omega_2(t+\ \ T_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos\omega_n(t+\ \ T_\alpha) \\ \rho_1 \cos\omega_1(t+2\ \ T_\alpha) & \rho_2 \cos\omega_2(t+2\ \ T_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos\omega_n(t+2\ \ T_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1 \cos\omega_1(t+2nT_\alpha) & \rho_2 \cos\omega_2(t+2nT_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos\omega_n(t+2nT_\alpha) \end{array} \right); \tag{5.Д.68}$$

$$\boldsymbol{m}(t) = \left[\begin{array}{cccc} \rho_1 \sin\omega_1[t+(2n+1)T_\alpha] & \rho_2 \sin\omega_2[t+(2n+1)T_\alpha] & \cdots & \rho_n \sin\omega_n[t+(2n+1)T_\alpha] \\ \rho_1 \cos\omega_1[t+(2n+1)T_\alpha] & \rho_2 \cos\omega_2[t+(2n+1)T_\alpha] & \cdots & \rho_n \cos\omega_n[t+(2n+1)T_\alpha] \end{array} \right]; \tag{5.Д.69}$$

$\bar{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ – $2n$-мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

В этих обозначениях уравнения (5.4.6) примут вид

$$\bar{\boldsymbol{y}} = M\boldsymbol{h} + \bar{\boldsymbol{æ}}_{ycm} + \bar{\boldsymbol{æ}}_y^0, \tag{5.Д.70}$$

$$y[t+(2n+1)T_\alpha] = \boldsymbol{m}\boldsymbol{h} + æ_{ycm}[t+(2n+1)T_\alpha] + æ_y^0[t+(2n+1)T_\alpha], \tag{5.Д.71}$$

а уравнения (5.4.10) запишутся как

$$\bar{\boldsymbol{y}} = M\hat{\boldsymbol{h}} + \bar{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{æ}}_{ycm}, \tag{5.Д.72}$$

$$y[t+(2n+1)T_\alpha] = \boldsymbol{m}\hat{\boldsymbol{h}} + \hat{æ}_{ycm}[t+(2n+1)T_\alpha]. \tag{5.Д.73}$$

Вычитая уравнения (5.Д.70), (5.Д.71) из этих уравнений получим соотношения для ошибок $\boldsymbol{e}_h = \hat{\boldsymbol{h}}(t) - \boldsymbol{h}$ вычисления (фильтрации) частотных параметров и $æ_{ycm}(t)$

$[e_{æ}(t) = \hat{æ}_{ycm}(t) - æ_{ycm}(t)]$

$$M\boldsymbol{e}_h + \bar{\boldsymbol{e}}e_{æ} = \bar{\boldsymbol{æ}}_y^0 + \bar{\boldsymbol{æ}}_{ycm}(t) - \bar{\boldsymbol{e}}æ_{ycm}(t), \tag{5.Д.74}$$

$$\boldsymbol{m}\boldsymbol{e}_h + e_{æ} = æ_y^0[t + (2n+1)T_\alpha] + æ_{ycm}[t + (2n+1)T_\alpha] - æ_{ycm}(t). \tag{5.Д.75}$$

Учитывая, что все компоненты $\varepsilon_i^{fæ}(t)$ $\left(i = \overline{1, 2n}\right)$ вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{fæ}(t) = \bar{\boldsymbol{æ}}_{ycm}(t) - \bar{\boldsymbol{e}}æ_{ycm}(t), \tag{5.Д.76}$$

удовлетворяют условию (5.4.7)

$$|\varepsilon_i^{fæ}(t)| \le \varepsilon^{fæ}, \tag{5.Д.77}$$

и могут быть сделаны сколь угодно малыми, запишем

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_h(t) \\ e_{æ}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M(t) & \bar{\boldsymbol{e}} \\ \boldsymbol{m}(t) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{æ}}_y^0(t) \\ æ_y^0[t + (2n+1)T_\alpha] \end{bmatrix}. \tag{5.Д.78}$$

Отсюда, в силу асимптотической устойчивости объекта, заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}_h(t) = \boldsymbol{0}, \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}_{æ}(t) = \boldsymbol{0}. \tag{5.Д.79}$$

5.Д.8. Доказательство теоремы 5.4.1

Пусть $\lambda \ne 0$, а объект управления может быть неустойчив.

Выражение, описывающее сигнал на входе фильтра (выходе умножителя) при параллельном испытательном воздействии (5.3.39), имеет вид (5.3.41).

Запишем на его основе систему уравнений, аналогичную (5.3.51)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[r^\lambda(\omega_k) \sin\omega_k(t + lT_\alpha) + i^\lambda(\omega_k) \cos\omega_k(t + lT_\alpha) \right] + \\ &+ \tilde{æ}_y^0(t + lT_\alpha) + \tilde{æ}^f(t + lT_\alpha) + æ(t + lT_\alpha), \ \left(l = \overline{1, 2n}\right), \end{aligned} \tag{5.Д.80}$$

где

$$\tilde{æ}_y^0(t) = \boldsymbol{d}e^{(A - E\lambda)(t - t_0)} \left[\boldsymbol{x}(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin\omega_k t_0 - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k) \cos\omega_k t_0 \right]. \tag{5.Д.81}$$

Это уравнение в матричной форме имеет вид

$$M(t)\boldsymbol{h}^\lambda = \tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}(t) - \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}(t) - \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}^f(t) - \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}_y^0(t), \tag{5.Д.82}$$

где $\boldsymbol{h}^\lambda = \left[\begin{array}{cccc|cccc} r^\lambda(\omega_1) & r^\lambda(\omega_2) & \cdots & r^\lambda(\omega_n) & i^\lambda(\omega_1) & i^\lambda(\omega_2) & \cdots & i^\lambda(\omega_n) \end{array} \right]'$,

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{æ}(t + \quad T_\alpha) \\ \tilde{æ}(t + 2\ T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{æ}(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}^f(t) = \begin{bmatrix} \tilde{æ}^f(t + \quad T_\alpha) \\ \tilde{æ}^f(t + 2\ T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{æ}^f(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{y}(t + \quad T_\alpha) \\ \tilde{y}(t + 2\ T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}. \tag{5.Д.83}$$

Расчётная система (5.2.56) записывается в матричной форме как

$$M(t)\hat{\boldsymbol{h}}(t) = \tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}(t). \tag{5.Д.84}$$

Вычитая уравнение (5.Д.82) из этого уравнения получим выражение для ошибки

$$\boldsymbol{e}_h^\lambda(t) = M^{-1}(t)\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}(t) + \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}^f(t) + \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}_y^0(t)\right]. \tag{5.Д.85}$$

Так как, в силу утверждения 5.3.3

$$\lim_{t\to\infty}\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}(t) + \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}^f(t) + \tilde{\tilde{\boldsymbol{æ}}}_y^0(t)\right] = \boldsymbol{0}, \tag{5.Д.86}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{e}_h^\lambda(t) = \boldsymbol{0}. \tag{5.Д.87}$$

Определяя время сходимости к частотным параметрам из неравенства

$$\left|e_{hi}^\lambda(t_{cx})\right| \le \varepsilon_h, \tag{5.Д.88}$$

где e_{hi}^λ $\left(i = \overline{1, 2n}\right)$ – компоненты вектора $\boldsymbol{e}_h^\lambda$, ε_h – заданное число, заключаем, что время сходимости можно сделать сколь угодно малым, если взять λ достаточно большим.

5.Д.9. Доказательство утверждения 5.П.1

Оно аналогично доказательству утверждения 5.2.1, приведённому в 5.Д.1.

Представим

$$u(kT) = e^{\lambda kT}\sin\omega kT = \frac{e^{(\lambda+j\omega)kT} - e^{(\lambda-j\omega)kT}}{2j} \quad k = 1, 2, \dots . \tag{5.Д.89}$$

Решение уравнения

$$\boldsymbol{x}^+(kT) = A^\partial \boldsymbol{x}^+[(k-1)T] + \boldsymbol{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)(k-1)T}, \quad \boldsymbol{x}^{+(0)} = \boldsymbol{0} \quad k = 1, 2, \dots , \tag{5.Д.90}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^+(kT) &= \left[E - e^{-(\lambda+j\omega)T}A^\partial\right]^{-1}\boldsymbol{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)(k-1)T} - \\ &- A^{\partial k}\left[E - e^{-(\lambda+j\omega)T}A^\partial\right]^{-1}\boldsymbol{b}^\partial e^{-(\lambda+j\omega)T} = \\ &= \left(E - qA^\partial\right)^{-1} q\boldsymbol{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)kT} - A^{\partial k}\left(E - qA^\partial\right)^{-1} q\boldsymbol{b}^\partial = \\ &= \boldsymbol{\beta}_\partial^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)kT} - A^{\partial k}\boldsymbol{\beta}_\partial^\lambda(j\omega) \quad k = 0, 1, \dots .\end{aligned} \tag{5.Д.91}$$

В этом нетрудно убедиться подставляя (5.Д.91) в (5.Д.90). Уравнение

$$\boldsymbol{x}^-(kT) = A^\partial \boldsymbol{x}^-[(k-1)T] + \boldsymbol{b}^\partial e^{(\lambda-j\omega)(k-1)T}$$

имеет аналогичный вид

$$\boldsymbol{x}^-(kT) = \boldsymbol{\beta}^\lambda_\partial(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)kT} - A^{\partial k}\boldsymbol{\beta}^\lambda_\partial(-j\omega) \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$\boldsymbol{x}(kT) = \frac{\boldsymbol{x}^+(kT) - \boldsymbol{x}^-(kT)}{2j} = \frac{\boldsymbol{\beta}^\lambda_\partial(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)T} - \boldsymbol{\beta}^\lambda_\partial(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)T}}{2j} - A^{\partial k}\,\mathrm{Jm}\,\boldsymbol{\beta}^\lambda_\partial(j\omega). \tag{5.Д.92}$$

Отсюда следует (при ненулевых начальных условиях) выражение (5.5.10).

Убедимся, что составляющая $æ^0(kT)$ исчезающая функция. Для этого рассмотрим сомножитель

$$\tilde{A}^k = A^{\partial k}e^{-\lambda kT} = \left(A^\partial e^{-\lambda T}\right)^k \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{5.Д.93}$$

в выражении (5.5.11) для $æ^0(kT)$.

Если $\tilde{z}_i$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$, то

$$\tilde{z}_i = z_i e^{-\lambda T}, \tag{5.Д.94}$$

где z_i – корни уравнения

$$\det\left(Ez - A^\partial\right) = 0. \tag{5.Д.95}$$

Действительно, $\tilde{z}_i$ – корни полинома

$$\det\left(E\tilde{z} - \tilde{A}\right) = \det\left(E\tilde{z} - A^\partial e^{-\lambda T}\right) = 0. \tag{5.Д.96}$$

Подставляя в это уравнение числа (5.Д.94), убеждаемся в силу (5.Д.95), что они являются его корнями.

Заключение к главе 5

Результаты этой главы состоят в следующем.

1. Предложен способ экспериментального определения частотных параметров неустойчивых объектов, основанный на экспоненциально-гармоническом испытательном воздействии (5.2.2) и экспоненциальном взвешивании измеряемых переменных.

2. Доказана сходимость процессов (протекающих при этом способе) к частотным параметрам (утверждения 5.3.1 и 5.3.2).

3. Исследовано влияние внешних возмущений и помех на процесс сходимости (утверждения 5.3.3 и 5.3.4) и показано, что если частоты испытательных воздействий не совпадают с частотами внешних возмущений и помех, то оценки частотных параметров не смещены.

4. Получены оценки (5.3.45) времени сходимости к частотным параметрам.

5. Предложены способы (алгоритм с паузами и последовательные пары испытаний) экспериментального определения частотных параметров, когда частоты внешних возмущений или помех могут совпадать с частотами испытательного воздействия.

6. (*) Рассмотрен локальный фильтр, который позволяет сократить время эксперимента при определении частотных параметров. При неквазистационарных внешних возмущениях и помехах применён (для уточнения оценок частотных параметров) метод наименьших квадратов, который вновь привёл к фильтру Фурье (5.4.22) и (5.4.23).

7. (П) Введено понятие частотных параметров дискретных объектов и дан способ их экспериментального определения с помощью дискретного фильтра Фурье.

6. Частотное модальное управление

Частотное модальное управление – это управление (регулятор), которое строится по известным частотным параметрам объекта и корням характеристического полинома системы. Способ построения такого управления служит основой метода частотных параметров, который решает задачу синтеза регуляторов по требуемой точности регулирования или слежения. Существо этого метода было рассмотрено в п. 1.2.5.

Наряду с методом синтеза необходимо получить критерии анализа устойчивости по частотным параметрам разомкнутой системы. Истоком таких критериев явился критерий Найквиста. Однако он предполагает, вообще говоря, бесконечное число экспериментов для получения частотных характеристик во всём диапазоне частот от нуля до бесконечности. Кроме того, необходимо знать число полюсов передаточной функции разомкнутой системы, имеющих положительную вещественную часть. Последнее не следует из этих экспериментов.

Число экспериментов можно сократить, если определить (идентифицировать) коэффициенты передаточной функции по её частотным параметрам, рассчитать частотные характеристики для всего диапазона частот и затем использовать критерий Найквиста. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти прямой (неидентифицированный) критерий устойчивости?

Заметим, что прямые методы синтеза и анализа, являющиеся предметом этой главы, необходимо сравнить с идентификационными. Это связано с тем, что можно (идентифицировать) вычислить по частотным параметрам объекта коэффициенты его дифференциального уравнения и затем использовать аналитические методы синтеза, изложенные в главах 3 и 4.

Цель этой главы:

- построение метода частотных параметров (на основе метода частотного модального управления), который является прямым методом,
- формирование критерия устойчивости по частотным параметрам,
- сравнение метода частотных параметров с идентификационным подходом к построению регуляторов.

6.1. Прямое управление

6.1.1. Постановка задачи и подход к её решению

Рассмотрим полностью управляемый и устойчивый по управлению объект

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u, \quad \gamma < n. \tag{6.1.1}$$

Параметры d_i, b_j $\left(i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, \gamma}\right)$ объекта неизвестны, а известны ω-индексы $r^\lambda(\omega_k)$, $i^\lambda(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Задача 6.1.1. **(Задача частотного модального управления)** Для объекта (6.1.1) с заданными ω-индексами найти параметры регулятора

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y \tag{6.1.2}$$

такие, чтобы характеристический полином $d^u(s)$ системы (6.1.1), (6.1.2) совпадал с полиномом

$$\delta(s) = b(s)\psi(s), \tag{6.1.3}$$

где

$$\psi(s) = \psi_{2n-\gamma-1}s^{2n-\gamma-1} + \cdots + \psi_1 s + \psi_0 \tag{6.1.4}$$

– заданный полином. ■

Для решения этой задачи рассмотрим структурное модальное тождество (3.1.32)

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi(s). \tag{6.1.5}$$

Разделим его на $d(s)$. Тогда

$$g(s) - w(s)r(s) = w(s)\psi(s). \tag{6.1.6}$$

Положим $s = \lambda + j\omega$ и получим *модальное частотное тожество*

$$g(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)r(\lambda + j\omega) = w(\lambda + j\omega)\psi(\lambda + j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{6.1.7}$$

Зафиксируем n значений ω, при которых заданы ω-индексы, и запишем систему уравнений

$$g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k) = w(\lambda + j\omega_k)\psi(\lambda + j\omega_k), \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.1.8}$$

описывающих тождество (6.1.7) на ω-тесте.

Заменим $w(\lambda + j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ на известные числа $r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ и получим систему из $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения искомых параметров регулятора (6.1.2).

6.1.2. Алгоритм построения

Запишем систему (6.1.8) в более подробной форме

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1} g_l[\lambda + j\omega_k]^l - \left[r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)\right] \sum_{l=0}^{n-1} r_l[\lambda + j\omega_k]^l = \\ = \left[r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)\right] \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \psi_l[\lambda + j\omega_k]^l \quad k = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Представим

$$[\lambda + j\omega_k]^l = \rho_l(\omega_k) + j\mu_l(\omega_k) \quad l = \overline{0, 2n-\gamma}, \tag{6.1.10}$$

где

$$\rho_l(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]^*} \rho_{2\nu}^{(l)} \omega_k^{2\nu}, \quad \mu_l(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]^*} \mu_{2\nu+1}^{(l)} \omega_k^{2\nu+1} \quad l = \overline{0, 2n-\gamma}, \tag{6.1.11}$$

а $\left[\dfrac{l}{2}\right]^*$ – целая (меньшая) часть числа $\dfrac{l}{2}$.

Коэффициенты полиномов (6.1.11) являются функциями λ

$$\rho_{2\nu}^{(l)} = \lambda^{l-2\nu}(-1)^\nu \xi_{2\nu}^{(1)} \quad \nu = \overline{0, \left[\frac{l}{2}\right]^*}, \quad \mu_{2\nu+1}^{(l)} = \lambda^{l-2\nu-1}(-1)^\nu \xi_{2\nu+1}^{(2)} \quad \nu = \overline{0, \left[\frac{l-1}{2}\right]^*}, \tag{6.1.12}$$

в которых $\xi_{2\nu}^{(1)}$ и $\xi_{2\nu+1}^{(2)}$ – известные числа.

Подставим (6.1.10) в (6.1.9)

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1} \rho_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k)\right] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k)\right] \psi_l \quad k = \overline{1,n},\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1} \mu_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k)\right] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k)\right] \psi_l \quad k = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

Запишем эту систему в более компактной форме

$$\begin{pmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi}, \tag{6.1.15}$$

где

$$\boldsymbol{g}' = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}' = \begin{bmatrix} \psi_0 & \psi_1 & \cdots & \psi_{2n-\gamma-1} \end{bmatrix}, \tag{6.1.16}$$

$M^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ – блочные матрицы размеров $n\times n$, элементы которых

$$m_{kl}^{(1)}=\rho_l(\omega_k),\quad m_{kl}^{(2)}=r^{\lambda}(\omega_k)\rho_l(\omega_k)-i^{\lambda}(\omega_k)\mu_l(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}\quad l=\overline{0,n-1},\tag{6.1.17}$$

$$m_{kl}^{(3)}=\mu_l(\omega_k),\quad m_{kl}^{(4)}=r^{\lambda}(\omega_k)\mu_l(\omega_k)+i^{\lambda}(\omega_k)\rho_l(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}\quad l=\overline{0,n-1},\tag{6.1.18}$$

$N^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,2}\right)$ – блочные матрицы размеров $n\times(2n-\gamma)$, элементы которых

$$n_{kl}^{(1)}=r^{\lambda}(\omega_k)\rho_l(\omega_k)-i^{\lambda}(\omega_k)\mu_l(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}\quad l=\overline{0,2n-\gamma-1},\tag{6.1.19}$$

$$n_{kl}^{(2)}=r^{\lambda}(\omega_k)\mu_l(\omega_k)+i^{\lambda}(\omega_k)\rho_l(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}\quad l=\overline{0,2n-\gamma-1}.\tag{6.1.20}$$

Таким образом, алгоритм построения прямого частотного модального управления сводится к решению системы $2n$ линейных алгебраических уравнений (6.1.15).

6.1.3. Существование и единственность*

Исследуем систему (6.1.15). Она эквивалентна системе (6.1.9), которая следует из (6.1.8). Умножим каждое из уравнений (6.1.8) на $d(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Тогда получим систему

$$d(\lambda+j\omega_k)g(\lambda+j\omega_k)-b(\lambda+j\omega_k)r(\lambda+j\omega_k)=b(\lambda+j\omega_k)\psi(\lambda+j\omega_k)\quad k=\overline{1,n},\tag{6.1.21}$$

которая следует из тождества (6.1.5) при $s=\lambda+j\omega_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Это тождество приводит к системе (3.1.9). Она, как утверждает следствие 3.1.2, имеет единственное решение. Таким образом, достаточно доказать, что тождество (6.1.5) и система (6.1.21) доставляют одну и ту же пару полиномов $g(s)$ и $r(s)$.

Заметим, что система (6.1.21) получена умножением уравнений (6.1.8) на комплексные числа $d(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Поэтому, для эквивалентности (6.1.21) и (6.1.8) необходимо и достаточно неравенства

$$d(\lambda+j\omega_k)\neq 0\quad k=\overline{1,n}.\tag{6.1.22}$$

Если известны ω-индексы, то это неравенство выполняется. Действительно, пусть для некоторого числа $\nu\le n$, $d(\lambda+j\omega_\nu)=0$. Тогда не существует частотных параметров

$$r^{\lambda}(\omega_\nu)=\operatorname{Re}w(\lambda+j\omega_\nu)=\operatorname{Re}\frac{b(\lambda+j\omega_\nu)}{d(\lambda+j\omega_\nu)}\quad\text{и}\quad i^{\lambda}(\omega_\nu)=\operatorname{Jm}w(\lambda+j\omega_\nu)=\operatorname{Jm}\frac{b(\lambda+j\omega_\nu)}{d(\lambda+j\omega_\nu)}.$$

Это противоречит предположению о том, что ω-индексы – заданные числа.

Теорема 6.1.1. Если объект (6.1.1) полностью управляем, то система (6.1.15) имеет единственное решение, которое совпадает с решением системы (3.1.9). ■

Доказательство теоремы приведено в 6.Д.1.

Заметим, что матрицы $M^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$ системы (6.1.15) зависят от выбора испытательных частот ω_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$. С другой стороны, теорема 6.1.1 утверждает, что

решение системы (6.1.15) совпадает с решением системы (3.1.9), которая не содержит этих частот. Это приводит к следующему заключению.

Следствие 6.1.1. Система (6.1.15), разрешающая задачу частотного модального управления (задачу 6.1.1), имеет решение, не зависящее от выбора испытательных частот (не зависит от ω-теста). ■

Доказательство следствия содержится в доказательстве теоремы 6.1.1.

6.1.4. Объекты, заданные ω-индексами при $\lambda = 0$

Неустойчивые объекты (6.1.1) могут описываться стабилизированными ω-индексами $r^c(\omega_k)$ и $i^c(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

Устойчивые объекты также могут задаваться ω-индексами с нулевым λ-смещением. Опишем решение задачи 6.1.1 для этих случаев.

Уравнения (6.1.8) принимают теперь вид

$$g(j\omega_k) - w^c(j\omega_k)r(j\omega_k) = w^c(j\omega_k)\psi(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{6.1.23}$$

В развёрнутой форме эта система записывается аналогично (6.1.13), (6.1.14)

$$\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \omega_k^{2q}(-1)^q g_{2q} - \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q\right] r_{2q} =$$
$$= \sum_{q=0}^{\left[\frac{2n-\gamma-1}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q\right] \psi_{2q} \quad k = \overline{1,n}, \tag{6.1.24}$$

$$\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \omega_k^{2q+1}(-1)^q g_{2q+1} - \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q\right] r_{2q+1} =$$
$$= \sum_{q=0}^{\left[\frac{2n-\gamma-2}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q\right] \psi_{2q+1} \quad k = \overline{1,n} \tag{6.1.25}$$

Эти уравнения получаются из (6.1.13), (6.1.14), если в них положить

$$\rho_{2q}(\omega) = \omega^{2q}(-1)^q \quad q = \overline{0, \left[\frac{l}{2}\right]^*}, \tag{6.1.26}$$

$$\mu_{2q}(\omega) = \omega^{2q+1}(-1)^q \quad q = \overline{0, \left[\frac{l-1}{2}\right]^*}. \tag{6.1.27}$$

Решение системы (6.1.24), (6.1.25) единственно и совпадает с решением уравнений (3.1.9). Это следует из теоремы 6.1.1, поскольку она сформулирована вне зависимости от величины λ и поэтому справедлива при $\lambda = 0$.

Для асимптотически устойчивых объектов система (6.1.24), (6.1.25) сохраняется. Нужно лишь заменить в ней

$$r^c(\omega_k) = r(\omega_k), \quad i^c(\omega_k) = i(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}.$$

6.1.5. Аналитический синтез регуляторов

Пусть к объекту (6.1.1) приложено внешнее возмущение. Тогда он описывается уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u + m_\alpha f^{(\alpha)} + \cdots + m_1\dot{f} + m_0 f, \tag{6.1.28}$$

где $f(t)$ – ступенчатая функция вида (3.2.2) и известна оценка

$$|m_0| \le m_0^*. \tag{6.1.29}$$

Задача 6.1.2. Пусть для объекта (6.1.28) известны ω-индексы, а также числа m_0^* и $\bar{f}$. Найти регулятор (6.1.2) такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени $t_{рег}$, выполнялось условие

$$|y(t)| \le y^*, \tag{6.1.30}$$

где y^* – заданное число, характеризующее точность регулирования. ■

В этой задаче в отличие от задачи 3.2.1 отсутствуют требования к времени регулирования и регулированию. Это естественно, поскольку неизвестны коэффициенты m_i $\left(i = \overline{1,\alpha}\right)$ при производных внешнего воздействия в уравнении (6.1.23), которые существенно влияют на показатели качества.

Найдём свободный член полинома (6.1.4)

$$\psi_0 \ge \frac{m_0^*\bar{f}}{y^*}. \tag{6.1.31}$$

Остальные коэффициенты этого полинома должны удовлетворять лишь требованию гурвицевости.

Можно принять, например,

$$\psi(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma-1}(s + s^*)^n, \tag{6.1.32}$$

где ε^0 – некоторое положительное число, а

$$s^* = \frac{\left(m_0^*\bar{f}\right)^{1/n}}{(y^*)^{1/n}}. \tag{6.1.33}$$

Построим полином $\psi(s)$ и решим систему (6.1.15). Если $f(t)$ – гармоническое возмущение (3.2.3) и известна оценка

$$\left|m(j\omega^f)\right| \le m^f, \quad \omega_*^f \le \omega^f \le \omega^{f*}$$

(где m^f, ω_*^f, ω^{f*} – заданные числа), то постоянную времени ε^0 и число ψ_0 определяем из неравенства, аналогично (3.2.17)

$$\psi_0\left[\sqrt{(\varepsilon^0\omega^f)^2 + 1}\right]^{2n-\gamma-1} \ge \frac{m^f f_{гарм}}{y^*}. \tag{6.1.34}$$

Пример 6.1.1. Рассмотрим велосипед (1.3.6) при внешнем возмущении

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u + f \tag{6.1.35}$$

с известными параметрами d_0, b_1, b_0.

Здесь $f(t)$ – ступенчатое возмущение с границей

$$\bar{f} = 10. \tag{6.1.36}$$

Известно, что объект полностью управляем, $b_1 > 0$, $b_0 > 0$ (это означает устойчивость по управлению), а его степень неустойчивости оценивается числом 6.

Известны ω-индексы велосипеда, полученные экспериментально при

$$\lambda = 6; \qquad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6; \tag{6.1.37}$$

$$r^\lambda(\omega_1) = \quad 0.85, \quad r^\lambda(\omega_2) = \quad 0.22; \tag{6.1.38}$$

$$i^\lambda(\omega_1) = -1.4\ , \quad i^\lambda(\omega_2) = -0.88. \tag{6.1.39}$$

Требуется найти параметры регулятора (робота-велосипедиста)

$$g_1 \dot{u} + g_0 u = r_1 \dot{y} + r_0 y, \tag{6.1.40}$$

такие, чтобы установившаяся ошибка регулирования движения велосипеда

$$|y_{ycm}| \le 0.204. \tag{6.1.41}$$

Для решения этой задачи найдём, используя (6.1.31),

$$\psi_0 = \frac{\bar{f}}{y^*} = 49. \tag{6.1.42}$$

и примем

$$\psi(s) = s^2 + 14s + 49 = (s+7)^2. \tag{6.1.43}$$

Запишем уравнения (6.1.13), (6.1.14) для определения искомых параметров регулятора (6.1.40).

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega) &= 1, & \mu_0(\omega) &= 0, \\ \rho_1(\omega) &= \lambda, & \mu_1(\omega) &= \omega, \\ \rho_2(\omega) &= \lambda^2 - \omega^2, & \mu_2(\omega) &= 2\lambda\omega, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{gathered} g_0 + \lambda g_1 - r^\lambda(\omega_k) r_0 - \left[r^\lambda(\omega_k)\lambda - i^\lambda(\omega_k)\omega_k \right] r_1 = \\ = r^\lambda(\omega_k)\psi_0 + \left[r^\lambda(\omega_k)\lambda - i^\lambda(\omega_k)\omega_k \right] \psi_1 + \left[r^\lambda(\omega_k)(\lambda^2 - \omega_k^2) - i^\lambda(\omega_k) 2\lambda\omega_k \right] \quad k = \overline{1,2} \end{gathered} \tag{6.1.44}$$

$$\begin{gathered} \lambda g_1 - i^\lambda(\omega_k) r_0 - \left[r^\lambda(\omega_k)\omega_k + i^\lambda(\omega_k)\lambda \right] r_1 = \\ = i^\lambda(\omega_k)\psi_0 + \left[r^\lambda(\omega_k)\omega_k + i^\lambda(\omega_k)\lambda \right] \psi_1 + \left[r^\lambda(\omega_k) 2\lambda\omega_k + i^\lambda(\omega_k)(\lambda^2 - \omega_k^2) \right] \quad k = \overline{1,2} \end{gathered} \tag{6.1.45}$$

Подставляя в (6.1.44), (6.1.45) параметры (6.1.37)-(6.1.38) и коэффициенты полинома (6.1.43), получим систему из 4-х линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему, найдём

$$g_1 = 5, \quad g_0 = 30; \qquad r_1 = -14, \quad r_0 = -65. \tag{6.1.46}$$

■

6.1.6. Следящие системы

Пусть для объекта (6.1.28), для которого известна оценка (6.1.29) и ω-индексы, требуется найти параметры регулятора (3.3.11)

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v, \tag{6.1.47}$$

такие, чтобы выход системы (6.1.28), (6.1.47) и желаемая функция $y_{ж}(t)$ отличались не более чем на y^*

$$|y(t) - y_{ж}(t)| \le y^*, \tag{6.1.48}$$

где изображение

$$y_{ж}(s) = \frac{l_{м}(s)}{\psi_{м}(s)} v, \tag{6.1.49}$$

а $l_{м}(s)$ и $\psi_{м}(s)$ – заданные полиномы.

Для решения этой задачи используем принцип разделения: решим задачу 6.1.2 и найдём полиномы $g(s)$ и $r(s)$, полагая при этом вместо (6.1.32)

$$\psi(s) = \psi_{м}(s) \tag{6.1.50}$$

при условии, что

$$\psi_0^{м} > \psi_0, \tag{6.1.51}$$

где ψ_0 определяется из (6.1.31), затем положим

$$r^n(s) = l_{м}(s). \tag{6.1.52}$$

Если условие $(\psi_0^{м} > \psi_0)$ согласования параметров желаемой модели системы с требуемой точностью регулирования не выполняется и $\psi_0^{м} < \psi_0$, то следует принять

$$\psi(s) = \psi_{м}(s)\left(s + \frac{\psi_0}{\psi_0^{м}}\right). \tag{6.1.53}$$

При этом как и ранее ограничим желаемую модель условиями

$$\deg \psi_{м}(s) = 2n - \gamma - 2, \quad \deg l_{м}(s) \le n - 1. \tag{6.1.54}$$

Решив систему (6.1.15) и найдя полиномы $g(s)$ и $r(s)$, полагаем в уравнении (6.1.47)

$$r^n(s) = l_{м}(s)\left(s + \frac{\psi_0}{\psi_0^{м}}\right). \tag{6.1.55}$$

6.1.7. ПИД-регулятор*

Решение задачи 6.1.2 можно искать в классе ПИД-регуляторов, описываемых уравнением

$$\bar{g}_n u^{(n)} + \cdots + \bar{g}_1 \dot{u} + \bar{g}_0 u = \bar{r}_n y^{(n-1)} + \cdots + \bar{r}_2 \dot{y} + \bar{r}_1 y + \bar{r}_0 \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau. \qquad (6.1.56)$$

В этом случае требование (6.1.30) к точности выполняется автоматически. Кроме того, не требуются оценки чисел m_0 и f функции $f(t)$. При этом ω-индексы объекта (6.1.28) должны быть расширенными: $r^\lambda(\omega_k)$ и $i^\lambda(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n+1}\right)$.

В процедуре её решения, изложенной в п. 3.2.5 для известных параметров объекта, используется ««расширенный объект»» (3.2.40) с передаточной функцией

$$\bar{w}(s) = \frac{1}{s} w(s), \qquad (6.1.57)$$

связывающей $\bar{y}$ и u: $\bar{y} = \bar{w}(s) u$.

Частотные параметры ««расширенного объекта»» определяются по известным ω-индексам объекта (6.1.2). Действительно,

$$\bar{w}^\lambda(j\omega_k) = \frac{1}{j\omega_k}\left[r^\lambda(\omega_k) + j i^\lambda(\omega_k)\right] = \frac{i^\lambda(\omega_k)}{\omega_k} + j\left[-\frac{r^\lambda(\omega_k)}{\omega_k}\right], \qquad (6.1.58)$$

и следовательно

$$\bar{r}^\lambda(\omega_k) = \frac{i^\lambda(\omega_k)}{\omega_k}, \quad \bar{i}^\lambda(\omega_k) = -\frac{r^\lambda(\omega_k)}{\omega_k} \quad k = \overline{1, n+1}. \qquad (6.1.59)$$

Заменим в (6.1.9) n на $n+1$, подставим в эту систему значения (6.1.59) и получим $2n+2$ уравнений (6.1.15) для определения параметров регулятора (6.1.56).

6.2. Натурные критерии устойчивости

6.2.1. Анализ устойчивости как решение обратной задачи синтеза

Пусть имеется система регулирования

$$y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + d_1 \dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad \gamma < n, \qquad (6.2.1)$$

$$u^{(n-1)} + g_{n-2} u^{(n-2)} + \cdots + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + r_1 \dot{y} + r_0 y. \qquad (6.2.2)$$

Параметры d_i, b_j $\left(i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, \gamma}\right)$ объекта неизвестны. Известны его расширенные ω-индексы

$$r^\lambda(\omega_k), \quad i^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*}, \quad \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^* = \begin{cases} \gamma/2 & \text{при } \gamma \text{ – чётном,} \\ (\gamma+1)/2 & \text{при } \gamma \text{ – нечётном.} \end{cases}$$

Далее будем обозначать $p = n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*$.

Параметры g_i, r_j $\left(i = \overline{0, n-2},\ \ j = \overline{0, n-1}\right)$ регулятора известны. Уравнение (6.2.2) совпадает с (6.1.2), если последнее разделить на g_{n-1}.

Объект и регулятор предполагаются полностью управляемыми, кроме того, в отличие от (6.1.1) объект может быть неустойчив по управлению (полином $b(s)$ – не обязательно гурвицев).

Исследуем асимптотическую устойчивость системы (6.2.1), (6.2.2) при произвольных начальных условиях $y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$, ..., $y^{n-1}(t_0)$; $u(t_0)$, $\dot{u}(t_0)$, ..., $u^{n-2}(t_0)$.

Задачу исследования устойчивости будем трактовать как *обратную задачу модального управления:* для объекта (6.2.1) и регулятора (6.2.2) найти характеристический полином и его корни (моды) s_i^* $\left(i = \overline{1, 2n-1}\right)$.

Рассмотрим вначале случай, когда параметры объекта (6.2.1) известны. В этом случае исследование устойчивости сводится к анализу гурвицевости характеристического полинома

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \tag{6.2.3}$$

Построение этого полинома и анализ его гурвицевости составляют решение обратной задачи при известных параметрах объекта.

6.2.2. Уравнение обратной задачи

Запишем (6.2.3) в форме

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)] - \delta(s) = 0, \tag{6.2.4}$$

где полином $d^u(s)$ степени $2n-1$ заменён неизвестным полиномом $\delta(s)$ неопределённой степени.

Погрузим уравнение (6.2.4) в некоторое множество уравнений

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]l(s) - \gamma(s)\delta(s) = 0, \tag{6.2.5}$$

где $\gamma(s)$ – заданный полином

$$\deg \gamma(s) < 2n - 1, \tag{6.2.6}$$

$l(s)$ – некоторый полином.

При $\gamma(s) = 1$ из (6.2.5) следует

$$\delta(s) = d^u(s)l(s).$$

Пусть

$$\gamma(s) = b(s). \tag{6.2.7}$$

Тогда (6.2.5) примет вид

$$d^u(s)l(s) - b(s)\delta(s) = 0. \tag{6.2.8}$$

Утверждение 6.2.1. Если полиномы $d^u(s)$ и $b(s)$ не имеют общего делителя ($\nu(s) = 1$) и если принять

$$\deg l(s) = \deg b(s), \quad \deg \delta(s) = \deg d^u(s), \quad \delta_{2n-1} = 1, \tag{6.2.9}$$

то уравнение (6.2.8) имеет единственное решение

$$l(s) = b(s), \quad \delta(s) = d^u(s). \tag{6.2.10}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.2. Таким образом, уравнение (6.2.5) имеет решение $d^u(s)$, совпадающее с выражением (6.2.3) и поэтому (6.2.8) можно назвать *уравнением обратной задачи.*

6.2.3. Уравнения частотной обратной задачи

Разделим (6.2.8) на полином $d(s)$ и найдём

$$[g(s) - w(s)r(s)]l(s) - w(s)\delta(s) = 0. \tag{6.2.11}$$

Положим $s = \lambda + j\omega$. Тогда

$$[g(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)r(\lambda + j\omega)]l(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)\delta(\lambda + j\omega) = 0. \tag{6.2.12}$$

Зафиксируем значения ω и λ, при которых заданы ω-индексы объекта и запишем систему уравнений

$$[g(\lambda+j\omega_k)-w(\lambda+j\omega_k)r(\lambda+j\omega_k)]l(\lambda+j\omega_k)-w(\lambda+j\omega_k)\delta(\lambda+j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1,p}, \tag{6.2.13}$$

которую будем называть *уравнениями обратной задачи частотного модального управления* (или уравнениями частотной обратной задачи).

В развёрнутой форме эта система принимает вид

$$\left[\tilde{r}(\omega_k) + j\tilde{i}(\omega_k)\right] \sum_{i=0}^{\gamma} l_i[\lambda + j\omega_k]^i - \left[r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)\right] \sum_{i=0}^{2n-1} \delta_i[\lambda + j\omega_k]^i = 0 \quad k = \overline{1,p}, \tag{6.2.14}$$

где

$$\tilde{r}(\omega_k) = \mathrm{Re}[g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k)], \tag{6.2.15}$$

$$\tilde{i}(\omega_k) = \mathrm{Jm}[g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k)]. \tag{6.2.16}$$

Используя (6.1.13), (6.1.14), получим

$$\tilde{r}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\rho_i(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_i(\omega_k) \right] r_i, \tag{6.2.17}$$

$$\tilde{i}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_i(\omega_k) \right] r_i. \tag{6.2.18}$$

Запишем систему (6.2.14), аналогично (6.1.13), (6.1.14), в виде

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{\gamma} \left[\tilde{r}\ (\omega_k)\rho_i(\omega_k) - \tilde{i}\ (\omega_k)\mu_i(\omega_k) \right] l_i\ - \\ - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\rho_i(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*}, \end{gathered} \tag{6.2.19}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{\gamma} \left[\tilde{r}\ (\omega_k)\mu_i(\omega_k) + \tilde{i}\ (\omega_k)\rho_i(\omega_k) \right] l_i\ - \\ - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[r^\lambda(\omega_k)\mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left[\frac{\gamma}{2} \right]^*}. \end{gathered} \tag{6.2.20}$$

Дополним эти уравнения равенством

$$\delta_{2n-1} = 1. \tag{6.2.21}$$

из соотношений (6.2.9).

Утверждение 6.2.2. Если характеристический полином $d^u(s)$ системы (6.2.1), (6.2.2) и полином $b(s)$ объекта не имеют общего делителя, то решение системы (6.2.19)-(6.2.21) существует и единственно. Это решение имеет вид (6.2.10). ■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.3.

Заметим, что если регулятор (6.2.2) получен с использованием структурного модального управления, то полином $d^u(s)$ делится на $b(s)$. В этом случае определитель матрицы коэффициентов системы (6.2.19)-(6.2.21) равен нулю.

6.2.4. Первый критерий устойчивости

Если система (6.2.19)-(6.2.21) – не вырождена (её определитель отличен от нуля), то решив её, находим коэффициенты δ_i $\left(i = \overline{0, 2n-2}\right)$ характеристического полинома

$$d^u(s) = \sum_{i=0}^{2n-1} \delta_i s^i \tag{6.2.22}$$

системы (6.2.1), (6.2.2).

Составим из этих коэффициентов определители Гурвица (2.1.14)

$$\Delta_1 = \delta_{2n-2}, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} \\ 1 & \delta_{2n-3} \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \delta_{2n-6} \\ 1 & \delta_{2n-3} & \delta_{2n-5} \\ 0 & \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} \end{pmatrix},$$

$$\ldots, \quad \Delta_{2n-1} = \det\begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \delta_{2n-6} & \cdots & 0 \\ 1 & \delta_{2n-3} & \delta_{2n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \delta_{2n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.23}$$

Если эти определители положительны, то система (6.2.1), (6.2.2) асимптотически устойчива. Отсюда следует критерий устойчивости.

Критерий 6.2.1.**(Первый частотно-алгебраический критерий устойчивости)**

Пусть дана система (6.2.1), (6.2.2) с известным регулятором и объектом управления (6.2.1), заданным расширенными ω-индексами $r^\lambda(\omega_k)$ и $i^\lambda(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,p}\right)$.

Для асимптотической устойчивости системы (6.2.1), (6.2.2) необходимо и достаточно, чтобы решения δ_i $\left(i = \overline{0, 2n-2}\right)$ уравнений (6.2.19)-(6.2.21) удовлетворяли неравенствам Гурвица

$$\Delta_i > 0 \quad i = \overline{1, 2n-1}. \tag{6.2.24}$$

■

Пример 6.2.1. Исследуем устойчивость велосипеда (1.3.6)

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \tag{6.2.25}$$

с роботом-велосипедистом (регулятором)

$$\dot{u} + 8u = -3\dot{y} - 13y. \tag{6.2.26}$$

Параметры велосипеда (6.2.25) неизвестны. Известно, что он полностью управляем, а его расширенные ω-индексы, полученные экспериментально при

$$\lambda = 6; \qquad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \quad \omega_3 = 9, \tag{6.2.27}$$

имеют значения (6.2.28)

$$\begin{aligned} r^\lambda(\omega_1) &= 0.85, & i^\lambda(\omega_1) &= -1.4; \\ r^\lambda(\omega_2) &= 0.22, & i^\lambda(\omega_2) &= -0.88; \\ r^\lambda(\omega_3) &= 0.078, & i^\lambda(\omega_3) &= -0.6. \end{aligned} \tag{6.2.29}$$

Запишем уравнения (6.2.19), (6.2.20) для рассматриваемого случая.

Для этого используем уравнения (6.2.13)

$$\begin{gathered}\Big\{g_0+g_1(\lambda+j\omega_k)-[r_0+r_1(\lambda+j\omega_k)]\left[r^\lambda(\omega_k)+ji^\lambda(\omega_k)\right]\Big\}[l_0+l_1(\lambda+j\omega_k)]-\\ -\left[r^\lambda(\omega_k)+ji^\lambda(\omega_k)\right][(\lambda+j\omega_k)^3+\delta_2(\lambda+j\omega_k)^2+\delta_1(\lambda+j\omega_k)+\delta_0]=0\quad k=\overline{1,3}.\end{gathered}\tag{6.2.30}$$

Представим эти уравнения в виде

$$\begin{gathered}\left[\tilde r(\omega_k)+j\tilde i(\omega_k)\right][(l_0+l_1\lambda)+jl_1\omega_k]-\left[r^\lambda(\omega_k)+ji^\lambda(\omega_k)\right]\cdot\\ \cdot\{[(\lambda^3-3\lambda\omega_k^2)+(\lambda^2-\omega_k^2)\,\delta_2+\lambda\delta_1+\delta_0]+j\,[(-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k)+2\lambda\omega_k\delta_2+\omega_k\delta_1]\}\quad k=\overline{1,3},\end{gathered}\tag{6.2.31}$$

где

$$\tilde r(\omega_k)=g_0+g_1\lambda-r_0\left[r^\lambda(\omega_k)\right]-r_1\left[\lambda r^\lambda(\omega_k)-\omega_k i^\lambda(\omega_k)\right]\quad k=\overline{1,3},\tag{6.2.32}$$

$$\tilde i(\omega_k)=g_1\omega_k-r_0\left[i^\lambda(\omega_k)\right]-r_1\left[\omega_k r^\lambda(\omega_k)+\lambda i^\lambda(\omega_k)\right]\quad k=\overline{1,3}.\tag{6.2.33}$$

Отсюда следуют уравнения вида (6.2.19), (6.2.20)

$$\begin{gathered}\left[\tilde r(\omega_k)\lambda-\tilde i(\omega_k)\omega_k\right]l_1+\tilde r(\omega_k)l_0-\\ -\left[r^\lambda(\omega_k)\,(\lambda^2-\omega_k^2)-i^\lambda(\omega_k)2\lambda\omega_k\right]\delta_2-\left[r^\lambda(\omega_k)\lambda-i^\lambda(\omega_k)\omega_k\right]\delta_1-r^\lambda(\omega_k)\delta_0=\\ =r^\lambda(\omega_k)\,(\lambda^3-3\lambda\omega_k^2)-i^\lambda(\omega_k)\,(-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k)\quad k=\overline{1,3},\end{gathered}\tag{6.2.34}$$

$$\begin{gathered}\left[\tilde i(\omega_k)\lambda+\tilde r(\omega_k)\omega_k\right]l_1+\tilde i(\omega_k)l_0-\\ -\left[i^\lambda(\omega_k)\,(\lambda^2-\omega_k^2)+r^\lambda(\omega_k)2\lambda\omega_k\right]\delta_2-\left[i^\lambda(\omega_k)\lambda+r^\lambda(\omega_k)\omega_k\right]\delta_1-i^\lambda(\omega_k)\delta_0=\\ =i^\lambda(\omega_k)\,(\lambda^3-3\lambda\omega_k^2)+r^\lambda(\omega_k)\,(-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k)\quad k=\overline{1,3}.\end{gathered}\tag{6.2.35}$$

На основе формул (6.2.33), (6.2.34) вычислим (6.2.36)

$$\begin{aligned}\tilde r(\omega_1)&=52.9,\qquad \tilde i(\omega_1)=-33;\\ \tilde r(\omega_2)&=36.7,\qquad \tilde i(\omega_2)=-17.4;\\ \tilde r(\omega_3)&=32.6,\qquad \tilde i(\omega_3)=-7.5.\end{aligned}\tag{6.2.37}$$

Подставляя эти значения в (6.2.35), (6.2.36), получим систему (6.2.38)

$$\begin{aligned}53l_0+416l_1-0.85d_0-9.3d_1-73.6d_2-464d_3&=0\\ 36.7l_0+324l_1-0.22d_0-6.6d_1-63.5d_2-285d_3&=0\\ 32.6l_0+263l_1-0.08d_0-5.9d_1-62.3d_2-48.8d_3&=0\\ -33l_0-39.3l_1+1.4d_0+5.9d_1+7.5d_2-175d_3&=0\\ -17.4l_0+116l_1+0.88d_0+3.97d_1-15.9d_2-476d_3&=0\\ d_3&=1\end{aligned}\tag{6.2.39}$$

Решим её и получим

$$l_1=5,\quad l_0=30;\qquad \delta_2=23,\quad \delta_1=139,\quad \delta_0=262.\tag{6.2.40}$$

Используем критерий Гурвица и заключаем об асимптотической устойчивости велосипеда (6.2.26) с роботом (6.2.27).

Для проверки (6.2.41) заметим, что ω-индексы (6.2.29), (6.2.30) получены для велосипеда с параметрами (5.2.20): $d_0 = -16$, $b_0 = 30$, $b_1 = 5$. Характеристический полином системы

$$(s^2 - 16)y = (5s + 30)u, \quad (s + 8)u = -(3s + 13)y, \tag{6.2.41}$$

имеет вид

$$d^u(s) = s^3 + 23s^2 + 139s + 262.$$

■

6.2.5. Анализ устойчивости по стабилизированным ω-индексам

Пусть объект 6.2.1 задан стабилизированными ω-индексами $r^c(\omega_k)$, $i^c(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,p}\right)$, если он неустойчив, либо ω-индексами $r(\omega_k)$, $i(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,p}\right)$ с нулевым λ-смещением, если он асимптотически устойчив.

В этом случае уравнения (6.2.13) частотной обратной задачи принимают вид

$$[g(j\omega_k) - r(j\omega_k)w^c(j\omega_k)]l(j\omega_k) - w^c(j\omega_k)\delta(j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1,p}. \tag{6.2.42}$$

Используем выражения (6.1.26), (6.1.27) и запишем уравнения (6.2.19), (6.2.20) как

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=0}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]^*} \left[\tilde{\tilde{r}}\ (\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - \tilde{\tilde{i}}\ (\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q\right] l_{2q} \quad - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q\right] \delta_{2q} \quad = 0 \quad k = \overline{1,p},
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=0}^{\left[\frac{\gamma-1}{2}\right]^*} \left[\tilde{\tilde{r}}\ (\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + \tilde{\tilde{i}}\ (\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q\right] l_{2q+1} \ - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q\right] \delta_{2q+1} = 0 \quad k = \overline{1,p-1}.
\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{r}}(\omega_k) = &\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \omega_k^{2q}(-1)^q g_{2q} - \\
&- \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q\right] r_{2q} \quad k = \overline{1,p},
\end{aligned} \tag{6.2.45}$$

$$\tilde{\tilde{i}}(\omega_k) = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \omega_k^{2q+1}(-1)^q g_{2q+1} -$$

$$- \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \left[r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q\right] r_{2q+1} \quad k = \overline{1,p}. \qquad (6.2.46)$$

Дополним эти уравнения (6.2.43), (6.2.44) равенством

$$\delta_{2n-1} = 1. \qquad (6.2.47)$$

Используя утверждение 6.2.2, которое справедливо и при $\lambda = 0$, заключаем, что для асимптотической устойчивости системы (6.2.1), (6.2.2), объект, который задан стабилизированными ω-индексами, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (6.2.43), (6.2.44) имели своим решением числа δ_i $\left(i = \overline{0, 2n-2}\right)$, удовлетворяющие условиям Гурвица (6.2.24).

6.2.6. Второй критерий устойчивости

Пусть в системе регулирования (6.2.1), (6.2.2) неизвестны параметры d_i, b_j $\left(i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0,\gamma}\right)$ объекта и параметры g_i, r_j $\left(i, j = \overline{0, n-1}\right)$ регулятора. Известны лишь расширенные ω-индексы разомкнутой системы

$$r^{\lambda}_{раз}(\omega_k) \quad \text{и} \quad i^{\lambda}_{раз}(\omega_k) \quad k = \overline{1,\tilde{p}}, \quad \text{где} \quad \tilde{p} = n + \left\{\frac{n+\gamma-1}{2}\right\}^*.$$

Для анализа устойчивости такой системы сформулируем уравнение обратной задачи, аналогичное (6.2.8)

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]l(s) - b(s)r(s)\delta(s) = 0. \qquad (6.2.48)$$

Оно отличается от (6.2.8) лишь сомножителем $r(s)$ во втором слагаемом.

Утверждение 6.2.3. Если полиномы $d^u(s)$ и $b(s)r(s)$ не имеют общего делителя и если

$$\deg l(s) = \deg b(s)r(s), \quad \deg \delta(s) = \deg d^u(s), \quad \delta_{2n-1} = 1, \qquad (6.2.49)$$

то уравнение (6.2.48) имеет единственное решение

$$l(s) = b(s)r(s), \quad \delta(s) = d^u(s). \qquad (6.2.50)$$

■

Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство утверждения 6.2.1, если заменить степень γ полинома $l(s)$ на $\gamma + n - 1$.

Поделим (6.2.48) на $d(s)g(s)$. Тогда

$$[1 + w_{раз}(s)]l(s) + w_{раз}(s)\delta(s) = 0. \qquad (6.2.51)$$

Положим $s_k = \lambda + j\omega_k$ $\left(k = \overline{1,\tilde{p}}\right)$ и получим уравнения частотной обратной задачи

$$\left[1 + r^{\lambda}_{раз}(\omega_k) + ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right] l(\lambda + j\omega_k) \left[r^{\lambda}_{раз}(\omega_k) + ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right] \delta(\lambda + j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1,\tilde{p}}. \qquad (6.2.52)$$

Запишем эту систему аналогично (6.2.19), (6.2.20)

$$\sum_{i=0}^{n+\gamma-1}\left\{\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\rho_i(\omega_k)-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)\right\}l_i\;-$$
$$-\sum_{i=0}^{2n-1}\left\{r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)\right\}\delta_i=0\quad k=\overline{1,n+\left\{\frac{n+\gamma-1}{2}\right\}^*}, \tag{6.2.53}$$
$$\sum_{i=0}^{n+\gamma-1}\left\{\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\mu_i(\omega_k)+i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right\}l_i\;-$$
$$-\sum_{i=0}^{2n-1}\left\{r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)+i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right\}\delta_i=0\quad k=\overline{1,n+\left[\frac{n+\gamma-1}{2}\right]^*}. \tag{6.2.54}$$

Дополним эти уравнения равенством (6.2.21). Решение системы (6.2.53), (6.2.54), (6.2.21) существует и единственно. Это следует из утверждения 6.2.2.

Таким образом, получен ещё один критерий.

Критерий 6.2.2. **(Второй частотно-алгебраический критерий устойчивости).**

Если система (6.2.1), (6.2.2) задана расширенными ω-индексами разомкнутой системы, то для асимптотической устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы уравнения (6.2.53), (6.2.54), (6.2.21) имели своим решением числа δ_i $\left(i=\overline{0,2n-2}\right)$, удовлетворяющие неравенствам Гурвица (6.2.24). ■

Пример 6.2.2. Исследуем устойчивость объекта (6.2.25) с роботом-велосипедистом (регулятором)

$$\dot{u}+g_0u=r_1\dot{y}+r_0y. \tag{6.2.55}$$

Параметры велосипеда и робота неизвестны, а известны расширенные ω-индексы разомкнутой системы велосипед-робот, полученные экспериментально при ω-тесте и λ-смещении (6.2.27) (6.2.56)

$$\begin{aligned} r^{\lambda}_{раз}(\omega_1)&=-2.13, & i^{\lambda}_{раз}(\omega_1)&=3.03;\\ r^{\lambda}_{раз}(\omega_2)&=-0.76, & i^{\lambda}_{раз}(\omega_2)&=2;\\ r^{\lambda}_{раз}(\omega_3)&=-0.4, & i^{\lambda}_{раз}(\omega_3)&=1.44. \end{aligned} \tag{6.2.57}$$

Для анализа устойчивости запишем уравнения (6.2.52)

$$\begin{gathered}\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)+ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\left[l_0+l_1(\lambda+j\omega_k)+l_2(\lambda+j\omega_k)^2\right]-\\ -\left[r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)+ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\left[\delta_0+\delta_1(\lambda+j\omega_k)+\delta_2(\lambda+j\omega_k)^2+(\lambda+j\omega_k)^3\right]=0\quad k=\overline{1,3}.\end{gathered} \tag{6.2.58}$$

Представим эти уравнения как

$$\begin{gathered}\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)+ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\left\{\left[l_0+l_1\lambda+l_2(\lambda^2-\omega_k^2)\right]+j\left[l_1\omega_k+l_2 2\lambda\omega_k\right]\right\}-\\ -\left[r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)+ji^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\left\{\left[\delta_0+\delta_1\lambda+\delta_2(\lambda^2-\omega_k^2)+\lambda^3-3\lambda\omega_k^2\right]+\right.\\ \left.+j\left[\delta_1\omega_k+\delta_2 2\lambda\omega_k-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k\right]\right\}=0\quad k=\overline{1,3}.\end{gathered} \tag{6.2.59}$$

Отсюда получим уравнения вида (6.2.53), (6.2.54)

$$\left\{\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right](\lambda^2-\omega_k^2)-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)2\lambda\omega_k\right\}l_2+\left\{\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\lambda-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\omega_k\right\}l_1+\left\{1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right\}l_0-$$
$$-\left\{r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(\lambda^2-\omega_k^2)-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)2\lambda\omega_k\right\}\delta_2-\left\{r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\lambda-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\omega_k\right\}\delta_1-\left\{r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right\}\delta_0=$$
$$=r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(\lambda^3-3\lambda\omega_k^2)-i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k)\quad k=\overline{1,3}, \tag{6.2.60}$$

$$\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(\lambda^2-\omega_k^2)+\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]2\lambda\omega_k\right\}l_2+\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\lambda+\left[1+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right]\omega_k\right\}l_1+\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right\}l_0-$$
$$-\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(\lambda^2-\omega_k^2)+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)2\lambda\omega_k\right\}\delta_2-\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\lambda+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\omega_k\right\}\delta_1-\left\{i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\right\}\delta_0=$$
$$=i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(\lambda^3-3\lambda\omega_k^2)+r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)\,(-\omega_k^3+3\lambda^2\omega_k)\quad k=\overline{1,3}. \tag{6.2.61}$$

Поставим в эту систему числа (6.2.56), (6.2.57) и решим её. Получим

$$l_2=-15,\quad l_1=-155,\quad l_0=-390;\qquad \delta_2=23,\quad \delta_1=139,\quad \delta_0=262. \tag{6.2.62}$$

На основе чисел δ_2, δ_1 и δ_0 заключаем, используя критерий Гурвица, что система велосипед-робот асимптотически устойчива. Заметим, что числа δ_2, δ_1 и δ_0 совпали с числами (6.2.40). Это объясняется тем, что ω-индексы разомкнутой системы были получены для велосипеда и робота с параметрами примера 6.2.1. ■

6.3. Идентификационное управление

6.3.1. Постановка задачи идентификации и её решение

Рассмотрим объект первого вида

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u, \tag{6.3.1}$$

с неизвестными параметрами (матрица A размеров $n\times n$ и n-мерный вектор $\boldsymbol{b}$ неизвестны). Пусть известны вектора $\boldsymbol{r}_x(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ его ω-индексов.

Задача 6.3.1. (Задача определения параметров, задача идентификации). Найти параметры (матрицу A и вектор $\boldsymbol{b}$) асимптотически устойчивого и полностью управляемого объекта (6.3.1) по заданным векторам его ω-индексов. ■

Для решения этой задачи запишем по определению

$$\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)=(Ej\omega_k-A)^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_x(\omega_k)+j\boldsymbol{i}_x(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}. \tag{6.3.2}$$

Умножим это выражение слева на $(Ej\omega_k-A)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Тогда

$$(Ej\omega_k-A)\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)=\boldsymbol{b}\quad\text{или}\quad(Ej\omega_k-A)[r_x(\omega_k)+j\boldsymbol{i}_x(\omega_k)]=\boldsymbol{b}\quad k=\overline{1,n}.$$

Матрица A и вектор $\boldsymbol{b}$ – вещественные и поэтому отсюда следует

$$A\boldsymbol{i}_x(\omega_k)-\omega_k\boldsymbol{r}_x(\omega_k)=\boldsymbol{0}\quad k=\overline{1,n}, \tag{6.3.3}$$
$$-A\boldsymbol{r}_x(\omega_k)-\omega_k\boldsymbol{i}_x(\omega_k)=\boldsymbol{b}\quad k=\overline{1,n}. \tag{6.3.4}$$

Запишем систему (6.3.3) в матричной форме

$$A\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x(\omega_n) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \omega_1\boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \omega_2\boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n\boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{array}\right]. \quad (6.3.5)$$

Тогда получим уравнение для определения искомой матрицы

$$A = \left[\begin{array}{cccc} \omega_1\boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \omega_2\boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n\boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x(\omega_n) \end{array}\right]^{-1}. \quad (6.3.6)$$

Вектор $\boldsymbol{b}$ находим из (6.3.4), (6.3.5)

$$\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{cccc} \omega_1\boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \omega_2\boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n\boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x(\omega_n) \end{array}\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\boldsymbol{r}_x(\omega_k) - \omega_k\boldsymbol{i}_x(\omega_k) \quad k \in \overline{1,n}. \quad (6.3.7)$$

Таким образом, процедура идентификации сводится к вычислению по формулам (6.3.6), (6.3.7). Она осуществима, если выполняется условие

$$\det\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x(\omega_n) \end{array}\right] \neq 0, \quad (6.3.8)$$

которое будем называть *условием частотной идентифицируемости.*

Утверждение 6.3.1. Если объект (6.3.1) асимптотически устойчив и полностью управляем, то он частотно идентифицируем.

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.4.

Из доказательства следует, что для выполнения неравенства (6.3.8) необходимо чтобы

$$\Delta_{n-1} \neq 0, \quad (6.3.9)$$

где Δ_{n-1} – $n-1$-й определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома $d(s) = \det(Es - A)$.

Это условие не конструктивно (так как указанный полином неизвестен) и поэтому оно заменено условием

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad (6.3.10)$$

которое выполняется, если объект обладает свойством асимптотической устойчивости, проверяемым экспериментально.

Пример 6.3.1. Пусть для некоторого объекта получены экспериментально при

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad (6.3.11)$$

вектора ω-индексов

$$\boldsymbol{r}_x(\omega_1) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{i}_x(\omega_1) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{r}_x(\omega_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{64}{104} \\ \dfrac{98}{104} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{i}_x(\omega_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{8}{104} \\ -\dfrac{30}{104} \end{bmatrix}. \quad (6.3.12)$$

Требуется идентифицировать параметры этого объекта.

В соответствии с (6.3.6) запишем

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 \boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \boldsymbol{r}_x(\omega_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} -0.5 & -\dfrac{64}{104} \cdot 2 \\ 1 & \dfrac{98}{104} \cdot 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.5 & -\dfrac{8}{104} \\ 0 & -\dfrac{30}{104} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}. \tag{6.3.13}$$

Используем (6.3.4) и получим

$$\boldsymbol{b} = -A\boldsymbol{r}_x(\omega_1) - \omega_1 \boldsymbol{i}_x(\omega_1) = -\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b} = -A\boldsymbol{r}_x(\omega_2) - \omega_2 \boldsymbol{i}_x(\omega_2) = -\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\dfrac{64}{104} \\ \dfrac{98}{104} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\dfrac{8}{104} \\ -\dfrac{30}{104} \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{6.3.14}$$

Нетрудно проверить, что объект с параметрами (6.3.13), (6.3.14) имеет ω-индексы (6.3.10). Для этого нужно сформировать вектор

$$\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \begin{pmatrix} j\omega - 1 & -4 \\ 2 & j\omega - 6 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

и убедиться, что при $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 2$ вещественная и мнимая составляющие этого вектора совпадают с (5.3.10). ■

6.3.2. Неустойчивые объекты

Объект (6.3.1) может быть неустойчив и задан векторами смещённых ω-индексов $\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Найдём его параметры.

По определению

$$\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k) + j\boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k) = \boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega_k) = (Ej\omega_k - A + E\lambda)^{-1}\boldsymbol{b} \quad k = \overline{1,n}. \tag{6.3.15}$$

Введём матрицу

$$\tilde{A} = A - E\lambda. \tag{6.3.16}$$

Она вычисляется по формуле (6.3.6), которая принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \omega_1 \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_1) & \omega_2 \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \omega_n \boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}^{-1}. \tag{6.3.17}$$

Вектор

$$\boldsymbol{b} = -\tilde{A}\boldsymbol{r}_x^\lambda(\omega_k) - \omega_k \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_k) \quad k \in \overline{1,n}. \tag{6.3.18}$$

Матрица $\tilde{A}$ – гурвицева по построению, а пара $\left(\tilde{A}, \boldsymbol{b}\right)$ – полностью управляема. Это означает, что

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{6.3.19}$$

Примечание 6.3.1. Если неустойчивый объект (6.3.1) задан стабилизированными ω-индексами $\boldsymbol{r}_x^c(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x^c(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, то он, вообще говоря, частотно неидентифицируем. Действительно, для неустойчивого объекта может нарушаться неравенство (6.3.9), необходимое для выполнения условия (6.3.8). ■

6.3.3. Объекты второго вида (частный случай)

Рассмотрим асимптотически устойчивый объект (6.3.20)

$$y^{(n)}+d_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+d_1\dot{y}+d_0y=u, \tag{6.3.21}$$

заданный ω-индексами $r(\omega_k)$ и $i(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Найдём параметры d_i $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ этого объекта. Эту задачу идентификации сведём к уже рассмотренной. Для этого приведём уравнение (6.3.21) к виду (6.3.1) и построим вектора ω-индексов.

Введём обозначения

$$y=\check{x}_1,\quad \dot{y}=\check{x}_2,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}=\check{x}_n. \tag{6.3.22}$$

и запишем (6.3.21) в канонической форме

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}}=\check{A}\check{\boldsymbol{x}}+\check{\boldsymbol{b}}u, \tag{6.3.23}$$

в которой матрица $\check{A}$ и вектор $\check{\boldsymbol{b}}$ имеют вид (3.4.5).

Передаточный вектор объекта (6.3.23)

$$\check{\boldsymbol{\beta}}(s)=(Es-\check{A})^{-1}\check{\boldsymbol{b}}=\begin{bmatrix}1 & s & \cdots & s^{n-1}\end{bmatrix}'\cdot\frac{1}{d(s)}. \tag{6.3.24}$$

Отсюда следует, что вектор ω-индексов для этого объекта

$$\begin{aligned}\check{\boldsymbol{r}}_x(\omega_k)&=\mathrm{Re}\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega_k)=\mathrm{Re}\left\{\begin{bmatrix}1 & j\omega_k & \cdots & (j\omega_k)^{n-1}\end{bmatrix}'\cdot[r(\omega_k)+ji(\omega_k)]\right\}=\\&=\begin{bmatrix}r(\omega_k) & -\omega_k i(\omega_k) & -\omega_k^2 r(\omega_k) & \omega_k^3 i(\omega_k) & \cdots\\ \cdots & (-1)^{n-2}\omega_k^{n-2}r(\omega_k) & (-1)^{n-1}\omega_k^{n-1}i(\omega_k)\end{bmatrix}\quad k=\overline{1,n},\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

$$\begin{aligned}\check{\boldsymbol{i}}_x(\omega_k)&=\mathrm{Jm}\check{\boldsymbol{\beta}}(j\omega_k)=\mathrm{Jm}\left\{\begin{bmatrix}1 & j\omega_k & \cdots & (j\omega_k)^{n-1}\end{bmatrix}'\cdot[r(\omega_k)+ji(\omega_k)]\right\}=\\&=\begin{bmatrix}i(\omega_k) & \omega_k r(\omega_k) & -\omega_k^2 i(\omega_k) & -\omega_k^3 r(\omega_k) & \cdots\\ \cdots & (-1)^{n-2}\omega_k^{n-2}i(\omega_k) & (-1)^{n-1}\omega_k^{n-1}r(\omega_k)\end{bmatrix}\quad k=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

Используем эти числа и найдём, аналогично (6.3.6),

$$\check{A}=\begin{bmatrix}\omega_1\check{\boldsymbol{r}}_x(\omega_1) & \omega_2\check{\boldsymbol{r}}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n\check{\boldsymbol{r}}_x(\omega_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\check{\boldsymbol{i}}_x(\omega_1) & \check{\boldsymbol{i}}_x(\omega_2) & \cdots & \check{\boldsymbol{i}}_x(\omega_n)\end{bmatrix}^{-1}. \tag{6.3.27}$$

Если объект (6.3.21) неустойчив и задан ω-индексами $r^\lambda(\omega_k)$ и $i^\lambda(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, то

$$\check{\boldsymbol{\beta}}^\lambda(s)=(Es-\check{A}+E\lambda)^{-1}\check{\boldsymbol{b}}=\left[\begin{array}{cccc}1 & s+\lambda & \cdots & (s+\lambda)^{n-1}\end{array}\right]'\cdot\frac{1}{d(s+\lambda)}, \qquad (6.3.28)$$

и тогда вектора смещенных ω-индексов объекта (6.3.23)

$$\check{\boldsymbol{r}}_x^\lambda(\omega_k)=\mathrm{Re}\,\check{\boldsymbol{\beta}}^\lambda(j\omega_k)=\mathrm{Re}\left\{\left[\begin{array}{cccc}1 & \lambda+j\omega_k & \cdots & (\lambda+j\omega_k)^{n-1}\end{array}\right]'\left[r^\lambda(\omega_k)+ji^\lambda(\omega_k)\right]\right\}\ k=\overline{1,n} \qquad (6.3.29)$$

$$\check{\boldsymbol{i}}_x^\lambda(\omega_k)=\mathrm{Jm}\,\check{\boldsymbol{\beta}}^\lambda(j\omega_k)=\mathrm{Jm}\left\{\left[\begin{array}{cccc}1 & \lambda+j\omega_k & \cdots & (\lambda+j\omega_k)^{n-1}\end{array}\right]'\left[r^\lambda(\omega_k)+ji^\lambda(\omega_k)\right]\right\}\ k=\overline{1,n} \qquad (6.3.30)$$

Используем эти вектора найдём по формуле (6.3.17) матрицу $\check{\tilde{A}}=\check{A}-E\lambda$.

6.3.4. Объекты второго вида (общий случай)

Рассмотрим теперь объект более общего, чем (6.3.21), вида

$$y^{(n)}+d_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+d_1\dot{y}+d_0y=b_\gamma u^{(\gamma)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u, \quad (\gamma<n), \qquad (6.3.31)$$

заданный расширенными ω-индексами $r(\omega_k)$ и $i(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$. Найдём числа d_i, b_j $\left(i=\overline{0,n-1},\ \ j=\overline{0,\gamma}\right)$. Для сведения этой задачи к задаче 6.3.1 сформируем ««объект»» (4.5.78)

$$d(s)y=b(s)u, \quad \mu(s)u=\check{u}, \qquad (6.3.32)$$

где $\mu(s)=s^n+\mu_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\mu_1s+\mu_0$ – произвольный гурвицев полином.

Введём обозначения

$$y=\check{x}_1,\ \ \dot{y}=\check{x}_2,\ \ \ldots,\ \ y^{(n-1)}=\check{x}_n;\quad u=\check{x}_{n+1},\ \ \dot{u}=\check{x}_{n+2},\ \ \ldots,\ \ u^{(n-1)}=\check{x}_{2n}, \qquad (6.3.33)$$

и запишем (6.3.32) в виде (6.3.1)

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}}=\check{\tilde{A}}\check{\boldsymbol{x}}+\check{\boldsymbol{b}}\check{u}, \qquad (6.3.34)$$

где

$$\check{\boldsymbol{x}}=\left[\begin{array}{c}\check{x}_1\\ \check{x}_2\\ \vdots\\ \check{x}_n\\ \hline \check{x}_{n+1}\\ \check{x}_{n+2}\\ \vdots\\ \check{x}_{2n}\end{array}\right],\quad \check{\tilde{A}}=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}0&1&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-d_0&-d_1&-d_2&\cdots&-d_{n-1}&b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}\\\hline 0&0&0&\cdots&0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-\mu_0&-\mu_1&-\mu_2&\cdots&-\mu_{n-1}\end{array}\right),\quad \check{\boldsymbol{b}}=\left[\begin{array}{c}0\\0\\\vdots\\0\\\hline 0\\0\\\vdots\\1\end{array}\right]. \qquad (6.3.35)$$

Выразим ω-индексы ««объекта»» (6.3.34) $\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_k)$ и $\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ через заданные частотные параметры объекта (6.3.31).

Утверждение 6.3.2. Частотные параметры объектов (6.3.31) и (6.3.34) связны соотношением

$$\begin{aligned}\breve{\breve{\boldsymbol{\beta}}}(j\omega_k)=\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_k)+j\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_k)=\Big[\ \eta(j\omega_k)\quad j\omega_k\eta(j\omega_k)\quad\cdots\quad (j\omega_k)^{n-1}\eta(j\omega_k)\ \Big|\\ \Big|\ \mu^{-1}(j\omega_k)\quad j\omega_k\mu^{-1}(j\omega_k)\quad\cdots\quad (j\omega_k)^{n-1}\mu^{-1}(j\omega_k)\ \Big]'\quad k=\overline{1,2n},\end{aligned}\tag{6.3.36}$$

где

$$\eta(j\omega_k)=-\frac{r(\omega_k)+ji(\omega_k)}{\mu(j\omega_k)}\quad k=\overline{1,n}.\tag{6.3.37}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.5.

Имея вектора $\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_k)$ и $\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$, находим, в соответствии с (6.3.6),

$$\breve{\breve{A}}=\Big[\ \omega_1\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_1)\quad \omega_2\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_2)\quad\cdots\quad \omega_{2n}\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x(\omega_{2n})\ \Big]\Big[\ \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_1)\quad \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_2)\quad\cdots\quad \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x(\omega_{2n})\ \Big]^{-1}.\tag{6.3.38}$$

Если объект (6.3.31) неустойчив и задан смещёнными ω-индексами, то нетрудно получить аналогичное соотношение

$$\breve{\breve{\tilde{A}}}=\breve{\breve{A}}-E\lambda=\Big[\ \omega_1\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^{\lambda}(\omega_1)\quad \omega_2\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^{\lambda}(\omega_2)\quad\cdots\quad \omega_{2n}\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^{\lambda}(\omega_{2n})\ \Big]\Big[\ \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^{\lambda}(\omega_1)\quad \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^{\lambda}(\omega_2)\quad\cdots\quad \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^{\lambda}(\omega_{2n})\ \Big]^{-1}.\tag{6.3.39}$$

в котором $\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^{\lambda}(\omega_k)$ и $\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ определяются из выражения

$$\begin{aligned}\breve{\breve{\boldsymbol{\beta}}}^{\lambda}(j\omega_k)=\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^{\lambda}(\omega_k)+j\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^{\lambda}(\omega_k)=\Big[\ \eta^{\lambda}(j\omega_k)\quad (\lambda+j\omega_k)\eta^{\lambda}(j\omega_k)\quad\cdots\quad (\lambda+j\omega_k)^{n-1}\eta^{\lambda}(j\omega_k)\ \Big|\\ \Big|\ \mu^{-1}(\lambda+j\omega_k)\quad (\lambda+j\omega_k)\mu^{-1}(\lambda+j\omega_k)\quad\cdots\quad (\lambda+j\omega_k)^{n-1}\mu^{-1}(\lambda+j\omega_k)\ \Big)'\quad k=\overline{1,2n},\end{aligned}\tag{6.3.40}$$

где

$$\eta^{\lambda}(j\omega_k)=-\frac{r^{\lambda}(\omega_k)+ji^{\lambda}(\omega_k)}{\mu(\lambda+j\omega_k)}\quad k=\overline{1,2n}.\tag{6.3.41}$$

Заметим, что если в (6.3.31) известно число γ и оно меньше $n-1$, то полином $\mu(s)$ может иметь степень $\gamma+1$, а система (6.3.35) будет содержать $n+\gamma+1$ уравнений вместо $2n$. В этом случае двойной набор ω-индексов, описывающих уравнение (6.3.31), может быть заменён расширенным набором $r(\omega_k)$ и $i(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n+\gamma+1}\right)$.

Пример 6.3.2. Идентифицируем параметры велосипеда

$$\ddot{y}+d_0y=b_1\dot{u}+b_0u,\tag{6.3.42}$$

заданного ω-индексами

$$r^{\lambda}(\omega_1),\quad i^{\lambda}(\omega_1),\quad r^{\lambda}(\omega_2),\quad i^{\lambda}(\omega_2);\tag{6.3.43}$$

$$r^{\lambda}(\omega_3),\quad i^{\lambda}(\omega_3),\quad r^{\lambda}(\omega_4),\quad i^{\lambda}(\omega_4),\tag{6.3.44}$$

при

$$\lambda = 6; \qquad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \quad \omega_3 = 9, \quad \omega_4 = 12. \tag{6.3.45}$$

Зададимся полиномом

$$\mu(s) = s^2 + 2s + 1, \tag{6.3.46}$$

и сформируем функцию вида (6.3.41)

$$\eta^\lambda(j\omega) = -\frac{r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega)}{\mu(\lambda + j\omega)} = -\frac{r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega)}{(\lambda + j\omega)^2 + 2(\lambda + j\omega) + 1} = r^\eta(\omega) + ji^\eta(\omega),$$

где

$$r^\eta(\omega) = -\frac{r^\lambda(\omega)(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1) + i^\lambda(\omega)(2\lambda\omega + 2\omega)}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}, \tag{6.3.47}$$

$$i^\eta(\omega) = \frac{r^\lambda(\omega)(2\lambda\omega + 2\omega) - i^\lambda(\omega)(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}. \tag{6.3.48}$$

На основе (6.3.40) запишем

$$\breve{\breve{\boldsymbol{\beta}}}^\lambda(j\omega) = \breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^\lambda(\omega) + j\breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^\lambda(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} [r^\eta(\omega) + jr^\eta(\omega)] & (\lambda + j\omega)\,[r^\eta(\omega) + jr^\eta(\omega)] \\ [r^\mu(\omega) + ji^\mu(\omega)] & (\lambda + j\omega)\,[r^\mu(\omega) + ji^\mu(\omega)] \end{array} \right\}', \tag{6.3.49}$$

где

$$r^\mu(\omega) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{\mu(\lambda + j\omega)} = \frac{\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}, \tag{6.3.50}$$

$$i^\mu(\omega) = \mathrm{Jm}\,\frac{1}{\mu(\lambda + j\omega)} = -\frac{2\lambda\omega + 2\omega}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}. \tag{6.3.51}$$

Итак,

$$\breve{\breve{\boldsymbol{r}}}_x^\lambda(\omega) = \begin{bmatrix} r^\eta(\omega) \\ \lambda r^\eta(\omega) - \omega i^\eta(\omega) \\ r^\mu(\omega) \\ \lambda r^\mu(\omega) - \omega i^\mu(\omega) \end{bmatrix}, \quad \breve{\breve{\boldsymbol{i}}}_x^\lambda(\omega) = \begin{bmatrix} i^\eta(\omega) \\ \omega r^\eta(\omega) + \lambda i^\eta(\omega) \\ i^\mu(\omega) \\ \omega r^\mu(\omega) + \lambda i^\mu(\omega) \end{bmatrix}. \tag{6.3.52}$$

Придавая λ и ω значения (6.3.45), получим в соответствии с (6.3.39) матрицу $\breve{\breve{\tilde{A}}}$. ■

6.3.5. Идентификационное управление

Вернёмся к задаче 6.1.2 синтеза регулятора (6.1.2) для объекта (6.1.28), заданного ω-индексами. Непосредственное (прямое) решение этой задачи состоит из операций: а) построение полинома $\psi(s)$ и б) вычисление параметров регулятора путём решения системы $2n$ уравнений (6.1.13), (6.1.14).

При идентификационном методе решения этой задачи последняя операция разбивается на две подоперации: определение (идентификация) параметров объекта (6.1.28)

по формулам (6.3.39)-(6.3.41) и нахождение параметров регулятора (6.1.2) с помощью процедуры 3.1.1 модального управления (решение уравнений (3.1.9)). Построенное таким образом управление называется *идентификационным управлением.*

Если сравнивать объём вычислений, необходимых для построения прямого и идентификационного управлений, то нетрудно заметить, что построение прямого управления требует примерно в 2 раза меньшего объёма вычислений. Действительно, для нахождения прямого управления решается система $2n$ уравнений (6.1.13),(6.1.14), а для вычисления идентификационного управления нужно решить систему $(2n)^2$ уравнений (6.3.39) для определения параметров объекта (6.1.28), а затем решать систему $2n$ уравнений (3.1.9) для вычисления параметров искомого регулятора.

Заметим, что в практике идентификации решают систему $2n$ уравнений (1.2.9), (1.2.10) вместо матричного уравнения (6.3.39) и поэтому отношение объемов вычисления прямого и идентификационного управлений составляет примерно $1:2$.

Однако, если учесть, что условия существования и единственности решения системы (1.2.9), (1.2.10) не исследованы и поэтому для гарантии нужно использовать уравнения (6.3.39), то построение идентификационного управления потребует существенно большего (чем в 2 раза) объёма вычислений, чем прямое.

Приложения к главе 6

6.П. Прямое управление дискретными объектами

6.П.1. Постановка задачи и её решение

Пусть имеется полностью управляемый дискретный объект, устойчивый по управлению

$$y(iT)+d_1y[(i-1)T]+\cdots+d_ny[(i-n)T]=b_1u[(i-1)T]+\cdots+b_nu[(i-n)T] \quad i=n,n+1,\ldots \tag{6.П.1}$$

заданный ω-индексами $r_\partial^\lambda(\omega_k)$ и $i_\partial^\lambda(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Требуется найти параметры регулятора

$$\begin{aligned} g_0u(iT)+g_1u[(i-1)T]+\cdots+g_{n-1}u[(i-n+1)T]+g_nu[(i-n)T]= \\ =r_0y(iT)+r_1y[(i-1)T]+\cdots+r_{n-1}y[(i-n+1)T] \quad i=n,n+1,\ldots \end{aligned} \tag{6.П.2}$$

такие, чтобы характеристический полином системы (6.П.1), (6.П.2) совпадал с заданным полиномом

$$\delta(q)=b(q)\psi(q), \tag{6.П.3}$$

где

$$b(q) = b_1 q + \cdots + b_n q^n, \quad \psi(q) = 1 + \psi_1 q + \cdots + \psi_\nu q^\nu. \tag{6.П.4}$$

Для решения этой задачи осуществим z-преобразование уравнений (6.П.1) и (6.П.2), заменим, как и в п. 5.П.2, $z^{-1} = q$ и сформируем модальное тождество

$$d(q)g(q) - b(q)r(q) = b(q)\psi(q), \tag{6.П.5}$$

где (6.П.6)

$$\begin{aligned} d(q) &= 1 + d_1 q + \cdots + d_{n-1} q^{n-1} + d_n q^n, & b(q) &= b_1 q + \cdots + b_{n-1} q^{n-1} + b_n q^n, \\ g(q) &= \quad g_1 q + \cdots + g_{n-1} q^{n-1} + g_n q^n, & r(q) &= r_1 q + \cdots + r_{n-1} q^{n-1} + r_n q^n. \end{aligned} \tag{6.П.7}$$

Покажем, что тождество (6.П.5) имеет единственное решение (6.П.7). Полином $\delta(q) = b(q)\psi(q)$ имеет структуру

$$\delta(q) = \delta_1 q + \delta_2 q^2 + \cdots + \delta_{n+\nu} q^{n+\nu} = q\tilde{\delta}(q).$$

Представим

$$g(q) = q\tilde{g}(q), \quad r(q) = q\tilde{r}(q),$$

и тогда тождество (6.П.5) примет вид

$$\tilde{d}(q)\tilde{g}(q) - \tilde{b}(q)\tilde{r}(q) = \tilde{b}(q)\psi(q), \tag{6.П.8}$$

где $\tilde{d}(q) = qd(q)$, $\tilde{b}(q) = qb(q)$.

Заметим, что

$$\deg \tilde{r}(q) < \deg \left[\tilde{d}(q)q^{-1}\right].$$

Заключаем по теореме 3.1.2, что то соотношение (6.П.8) допускает единственное решение $\tilde{g}(q)$ и $\tilde{r}(q)$. Выражения (6.П.8) и (6.П.5) совпадают и поэтому (6.П.5) имеет единственное решение.

Разделим (6.П.3) на $d(q)$. Тогда

$$g(q) - w(q)r(q) = w(q)\psi(q). \tag{6.П.9}$$

Положим в этом тождестве

$$q = \lambda_\partial + j\omega_\partial, \tag{6.П.10}$$

где

$$\lambda_\partial = e^{-\lambda T}\cos\omega T, \quad \omega_\partial = -e^{-\lambda T}\sin\omega T. \tag{6.П.11}$$

Тогда из (6.П.8) следует модальное частотное тождество

$$g(\lambda_\partial + j\omega_\partial) - w(\lambda_\partial + j\omega_\partial)r(\lambda_\partial + j\omega_\partial) = w(\lambda_\partial + j\omega_\partial)\psi(\lambda_\partial + j\omega_\partial).$$

Зафиксируем n значений ω и получим

$$g(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})-w(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})r(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})=w(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})\psi(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})\quad k=\overline{1,n}. \tag{6.П.12}$$

Примем во внимание связь

$$w(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})=r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)+ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}, \tag{6.П.13}$$

и запишем окончательно

$$\begin{aligned} g(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})-&\left[r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)+ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)\right]r(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})=\\ &=\left[r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)+ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)\right]\psi(\lambda_{\partial k}+j\omega_{\partial k})\quad k=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{6.П.14}$$

Отсюда следует (если положить $g_0=0$) система $2n$ уравнений для определения $2n$ неизвестных коэффициентов уравнения (6.П.2). Повторяя доказательство теоремы 6.1.1, нетрудно показать, что система имеет единственное решение, совпадающее с решением уравнения (6.П.5).

6.П.2. Объекты с запаздыванием

Если объект (6.П.1) имеет запаздывание по управлению величины $æT$, то он описывается уравнением (5.П.39)

$$\begin{aligned} &y(iT)+d_1y[(i-1)T]+\dots+d_ny[(i-n)T]=\\ &=b_1u[(i-1-æ)T]+\dots+b_nu[(i-n-æ)T]\quad i=n,n+1,\dots. \end{aligned} \tag{6.П.15}$$

Полиномы (6.П.6) и (6.П.7) принимают в этом случае вид (6.П.16)

$$\begin{aligned} d(q)&=1+d_1q+\dots+d_{n-1}q^{n-1}+d_nq^n, & b(q)&=(b_1q+\dots+b_{n-1}q^{n-1}+b_nq^n)q^{æ},\\ g(q)&=g_0q+\dots+g_{æ}q^{æ}+\dots+g_{æ+n}q^{æ+n}, & r(q)&=r_1q+\dots+r_{n-1}q^{n-1}+r_nq^n. \end{aligned} \tag{6.П.17}$$

а

$$\delta(q)=b(q)\psi(q)=\delta_{æ+1}q^{æ+1}+\dots+\delta_{æ+n+\nu}q^{æ+n+\nu}, \tag{6.П.18}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q в левой и правой частях тожества (6.П.5), получим

$$g_0=g_1=\dots=g_{æ}=0. \tag{6.П.19}$$

Учтём это равенство и получим из (6.П.14) систему $2n$ уравнений для определения $2n$ параметров регулятора

$$\begin{aligned} &g_{æ+1}u[(i-æ-1)T]+\dots+g_{æ+n}u[(i-æ-n)T]=\\ &=r_1y[(i-1)T]+\dots+r_ny[(i-n)T]\quad i=æ+n,æ+n+1,\dots \end{aligned} \tag{6.П.20}$$

6.П.3. Синтез регуляторов

Пусть к объекту (6.П.15) приложено внешнее возмущение и он описывается уравнением

$$y(iT)+d_1y[(i-1)T]+\cdots+d_ny[(i-n)T]=b_1u[(i-1-æ)T]+\cdots+b_nu[(i-n-æ)T]+ \\ +m_1f[(i-1)T]+\cdots+m_nf[(i-n)T] \quad i=n,n+1,\ldots . \tag{6.П.21}$$

Требуется найти регулятор (6.П.20), такой, чтобы, начиная с некоторого момента ρT, выполнялось условие

$$|y(iT)| \le y^*, \quad i>\rho, \tag{6.П.22}$$

где y^* – заданное число. Для, ступенчатого $f(iT)$ $(i=1,2,\ldots)$ выберем коэффициенты полинома $\psi(q)=1+\psi_1q+\cdots+\psi_nq^n$, из неравенства

$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right|}{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i\right|}\bar{f} < y^*, \tag{6.П.23}$$

в котором $\bar{f}$ – ограничение внешнего возмущения (величина ««ступеньки»»). Таким образом, для выбора параметров полинома $\psi(q)$ уравнения качества необходима оценка суммы коэффициентов при внешнем воздействии. После определения этих параметров решаем систему (6.П.14) и находим регулятор, обеспечивающий требование к точности системы (6.П.21), (6.П.20).

Пример 6.П.1. Продолжим рассмотрение примера 6.1.1. Пусть управление велосипедом (6.1.35) имеет запаздывание $t_{зап}$. Зададимся интервалом дискретности T и найдём $æ=\left[\frac{t_{зап}}{T}\right]^*+1$. При $æ=1$ дискретная модель велосипеда описывается разностными уравнениями (5.П.42), а его передаточная функция имеет вид (5.П.45).

Итак, пусть велосипед (5.П.42) задан ω-индексами (5.П.54), (5.П.55) и требуется найти регулятор

$$g_2u[(i-2)T]+g_3u[(i-3)T]=r_1y[(i-1)T]+r_2y[(i-2)T] \quad i=3,4,\ldots, \tag{6.П.24}$$

такой, чтобы при ступенчатом внешнем возмущении, ограниченном $\bar{f}=10$, установившаяся ошибка удовлетворяла неравенству (6.П.41)

$$|y(iT)| \le 0.204. \tag{6.П.25}$$

Для решения этой задачи найдём коэффициенты полинома

$$\psi(q)=1+\psi_1q+\psi_2q^2 \tag{6.П.26}$$

из условия (6.П.23)

$$\frac{10\cdot 10^2}{|1+\psi_1+\psi_2|} < 0.204, \tag{6.П.27}$$

в котором использована оценка $|m_1 + m_2| < 10^{-2}$.

Эту оценку нетрудно получить, если привести уравнение (6.1.35) к дискретной форме (5.П.42) с учётом внешнего возмущения, а затем записать (5.П.42) в форме

$$\begin{gathered} y(iT) + d_1 y[(i-1)T] + d_2 y[(i-2)T] = b_1 u[(i-2)T] + b_2 u[(i-3)T] + \\ + m_1 f[(i-1)T] + m_2 f[(i-2)T] \quad i = 2, 3, \dots, \end{gathered} \tag{6.П.28}$$

где

$$m_1 = m_2 = \nu^{-2}[\operatorname{ch} \nu T - 1]. \tag{6.П.29}$$

Зададимся корнями полинома $q_1 = q_2 = -2$ и получим $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0.25$. При таких значениях ψ_1 и ψ_2 неравенство (6.П.27) выполняется.

Уравнения (6.П.14) имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} & [\quad g_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2 + g_3(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^3] - \\ - & \left[r_\partial^\lambda(\omega_k) + j i_\partial^\lambda(\omega_k)\right] \cdot [\quad r_1(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) + r_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2] = \\ = & \left[r_\partial^\lambda(\omega_k) + j i_\partial^\lambda(\omega_k)\right] \cdot [1 + \psi_1(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) + \psi_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2] \quad k = \overline{1, 2}. \end{aligned} \tag{6.П.30}$$

Подставим в эти уравнения числа (5.П.54) и (5.П.55) и положим, в соответствии с (5.П.51), (5.П.52),

$$\lambda_{\partial 1} = 0, \quad \omega_{\partial 1} = -0.549; \qquad \lambda_{\partial 2} = 0.388, \quad \omega_{\partial 2} = -0.338. \tag{6.П.31}$$

Система (6.П.30) содержит 4 уравнения для определения четырёх неизвестных. Решая эту систему получим искомые числа

$$g_2, \quad g_3, \quad r_1, \quad r_2. \tag{6.П.32}$$

■

Доказательства к главе 6

6.Д. Доказательство теорем и утверждений

6.Д.1. Доказательство теоремы 6.1.1

Представим систему (6.1.21) в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} (\lambda + j\omega_k)^\alpha \eta_\alpha = 0 \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.Д.1}$$

где, в соответствии с (3.1.9),

$$\eta_\alpha = \sum_{i=0}^{n} d_i g_{\alpha-1} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} - \delta_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{6.Д.2}$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству соотношений

$$\eta_\alpha = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{6.Д.3}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\lambda = 0$.

В этом случае (6.Д.1) представим, с учётом вещественности $\eta_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}$, как две подсистемы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_k^{2i}(-1)^i \eta_{2i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_k^{2i+1}(-1)^i \eta_{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.Д.4}$$

которые можно записать в матричной форме

$$M\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \tag{6.Д.5}$$

где

$$M = \left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_1^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-2} & 0 \\
1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-2} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-2} & 0 \\
\hline
0 & \omega_1 & 0 & -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-1} \\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_2^3 & 0 & \omega_2^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \omega_n & 0 & -\omega_n^3 & 0 & \omega_n^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-1}
\end{array}\right), \quad \boldsymbol{\eta} = \left[\begin{array}{c}
\eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{2n-2} \\ \hline \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{2n-1}
\end{array}\right]. \tag{6.Д.6}$$

Вычислим определитель матрицы M. Переставляя столбцы этой матрицы, получим

$$\det M = \det \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} = \det W_1 \cdot \det W_2. \tag{6.Д.7}$$

где

$$W_1 = \begin{pmatrix}
1 & -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-2} \\
1 & -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & -\omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-2}
\end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix}
\omega_1 & -\omega_1^3 & \omega_1^5 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-1} \\
\omega_2 & -\omega_2^3 & \omega_2^5 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_n & -\omega_n^3 & \omega_n^5 & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-1}
\end{pmatrix}. \tag{6.Д.8}$$

Построим матрицы

$$V = \left[W_1 E^{(1)}\right]' = \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_n^2 \\
\omega_1^4 & \omega_2^4 & \cdots & \omega_n^4 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_1^{2n-2} & \omega_2^{2n-2} & \cdots & \omega_n^{2n-2}
\end{pmatrix}, \quad W_1 = \left[W_2 E^{(2)}\right]', \tag{6.Д.9}$$

где

$$E^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad E^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1}\frac{1}{\omega_n} \end{pmatrix}. \tag{6.Д.10}$$

Определитель матрицы V является определителем Вандермонда. Он обладает свойством

$$\det V \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega_i \neq \omega_j \ (i \neq j). \tag{6.Д.11}$$

Из (6.Д.10) и (6.Д.9) следует, что

$$\det W_1 = \frac{\det V}{\det E^{(1)}} \neq 0, \quad \det W_2 = \frac{\det V}{\det E^{(2)}} \neq 0, \tag{6.Д.12}$$

и таким образом,

$$\det M \neq 0. \tag{6.Д.13}$$

Тогда из (6.Д.5) следует (6.Д.3).

Пусть теперь $\lambda \neq 0$.

Уравнения (6.Д.1) можно записать, с учётом (6.1.10), в виде двух систем

$$\sum_{i=0}^{2n-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]^*}\rho_{2\nu}^{(i)}\omega_k^{2\nu}\right)\eta_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{2n-1}\left(\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]^*}\mu_{2\nu+1}^{(i)}\omega_k^{2\nu+1}\right)\eta_i = 0 \quad k=\overline{1,n}. \tag{6.Д.14}$$

Эти уравнения принимают в матричной форме вид

$$M^{\lambda}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \tag{6.Д.15}$$

где

$$M^\lambda = \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & \lambda & \lambda^2-\omega_1^2 & \rho_0^{(3)}+\rho_2^{(3)}\omega_1^2 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_1^{2\nu} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_1^{2\nu} \\
1 & \lambda & \lambda^2-\omega_2^2 & \rho_0^{(3)}+\rho_2^{(3)}\omega_2^2 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_2^{2\nu} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_2^{2\nu} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda & \lambda^2-\omega_n^2 & \rho_0^{(3)}+\rho_2^{(3)}\omega_n^2 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_n^{2\nu} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_n^{2\nu} \\
\hline
0 & \omega_1 & \lambda\omega_1 & \mu_1^{(3)}\omega_1+\mu_3^{(3)}\omega_1^3 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_1^{2\nu+1} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_1^{2\nu+1} \\
0 & \omega_2 & \lambda\omega_2 & \mu_1^{(3)}\omega_2+\mu_3^{(3)}\omega_2^3 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_2^{2\nu+1} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_2^{2\nu+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \omega_n & \lambda\omega_n & \mu_1^{(3)}\omega_n+\mu_3^{(3)}\omega_n^3 & \cdots & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_n^{2\nu+1} & \sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_n^{2\nu+1}
\end{array}\right). \tag{6.Д.16}$$

Покажем, что

$$\det M^\lambda = \det M. \tag{6.Д.17}$$

Для этого осуществим преобразование матрицы M^λ не изменяющее её определителя.

Умножим второй столбец этой матрицы на λ и вычтем его из третьего столбца. Тогда первые три столбца матрицы M^λ совпадут с одноимёнными столбцами матрицы M. Полученную матрицу обозначим M_3^λ. Умножим первый столбец M_3^λ на $\rho_0^{(3)}$, второй на $-\rho_1^{(3)}$, третий на $-\rho_2^{(3)}$ и вычтем их из четвёртого столбца. Результат совпадает с четвёртым столбцом матрицы M, если учесть, что $? = -1$.

Продолжая этот процесс приходим к матрице M и таким образом равенство (6.Д.17) доказано. Невырожденность матрицы M^λ (для любых различных $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и любом λ) означает, что уравнение (6.Д.15) имеет решение $\eta = 0$, которое выражает систему (3.1.9). Решение системы (3.1.9) существует, так как объект (6.1.1) полностью управляем и единственно в силу неравенства (3.1.26), и, таким образом, теорема доказана.

6.Д.2. Доказательство утверждения 6.2.1

Покажем вначале, что уравнение (6.2.10)

$$d^u(s)l(s) - b(s)\delta(s) = 0 \tag{6.Д.18}$$

имеет неединственное решение, если полиномы $d^u(s)$ и $b(s)$ имеют общий делитель $\nu(s)$. Последнее означает, что

$$d^u(s) = \bar{d}^u(s)\nu(s), \quad b(s) = \bar{b}(s)\nu(s). \tag{6.Д.19}$$

Подставим эти выражения в (6.Д.18). Получим

$$\bar{d}^u(s)l(s) - \bar{b}(s)\delta(s) = 0. \tag{6.Д.20}$$

Если, например, $\bar{b}(s) = 1 \quad [\nu(s) = b(s)]$, то

$$\delta(s) = \bar{d}^u(s)l(s), \tag{6.Д.21}$$

где $l(s)$ – произвольный полином степени γ.

При нарушении условий (6.2.9) решение уравнения (6.Д.18) также неединственно и имеет вид

$$l(s) = b(s)k(s), \quad \delta(s) = d^u(s)k(s), \tag{6.Д.22}$$

где $k(s)$ – произвольный полином.

При условиях (6.2.9) $k(s) = 1$.

Уравнение (6.Д.18) может иметь тривиальное решение

$$\delta(s) = l(s) = 0. \tag{6.Д.23}$$

Для того, чтобы избежать такого решения, коэффициент при старшей степени $\delta(s)$

$$\delta_{2n-1} = 1. \tag{6.Д.24}$$

Запишем тождество (6.Д.18) в развёрнутой форме

$$\begin{aligned}&\left(s^N + d^u_{N-1}s^{N-1} + \cdots + d^u_1 s + d^u_0\right)\left(l_\gamma s^\gamma + l_{\gamma-1}s^{\gamma-1} + \cdots + l_1 s + l_0\right) - \\ &- \left(s^N + \delta_{N-1}s^{N-1} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0\right)\left(b_\gamma s^\gamma + b_{\gamma-1}s^{\gamma-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) = 0 \quad N = 2n-1.\end{aligned} \tag{6.Д.25}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s получим систему уравнений для неизвестных l_i, δ_j $\left(i = \overline{0,\gamma},\ \ j = \overline{0, N-1}\right)$

$$\sum_{i=0}^{\gamma}\left(l_i d^u_{\alpha-i} - b_i\delta_{\alpha-i}\right) = 0 \quad \alpha = \overline{0, N+\gamma}, \tag{6.Д.26}$$

где аналогично (3.1.5)-(3.1.7) (6.Д.27)

$$d^u_{\alpha-i} = 0 \quad \text{и} \quad \delta_{\alpha-i} = 0 \quad \text{если} \quad \alpha - i < 0 \quad \text{и} \quad \alpha - i > N. \tag{6.Д.28}$$

Приведём несколько уравнений этой системы.

При $\alpha = N+\gamma$: $l_\gamma - b_\gamma = 0$. При $\alpha = N+\gamma-1$: $l_{\gamma-1}d^u_N + l_\gamma d^u_{N-1} - b_{\gamma-1}\delta^u_N - b_\gamma\delta^u_{N-1} = 0$,

и т.д. Запишем систему (6.Д.26) в матричной форме

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\ d^u_{N-1} & 1 & & & -b_\gamma & & & \\ \vdots & d^u_{N-1} & \cdots & & \vdots & -b_\gamma & \cdots & \\ d^u_0 & \vdots & \cdots & 1 & -b_0 & \vdots & \cdots & \\ & d^u_0 & \ddots & d^u_{N-1} & & -b_0 & \ddots & -b_\gamma \\ & & \cdots & \vdots & & & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & d^u_0 & \mathbf{0} & & & -b_0 \end{array}\right) \times \left[\begin{array}{c} l_\gamma \\ l_{\gamma-1} \\ \vdots \\ l_0 \\ \hline \delta_{N-1} \\ \delta_{N-2} \\ \vdots \\ \delta_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_\gamma \\ b_{\gamma-1} \\ \vdots \\ b_0 \\ \\ \\ \\ \mathbf{0} \end{array}\right] . \begin{array}{ll} : & N+\gamma \\ : & N+\gamma-1 \\ : & \vdots \\ : & N \\ : & \vdots \\ : & 1 \\ : & 0 \end{array} \tag{6.Д.29}$$

Допустим противное утверждению 6.2.1 и положим, что наряду с решением (6.2.10) существует решение

$$l(s) = l^*(s), \quad \delta(s) = \delta^*(s), \tag{6.Д.30}$$

где $l^*(s)$ и $\delta^*(s)$ – некоторые полиномы степеней γ и $2n-1$ соответственно. При этом $\delta^*_{2n-1} = 1$.

Это означает, что выполняется тождество

$$d^u(s)l^*(s) - b(s)\delta^*(s) = 0. \tag{6.Д.31}$$

Вычтем его из уравнения

$$d^u(s)b(s) - b(s)d^u(s) = 0 \tag{6.Д.32}$$

и получим

$$d^u(s)\bar{l}(s) - b(s)\bar{\delta}(s) = 0, \tag{6.Д.33}$$

где $\bar{l}(s) = b(s) - l^*(s)$, $\bar{\delta}(s) = d^u(s) - \delta^*(s) = \left(d^u_{2n-2} - \delta^*_{2n-2}\right) s^{2n-2} + \cdots + (d^u_1 - \delta^*_1)\, s + (d^u_0 - \delta^*_0)$.

Нетрудно видеть, что

$$\deg \bar{\delta}(s) < \deg d^u(s),$$

и поэтому, в соответствии с теоремой 3.1.2 заключаем, что уравнение (6.Д.26) имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$\bar{l}(s) = \bar{\delta}(s) = 0.$$

Это и доказывает утверждение 6.2.1.

6.Д.3. Доказательство утверждения 6.2.2

Система (6.2.19)-(6.2.21) – это система $2n+\gamma+1$ уравнений для определения $2n+\gamma+1$ неизвестных $\delta_{2n-1}, \ldots, \delta_1, \delta_0; l_\gamma, \ldots, l_1, l_0$.

При чётном γ подсистемы (6.2.19) и (6.2.20) содержат одинаковое число $\left(n+\dfrac{\gamma}{2}\right)$ уравнений. При нечётном γ подсистема (6.2.19) содержит $n+\left\{\dfrac{\gamma}{2}\right\}$, а подсистема (6.2.20) – $n+\left[\dfrac{\gamma}{2}\right]$ уравнений. Это означает, что число уравнений первой подсистемы на одно уравнение превышает число уравнений второй. Однако, по прежнему $n+\left\{\dfrac{\gamma}{2}\right\}+n+\left[\dfrac{\gamma}{2}\right]+1=2n+\gamma+1$.

Пусть γ – чётное число.

В этом случае система (6.2.19), (6.2.20) эквивалентна системе (6.2.13). Умножим каждое из уравнений (6.2.13) на $d(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,p}\right)$ и представим результат как

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1+\gamma}(\lambda+j\omega_k)^{\alpha}æ_{\alpha}=0 \quad k=\overline{1,p}, \tag{6.Д.34}$$

где, в соответствии с (6.Д.26),

$$æ_{\alpha}=\sum_{i=0}^{\gamma}\left(l_i d^{u}_{\alpha-i}-b_i\delta_{\alpha-i}\right) \quad (\alpha=2n-1+\gamma). \tag{6.Д.35}$$

Полностью повторяя доказательство теоремы 6.1.1, заключаем, что

$$æ_{\alpha}=0 \quad \alpha=\overline{0,2n-1+\gamma}. \tag{6.Д.36}$$

Эта система имеет в соответствии с утверждением 6.2.1 единственное решение (6.2.10) и таким образом для чётного γ утверждение 6.2.2 доказано.

Пусть теперь γ – нечётное число.

Дополним систему (6.2.20) уравнением

$$\sum_{i=0}^{\gamma}\left[r^{\lambda}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)+i^{\lambda}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right]l_i-\sum_{i=0}^{2n-1}\left[r^{\lambda}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)+i^{\lambda}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right]\delta_i=0$$
$$\left(k=n+\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}=n+\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1\right). \tag{6.Д.37}$$

Теперь система (6.2.19), (6.2.20), (6.Д.37) эквивалентна системе (6.2.13). Умножая каждое из уравнений (6.2.13) на на $d(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,p}\right)$ приходим к равенствам (6.Д.34), которые представим при $\lambda=0$ в виде (6.Д.4)

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^{*}}\omega_k^{2i}\quad(-1)^i æ_{2i}\quad=0\quad k=\overline{1,n+\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^{*}}, \tag{6.Д.38}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left[\frac{\gamma}{2}\right]^{*}}\omega_k^{2i+1}(-1)^i æ_{2i+1}=0\quad k=\overline{1,n+\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^{*}}. \tag{6.Д.39}$$

Опустим в подсистеме (6.Д.39) уравнение при $k = n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*$. Тогда она примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left[\frac{\gamma}{2}\right]^*} \omega_k^{2i+1}(-1)^i æ_{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n + \left[\frac{\gamma}{2}\right]^*}. \tag{6.Д.40}$$

Заметим, что каждое из уравнений подсистемы (6.Д.38) лишь на число $d(j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,p}\right)$ отличается от соответствующих уравнений (6.2.19), а уравнения (6.2.20) на те же числа отличаются от (6.Д.40). Уравнения (6.Д.38), (6.Д.40) имеют в матричной форме вид, аналогичный (6.Д.6)

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_1^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]}\omega_1^{2n-1+\gamma} \\
1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]}\omega_2^{2n-1+\gamma} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & -\omega_p^2 & 0 & \omega_p^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]}\omega_p^{2n-1+\gamma} \\
\hline
0 & \omega_1 & 0 & -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]}\omega_1^{2n-2+\gamma} & 0 \\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_2^3 & 0 & \omega_2^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]}\omega_2^{2n-2+\gamma} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \omega_{p-1} & 0 & -\omega_{p-1}^3 & 0 & \omega_{p-1}^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]}\omega_{p-1}^{2n-2+\gamma} & 0
\end{array}\right) \times \left[\begin{array}{c} æ_0 \\ æ_1 \\ \vdots \\ æ_{2n-1+\gamma} \\ \hline æ_1 \\ æ_2 \\ \vdots \\ æ_{2n-2+\gamma} \end{array}\right] = \mathbf{0}. \tag{6.Д.41}$$

Вычислим определитель матрицы M_γ коэффициентов этой системы. Переставляя столбцы этой матрицы

$$\det M_\gamma = \det \begin{pmatrix} W_1^\gamma & 0 \\ 0 & W_2^\gamma \end{pmatrix} = \det W_1^\gamma \cdot \det W_2^\gamma \neq 0,$$

где W_1^γ – матрица размеров $\frac{2n-1+\gamma}{2} \times \frac{2n-1+\gamma}{2}$, а W_2^γ имеет размеры $\left\{\frac{2n-2+\gamma}{2}\right\}^* \times$ $\times \left\{\frac{2n-2+\gamma}{2}\right\}^*$. Эти матрицы аналогичны 6.Д.8. Их определители являются определителями Вандермонда.

При $\lambda \neq 0$, повторяя изложенное в п. 6.Д.1 заключаем, что $\det M_\gamma^\lambda \neq 0$ и, таким образом, система (6.Д.38), (6.Д.40) имеет единственное решение (6.Д.36). Система (6.Д.36) имеет единственное решение (6.2.10). Это следует из утверждения 6.2.1.

6.Д.4. Доказательство утверждения 6.3.1

Объект (6.3.1) асимптотически устойчив, поэтому

$$\det(Ej\omega - A) = d(j\omega) \neq 0. \tag{6.Д.42}$$

Используем это неравенство и представим

$$\boldsymbol{i}_x(\omega) = \operatorname{Jm} \boldsymbol{\beta}(j\omega)\frac{d(-j\omega)}{d(-j\omega)} = \operatorname{Jm} \frac{\widetilde{(Ej\omega - A)}\boldsymbol{b}d(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2}. \tag{6.Д.43}$$

Рассмотрим подробнее произведение $(E\widetilde{s-A})\boldsymbol{b}d(s)$, в котором $E\widetilde{s-A}$ – присоединённая матрица. Эту матрицу представим как

$$(E\widetilde{s-A}) = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma s^\gamma, \tag{6.Д.44}$$

где матрица

$$A_\gamma = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad \gamma = \overline{0, n-2}, \quad A_{n-1} = E. \tag{6.Д.45}$$

В справедливости этих соотношений нетрудно убедиться, если заменить в (6.Д.44) $E\widetilde{s-A} = (Es-A)^{-1}d(s)$, а затем умножить результат на $Es-A$ и сравнить матрицы при одинаковых степенях s.

Таким образом, произведение

$$\begin{aligned}(E\widetilde{s-A})\boldsymbol{b}d(-s) &= \left[\sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma s^\gamma\right]\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i s^i\right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-1}\left[\sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma \boldsymbol{b} d_{\alpha-\gamma}(-1)^{\alpha-\gamma}\right] s^\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{2n-1}\psi_\alpha s^\alpha = \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}s^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}s^{2i+1}.\end{aligned} \tag{6.Д.46}$$

Здесь

$$\psi_\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma \boldsymbol{b} d_{\alpha-\gamma}(-1)^{\alpha-\gamma} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}, \tag{6.Д.47}$$

при этом $d_{\alpha-\gamma} = 0$ при $\alpha-\gamma < 0$ и $\alpha-\gamma > n$. (6.Д.48)

Возвращаясь к (6.Д.43), получим

$$\boldsymbol{i}_x(\omega) = \frac{1}{|d(j\omega)|^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega^{2i+1}(-1)^i. \tag{6.Д.49}$$

Сформируем матрицу

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{i}_x(\omega_n)\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_1^{2i+1}(-1)^i & \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_2^{2i+1}(-1)^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_n^{2i+1}(-1)^i\end{bmatrix}\cdot \\ &\cdot\ \mathrm{diag}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{|d(j\omega_1)|^2} & \dfrac{1}{|d(j\omega_2)|^2} & \cdots & \dfrac{1}{|d(j\omega_n)|^2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Представим

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_1^{2i+1}(-1)^i & \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_2^{2i+1}(-1)^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i+1}\omega_n^{2i+1}(-1)^i\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-1}\end{bmatrix}\check{S},\end{aligned} \tag{6.Д.50}$$

где

$$\check{S} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & \cdots & -\omega_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-1} & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-1} & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-1}\end{pmatrix}. \tag{6.Д.51}$$

Утверждение будет доказано, если

$$\det M = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-1} \end{bmatrix} \det \check{S} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|d(j\omega_i)|^2} \neq 0. \tag{6.Д.52}$$

В этом выражении

$$\det \check{S} \neq 0, \tag{6.Д.53}$$

как определитель Вандермонда, и поэтому неравенство (6.Д.52) выполняется если

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-1} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{6.Д.54}$$

На основе (6.Д.47) запишем

$$\psi_{2\mu+1} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma \boldsymbol{b} d_{2\mu+1-\gamma} (-1)^{2\mu+1-\gamma} = \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot$$
$$\cdot \Big[(-1)^{2\mu+1-(n-1)} d_{2\mu+1-(n-1)} \Big| (-1)^{2\mu+1-(n-2)} d_{2\mu+1-(n-2)} \Big| \cdots \Big| (-1)^{2\mu} d_{2\mu} \Big| (-1)^{2\mu+1} d_{2\mu+1} \Big]'$$
$$\mu = \overline{0, n-1}. \tag{6.Д.55}$$

Тогда матрица

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_3 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot \Gamma_1, \tag{6.Д.56}$$

где

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{(-1)^{-n+2} d_{-n+2}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+4} d_{-n+4}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{n-2} d_{n-2}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^{n} d_{n}}^{\mu=n-1} \\ (-1)^{-n+3} d_{-n+3} & (-1)^{-n+5} d_{-n+5} & \cdots & (-1)^{n-1} d_{n-1} & (-1)^{n+1} d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4} d_{2n-4} & (-1)^{2n-2} d_{2n-2} \\ -d_1 & -d_3 & \cdots & (-1)^{2n-3} d_{2n-3} & (-1)^{2n-1} d_{2n-1} \end{pmatrix}. \tag{6.Д.57}$$

Найдём условия, при которых

$$\det \Gamma_1 \neq 0. \tag{6.Д.58}$$

Для этого представим

$$\det \Gamma_1 = (-1)^n d_n \cdot \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+3} d_{-n+3} & (-1)^{-n+5} d_{-n+5} & \cdots & (-1)^{n-1} d_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4} d_{2n-4} \\ -d_1 & -d_3 & \cdots & (-1)^{2n-3} d_{2n-3} \end{pmatrix} =$$
$$= (-1)^n d_n \cdot \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-n+4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.Д.59}$$

$$\cdot \det \begin{pmatrix} d_{-n+3} & d_{-n+5} & \cdots & d_{\ n-1} \\ d_{-n+4} & d_{-n+6} & \cdots & d_{\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} \\ d_1 & d_3 & \cdots & d_{2n-3} \end{pmatrix}.$$

Переставим столбцы в последнем определителе и получим $n-1$ определитель Гурвица. Действительно, принимая во внимание (3.1.14) и учитывая, что $d_i = 0$ при $i > n$ и $i < 0$ получим

$$\det \begin{pmatrix} d_{-n+3} & d_{-n+5} & \cdots & d_{n-1} \\ d_{-n+4} & d_{-n+6} & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} \\ d_1 & d_3 & \cdots & d_{2n-3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} d_{n-1} & \cdots & d_{-n+5} & d_{-n+3} \\ d_n & \cdots & d_{-n+6} & d_{-n+4} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{2n-4} & \cdots & d_2 & d_0 \\ d_{2n-3} & \cdots & d_3 & d_1 \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}.$$

Таким образом, если

$$\Delta_{n-1} \neq 0, \tag{6.Д.60}$$

то Γ_1 невырожденная матрица. Объект (6.3.1) асимптотически устойчив, поэтому $\Delta_{n-1} > 0$ и, следовательно, условие (6.Д.58) выполняется.

Покажем теперь, что для полностью управляемого объекта

$$\det \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \neq 0.$$

На основе (6.Д.45) запишем

$$A_\gamma \boldsymbol{b} = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i \boldsymbol{b} d_{\gamma+i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-\gamma-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{\gamma+1} & d_{\gamma+2} & \cdots & d_n \end{bmatrix}' \quad \gamma = \overline{0, n-1},$$

и тогда

$$\begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot \Gamma_3,$$

где

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & \cdots & d_2 & d_1 \\ 0 & d_n & \cdots & d_3 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}. \tag{6.Д.61}$$

Отсюда следует, что

$$\det \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot d_n^n \neq 0,$$

как условие полной управляемости объекта.

Таким образом, неравенство (6.Д.54) доказано и

$$\det M \neq 0.$$

6.Д.5. Доказательство утверждения 6.3.2

Передаточный вектор объекта (6.3.34)

$$\check{\check{\boldsymbol{\beta}}}(s) = \left(Es - \check{\check{A}}\right)^{-1} \check{\boldsymbol{b}}. \tag{6.Д.62}$$

Учитывая структуру матрицы $\check{\check{A}}$, найдём

$$\left(Es - \check{\check{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2T_4^{-1} \\ 0 & T_4^{-1} \end{pmatrix}, \tag{6.Д.63}$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & s + d_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6.Д.64}$$

Вектор $\check{\check{\boldsymbol{\beta}}}(s)$ – это последний столбец матриц $-T_1^{-1}T_2T_4^{-1}$ и T_4^{-1}. Последний столбец матрицы T_4^{-1}

$$\left[T_4^{-1}\right]_{[n]} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{n-1} \end{bmatrix}' \frac{1}{\mu(s)}. \tag{6.Д.65}$$

Пусть

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(1)}(s) & t_{12}^{(1)}(s) & \cdots & t_{1n}^{(1)}(s) \\ t_{21}^{(1)}(s) & t_{22}^{(1)}(s) & \cdots & t_{2n}^{(1)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^{(1)}(s) & t_{n2}^{(1)}(s) & \cdots & t_{nn}^{(1)}(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T_1^{-1}T_2 = \begin{pmatrix} -t_{1n}^{(1)}(s)b_0 & -t_{1n}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{1n}^{(1)}(s)b_{n-1} \\ -t_{2n}^{(1)}(s)b_0 & -t_{2n}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{2n}^{(1)}(s)b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_{nn}^{(1)}(s)b_0 & -t_{nn}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{nn}^{(1)}(s)b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Умножим это выражение на $\left[T_4^{-1}\right]_{[n]}$ и получим

$$T_1^{-1}T_2\left[T_4^{-1}\right]_{[n]} = \begin{pmatrix} -t_{1n}^{(1)}(s)\left(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}\right) \\ -t_{2n}^{(1)}(s)\left(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}\right) \\ \vdots \\ -t_{nn}^{(1)}(s)\left(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}\right) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\mu(s)} = -\left[T_1^{-1}\right]_{[n]} \cdot \frac{b(s)}{\mu(s)}, \tag{6.Д.66}$$

где $\left[T_1^{-1}\right]_{[n]}$ – последний столбец матрицы T_1^{-1}.

Нетрудно видеть, что

$$\left[T_1^{-1}\right]_{[n]} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & s & s^2 & \cdots & s^{n-1} \end{array}\right]' \frac{1}{d(s)}.$$

Подставим это выражение в (6.Д.66). Тогда получим, с учётом (6.Д.65)

$$\breve{\breve{\boldsymbol{\beta}}}(s) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{1}{\mu(s)} & -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{s}{\mu(s)} & \cdots & -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{s^{n-1}}{\mu(s)} & \dfrac{1}{\mu(s)} & \dfrac{s}{\mu(s)} & \cdots & \dfrac{s^{n-1}}{\mu(s)} \end{array}\right]'. \tag{6.Д.67}$$

Положим в этом выражении $s = j\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ и получим (6.3.36).

Заключение к главе 6

Подведём итоги этой главы.

1. Доказана теорема 6.1.1 о существовании и единственности частотного модального структурного управления.

2. Описан (п. 6.1.5 и п. 6.1.6) метод частотных параметров, разрешающий задачу синтеза систем регулирования и слежения по заданной точности. При этом рассмотрены объекты второго вида, устойчивые по управлению.

3. Доказан критерий устойчивости (критерий 6.2.1) систем, объекты которых заданы ω-индексами, а регулятор – известным дифференциальным уравнением.

4. Аналогичный критерий (критерий 6.2.2) получен для систем с известными частотными параметрами разомкнутой системы.

5. Получены условия частотной идентифицируемости (утверждение 6.3.1), при которых коэффициенты дифференциального уравнения объекта в пространстве состояний однозначно выражаются через его частотные параметры.

6. Построены алгоритмы частотной идентификации объектов первого и второго видов.

7. Показано (п. 6.3.5), что идентификационное управление требует значительно большего объёма вычислений по сравнению с прямым методом частотных параметров.

8. (П) Метод частотных параметров развит для дискретных объектов второго вида, устойчивых по управлению. Это, в частности, даёт возможность синтеза регуляторов для непрерывных объектов с запаздыванием в управлении.

7. Частотное оптимальное управление

Частотное оптимальное управление – это управление, построенное по частотным параметрам объекта и обеспечивающее минимум заданного функционала. Метод синтеза такого управления служит базой метода частотных параметров, разрешающего задачу регулирования и слежения по заданной точности.

Отличие от предыдущей главы состоит в том, что здесь рассматриваются системы с объектами первого вида.

Цель этой главы:

- разработка процедуры АКОР по частотным параметрам,
- построение на этой основе метода частотных параметров для систем с объектами первого вида,
- критерии устойчивости систем с объектами первого и второго видов.

7.1. АКОР по частотным параметрам

7.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \tag{7.1.1}$$

все переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ которого измеряются, а матрица A и вектор $\boldsymbol{b}$ – неизвестны. Если объект (7.1.1) неустойчив, то пусть известно стабилизирующее управление

$$u = \boldsymbol{c}^{(0)\prime}\boldsymbol{x}. \tag{7.1.2}$$

Задача 7.1.1. (Задача АКОР по частотным параметрам). Пусть заданы вектора $\boldsymbol{r}_x(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ (а для неустойчивых объектов вектора $\boldsymbol{r}_x^c(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x^c(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$) частотных параметров объекта и требуется найти вектор $\boldsymbol{c}'$ регулятора

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \tag{7.1.3}$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (7.1.1), (7.1.3), возбуждённой произвольными начальными отклонениями минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + u^2\right)\, dt, \tag{7.1.4}$$

в котором Q – заданная положительно-определённая матрица. ■

Эта задача отличается от задачи 4.1.1 лишь объёмом сведений о параметрах объекта и называется *задачей об аналитическом конструировании оптимальных регуляторов по частотным параметрам объекта.*

К решению этой задачи возможны два подхода: идентификационный и прямой. Первый подход состоит в вычислении (идентификации) матрицы A и вектора $\boldsymbol{b}$ по формулам (6.3.6), (6.3.7) и использовании процедуры 4.1.1 (процедуры АКОР).

Прямой метод основан на тождестве (4.2.9), которое выражает условие оптимальности в частотной форме. Это позволяет найти вектор $\boldsymbol{c}'$, разрешающий задачу 7.1.1, непосредственно (прямо) по ω-индексам объекта, минуя идентификацию, что существенно сократит объём вычислений по сравнению с идентификационным методом.

Наряду с задачей 7.1.1 будем рассматривать *АКОР по критерию обобщнной работы и частотным параметрам объекта.*

7.1.2. Критерий обобщённой работы

АКОР по критерию обобщённой работы занимает важное место в решении задачи 7.1.1. Это связано с тем, что для решения последней используется метод Ньютона-Рафсона, каждый шаг которого – это АКОР по критерию обобщённой работы.

Итак, для асимптотически устойчивого объекта (7.1.1), заданного ω-индексами будем искать регулятор, оптимальный по критерию обобщённой работы.

Применим вначале идентификационный метод. Найдем по формулам (6.3.6), (6.3.7) параметры объекта и вычислим на основе (4.1.39) искомый вектор

$$\boldsymbol{c} = -P^{(1)}\boldsymbol{b}, \tag{7.1.5}$$

где положительно-определённая матрица $P^{(1)}$ является решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} + Q = 0. \tag{7.1.6}$$

Переходя к прямому методу, используем тождество (4.2.10)

$$w_{раз}(-j\omega) + w_{раз}(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{7.1.7}$$

выражающее условие оптимальности по критерию обобщённой работы в частотной форме. Здесь

$$w_{раз}(j\omega) = -\boldsymbol{c}'(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)$$

– передаточная функция оптимальной системы (7.1.1), (7.1.2), а $h_i(j\omega)$ – компонента вектора

$$\boldsymbol{h}(j\omega) = H(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b} = H\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad H'H = Q. \tag{7.1.8}$$

Запишем тождество (7.1.7) в форме

$$-\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega) - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \tag{7.1.9}$$

или

$$-2\boldsymbol{c}'\boldsymbol{r}_x(\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \boldsymbol{r}_x'(\omega)Q\boldsymbol{r}_x(\omega) + \boldsymbol{i}_x'(\omega)Q\boldsymbol{i}_x(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \quad (7.1.10)$$

Зафиксируем ω в этом тождестве и получим систему уравнений

$$-2\boldsymbol{c}'\boldsymbol{r}_x(\omega_k) = \boldsymbol{r}_x'(\omega_k)Q\boldsymbol{r}_x(\omega_k) + \boldsymbol{i}_x'(\omega_k)Q\boldsymbol{i}_x(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \quad (7.1.11)$$

В матричной форме система принимает вид

$$M_r\boldsymbol{c}' = N_r, \quad (7.1.12)$$

где

$$M_r = -\left[\ \boldsymbol{r}_x(\omega_1) \quad \boldsymbol{r}_x(\omega_2) \quad \cdots \quad \boldsymbol{r}_x(\omega_n)\ \right]', \quad (7.1.13)$$

$$N_r = \frac{1}{2}\left[\ \boldsymbol{r}_x'(\omega_1)Q\boldsymbol{r}_x(\omega_1)+\boldsymbol{i}_x'(\omega_1)Q\boldsymbol{i}_x(\omega_1) \ \cdots \ \boldsymbol{r}_x'(\omega_n)Q\boldsymbol{r}_x(\omega_n)+\boldsymbol{i}_x'(\omega_n)Q\boldsymbol{i}_x(\omega_n)\ \right]'. \quad (7.1.14)$$

Теорема 7.1.1. Если объект (7.1.1) асимптотически устойчив и полностью управляем, то решение системы (7.1.12) существует и единственно. При этом вектор $\boldsymbol{c}$ не зависит от выбора испытательных частот и совпадает с (7.1.5). ■

Доказательство теоремы приведено в 7.Д.1.

Пример 7.1.1. Пусть имеется объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0x_1 - d_1x_2 + b_2u, \quad (7.1.15)$$

о параметрах которого известно лишь, что

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad b_2 \ne 0. \quad (7.1.16)$$

Эти неравенства означают, что объект полностью управляем и асимптотически устойчив.

Пусть известны частотные параметры объекта

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_x(\omega_1) &= \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 3.1 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, & \boldsymbol{i}_x(\omega_1) &= \begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{r}_x(\omega_2) &= \begin{bmatrix} -0.55 \cdot 10^{-3} \\ 2.1 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) &= \begin{bmatrix} -0.7 \cdot 10^{-3} \\ -1.67 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

с $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 30$.

Требуется найти регулятор

$$u = c_1x_1 + c_2x_2, \quad (7.1.18)$$

оптимальный по критерию обобщённой работы при

$$q_{11} = 8 \cdot 10^6, \quad q_{22} = 3 \cdot 10^4. \quad (7.1.19)$$

Построим уравнение (7.1.12), решающее эту задачу.

Сформируем вектор

$$N_r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}'_x(\omega_1)Q\boldsymbol{r}_x(\omega_1) + \boldsymbol{i}'_x(\omega_1)Q\boldsymbol{i}_x(\omega_1) \\ \boldsymbol{r}'_x(\omega_2)Q\boldsymbol{r}_x(\omega_2) + \boldsymbol{i}'_x(\omega_2)Q\boldsymbol{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10^{-5}q_{11} + 10^{-3}q_{22} \\ 0.8\cdot 10^{-6}q_{11} + 6.8\cdot 10^{-4}q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 13.4 \end{bmatrix}, \tag{7.1.20}$$

а матрицу

$$M_r = -\begin{pmatrix} 10^{-3} & 3.1\cdot 10^{-2} \\ 0.55\cdot 10^{-3} & 2.1\cdot 10^{-2} \end{pmatrix}. \tag{7.1.21}$$

Уравнению

$$\begin{pmatrix} 10^{-3} & 3.1\cdot 10^{-2} \\ -0.55\cdot 10^{-3} & 2.1\cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 13.4 \end{bmatrix} \tag{7.1.22}$$

удовлетворяют

$$c_1 = -2\cdot 10^4, \quad c_2 = -11.5\cdot 10^2. \tag{7.1.23}$$

Для проверки этого результата применим идентификационный метод. Для определения параметров объекта (7.1.15) используем формулы (6.3.6) и (6.3.7)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \omega_1\boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \omega_2\boldsymbol{r}_x(\omega_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_x(\omega_1) & \boldsymbol{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -10^{-2} & -1.65\cdot 10^{-2} \\ 3.1\cdot 10^{-1} & 6.2\cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\cdot 10^{-3} & -0.7\cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} & -1.67\cdot 10^{-2} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -30 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= -A\boldsymbol{r}_x(\omega_1) - \omega_1\boldsymbol{i}_x(\omega_1) = \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -30 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 3.1\cdot 10^{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3\cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}\cdot 10 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

Уравнение Ляпунова имеет в рассматриваемом случае вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \tag{7.1.26}$$

или в развёрнутой форме

$$-2p_{12}d_0 = -q_{11}, \quad p_{11} - p_{12}d_1 - p_{22}d_0 = 0, \quad 2(p_{12} - p_{22}d_1) = -q_{22}.$$

Используем (7.1.5) и получим

$$c_1 = -p_{12} = -\frac{q_{11}}{2d_0} = -2\cdot 10^4, \quad c_2 = -p_{22} = -\frac{q_{22} + 2p_{12}}{2d_1} = -11.5\cdot 10^2. \tag{7.1.27}$$

■

7.1.3. Процедура АКОР

Для решения задачи 7.1.1 используем метод Ньютона-Рафсона, описанный в теореме 4.1.2. В соответствии с этим методом на каждом шаге (α) итерации решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)\prime}P^{(\alpha+1)} = -Q - \boldsymbol{c}^{(\alpha)}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{7.1.28}$$

в котором

$$A^{(\alpha)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}, \quad \boldsymbol{c}^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}\boldsymbol{b} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{7.1.29}$$

и затем находится

$$\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)} = -P^{(\alpha+1)}\boldsymbol{b} \quad \alpha = 0, 1, \dots. \tag{7.1.30}$$

Другими словами, на каждом шаге этого процесса решается задача АКОР по критерию обобщённой работы для ««объекта»»

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(\alpha)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{7.1.31}$$

и находится оптимальное управление

$$u = \boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{x}. \tag{7.1.32}$$

Условие оптимальности системы (7.1.31), (7.1.32) в частотной форме имеет в соответствии с (7.1.9) вид

$$-\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(-j\omega) - \boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)\prime}(-j\omega)\left[Q + \boldsymbol{c}^{(\alpha)}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\right]\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{7.1.33}$$

где

$$\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) = \left[Ej\omega - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\right]^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{7.1.34}$$

Используя равенство (5.1.42) представим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) &= \left[Ej\omega - A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\right]^{-1}\boldsymbol{b} = \\ &= (Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b}\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}(Ej\omega - A)^{-1}\boldsymbol{b}\right]^{-1} = \boldsymbol{\beta}(j\omega)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega)\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{7.1.35}$$

Подставим это выражение в (7.1.34), положим $\omega = \omega_k$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ и получим для каждого фиксированного λ систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора $\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)}$

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)\right]^{-1} - \boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\right]^{-1} = \\ &= \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)\right]^{-1}\left\{Q + \boldsymbol{c}^{(\alpha)}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\right\}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\right]^{-1} \\ &\qquad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots.\end{aligned} \tag{7.1.36}$$

Эту рекуррентную систему можно записать, после её умножения на

$$\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)\right]\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\right] \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots.$$

в более компактной форме

$$-2\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\left[1-\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)\right]\right\}=\boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)\left[Q+\boldsymbol{c}^{(\alpha)}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}\right]\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)$$
$$k=\overline{1,n}\quad \alpha=0,1,\dots\,. \tag{7.1.37}$$

Если объект (7.1.1) – асимптотически устойчив, то в системе (7.1.37) вектор $\boldsymbol{c}^{(0)}=\boldsymbol{0}$. Для неустойчивого объекта в ней следует заменить $\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)$ на стабилизированные передаточные вектора $\boldsymbol{\beta}^c(j\omega_k)=\boldsymbol{r}_x^c(\omega_k)+j\boldsymbol{i}_x^c(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

7.1.4. Существование и единственность решения

В связи с этой системой возникают вопросы: существует и единственно ли её решение при каждом фиксированном λ, сходится ли последовательность векторов $\boldsymbol{c}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\dots)$ и если сходится, то соответствует ли получаемый вектор оптимальному управлению. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 7.1.2. Если объект (7.1.1), заданный частотными параметрами полностью управляем и асимптотически устойчив (либо, если он неустойчив, то известен стабилизирующий регулятор

$$u=\boldsymbol{c}^{(0)\prime}\boldsymbol{x}, \tag{7.1.38}$$

обеспечивающий его асимптотическую устойчивость), тогда существует единственная последовательность векторов $\boldsymbol{c}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\dots)$, получаемых в результате решения рекуррентной системы (7.1.37).

Эта последовательность сходится к вектору

$$\boldsymbol{c}=\lim_{\alpha\to\infty}\boldsymbol{c}^{(\alpha)}, \tag{7.1.39}$$

разрешающему задачу 7.1.1. ■

Доказательство теоремы, приведённое в приложении 7.Д.2, сводится к доказательству существования для каждого вектора $\boldsymbol{c}^{(\alpha)}$, матрицы $P^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\dots)$, являющейся решением уравнений Ляпунова (4.1.8). Из сходимости матриц $P^{(\alpha)}$, утверждаемой теоремой 4.1.2, следует (7.1.39).

Если сравнивать идентификационный и прямой методы решения задачи, то нетрудно заметить сокращение объёма вычислений при использовании прямого метода, так как на каждом шаге итерационного процесса вместо решения системы из $\dfrac{n(n+1)}{2}$ уравнений (4.1.8) решается система из n уравнений (7.1.37). Кроме того, в прямом методе отсутствует процедура идентификации, для осуществления которой нужно решить ещё n^2+n уравнений.

Пример 7.1.2. Приведём прямой метод аналитического конструирования оптимального регулятора (7.1.18) для объекта (7.1.15), заданного частотными парамет-

рами (7.1.17)

$$\begin{gathered}-2\,\mathrm{Re}\left\{\left[c_1^{(\alpha+1)}\beta_1(j\omega_k)+c_2^{(\alpha+1)}\beta_2(j\omega_k)\right]\left[1-c_1^{(\alpha)}\beta_1(-j\omega_k)-c_2^{(\alpha)}\beta_2(-j\omega_k)\right]\right\}= \\ =\beta_1(-j\omega_k)\left[q_{11}+c_1^{(\alpha)2}\right]\beta_1(j\omega_k)+\beta_2(-j\omega_k)\left[q_{22}+c_2^{(\alpha)2}\right]\beta_2(j\omega_k) \\ k=1,2 \quad \alpha=0,1,\ldots .\end{gathered} \tag{7.1.40}$$

В правой части этой системы отсутствует сумма

$$\beta_1(-j\omega_k)c_1^{(\alpha)}c_2^{(\alpha)}\beta_2(j\omega_k)+\beta_2(-j\omega_k)c_1^{(\alpha)}c_2^{(\alpha)}\beta_1(j\omega_k) \quad k=1,2 \quad \alpha=0,1,\ldots .$$

которая для объекта (7.1.15) равна нулю. Это связано с тем, что вектор $\boldsymbol{\beta}(j\omega)$ для него имеет структуру

$$\boldsymbol{\beta}(j\omega)=\begin{bmatrix}\beta_1(j\omega)\\ \beta_2(j\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\\ \omega a(\omega)e^{j\left[\varphi(\omega)+\frac{\pi}{2}\right]}\end{bmatrix}, \tag{7.1.41}$$

в которой $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика этого объекта.

Объект (7.1.15) асимптотически устойчив, поэтому принимаем параметры стабилизирующего управления (7.1.2)

$$c_1^{(0)}=c_2^{(0)}=0. \tag{7.1.42}$$

При $\alpha=0$ получим уравнения для первого шага итерационного процесса

$$\begin{gathered}-2\,\mathrm{Re}\left[c_1^{(1)}\beta_1(j\omega_k)+c_2^{(1)}\beta_2(j\omega_k)\right]= \\ =\beta_1(-j\omega_k)q_{11}\beta_1(j\omega_k)+\beta_2(-j\omega_k)q_{22}\beta_2(j\omega_k) \quad k=1,2.\end{gathered} \tag{7.1.43}$$

Это уравнение совпадает с (7.1.22) и поэтому

$$c_1^{(1)}=-2\cdot 10^4, \quad c_2^{(1)}=-11.5\cdot 10^2. \tag{7.1.44}$$

Подставим эти значения в (7.1.40) и получим при $\alpha=1$

$$c_1^{(2)}=-10^4, \quad c_2^{(2)}=-5.58\cdot 10^2. \tag{7.1.45}$$

Подставим эти значения в (7.1.40) и находим при $\alpha=2$

$$c_1^{(3)}=-0.5\cdot 10^4, \quad c_2^{(3)}=-2.8\cdot 10^2. \tag{7.1.46}$$

Искомые значения параметров регулятора (7.1.18)

$$c_1=-2.63\cdot 10^3, \quad c_2=-1.6\cdot 10^2.$$

В этом можно убедиться, если подставить эти числа в (7.1.40), полагая при этом

$$c_1^{(\alpha+1)}=c_1^{(\alpha)}=c_1, \quad c_2^{(\alpha+1)}=c_2^{(\alpha)}=c_2. \tag{7.1.47}$$

■

7.1.5. Системы с эталонной моделью*

Пусть наряду с объектом (7.1.1)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{7.1.48}$$

имеется эталонная модель

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{м} = A_{м}\boldsymbol{x}_{м}, \quad z_{м} = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}_{м}, \tag{7.1.49}$$

заданная векторами $\boldsymbol{r}_x^{м}(\omega_k)$ и $\boldsymbol{r}_x^{м}(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ частотных параметров. Эти частотные параметры получены путём экспериментов с эталонной моделью, возбуждённой n-мерным вектором $\boldsymbol{b}_{м}u_{исп}$. В этом случае эталонная модель описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{м} = A_{м}\boldsymbol{x}_{м} + \boldsymbol{b}_{м}u_{исп}. \tag{7.1.50}$$

Требуется найти управление

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{x}_{м}, \tag{7.1.51}$$

такое, чтобы на движениях системы (7.1.48), (7.1.51) минимизировался функционал (4.1.74)

$$J = \int\limits_0^\infty \left[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{м})'Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{м}) + u^2\right] dt, \tag{7.1.52}$$

где $Q = q\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'$.

Эта задача является развитием задачи 4.1.2 на случай, когда объект и эталонная модель заданы частотными параметрами.

Для её решения запишем (4.2.36), (4.2.41) при $s = j\omega$

$$[1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = 1 + q|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)|^2, \tag{7.1.53}$$

$$\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega) + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}_{м}(-j\omega) = q\boldsymbol{\beta}'_{м}(-j\omega)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega). \tag{7.1.54}$$

Здесь, в отличие от (4.2.40), произвольный вектор $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}_{м}$ и поэтому

$$\boldsymbol{\beta}_{м}(j\omega) = (Ej\omega - A_{м})^{-1}\boldsymbol{b}_{м}. \tag{7.1.55}$$

Зафиксируем частоту ω и получим

$$[1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)][1 - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)] = 1 + q|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)|^2 \quad k = \overline{1,n}, \tag{7.1.56}$$

$$\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}_{м}(-j\omega_k) = q\boldsymbol{\beta}'_{м}(-j\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.1.57}$$

В разделе 4.1.5 показано, что при известных параметрах модели и объекта вектор $\boldsymbol{c}'$ в управлении (7.1.52) не зависит от параметров модели. Это свойство сохраняется и для объектов, заданных ω-индексами и поэтому систему уравнений (7.1.56) можно

решать независимо от системы (7.1.57). Уравнения (7.1.56) решаются с помощью рекуррентной системы (7.1.37) и доставляют n-мерный вектор $\boldsymbol{c}$. Вектор $\boldsymbol{c}_м$ и вектор $\boldsymbol{\delta}$ (последний не используется при управлении) являются решением системы $2n$ линейных алгебраических уравнений. Эта система следует из (7.1.57), ели учесть, что вектора $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{c}_м$ – вещественные, и имеет вид

$$-\boldsymbol{c}'_м \boldsymbol{r}^м_x(\omega_k) - \boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{r}^з(\omega_k) = -q\left[\boldsymbol{r}^{м\prime}_x(\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{r}^з(\omega_k) + \boldsymbol{i}^{м\prime}_x(\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{i}^з(\omega_k)\right] \quad k = \overline{1,n}, \quad (7.1.58)$$

$$\boldsymbol{c}'_м \boldsymbol{i}^м_x(\omega_k) - \boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{i}^з(\omega_k) = -q\left[\boldsymbol{r}^{м\prime}_x(\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{r}^з(\omega_k) - \boldsymbol{i}^{м\prime}_x(\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{i}^з(\omega_k)\right] \quad k = \overline{1,n}. \quad (7.1.59)$$

ω-индексы $\boldsymbol{r}^з(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}^з(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ замкнутой системы вычисляются по формуле (4.2.43) с использованием известных частотных параметров объекта.

Утверждение 7.1.1. Если пара $(A, \boldsymbol{b})$ и $(A_м, \boldsymbol{b}_м)$ полностью управляема, то решение $\boldsymbol{c}'_м$ системы (7.1.58), (7.1.59) существует, единственно и совпадает с решением задачи 4.1.2. ■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.3.

7.2. Аналитический синтез регуляторов

7.2.1. Синтез по критерию точности

Пусть к объекту (7.1.1) приложено внешнее возмущение, а процессы в нём оцениваются по регулируемой переменной $z(t)$. Тогда объект описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(u + f), \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \quad (7.2.1)$$

где $\boldsymbol{l}$ – известный n-мерный вектор чисел, а ступенчатое возмущение $|f(t)| \le f^*$.

Задача 7.2.1. Для объекта (7.2.1), заданного векторами $\boldsymbol{r}_x(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ его ω-индексов, найти регулятор

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}, \quad (7.2.2)$$

такой, чтобы система (7.2.1), (7.2.2) удовлетворяла требованию к точности

$$|z_{cm}| \le z^*, \quad (7.2.3)$$

(где z^* – заданное число) и была грубой (обладала запасами устойчивости $\varphi_з \ge 30°$, $L \ge 2$). ■

Эта задача является развитием задачи 6.1.2 на объекты первого вида.

Для её решения применим процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Матрица Q в уравнениях (7.1.12) этой процедуры имеет вид

$$Q = q\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}', \quad (7.2.4)$$

где число q находится из (4.3.12)

$$q \ge \frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)|\bar{f} - z^*}{0.5|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)|^2 z^*}. \quad (7.2.5)$$

В это соотношение входит произведение $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)$ для вычисления которого необходимо включить в ω-тест испытательную частоту $\omega = 0$.

При гармоническом внешнем воздействии $f(t) = f_{гарм} \sin \omega^f t$ амплитуда $(z_{гарм})$ вынужденных колебаний системы (7.2.1), (7.2.2) определяется выражением (4.3.38)

$$z_{гарм} = \frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega^f)|}{|1 + w_{раз}(j\omega^f)|} \cdot f_{гарм}. \tag{7.2.6}$$

При оптимальном управлении отсюда следует оценка (4.3.41), из которой получим число

$$q \geq \frac{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\hat{\omega}^f)|^2 f^{*2}_{гарм} - z^{*2}_{гарм}}{|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\hat{\omega}^f)|^2 z^{*2}_{гарм}}. \tag{7.2.7}$$

В этом выражении $\hat{\omega}^f$ – оценка частоты внешнего возмущения, включаемая в ω-тест как одна из испытательных частот. Для q определяемого (7.2.7)

$$z_{гарм} \leq z^*_{гарм}. \tag{7.2.8}$$

7.2.2. Учёт требований к показателям качества

Усложним задачу 7.2.1 требованием к показателям качества переходных процессов

$$t_{рег} \leq \bar{t}_{рег}, \quad \sigma \leq \bar{\sigma}, \tag{7.2.9}$$

где $\bar{t}_{рег}$ и $\bar{\sigma}$ – заданные числа, и будем называть её *задачей 7.2.2*. Она отличается от задачи 4.4.1 лишь объёмом сведений об объекте и поэтому её решение является частотной интерпретацией процедуры 4.4.1.

Для решения задачи 7.2.2 достаточно, чтобы объект (7.2.1) обладал следующими структурными свойствами:

а) Объект устойчив по управлению, если записать (7.2.1) в форме ««регулируемая переменная – управление»». Это означает, что полином $b_z(s)$ в передаточной функции (4.4.17) – гурвицев.

б) Известна степень γ_z полинома $b_z(s)$ и коэффициент b_γ при его старшей степени.

в) Известно число δ, при котором выполняются равенства (4.4.13)

$$\boldsymbol{l}'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{l}'A\boldsymbol{b} = \cdots = \boldsymbol{l}'A^{\delta-1}\boldsymbol{b} = 0. \tag{7.2.10}$$

г) Степень μ полинома Баттерворта, соответствующая заданному (7.2.9) перерегулированию $\bar{\sigma}$ удовлетворяет неравенству

$$n - \gamma_z - \delta \leq \mu. \tag{7.2.11}$$

Эти структурные свойства используются для формирования функционала оптимизации (4.4.21), в котором матрица

$$Q = q\left(\boldsymbol{l} + \tau_1 A'\boldsymbol{l} + \cdots + \tau_\delta A^{\delta-1\prime}\boldsymbol{l}\right)\left(\boldsymbol{l}' + \tau_1 \boldsymbol{l}'A + \cdots + \tau_\delta \boldsymbol{l}'A^{\delta-1}\right). \tag{7.2.12}$$

Здесь, в соответствии с (4.2.20), число

$$q \geq \max\left\{\frac{f^{*2}}{z^{*2}}, \frac{1}{[\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(0)]^2}, \frac{1}{b_\gamma^2}\cdot\left[\frac{3(n-\gamma-\delta)}{\bar{t}_{рег}}\right]^{2(n-\gamma_z-\delta)}\right\}, \tag{7.2.13}$$

а коэффициенты τ_i $\left(i = \overline{1,\delta}\right)$ определяются на основе (4.4.15), (4.4.16) как коэффициенты полинома

$$\tau(s) = (1+\tau s)^\delta, \quad \tau < \bar{t}_{рег}. \tag{7.2.14}$$

Последующее решение задачи 7.2.2 сводится к рекуррентной процедуре решения уравнения (7.1.37).

Заметим, что выражение (7.2.12) для матрицы Q содержит неизвестную матрицу A и поэтому рассмотрим произведение $\boldsymbol{\beta}'(s)Q\boldsymbol{\beta}(s)$ в правой части (7.1.37).

Принимая во внимание соотношение $A(Es-A)^{-1} = s(Es-A)^{-1} - E$ и равенства (7.2.10), получим выражение

$$\boldsymbol{l}'A^i\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{l}'A^i(Es-A)^{-1}\boldsymbol{b} = s^i\boldsymbol{l}'(Es-A)^{-1}\boldsymbol{b} = s^i\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s), \tag{7.2.15}$$

которое позволяет записать

$$\boldsymbol{\beta}'(-s)Q\boldsymbol{\beta}(s) = q\tau(-s)\tau(s)\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(-s)\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s), \quad \tau(s) = 1 + \tau_1 s + \cdots + \tau_\delta s^\delta, \tag{7.2.16}$$

или

$$\boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) = q|\tau(j\omega_k)|^2|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)|^2 \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.2.17}$$

При гармоническом внешнем возмущении число q определяется из (7.2.7). Действительно, подставим в (7.2.6)

$$\left|1 + w_{раз}(j\omega^f)\right| = \sqrt{1 + q|\tau(j\omega^f)|^2|\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega^f)|^2},$$

и получим, после замены ω^f на $\hat{\omega}^f$ неравенство (7.2.7).

7.2.3. Следящие системы и системы с эталонной моделью*

Будем теперь искать управление

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + kv, \tag{7.2.18}$$

которое обеспечивает не только требование (7.2.3) к точности регулирования, но и условие точного слежения

$$|z(t) - v(t)| \leq \varepsilon, \tag{7.2.19}$$

где ε – заданное число.

Регулируемая переменная $z(t)$ и задающее воздействие оптимальной системы связаны соотношением (4.4.87) и поэтому условие (7.2.19) выполняется, если при решении задачи 7.2.2 выбрать достаточно большое число q (удовлетворяющее, в частности, (7.2.13)) и положить в (7.2.18) число $k = \sqrt{q}$.

Такое решение задачи синтеза следящей системы обладает двумя недостатками. Во-первых, оно требует сведений о структурных свойствах объекта (7.2.1), используемых для решения задачи 7.2.2. Во-вторых, большое значение коэффициента q в функционале оптимизации усиливает влияние структурных возмущений объекта и может привести к неустойчивости системы.

Эти обстоятельства приводят к необходимости использования эталонной модели. Следящая система с эталонной моделью описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{7.2.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\text{м}} = A_{\text{м}}\boldsymbol{x}_{\text{м}} + \boldsymbol{b}_{\text{м}}v, \quad z_{\text{м}} = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}_{\text{м}}, \tag{7.2.21}$$

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}'_{\text{м}}\boldsymbol{x}_{\text{м}}. \tag{7.2.22}$$

Искомые вектора $\boldsymbol{c}'$ и $\boldsymbol{c}'_{\text{м}}$ находятся как решения уравнений (7.1.56), (7.1.58), (7.1.59).

7.2.4. ПИД-регулятор*

Для построения ПИД-регулятора в п. 4.4.6 использован приём, который состоит в формировании ««расширенного»» объекта

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \quad \dot{x}_{n+1} = z \tag{7.2.23}$$

с последующим применением процедуры АКОР.

Характеристический полином ««объекта»» (7.2.23) содержит нулевой корень и поэтому для него нельзя использовать процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Применение процедуры 4.4.1 также затруднено, так как неясно является ли управление (7.1.2) стабилизирующим для ««объекта»» (7.2.23).

В связи с этим рассмотрим ««расширенный»» объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{7.2.24}$$

$$\dot{x}_{n+1} = -\frac{1}{t_1}x_{n+1} + \frac{1}{t_1}z, \tag{7.2.25}$$

где t_1 – некоторое положительное число (постоянная времени инерционного звена).

Его характеристический полином содержит, дополнительно к корням исходного объекта (7.2.24), корень $\lambda_{n+1} = -\dfrac{1}{t_1}$ и, следовательно, ««объект»» (7.2.24), (7.2.25) –

асимптотически устойчив, если этим свойством обладает объект (7.2.24). Далее, стабилизирующее управление (7.1.2) сохраняет при достаточно малых t_1 способность стабилизировать ««объект»» (7.2.24), (7.2.25).

Однако, регулятор

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + c_{n+1}x_{n+1}, \tag{7.2.26}$$

получаемый в результате процедур АКОР не обеспечивает астатизма системы ($\lim\limits_{t\to\infty} z \neq 0$ при ступенчатом внешнем возмущении). Поэтому, после решения задачи АКОР и определения коэффициентов регулятора (7.2.26), сформируем управление

$$\dot{u}^{(1)} = t_1\dot{u} + u \qquad \left(u^{(1)} = t_1 u + \int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau\right), \tag{7.2.27}$$

и приложим его к объекту (7.2.24)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u^{(1)}, \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}. \tag{7.2.28}$$

Исследуем свойства регулятора, описываемого уравнением (7.2.25)-(7.2.27).

Из (7.2.25) получим

$$t_1 x_{n+1}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} x_{n+1}(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau + x_{n+1}(t_0). \tag{7.2.29}$$

Уравнение (7.2.27) принимает, если учесть (7.2.26), (7.2.29), вид

$$u^{(1)} = t_1\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau + c_{n+1}\left(t_1 x_{n+1} + \int\limits_{t_0}^{t} x_{n+1}(\tau)\,d\tau\right),$$

или (при $x_{n+1}(t_0) = 0$)

$$u^{(1)} = t_1\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}(\tau)\,d\tau + c_{n+1}\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau. \tag{7.2.30}$$

При таком регуляторе система (7.2.28), (7.2.30) – астатическая.

Астатизм достигается введением в систему дополнительного звена (7.2.27) и поэтому необходимо исследовать устойчивость системы (7.2.28), (7.2.30).

Будем трактовать уравнение (7.2.27) как структурное возмущение (4.4.106) модели (7.2.28). Его передаточная функция

$$w_{возм.1}(s) = \frac{t_1 s + 1}{s}. \tag{7.2.31}$$

Для анализа влияния этого возмущения на устойчивость оптимальной системы (7.2.24)-(7.2.26) найдём

$$w_{возм.1}(j\omega) + w_{возм.1}(-j\omega) = 2t_1. \tag{7.2.32}$$

Из утверждения 4.4.6 и неравенства $t_1 > 0$ следует, что, если управление (7.2.26) получено в результате процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, то структурное возмущение не нарушает устойчивости оптимальной системы.

Если

$$t_1 > 0.5, \tag{7.2.33}$$

то уравнение (7.2.27) не нарушает устойчивости системы, регулятор (7.2.26) которой получен на основе рекуррентной системы (7.1.37). Это следует из утверждения 4.4.5.

В заключение найдём ω-индексы ««расширенного»» объекта (7.2.24), (7.2.25).

Передаточный вектор этого объекта

$$\boldsymbol{\beta}_p(s) = \begin{pmatrix} Es - A & \mathbf{0} \\ \dfrac{1}{t_1}\boldsymbol{l}' & -\dfrac{1}{t_1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} \\ \dfrac{1}{t_1 s + 1}\boldsymbol{l}'(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}(s) \\ \dfrac{\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}(s)}{t_1 s + 1} \end{bmatrix}. \tag{7.2.34}$$

Отсюда находим, используя заданные ω-индексы $\boldsymbol{r}_x(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n+1}\right)$,

$$\boldsymbol{\beta}_p(j\omega_k) = \boldsymbol{r}_{px}(\omega_k) + j\boldsymbol{i}_{px}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Нетрудно показать также, что расширенный объект полностью управляем, если этим свойством обладает исходный объект (7.2.24).

7.3. Анализ устойчивости

7.3.1. Первый критерий устойчивости (необходимое условие)

Рассмотрим систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \tag{7.3.1}$$

$$u = \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x}, \tag{7.3.2}$$

в которой $\boldsymbol{c}^*$ – заданный вектор регулятора (7.3.2), а полностью управляемый и наблюдаемый по сигналу $u(t)$ объект задан векторами частотных параметров $\boldsymbol{r}_x(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Если объект (7.3.1) неустойчив, то пусть известно стабилизирующее управление (7.1.2) и он описывается стабилизированными ω-индексами $\boldsymbol{r}_x^c(\omega_k)$ и $\boldsymbol{i}_x^c(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

При этих условиях требуется установить является ли система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчивой. Для этого используем теорему 4.5.1, в соответствии с которой для любой асимптотически устойчивой системы (7.3.1), (7.3.2) существует функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left[\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + 2\left(\tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{x}\right)u + u^2\right]\, dt \tag{7.3.3}$$

с положительно-определённой матрицей Q и вектором $\tilde{\boldsymbol{l}}$, удовлетворяющим неравенству (4.5.4)

$$Q_l = Q - \tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{l}}' > 0, \tag{7.3.4}$$

такой, что система (7.3.1), (7.3.2) является оптимальной в системе этого функционала.

Матрица Q и вектор $\tilde{\boldsymbol{l}}$ удовлетворяют тождеству (4.5.34), которое для удобства запишем как

$$\tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega) + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(j\omega) + \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \gamma(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty, \tag{7.3.5}$$

где

$$\gamma(\omega) = -\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(-j\omega) - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega) + \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{7.3.6}$$

На ω-тесте это тождество примет вид

$$\tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k) + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) + \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) = \gamma(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.3.7}$$

Утверждение 7.3.1. Множество матриц Q и векторов $\tilde{\boldsymbol{l}}'$, удовлетворяющих системе уравнений (7.3.7), совпадает с множеством этих матриц и векторов, удовлетворяющих тождеству (7.3.5). Другими словами, равенства (7.3.7) служат необходимым и достаточным условием выполнения тождества (7.3.5). ■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.4.

Запишем уравнения (7.3.7) в матричной форме. В связи с этим введём обозначения

$$\frac{1}{2}M_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma(\omega_1) & \gamma(\omega_2) & \cdots & \gamma(\omega_n) \end{bmatrix}, \tag{7.3.8}$$

$$N_- = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}(-j\omega_1) & \boldsymbol{\beta}(-j\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{\beta}(-j\omega_n) \end{bmatrix}, \quad N_+ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}(j\omega_1) & \boldsymbol{\beta}(j\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{\beta}(j\omega_n) \end{bmatrix}. \tag{7.3.9}$$

$D\{A\}$ – вектор-столбец, компонентами которого являются соответствующие элементы диагонали квадратной матрицы A.

При этих обозначениях (7.3.7) примет вид

$$M_r\tilde{\boldsymbol{l}} + D\{N_-'QN_+\} = \boldsymbol{\gamma}, \tag{7.3.10}$$

где известный n-мерный вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = -M_r\boldsymbol{c}^* + D\{N_-'\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}N_+\}. \tag{7.3.11}$$

Если

$$\det M_r \ne 0, \tag{7.3.12}$$

тогда из (7.3.10) находим

$$\tilde{\boldsymbol{l}} = M_r^{-1}[\gamma - D\{N_-'QN_+\}]. \tag{7.3.13}$$

Подставляя это выражение в (7.3.11), получим

$$Q - M^{-1}[\gamma - D\{N'_- Q N_+\}][\gamma - D\{N'_- Q N_+\}]' M^{-1\prime} > 0. \tag{7.3.14}$$

Если объект (7.3.1) асимптотически устойчив, то из теоремы 7.1.1 следует, что неравенство (7.3.12) выполняется. При неустойчивом объекте следует заменить A на $A^{(0)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}$ и $\boldsymbol{\beta}(j\omega)$ – на $\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}(j\omega)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(0)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega)\right]$, тогда матрица при векторе $\tilde{\boldsymbol{l}}$ в (7.3.10) вновь будет невырожденной.

Если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то всегда существует положительно-определённая матрица Q, удовлетворяющая неравенству (7.3.14), и таким образом, это неравенство выступает как необходимое условие устойчивости.

7.3.2. Первый критерий (достаточное условие)

Однако может случиться так, что $Q > 0$ найдется из (7.3.14) и для неустойчивой системы (7.3.1), (7.3.2). Неравенство (7.3.14) будет достаточным для асимптотической устойчивости рассматриваемой системы, если в результате решения задачи оптимизации функционала (7.3.3), в котором Q и $\tilde{\boldsymbol{l}}$ получены на основе (7.3.14), (7.3.13), найдём

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^*. \tag{7.3.15}$$

Переходя к рассмотрению этой задачи об аналитическом конструировании регуляторов (задачи АКОР) для объектов, заданных частотными параметрами, запишем функционал (7.3.3) в виде

$$J = \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}'\left(Q - \tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{l}}'\right)\boldsymbol{x} + \left(u + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{x}\right)^2\right] dt \tag{7.3.16}$$

и введём ««новое»» управление

$$u_l = u + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{x}. \tag{7.3.17}$$

Тогда уравнение (7.3.1) и функционал (7.3.16) с учётом обозначений (7.3.4) примут вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_l\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u_l, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{7.3.18}$$

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}'Q_l\boldsymbol{x} + u_l^2\right) dt, \tag{7.3.19}$$

где

$$A_l = A - \boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{l}}'. \tag{7.3.20}$$

««Объект»» (7.3.18) задан частотными параметрами

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_l(j\omega_k) &= (E_n j\omega_k - A_l)^{-1}\boldsymbol{b} = \left(E_n j\omega_k - A + \boldsymbol{b}\tilde{\boldsymbol{l}}'\right)^{-1}\boldsymbol{b} = \\ &= \boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\right]^{-1} \quad k = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

Он полностью управляем, так как из управляемости пары $(A, \boldsymbol{b})$ следует управляемость пары $(A_l, \boldsymbol{b})$. Для него можно указать управление

$$u_l = \left[\boldsymbol{c}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{l}}\right]' \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_l^{(0)\prime} \boldsymbol{x}, \tag{7.3.22}$$

такое, что система (7.3.18), (7.3.22) асимптотически устойчива.

Оптимальное управление

$$u_l = \boldsymbol{c}_l' \boldsymbol{x}, \tag{7.3.23}$$

при котором на движениях системы (7.3.18), (7.3.23), возбуждённых произвольным вектором $\boldsymbol{x}^{(0)}$, минимизируется функционал (7.3.19) находится в результате решения рекуррентной системы уравнений, аналогичной (7.1.37)

$$-2\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{c}_l^{(\alpha+1)\prime} \boldsymbol{\beta}_l(j\omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)\prime} \boldsymbol{\beta}_l(-j\omega_k)\right]\right\} = \boldsymbol{\beta}_l'(-j\omega_k)\left[Q_l + \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)} \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)\prime}\right] \boldsymbol{\beta}_l(j\omega_k)$$
$$k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \ldots . \tag{7.3.24}$$

Свойства ««объекта»» (7.3.18) обеспечивают сходимость последовательности векторов $\boldsymbol{c}_l^{(\alpha)}$ так, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)} = \boldsymbol{c}_l. \tag{7.3.25}$$

Критерий 7.3.1. Критерий устойчивости. Для асимптотической устойчивости системы (7.3.1), (7.3.2) необходимо существование положительно-определённой матрицы Q, удовлетворяющей неравенству (7.3.14) и достаточно, чтобы Q и вектор $\tilde{\boldsymbol{l}}$, найденные из соотношений (7.3.14), (7.3.13) были таковы, что последовательность векторов $\boldsymbol{c}_l^{(\alpha)}$, являющихся решениями системы (7.3.24), обладала свойством

$$\lim_{\alpha \to \infty} \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)} = \boldsymbol{c}^* + \tilde{\boldsymbol{l}}. \tag{7.3.26}$$

■

Примечание 7.3.1. Практическое применение этого критерия затруднено нахождением матрицы Q из нелинейного неравенства (7.3.14). Однако в ряде случаев это неравенство значительно упрощается. Так, если выполняется условие

$$[1 - \boldsymbol{c}^{*\prime} \boldsymbol{\beta}(-j\omega)]\,[1 - \boldsymbol{c}^{*\prime} \boldsymbol{\beta}(j\omega)] > 1 \qquad 0 \le \omega \le \infty, \tag{7.3.27}$$

то $\tilde{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{0}$ и, тогда необходимо найти лишь $Q > 0$ из неравенства

$$D\{N_-' Q N_+\} = \boldsymbol{\gamma}. \tag{7.3.28}$$

Условие (7.3.27) выполняется, если вектор $\boldsymbol{c}^*$ получен в результате решения задачи АКОР либо АКОР по критерию обобщённой работы. ■

Пример 7.3.1. Исследуем устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0 x_1 - d_1 x_2 + bu, \quad u = c_1^* x_1 + c_2^* x_2, \tag{7.3.29}$$

о которой известно, что

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad b \neq 0, \quad c_1^* = -2.63 \cdot 10^3, \quad c_2^* = -1.6 \cdot 10^2. \tag{7.3.30}$$

В результате испытаний объекта этой системы при гармонических воздействиях с частотой $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 30$ получены частотные характеристики (7.1.17).

Переходя к анализу устойчивости, положим $l_1 = l_2 = 0$ и будем искать параметры q_{11} и q_{22} диагональной матрицы Q из уравнения (7.3.28).

Используя ( ), ( ), сформируем матрицы

$$N_+ = \begin{pmatrix} a_1(\omega_1)e^{j\varphi_1(\omega_1)} & a_1(\omega_2)e^{j\varphi_1(\omega_2)} \\ \omega_1 a_1(\omega_1)e^{j\left[\varphi_1(\omega_1)+\frac{\pi}{2}\right]} & \omega_2 a_1(\omega_2)e^{j\left[\varphi_1(\omega_2)+\frac{\pi}{2}\right]} \end{pmatrix}, \tag{7.3.31}$$

$$M_r = 2\begin{pmatrix} a_1(\omega_1)\cos\varphi_1(\omega_1) & \omega_1 a_1(\omega_1)\cos\left[\varphi_1(\omega_1)+\dfrac{\pi}{2}\right] \\ a_1(\omega_2)\cos\varphi_1(\omega_2) & \omega_2 a_1(\omega_2)\cos\left[\varphi_1(\omega_2)+\dfrac{\pi}{2}\right] \end{pmatrix}. \tag{7.3.32}$$

Уравнение (7.3.28) имеет в рассматриваемом случае вид

$$\begin{gathered} q_{11} + q_{22}\omega_k^2 = \frac{1}{a_1^2(\omega_k)}\Big\{-2c_1^* a_1(\omega_k)\cos\varphi_1(\omega_k) - \\ -2c_2^*\omega_k a_1(\omega_k)\cos\left[\varphi_1(\omega_k)+\frac{\pi}{2}\right] + \left(c_1^{*2} + c_2^{*2}\omega_k^2\right)a_1^2(\omega_k)\Big\} \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{7.3.33}$$

Решая эту систему при значениях её параметров из (7.1.17), (7.3.30), получим

$$q_{11} = 8 \cdot 10^6, \quad q_{11} = 3 \cdot 10^4. \tag{7.3.34}$$

Отсюда (так как $q_{11} > 0$, $q_{22} > 0$) следует, что необходимое условие устойчивости выполняется. Для проверки достаточного условия решаем задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty \left[8 \cdot 10^6 x_1^2 + 3 \cdot 10^4 x_2^2 + u^2\right] dt \tag{7.3.35}$$

на движениях объекта системы (7.3.29), заданного частотными параметрами. Это решение получено ранее в примере 7.1.2, где показано, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} c_1^{(\alpha)} = -2.63 \cdot 10^3, \quad \lim_{\alpha\to\infty} c_2^{(\alpha)} = -1.6 \cdot 10^2. \tag{7.3.36}$$

Сравнивая эти значения с заданными (7.3.30), заключаем об асимптотической устойчивости системы (7.3.29). ■

7.3.3. Второй критерий устойчивости

Введём в рассмотрение функционал

$$J = \int_0^\infty \left[\varepsilon^2 \boldsymbol{x}' Q^{(2)} \boldsymbol{x} + \left(u - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x}\right)^2\right] dt, \tag{7.3.37}$$

где $Q^{(2)}$ – заданная положительно-определённая матрица, ε – некоторое число (неопределённый параметр).

Исследуем зависимость от ε управления

$$u = \boldsymbol{c}'(\varepsilon)\boldsymbol{x}, \tag{7.3.38}$$

при котором функционал (7.3.37) достигает на движениях системы (7.3.1), (7.3.38) наименьшего значения.

Утверждение 7.3.2. Если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{c}(\varepsilon) \to \boldsymbol{c}^*, \tag{7.3.39}$$

если же эта система неустойчива, то при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{c}(\varepsilon) \to \boldsymbol{c}^{**} \neq \boldsymbol{c}^*. \tag{7.3.40}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.5.

Для вычисления вектора $\boldsymbol{c}(\varepsilon)$ введём ««новое»» управление

$$u_l = u - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{x}, \tag{7.3.41}$$

тогда уравнение (7.3.1) и функционал (7.3.37) примут вид (7.3.18), (7.3.19), где

$$\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{c}^*, \quad A_l = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{*\prime}, \quad Q_l = \varepsilon^2 Q^{(2)}. \tag{7.3.42}$$

Решая при этих значениях рекуррентную систему уравнений (7.3.24), получим (для каждого фиксированного ε) вектор

$$\boldsymbol{c}_l(\varepsilon) = \lim_{\alpha\to\infty} \boldsymbol{c}_l^{(\alpha)}(\varepsilon). \tag{7.3.43}$$

В соответствии с (7.3.41)

$$\boldsymbol{c}_l(\varepsilon) = \boldsymbol{c}(\varepsilon) - \boldsymbol{c}^*, \tag{7.3.44}$$

и, следовательно, если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то $\boldsymbol{c}_l(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а, если она неустойчива, то $\boldsymbol{c}_l(\varepsilon) \to \boldsymbol{c}^{**} \to \boldsymbol{c}^* \neq \boldsymbol{0}$.

Критерий 7.3.2. Критерий устойчивости. Для асимптотической устойчивости системы (7.3.1), (7.3.2) необходимо и достаточно, чтобы вектора $\boldsymbol{c}_l(\varepsilon)$, порождаемые системой (7.3.24) с параметрами (7.3.42) при различных значениях параметра ε, обладали свойством

$$\boldsymbol{c}_l(\varepsilon) \to \boldsymbol{0} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{7.3.45}$$

■

Необходимость (7.3.45) следует из (7.3.29), а достаточность – из оптимальности (7.3.41).

Соотношения (7.3.45) означают, что при достаточно малом ε вектор $\boldsymbol{c}_l(\varepsilon)$ должен быть достаточно мал.

Для практического использования критерия необходимо как-то определить понятие достаточной малости. Определим её путём сравнения с заданным вектором $\boldsymbol{c}^*$. Будем считать, что вектор $\boldsymbol{c}_l$ достаточно мал, если

$$|c_{li}| \ll |c_i^*| \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.3.46}$$

Пример 7.3.2. Исследуем устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = -d_0 x_1 + bu, \quad u = c_1^* x_1, \tag{7.3.47}$$

параметры (d_0 и b) объекта которой неизвестны. Известно лишь, что $b \neq 0$. Кроме того известен регулятор $u = c_1^{(0)} x_1$ $\left(c_1^{(0)} = -3\right)$, при котором объект системы (7.3.47), замкнутый этим регулятором, асимптотически устойчив. При этом условии можно определить экспериментально значение амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик объекта. Так на частоте $\omega_1 = 2.25$:

$$a_1(\omega_1) = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2.25}, \quad \varphi_1(\omega_1) = -\frac{\pi}{2}. \tag{7.3.48}$$

Будем исследовать две ситуации. В первой из них $c_1^* = -2$, во второй $c_1^* = 2$.

Переходя к анализу устойчивости при $c_1^* = -2$, запишем уравнение (7.3.24)

$$-2c_l^{(\alpha+1)} a_l(\omega_1) \left[\cos\varphi_l(\omega_1) - c_l^{(\alpha)} a_l(\omega_1)\right] = a_l^2(\omega_1) \left[\varepsilon^2 q_{11} + c_l^{(\alpha)2}\right] \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \tag{7.3.49}$$

где, в соответствии с (7.3.21)

$$a_l(\omega_1) e^{j\varphi_l(\omega_1)} = a_1(\omega_1) e^{j\varphi_1(\omega_1)} \left[1 - c_1^* a_1(\omega_1) e^{j\varphi_1(\omega_1)}\right]^{-1}. \tag{7.3.50}$$

При значениях (7.3.48), получим

$$a_l(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 + c_1^{*2}}} = \frac{1}{3}, \quad \cos\varphi_l(\omega_1) = \frac{-c_1^*}{\sqrt{\omega_1^2 + c_1^{*2}}} = \frac{2}{3}. \tag{7.3.51}$$

Из (7.3.49) следует, что

$$c_l^{(\alpha+1)} = -\frac{a_l(\omega_1)\left[\varepsilon^2 q_{11} + c_l^{(\alpha)2}\right]}{2\left[\cos\varphi_l(\omega_1) - c_l^{(\alpha)} a_l(\omega_1)\right]} \quad \alpha = 0, 1, \ldots. \tag{7.3.52}$$

На основе (7.3.22) определим

$$c_l^{(0)} = c^{(0)} - c_1^* = -1. \tag{7.3.53}$$

Тогда, используя (7.3.52), получим, полагая $\varepsilon^2 q_{11} = 0.2$

$$c_l^{(1)} = 0.2, \quad c_l^{(2)} = -0.054, \quad c_l^{(3)} = -0.049. \tag{7.3.54}$$

Положим $\varepsilon^2 q_{11} = 0.1$, тогда

$$c_l^{(1)} = -0.183, \quad c_l^{(2)} = -0.03, \quad c_l^{(3)} = -0.0248. \tag{7.3.55}$$

Из неравенства $|-2| \gg |-0.0496|$ и пропорциональной зависимости c_l от ε заключаем об асимптотической устойчивости системы (7.3.47) при $c_1^* = -2$.

Пусть теперь $c_1^* = 2$. В этом случае в (7.3.51) следует записать $\cos\varphi_l(\omega_1) = -\dfrac{2}{3}$, а в (7.3.53) $c_l^{(0)} = c^{(0)} - c_1^* = -5$.

При $\varepsilon^2 q_{11} = 0.2$ получим по формулам (7.3.52)

$$c_l^{(1)} = -4.2, \quad c_l^{(2)} = -4.054, \quad c_l^{(3)} = -4.05.$$

При $\varepsilon^2 q_{11} = 0.1$ найдём

$$c_l^{(1)} = -4.18, \quad c_l^{(2)} = -4.01, \quad c_l^{(3)} = -4.005.$$

Таким образом, система (7.3.47) неустойчива при $c_1^* = 2$. ■

7.3.4. Объекты второго вида*

Пусть имеется система

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u, \tag{7.3.56}$$

$$u^{(n)} + g_{n-1}^* u^{(n-1)} + \dots + g_1^*\dot{u} + g_0^* u = r_{n-1}^* y^{(n-1)} + \dots + r_1^*\dot{y} + r_0^* y, \tag{7.3.57}$$

параметры g_i^*, r_j^* $\left(i, j = \overline{0, n-1}\right)$ регулятора которой известны, а объект (7.3.56) описывается ω-индексами $r(\omega_k)$ и $i(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$. Если объект (7.3.56) неустойчив, то известно стабилизирующее управление

$$u^{(n)} + g_{n-1}^{(0)} u^{(n-1)} + \dots + g_1^{(0)}\dot{u} + g_0^{(0)} u = r_{n-1}^{(0)} y^{(n-1)} + \dots + r_1^{(0)}\dot{y} + r_0^{(0)} y, \tag{7.3.58}$$

и он задаётся стабилизированными ω-индексами.

Для анализа устойчивости системы (7.3.56), (7.3.57) использовался критерий 6.2.1.

Применим теперь критерий 7.3.1 для такого анализа.

Для этого приведём рассматриваемую систему к виду (4.5.80)

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{\bar{A}}\check{\boldsymbol{x}} + \check{\boldsymbol{b}}\check{u}, \tag{7.3.59}$$

$$\check{u} = \check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{x}}, \tag{7.3.60}$$

где $\check{\boldsymbol{x}}(t)$ – $2n$-мерный вектор (4.5.79), составленный из переменных $y(t)$ и $u(t)$ и их производных, а матрица $\check{\bar{A}}$ и вектора $\check{\boldsymbol{b}}$ и $\check{\boldsymbol{c}}^*$ определяются выражениями (4.5.82),

(7.3.58). Частотные параметры $\check{\boldsymbol{r}}_x(\omega_k)$ и $\check{\boldsymbol{i}}_x(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,2n}\right)$ ««объекта»» выражаются через ω-индексы объекта (7.3.56) соотношением (6.3.36), которое следует из передаточного вектора ««объекта»»

$$\check{\boldsymbol{\beta}}(s)=\left[\begin{array}{cccc|cccc} -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{1}{\mu(s)} & -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{s}{\mu(s)} & \cdots & -\dfrac{b(s)}{d(s)}\dfrac{s^{n-1}}{\mu(s)} & \dfrac{1}{\mu(s)} & \dfrac{s}{\mu(s)} & \cdots & \dfrac{s^{n-1}}{\mu(s)} \end{array}\right]. \tag{7.3.61}$$

Таким образом, система (7.3.56), (7.3.57) свелась к системе вида (7.3.1), (7.3.2).

Убедимся, что система (7.3.59), (7.3.60) обладает свойствами системы (7.3.1), (7.3.2), достаточными для использования критерия 7.3.1.

Так, если объект (7.3.56) асимптотически устойчив, то таковым является и ««объект»» (7.3.59). В этом нетрудно убедиться, если использовать выражение (7.3.61) для его передаточного вектора и убедиться, что

$$\det\left(Es-\check{A}\right)=d(s)\mu(s), \tag{7.3.62}$$

где $\mu(s)$ – произвольный гурвицев полином.

Если объект (7.3.56) неустойчив, то для ««объекта»» (7.3.59) можно указать, используя (7.3.58), стабилизирующее управление $\check{u}^{(0)}=\check{\boldsymbol{c}}^{(0)\prime}\boldsymbol{x}$.

Для полной управляемости ««объекта»» следует выбирать полином $\mu(s)$ так, чтобы его корни не совпадали с корнями многочлена $b(s)$. Наконец, для наблюдаемости ««закона управления»» (7.3.60) достаточно, чтобы передаточная функция

$$\check{\boldsymbol{c}}^{*\prime}\check{\boldsymbol{\beta}}(s)=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^*s^{i-1}\right)b(s)+\left(\sum\limits_{i=n+1}^{2n}c_i^*s^{i-1}\right)d(s)}{d(s)\mu(s)}. \tag{7.3.63}$$

не имела в числителе и знаменателе общих корней.

7.3.5. Погрешности вычислений (инструментальные погрешности) и анализ устойчивости*

Рассмотрим систему (7.1.12), которая разрешает задачу АКОР по частотным параметрам. Определитель матрицы M_r этой системы

$$\det M_r\neq 0. \tag{7.3.64}$$

Однако он, в отличие от искомого вектора $\boldsymbol{c}$, зависит от испытательных частот ω_1, ω_2, ..., ω_n и может случиться так, что определитель матрицы M_r – малое число ε

$$\det M_r=\varepsilon. \tag{7.3.65}$$

В этом случае решение уравнения (7.1.12) становится чувствительным к погрешностям вычислений, связанных с решением этого уравнения. При условии (7.3.65)

указанные погрешности могут привести к тому, что результатом решения уравнения (7.1.12) служит вектор $\hat{\boldsymbol{c}}$, который существенно отличается от искомого вектора. В связи с этим возникает задача анализа устойчивости объекта (7.1.1) с регулятором

$$u = \hat{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{x}. \tag{7.3.66}$$

Такой анализ можно осуществить используя критерии 7.3.1, 7.3.2.

Оказывается, что ситуация (7.3.65) является скорее правилом, чем исключением. Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пример.

Пример 7.3.3. Исследуем аналитически матрицу M_r в примере 7.1.1.

Очевидно, что

$$\beta_1(j\omega) = \ldots,$$
$$\beta_2(j\omega) = \left.\frac{s}{s^2 + d_1 s + d_0}\right|_{s\,=\,j\omega} = \frac{k(T_1+T_2)\omega^2}{(T_1^2\omega^2+1)\,(T_2^2\omega^2+1)} + j\frac{k(1-T_1T_2\omega^2)\omega}{(T_1^2\omega^2+1)\,(T_2^2\omega^2+1)}.$$

где постоянные времени T_1, T_2 и коэффициент k находятся из соотношений

$$k = \frac{1}{d_0}, \quad T_1 \cdot T_2 = \frac{1}{d_0}, \quad T_1 + T_2 = \frac{d_1}{d_0},$$

так, что $\dfrac{1}{s^2 + d_1 s + d_0} = \dfrac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$.

Таким образом

$$M_r = \begin{pmatrix} k(1-T_1T_2\omega_1^2) & k(T_1+T_2)\omega_1^2 \\ k(1-T_1T_2\omega_2^2) & k(T_1+T_2)\omega_2^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(T_1^2\omega^2+1)\,(T_2^2\omega^2+1)}.$$

Пусть испытательное частоты ω_1 и ω_2 таковы, что

$$T_1T_2\omega_1^2 \gg 1, \quad T_1T_2\omega_2^2 \gg 1,$$

тогда величина $\det M_r$ определяется погрешностями вычисления произведений $T_1T_2\omega_1^2$ и $T_1T_2\omega_2^2$. Аналогичная ситуация возникает, когда частоты ω_1 и ω_2 удовлетворяют соотношениям

$$T_1T_2\omega_1^2 \ll 1, \quad T_1T_2\omega_2^2 \ll 1,$$

и лишь, когда эти частоты (ω_1 и ω_2) близки к значениям $\tilde{\omega}_1 = \dfrac{1}{T_1}$ и $\tilde{\omega}_2 = \dfrac{1}{T_2}$, влияние погрешностей вычисления $T_1T_2\omega_1^2$ и $T_1T_2\omega_2^2$ – незначительно.

Поскольку постоянные времени T_1 и T_2 объекта (7.1.15) неизвестны, то возможны описанные ситуации, которые могут привести к значениям $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$, при которых объект (7.1.15) с регулятором $u = c_1^* x_1 + c_2^* x_2$ будет неустойчив.

В связи с этим необходимо, прежде чем прикладывать к объекту это управление, исследовать будет ли система с таким управлением асимптотически устойчивой. ■

Доказательства к главе 7

7.Д. Доказательство теорем и утверждений

7.Д.1. Доказательство теоремы 7.1.1

Решение системы n – линейных уравнений (7.1.12) с n неизвестными существует и единственно, если

$$\det M_r = \det \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{array} \right] \neq 0. \tag{7.Д.1}$$

Представим вектор $\boldsymbol{r}_x(\omega)$ аналогично (6.Д.43) как

$$\boldsymbol{r}_x(\omega) = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{\beta}(j\omega)\frac{d(-j\omega)}{d(-j\omega)} = \mathrm{Re}\,\frac{(E\widetilde{j\omega} - A)\boldsymbol{b}d(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2}. \tag{7.Д.2}$$

Подставим в числитель этого соотношения выражение (6.Д.46) при $s = j\omega$ и получим

$$\boldsymbol{r}_x(\omega) = \frac{1}{|d(j\omega)|^2}\sum_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega^{2i}(-1)^i. \tag{7.Д.3}$$

сформируем матрицу

$$\begin{aligned} M_r &= \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{r}_x(\omega_1) & \boldsymbol{r}_x(\omega_2) & \cdots & \boldsymbol{r}_x(\omega_n) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{cccc} \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_1^{2i}(-1)^i & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_2^{2i}(-1)^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_n^{2i}(-1)^i \end{array} \right] \cdot \\ &\cdot\ \mathrm{diag}\left[\begin{array}{cccc} \dfrac{1}{|d(j\omega_1)|^2} & \dfrac{1}{|d(j\omega_2)|^2} & \cdots & \dfrac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{7.Д.4}$$

и представим

$$\left[\begin{array}{cccc} \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_1^{2i}(-1)^i & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_2^{2i}(-1)^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\psi_{2i}\omega_n^{2i}(-1)^i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{\psi}_0 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-2} \end{array} \right] s^r, \tag{7.Д.5}$$

где

$$S^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \cdots & -\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-2} & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-2} & \cdots & (-1)^{n-1}\omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}. \tag{7.Д.6}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det S^r \neq 0 \tag{7.Д.7}$$

как определитель Вандермонда и поэтому неравенство (7.Д.1) выполнится, если

$$\det \left(\begin{array}{cccc} \boldsymbol{\psi}_0 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-2} \end{array} \right) \neq 0. \tag{7.Д.8}$$

На основе (6.Д.47) запишем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{2\mu} &= \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma \boldsymbol{b} d_{2\mu-\gamma}(-1)^{2\mu-\gamma} = \left[\begin{array}{cccccc} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{array} \right] \times \\ &\times \left[\begin{array}{cccccc} (-1)^{n-1}d_{2\mu-(n-1)} & (-1)^{n-2}d_{2\mu-(n-2)} & \cdots & (-1)^{2\mu-1}d_{2\mu-1} & (-1)^{2\mu}d_{2\mu} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{7.Д.9}$$

и тогда матрица

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_0 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{2n-4} & \boldsymbol{\psi}_{2n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \cdot \Gamma_2, \qquad (7.Д.10)$$

где

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \overbrace{(-1)^{-n+1}d_{-n+1}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+3}d_{-n+3}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{\ n-3}d_{\ n-3}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^{\ n-1}d_{\ n-1}}^{\mu=n-1} \\ (-1)^{-n+2}d_{-n+2} & (-1)^{-n+4}d_{-n+4} & \cdots & (-1)^{\ n-2}d_{\ n-2} & (-1)^{\ n}\ \ d_{\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{-1} & -d_1 & \cdots & (-1)^{2n-5}d_{2n-5} & (-1)^{2n-3}d_{2n-3} \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4}d_{2n-4} & (-1)^{2n-2}d_{2n-2} \end{pmatrix}. \qquad (7.Д.11)$$

Представим

$$\det \Gamma_2 = \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-n+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} d_{-n+1} & d_{-n+3} & \cdots & d_{n-3} & d_{n-1} \\ d_{-n+2} & d_{-n+4} & \cdots & d_{n-2} & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{-1} & d_1 & \cdots & d_{2n-5} & d_{2n-3} \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} & d_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Переставим столбцы последней матрицы (последний столбец поменяем местами с первым, предпоследний столбец – со вторым и т.д.) и получил определитель матрицы H (2.1.13), который является Δ_n определителем Гурвица.

Объект (7.1.1) асимптотически устойчив и поэтому

$$\Delta_n > 0 \qquad (7.Д.12)$$

и, следовательно, $\det \Gamma_2 \neq 0$.

В 6.Д.4, показано, что для полностью управляемого объекта

$$\det \begin{bmatrix} A_{n-1}\boldsymbol{b} & A_{n-2}\boldsymbol{b} & \cdots & A_1\boldsymbol{b} & A_0\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \neq 0,$$

следовательно решение системы (7.1.12) существует и единственно.

Докажем теперь вторую часть теоремы 7.1.10 независимости вектора $\boldsymbol{c}$ от выбора испытательных частот. Доказательство опирается на следующее утверждение.

Утверждение 7.Д.1. Необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.1.11) служит тождество (7.1.10). ■

Достаточность этого тождества следует из построения равенств (7.1.11). Докажем его необходимость.

Для этого умножим (7.1.10) на $|d(j\omega)|^2 \neq 0$ и получим с учётом (6.Д.45) и (7.Д.3)

$$-2\sum_{\mu=0}^{n-1} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\psi}_\mu s^{2\mu} = \boldsymbol{b}' \left[\sum_{\gamma=0}^{n-1} A'_\gamma s^\gamma (-1)^\gamma\right] Q \left[\sum_{\psi=0}^{n-1} A_\psi s^\psi\right] \boldsymbol{b}, \quad s = j\omega, \qquad (7.Д.13)$$

или

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}\left[-2\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\psi}_\mu-\sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^\gamma\boldsymbol{b}'A'_\gamma QA_{2\mu-\gamma}\boldsymbol{b}\right](j\omega)^{2\mu}=0. \tag{7.Д.14}$$

Введём обозначение

$$æ_\mu=-2\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\psi}_\mu-\sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^\gamma\boldsymbol{b}'A'_\gamma QA_{2\mu-\gamma}\boldsymbol{b}\quad \mu=\overline{0,n-1}, \tag{7.Д.15}$$

и запишем тождество (7.1.10) в виде

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}æ_\mu(j\omega)^{2\mu}=0. \tag{7.Д.16}$$

Тогда система уравнения (7.1.11) запишется как

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}æ_\mu(j\omega_k)^{2\mu}=0\quad k=\overline{1,n}. \tag{7.Д.17}$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме как

$$S^{r\,\prime}\boldsymbol{æ}=\boldsymbol{0}, \tag{7.Д.18}$$

где $\boldsymbol{æ}$ – n-мерный вектор с компонентами $æ_0$, $æ_1$, ..., $æ_{n-1}$, а S^r – матрица (7.Д.6). Так как $\det S\neq 0$, единственным решением (7.Д.18) является

$$æ_\mu=0\quad \mu=\overline{0,n-1}. \tag{7.Д.19}$$

Подставляя эти значения в соотношение (7.Д.16) заключаем, что оно выполняется для всех ω и таким образом необходимость (7.1.10) доказана.

7.Д.2. Доказательство теоремы 7.1.2

Оно опирается на следующие две леммы о свойствах вектора $\boldsymbol{c}^{(1)}$, получаемого на первом шаге $(\alpha=0)$ итерационного процесса (7.1.37). При $\alpha=0$ уравнения (7.1.37) имеют вид

$$-\boldsymbol{c}^{(1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(0)}(-j\omega_k)-\boldsymbol{c}^{(1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega_k)=\boldsymbol{\beta}^{(0)\prime}(-j\omega_k)\left[Q+\boldsymbol{c}^{(0)}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}\right]\boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega_k)\quad k=\overline{1,n}, \tag{7.Д.20}$$

где

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega_k)=\left[Ej\omega_k-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}\right]^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\left[1-\boldsymbol{c}^{(0)\prime}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)\right]^{-1}. \tag{7.Д.21}$$

Лемма 7.Д.1. При условиях теоремы 7.1.1 решение $\boldsymbol{c}^{(1)}$ уравнений (7.Д.20) существует и единственно. ■

Для доказательства леммы отметим, что уравнения (7.Д.20) доставляют решение $u = \boldsymbol{c}^{(1)\prime}\boldsymbol{x}$ задачи АКОР по критерию обобщённой работы для ««объекта»»

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(0)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad A^{(0)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}. \tag{7.Д.22}$$

В соответствии с теоремой 7.1.1 вектор $\boldsymbol{c}^{(1)}$ является единственным решением (7.Д.20), если ««объект»» (7.Д.22) асимптотически устойчив и полностью управляем. Первое условие выполняется по построению вектора $\boldsymbol{c}^{(0)}$. Второе требование также выполняется. Действительно, известна следующая лемма.

Лемма 7.Д.2. Если пара $(A, \boldsymbol{b})$ полностью управляема, то полностью управляема пара $(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{\gamma}$ некоторый n-мерный вектор-столбец. ■

Убедимся в её справедливости при $n = 3$. В этом случае условие полной управляемости пары $(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{b})$ имеет вид

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')\boldsymbol{b} & (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{7.Д.23}$$

Вводя обозначения $\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{b} = \alpha_0$, $\boldsymbol{\gamma}'A\boldsymbol{b} = \alpha_1$, запишем

$$\det\Big[\boldsymbol{b} \quad (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')\boldsymbol{b} \quad (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')\boldsymbol{b}\Big] = \det\Big[\boldsymbol{b} \quad A\boldsymbol{b} + \alpha_0\boldsymbol{b} \quad (A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\gamma}')(A\boldsymbol{b} + \alpha_0\boldsymbol{b})\Big] =$$
$$= \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} + \alpha_0\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} + \alpha_0 A\boldsymbol{b} + \alpha_0^2\boldsymbol{b} + \alpha_1\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Используем эту лемму и заключаем, что ««объект»» (7.Д.22) полностью управляем и, таким образом, лемма 7.Д.1 доказана.

Лемма 7.Д.3. При условиях теоремы 7.1.2 вектор $\boldsymbol{c}^{(1)}$ обладает следующими свойствами:

1. Его можно представить в виде

$$\boldsymbol{c}^{(1)} = -P^{(1)}\boldsymbol{b}, \tag{7.Д.24}$$

   где $P^{(1)}$ – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)\prime}P^{(1)} = -Q - \boldsymbol{c}^{(0)}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}, \tag{7.Д.25}$$

   в котором

$$A^{(0)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}. \tag{7.Д.26}$$

2. Собственные числа – $\lambda_i\left[A^{(1)}\right]$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – матрицы $A^{(1)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(1)\prime}$ таковы, что

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[A^{(1)}\right] < 0 \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.Д.27}$$

■

Докажем лемму 7.Д.3. В соответствии с утверждением 7.Д.1 необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.Д.20) является тождество

$$-\boldsymbol{c}^{(1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(0)}(-j\omega) - \boldsymbol{c}^{(1)\prime}\boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}^{(0)\prime}(-j\omega)\left[Q + \boldsymbol{c}^{(0)}\boldsymbol{c}^{(0)\prime}\right]\boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega). \tag{7.Д.28}$$

Подставляя в него выражения (7.Д.24) и (7.Д.25) получим при $\omega_k = \omega$ выражение

$$\begin{gathered} \boldsymbol{b}' P^{(1)} \left[Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \left[-Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} P^{(1)} \boldsymbol{b} = \\ = \boldsymbol{b}' \left[-Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} \left[Q + \boldsymbol{c}^{(0)} \boldsymbol{c}^{(0)\prime} \right] \left[Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} \boldsymbol{b}. \end{gathered} \tag{7.Д.29}$$

Его можно записать как

$$\begin{gathered} \boldsymbol{b}' \left[-Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} \left\{ \left[-Ej\omega - A^{(0)} \right]' P^{(1)} + P^{(1)} \left[Ej\omega - A^{(0)} \right] + \right. \\ \left. + Q + \boldsymbol{c}^{(0)} \boldsymbol{c}^{(0)\prime} \right\} \left[Ej\omega - A^{(0)} \right]^{-1} \boldsymbol{b} = 0. \end{gathered} \tag{7.Д.30}$$

Если выполняется (7.Д.25), то последнее равенство выполняется для всех ω. С другой стороны, оно эквивалентно, при выполнении (7.Д.24), тождеству (7.Д.28), которое является необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.Д.20), что и доказывает первая часть (п. 1°) леммы.

Вторая часть леммы (п. 2°) была доказана ранее в п. 4.Д.1 соотношением (4.Д.11).

Это и завершает доказательство леммы 7.Д.3. ■

Переходя к доказательству теоремы 7.1.2, обобщим леммы 7.Д.1 и 7.Д.3 и покажем, что они справедливы для каждого шага итерационного процесса (7.1.37), а не только для первого из этих шагов.

Действительно, условия, при которых справедливы утверждения этих лемм, на первом шаге можно записать в форме

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A^{(0)}\boldsymbol{b} & \cdots & \left[A^{(0)} \right]^{n-1} \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{7.Д.31}$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left[A^{(0)} \right] < 0 \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.Д.32}$$

Первое из этих неравенств выражает полную управляемость объекта (7.Д.22), второе – его асимптотическую устойчивость, при замыкании стабилизирующим регулятором (7.1.2), в котором $\boldsymbol{c}^{(0)} = \boldsymbol{0}$, если объект асимптотически устойчив.

Рассмотрим теперь второй шаг итерационного процесса (7.1.27). Условия лемм 7.Д.1 и 7.Д.3 выполняются, так как

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A^{(1)}\boldsymbol{b} & \cdot & \left[A^{(1)} \right]^{n-1} \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{7.Д.33}$$

в силу управляемости пары $(A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(1)\prime}, \boldsymbol{b})$, а

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left[A^{(1)} \right] < 0 \quad i = \overline{1, n}$$

по свойству (7.Д.27).

Применяя леммы 7.Д.1 и 7.Д.3, заключаем, что уравнение (7.1.37) при $\alpha = 1$

$$\begin{gathered} -2 \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{c}^{(2)\prime} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \left[1 - \boldsymbol{c}^{(2)\prime} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \right]^{-1} \right\} = \\ = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k) \left[1 - \boldsymbol{c}^{(2)\prime} \boldsymbol{\beta}(-j\omega_k) \right]^{-1} \left[Q + \boldsymbol{c}^{(1)} \boldsymbol{c}^{(1)\prime} \right] \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \left[1 - \boldsymbol{c}^{(2)\prime} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \right]^{-1} \\ k = \overline{1, n} \end{gathered} \tag{7.Д.34}$$

имеет единственное решение. Это решение можно представить в виде

$$\boldsymbol{c}^{(2)} = P^{(2)}\boldsymbol{b}, \tag{7.Д.35}$$

где $P^{(2)}$ – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(2)}A^{(1)} + A^{(1)\prime}P^{(2)} = -Q - \boldsymbol{c}^{(1)}\boldsymbol{c}^{(1)\prime}, \tag{7.Д.36}$$

а собственные числа – $\lambda_i\left[A^{(2)}\right]$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ матрицы $A^{(2)} = A + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{(2)\prime}$ имеют отрицательные вещественные части.

Продолжая итерационный процесс, получим последовательность векторов $\boldsymbol{c}^{(1)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(3)}$, ... Для каждого из этих векторов существует (в силу лемм 7.Д.1 и 7.Д.3) единственная последовательность $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... , которая в силу теоремы 4.1.2 имеет предел (4.1.12). Отсюда следует соотношение (7.1.39), выражающее сходимость последовательности $\boldsymbol{c}^{(1)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(3)}$, ... , к вектору $\boldsymbol{c}$ оптимального управления.

7.Д.3. Доказательство утверждения 7.1.1

7.Д.3.1. Преобразование уравнений

Запишем уравнения (7.1.58), (7.1.59) в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}_{м}(-j\omega_k) - q\boldsymbol{\beta}'_{м}(-j\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}^{з}(-j\omega_k)\right\} = 0 \quad k = \overline{1,n}, \tag{7.Д.37}$$

$$\mathrm{Jm}\left\{\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}_{м}(-j\omega_k) - q\boldsymbol{\beta}'_{м}(-j\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}^{з}(-j\omega_k)\right\} = 0 \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.Д.38}$$

Умножим вторую из этих подсистем систем на j и сложим её с первой. Тогда получим систему

$$\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) + \boldsymbol{c}'_{м}\boldsymbol{\beta}_{м}(-j\omega_k) - q\boldsymbol{\beta}'_{м}(-j\omega_k)\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\boldsymbol{\beta}^{з}(j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1,n} \tag{7.Д.39}$$

с комплексными коэффициентами.

Заменим пока $j\omega$ на s и запишем (7.Д.39) в более подробной форме

$$\boldsymbol{\delta}'\left(Es - A^{з}\right)^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}'_{м}\left(-Es - A_{м}\right)^{-1}\boldsymbol{b}_{м} - q\boldsymbol{b}'_{м}\left(-Es - A_{м}\right)^{-1\prime}\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\left(Es - A^{з}\right)^{-1}\boldsymbol{b} = 0. \tag{7.Д.40}$$

Преобразуем матрицы $A_{м}$, $A^{з}$ и вектора $\boldsymbol{b}_{м}$, $\boldsymbol{b}$ к канонической форме Фробениуса. Для этого используем преобразования

$$T^{з}A^{з}\left(T^{з}\right)^{-1} = \check{A}^{з}, \quad T^{з}\boldsymbol{b} = \check{\boldsymbol{b}}, \quad T_{м}A_{м}T_{м}^{-1} = \check{A}_{м}, \quad T_{м}\boldsymbol{b}_{м} = \check{\boldsymbol{b}}_{м}, \tag{7.Д.41}$$

в которых матрицы $T^{з}$ и $T_{м}$ имеют вид (3.4.10). Такие матрицы существуют поскольку пары $(A^{з}, \boldsymbol{b})$, $(A_{м}, \boldsymbol{b}_{м})$ – полностью управляемы [управляемость пары $(A^{з}, \boldsymbol{b})$ следует из леммы (7.Д.2)].

После указанного преобразования и умножения (7.Д.41) на $d_м(s)d^c(s)$, $d_м(s) = \det(Es - A_м)$, $d^c(s) = \det(Es - A^з)$, получим тождество

$$\check{c}_м(-s)d^c(s) + \check{\delta}(s)d_м(-s) - q\check{l}^з(s)\check{l}_м(-s) = 0, \tag{7.Д.42}$$

в котором

$$\check{c}_м(s) = \sum_{i=1}^{n} \check{c}_{м,i}s^{i-1}, \quad \check{\delta}(s) = \sum_{i=1}^{n} \check{\delta}_i s^{i-1}, \quad \check{l}^з(s) = \sum_{i=1}^{n} \check{l}^з_i s^{i-1}, \quad \check{l}_м(s) = \sum_{i=1}^{n} \check{l}_{м,i}s^{i-1}, \tag{7.Д.43}$$

вектора

$$\begin{aligned} \check{\boldsymbol{c}}_м{}' &= \begin{bmatrix} \check{c}_{м,1} & \check{c}_{м,2} & \cdots & \check{c}_{м,n} \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{\delta}}' = \begin{bmatrix} \check{\delta}_1 & \check{\delta}_2 & \cdots & \check{\delta}_n \end{bmatrix}, \\ \check{\boldsymbol{l}}^з{}' &= \begin{bmatrix} \check{l}^з_1 & \check{l}^з_2 & \cdots & \check{l}^з_n \end{bmatrix}, \quad \check{\boldsymbol{l}}_м{}' = \begin{bmatrix} \check{l}_{м,1} & \check{l}_{м,2} & \cdots & \check{l}_{м,n} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{7.Д.44}$$

связаны с векторами тождества (7.Д.40) соотношениями

$$\boldsymbol{c}'_м = \check{\boldsymbol{c}}_м{}'T_м, \quad \boldsymbol{\delta}' = \check{\boldsymbol{\delta}}'T^з, \quad \boldsymbol{l}' = \check{\boldsymbol{l}}^з{}'T^з, \quad \boldsymbol{l}' = \check{\boldsymbol{l}}_м{}'T_м. \tag{7.Д.45}$$

Тождество (7.Д.42) имеет в развёрнутой форме вид

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\check{c}_{м,i}s^{i-1}\right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{n} d^c_i s^i\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} \check{\delta}_i s^{i-1}\right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{м,i}s^i\right] - \\ &\qquad -q\left[\sum_{i=1}^{n} \check{l}^з_i s^{i-1}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\check{l}_{м,i}s^{i-1}\right] = 0. \end{aligned} \tag{7.Д.46}$$

Очевидно, что

$$\left[\sum_{\rho=1}^{n} \check{\delta}_\rho s^{\rho-1}\right] \left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{м,i}s^i\right] = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\check{\delta}_\rho d_{м,i}s^{i+\rho-1}.$$

Обозначим $i + \rho - 1 = \alpha$ $(i = \alpha - \rho + 1)$ и запишем это выражение как

$$\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\check{\delta}_\rho d_{м,i}s^{i+\rho-1} = \sum_{\alpha=0}^{2n-1}\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_\rho d_{м,\alpha-\rho+1}\right]s^\alpha,$$

где $d_{м,\alpha-\rho+1} = 0$ при $\alpha - \rho + 1 < 0$ и при $\alpha - \rho + 1 > n$.

Аналогично получим

$$\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}s^{\rho-1}\right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{n} d^c_i s^i\right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-1}\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d^c_{\alpha-\rho+1}\right]s^\alpha,$$

где $d^c_{\alpha-\rho+1} = 0$ при $\alpha - \rho + 1 < 0$ и при $\alpha - \rho + 1 > n$, а также

$$\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{l}_{м,\rho}s^{\rho-1}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \check{l}^з_i s^{i-1}\right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-2}\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{l}_{м,\rho}\check{l}^з_{\alpha-\rho+2}\right]s^\alpha,$$

где $\check{l}^{з}_{\alpha-\rho+2} = 0$ при $\alpha - \rho + 2 < 1$ и при $\alpha - \rho + 2 > n$.

Таким образом, (7.Д.46) принимает вид

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\left[\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_\rho d_{м,\alpha-\rho+1}+\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d^{c}_{\alpha-\rho+1}-q\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{l}_{м,\rho}\check{l}^{з}_{\alpha-\rho+2}\right]s^{\alpha}=0, \tag{7.Д.47}$$

или в более компактной форме

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\check{æ}_\alpha s^\alpha = 0, \tag{7.Д.48}$$

где

$$\check{æ}_\alpha = \sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_\rho d_{м,\alpha-\rho+1} + \sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d^{c}_{\alpha-\rho+1} - q\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{l}_{м,\rho}\check{l}^{з}_{\alpha-\rho+2}$$
$$\alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{7.Д.49}$$

Запишем (7.Д.48) как

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\check{æ}_\alpha\cdot(j\omega_k)^\alpha = \sum_{i=0}^{n-1}\check{æ}_{2i}\cdot(j\omega_k)^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1}\check{æ}_{2i+1}\cdot(j\omega_k)^{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \tag{7.Д.50}$$

Необходимым и достаточным условием этого равенства служат уравнения

$$\sum_{i=0}^{n-1}\check{æ}_{2i}\cdot(j\omega_k)^{2i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\check{æ}_{2i+1}\cdot(j\omega_k)^{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \tag{7.Д.51}$$

которые можно представить в матричной форме как

$$S^r\check{\mathbf{æ}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad S^i\check{\mathbf{æ}}^{(2)} = \mathbf{0}, \tag{7.Д.52}$$

где $\check{\mathbf{æ}}^{(1)} = \begin{bmatrix}\check{æ}_0 & \check{æ}_2 & \cdots & \check{æ}_{2n-2}\end{bmatrix}'$, $\check{\mathbf{æ}}^{(2)} = \begin{bmatrix}\check{æ}_1 & \check{æ}_3 & \cdots & \check{æ}_{2n-1}\end{bmatrix}'$ – n-мерные вектора, а матрицы S^r и S^i имеют вид (7.Д.6) и (7.Д.52) соответственно.

Определители матриц S^r и S^i (как определители Вандермонда) отличны от нуля и поэтому решением уравнений (7.Д.52) служит

$$\check{\mathbf{æ}}^{(1)} = \check{\mathbf{æ}}^{(2)} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что

$$\check{\mathbf{æ}}_\alpha = \mathbf{0} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{7.Д.53}$$

Итак, для доказательства утверждения нужно показать, что система

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left[(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d^{c}_{\alpha-\rho+1} + (-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_\rho d_{м,\alpha-\rho+1} - q(-1)^{\rho-1}\check{l}_{м,\rho}l^{з}_{\alpha-\rho+2}\right] = 0$$
$$\alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{7.Д.54}$$

имеет единственное решение. При этом должно выполняться соотношение

$$\check{\boldsymbol{c}}_м{}' = \boldsymbol{c}'_м T_м^{-1}, \tag{7.Д.55}$$

в котором

$$\boldsymbol{c}_{м} = -P_{21}\boldsymbol{b}, \tag{7.Д.56}$$

где квадратная матрица P_{21} является решением уравнения Ляпунова (4.2.37)

$$P_{21}A^{з} + A'_{м}P_{21} = Q, \quad Q = q\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'. \tag{7.Д.57}$$

Соотношение (7.Д.55) выражает последнюю часть утверждения 7.1.1, в которой говорится о совпадении $\boldsymbol{c}_{м}$ с решением (7.Д.56) задачи 4.1.2.

Отметим, что решение уравнения Ляпунова существует и единственно, если выполняется условие

$$\lambda_i^{з} + \lambda_{м,j} \neq 0 \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{7.Д.58}$$

где $\lambda_i^{з}$ и $\lambda_{м,j}$ $\left(i,j = \overline{1,n}\right)$ – собственные числа матриц $A^{з}$ и $A_{м}$ соответственно. Собственные числа этих матриц обладают свойством $\operatorname{Re}\lambda_i^{з} < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_{м,j} < 0$ $\left(i,j = \overline{1,n}\right)$ и поэтому условие (7.Д.58) выполняется.

7.Д.3.2. Преобразование уравнений Ляпунова

Приведём уравнение Ляпунова (7.Д.57) к канонической форме. Для этого умножим его справа на матрицу $\left(T^{з}\right)^{-1}$, а слева на матрицу $T_{м}^{-1\prime}$ и запишем

$$\left[T_{м}^{-1}P_{21}\left(T^{з}\right)^{-1}\right]\cdot\left[T^{з}A^{з}\left(T^{з}\right)^{-1}\right] + \left[T_{м}A_{м}T_{м}^{-1}\right]\cdot\left[T_{м}^{-1\prime}P_{21}\left(T^{з}\right)^{-1}\right] = q\left[T_{м}^{-1\prime}\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}'\left(T^{з}\right)^{-1}\right]. \tag{7.Д.59}$$

Обозначим

$$\check{P}_{21} = T_{м}^{-1\prime}P_{21}\left(T^{з}\right)^{-1}, \tag{7.Д.60}$$

и получим с учётом (7.Д.41) и (7.Д.45) уравнение

$$\check{P}_{21}\check{A}^{з} + \check{A}_{м}{}'\check{P}_{21} = \check{Q}, \quad \check{Q} = q\check{\boldsymbol{l}}_{м}\check{\boldsymbol{l}}^{з\prime}. \tag{7.Д.61}$$

Убедимся, что вектор

$$\check{\boldsymbol{c}}_{м} = -\check{P}_{21}\check{\boldsymbol{b}}. \tag{7.Д.62}$$

Действительно, из (7.Д.55) и (7.Д.60) следует

$$\boldsymbol{c}_{м} = -P_{21}\boldsymbol{b} = -T'_{м}\check{P}_{21}T^{з}\boldsymbol{b} = -T'_{м}\check{P}_{21}\check{\boldsymbol{b}}.$$

Учтём (7.Д.55) и получим искомое выражение (7.Д.62).

Запишем уравнение Ляпунова (7.Д.61) в развёрнутой форме

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0^c & -d_1^c & -d_2^c & \cdots & -d_{n-1}^c \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -d_{м,0} \\ 1 & 0 & \cdots & -d_{м,1} \\ 0 & 1 & \cdots & -d_{м,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_{м,n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.Д.63}$$

Кроме того, из (7.Д.62) следует

$$\check{c}_{м,i} = -p_{in} \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.Д.64}$$

Найдём связь вектора $\check{\delta}$, входящего в (7.Д.46) с матрицей $\check{p}_{21}$. Из (4.2.42) при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}_м$ следует $\boldsymbol{\delta} = -P'_{21}\boldsymbol{b}_м$. Повторяя вывод (7.Д.62), получим

$$\check{\boldsymbol{\delta}} = -\check{P}'_{21}\check{\boldsymbol{b}}_м,$$

или

$$\check{\delta}_i = -p_{ni} \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.Д.65}$$

Уравнение Ляпунова (7.Д.63) можно записать в виде системы уравнений

$$p_{\psi,\gamma-1} + p_{\psi-1,\gamma} - p_{\psi,n}d^c_{\gamma-1} - p_{n,\gamma}d_{м,\psi-1} = q_{\psi,\gamma} \quad \psi,\gamma = \overline{1,n}. \tag{7.Д.66}$$

7.Д.3.3. Доказательство совпадения систем уравнений

Система (7.Д.66) с точностью до преобразования (7.Д.60) эквивалентна уравнениям (7.Д.57) и поэтому её решение существует и единственно. Если показать, что уравнения (7.Д.64)-(7.Д.66) совпадают с (7.Д.54), то тем самым будет доказано утверждение 7.1.1.

Система (7.Д.64)-(7.Д.66) содержит промежуточные неизвестные p_{ij} $\left(i,j = \overline{1,n}\right)$. Исключим их из (7.Д.66) с помощью соотношений (7.Д.64) и (7.Д.65).

Запишем вначале уравнения (7.Д.66), с учётом указанных соотношений, в виде

$$p_{\psi,\gamma-1} + p_{\psi-1,\gamma} = \tilde{q}_{\psi\gamma} \quad \psi,\gamma = \overline{1,n}. \tag{7.Д.67}$$

где

$$\tilde{q}_{\psi\gamma} = q_{\psi\gamma} - \check{c}_{м,\psi}d^c_{\gamma-1} - \check{\delta}_\gamma d_{м,\psi-1} \quad \psi,\gamma = \overline{1,n}. \tag{7.Д.68}$$

При $\psi = \gamma$ получим из (7.Д.67)

$$p_{\gamma,\gamma-1} + p_{\gamma-1,\gamma} = \tilde{q}_{\gamma\gamma} \quad \gamma = \overline{1,n}. \tag{7.Д.69}$$

Рассмотрим эти уравнения при различных значениях γ

$$\gamma = n \quad : \quad -\check{c}_{м,n-1} - \check{\delta}_{n-1} = \tilde{q}_{nn}, \tag{7.Д.70}$$

$$\gamma = n-1 : \quad p_{n-1,n-2} + p_{n-2,n-1} = \tilde{q}_{n-1,n-1}. \tag{7.Д.71}$$

Для исключения из этого уравнения неизвестных $p_{n-1,n-2}$ и $p_{n-2,n-1}$ положим в (7.Д.69) $\psi = n$, $\gamma = n-2$ а затем $\psi = n-2$, $\gamma = n$ и получим

$$p_{n,n-3} + p_{n-1,n-2} = \tilde{q}_{n,n-2}, \quad p_{n-2,n-1} + p_{n-3,n} = \tilde{q}_{n-2,n}.$$

Подставим эти выражения в (7.Д.71) и получим

$$-\check{c}_{м,n-3} - \check{\delta}_{n-3} = -\tilde{q}_{n-1,n-1} + \tilde{q}_{n,n-2} + \tilde{q}_{n-2,n}. \tag{7.Д.72}$$

Продолжим процесс исключения промежуточных неизвестных для $\gamma = n-2, \ldots,$ $\gamma = 1$.

Теперь положим в (7.Д.67) вначале $\gamma = \psi + 1$, затем $\psi = \gamma + 1$. Тогда

$$p_{\psi\psi} + p_{\psi-1,\psi+1} = \tilde{q}_{\psi,\psi+1}, \quad p_{\gamma+1,\gamma-1} + p_{\gamma\gamma} = \tilde{q}_{\gamma+1,\gamma} \quad \psi,\gamma = \overline{0,n-1}.$$

Заменим в первой подсистеме ψ на γ, вычтем её из второй подсистемы и получим

$$p_{\gamma+1,\gamma-1} - p_{\gamma-1,\gamma+1} = \tilde{q}_{\gamma+1,\gamma} - \tilde{q}_{\gamma,\gamma+1} \quad \gamma = \overline{0,n-1}. \tag{7.Д.73}$$

Рассмотрим эти уравнения при различных γ

$$\gamma = n-1 : \quad -\check{c}_{м,n-2} + \check{\delta}_{n-2} = \tilde{q}_{n-1,n} - \tilde{q}_{n,n-1}, \tag{7.Д.74}$$

$$\gamma = n-2 : \quad p_{n-1,n-3} - p_{n-3,n-1} = \tilde{q}_{n-1,n-2} - \tilde{q}_{n-2,n-1}. \tag{7.Д.75}$$

Для исключения из этого уравнения промежуточных переменных положим в (7.Д.67) $\psi = n$, $\gamma = n-3$ а затем $\psi = n-3$, $\gamma = n$ и получим

$$p_{n,n-4} + p_{n-1,n-3} = \tilde{q}_{n,n-3}, \quad p_{n-3,n-1} + p_{n-4,n} = \tilde{q}_{n-3,n}.$$

Подставим эти выражения в (7.Д.75) и найдём

$$-\check{c}_{м,n-4} + \check{\delta}_{n-4} = -\tilde{q}_{n-1,n-2} - \tilde{q}_{n-2,n-1} - \tilde{q}_{n,n-3} + \tilde{q}_{n-3,n}. \tag{7.Д.76}$$

Продолжим этот процесс для $\gamma = n, \ldots, \gamma = 1$. Изложенные процессы (первый из них начинается с формулы (7.Д.69), второй с (7.Д.73) можно описать системой

$$-\check{c}_{м,n-i} - (-1)^{i+1}\check{\delta}_{n-i} = (-1)^{i+1}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}\tilde{q}_{n-\mu,n-i+1+\mu} \quad i = \overline{0,2n-1}, \tag{7.Д.77}$$

которая при $i = 1, 3, 5, \ldots$ описывает первый процесс, а при $i = 2, 4, 6, \ldots$ – второй.

Подставим в (7.Д.77) известное выражение и получим

$$\check{c}_{м,n-i} + (-1)^{i+1}\check{\delta}_{n-i} + (-1)^{i+1}\sum_{\mu=0}^{i-1}\Big[-(-1)^{\mu}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu}+$$
$$+(-1)^{\mu}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{м,n-\mu-1} + (-1)^{\mu}q_{n-\mu,n-i+1+\mu}\Big] = 0 \quad i = \overline{0, 2n-1}.$$

Перепишем эти уравнения в более удобной, для сравнения с (7.Д.54), форме

$$\begin{aligned}&\left[\check{c}_{м,n-i} + (-1)^{i+1}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu}\right] + \\ &+\left[(-1)^{i+1}\check{\delta}_{n-i} + (-1)^{i+1}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{м,n-\mu-1}\right] + \\ &+\left[(-1)^{i+1}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}q_{n-\mu,n-i+1+\mu}\right] = 0 \quad i = \overline{0, 2n-1}.\end{aligned} \tag{7.Д.78}$$

Теперь сравним (7.Д.78) с (7.Д.54).

Рассмотрим вначале **первую совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d^{c}_{\alpha-\rho+1} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}.$$

Введём новые переменные

$$\mu = n - \rho, \quad i = 2n - \alpha - 1. \tag{7.Д.79}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}\check{c}_{м,\rho}d_{\alpha-\rho+1} &= \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{\alpha-n+\mu+1} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu} \quad i = \overline{0, 2n-1}.\end{aligned}$$

Если учесть, что $d^{c}_{n-i+\mu} = 0$ при $\mu > i$, то

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu} &= \sum_{\mu=0}^{i}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu} = \\ &= (-1)^{n-i-1}\check{c}_{м,n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{м,n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu}.\end{aligned} \tag{7.Д.80}$$

Преобразуем **вторую совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_{\rho}d_{м,\alpha-\rho+1} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \tag{7.Д.81}$$

Введём переменные

$$\mu = \rho + i - n - 1, \quad i = 2n - \alpha - 1,$$

при которых

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_{\rho}d_{\text{м},\alpha-\rho+1} = \sum_{\mu=-n}^{2n-2}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1} = \\ = \sum_{\mu=-1}^{n-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1}.$$

Последнее получено из условия $d_{\text{м},n-\mu-1}=0$ при $n-\mu-1<0$ и $n-\mu-1>n$. Из этих неравенств следует, что $-1<\mu<n-1$.

Учитывая, что $\check{\delta}_{n-i+1+\mu}=0$ при $n-i+1+\mu\le n$, получим, что $\mu\le n-1$

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\alpha-\rho+1}\check{\delta}_{\rho}d_{\text{м},\alpha-\rho+1} = \sum_{\mu=-1}^{n-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1} = \\ = \sum_{\mu=-1}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1} = (-1)^{n}\check{\delta}_{n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1}. \tag{7.Д.82}$$

Наконец, рассмотрим **третью совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}q_{\rho,\alpha-\rho+2} \quad \alpha=\overline{0,2n-1}$$

где $q_{\rho,\alpha-\rho+2}=(-1)^{\rho-1}q\check{l}_{\text{м},\rho}\check{l}^{3}_{\alpha-\rho+2}$.

Используя ранее принятые обозначения, запишем

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho-1}q_{\rho,\alpha-\rho+2} = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu-1}q_{n-\mu,\alpha-n+\mu+2} = \\ = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{n-\mu-1}q_{n-\mu,n-i+1+\mu} = \sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}q_{n-\mu,n-i+1+\mu} \quad \alpha=\overline{0,2n-1}. \tag{7.Д.83}$$

Последнее равенство следует из условия $q_{n-\mu,n-i+1+\mu}=0$ при $n-i+\mu+1>n$.

Объединим полученные соотношения и запишем

$$\left[(-1)^{n-i-1}\check{c}_{\text{м},n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{c}_{\text{м},n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu}\right] + \\ + \left[(-1)^{n}\check{\delta}_{n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1}\right] + \\ + \left[\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{n-\mu-1}q_{n-\mu,n-i+1+\mu}\right] = 0 \quad \alpha=\overline{0,2n-1}. \tag{7.Д.84}$$

Умножим эти уравнения на $(-1)^{-n+i+1}$ и получим

$$\left[\check{c}_{\text{м},n-i} + (-1)^{i}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}\check{c}_{\text{м},n-\mu}d^{c}_{n-i+\mu}\right] + \\ + \left[(-1)^{i+1}\check{\delta}_{n-i} + (-1)^{i}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}\check{\delta}_{n-i+1+\mu}d_{\text{м},n-\mu-1}\right] + \\ + \left[-(-1)^{i}\sum_{\mu=0}^{i-1}(-1)^{\mu}q_{n-\mu,n-i+1+\mu}\right] = 0 \quad \alpha=\overline{0,2n-1}.$$

Эта система, эквивалентная (7.Д.54), совпадает с системой (7.Д.64) – (7.Д.66), если учесть, что $-(-1)^{i+1} = (-1)^i$, и таким образом утверждение 7.1.1 доказано.

7.Д.4. Доказательство утверждения 7.3.1

Оно повторяет доказательство утверждения 7.Д.1. Действительно, представим тождество (7.3.5) в форме тождества (7.1.10)

$$\left(\tilde{\boldsymbol{l}}' + \boldsymbol{c}^{*\prime}\right)\boldsymbol{\beta}(-j\omega) + \left(\tilde{\boldsymbol{l}}' + \boldsymbol{c}^{*\prime}\right)\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)\left[-Q + \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\right]\boldsymbol{\beta}(j\omega),$$

или

$$-2\left(\boldsymbol{l}' + \boldsymbol{c}^{*\prime}\right)\boldsymbol{r}_x(\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)\left[Q - \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\right]\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{7.Д.85}$$

При фиксированных ω из него следуют равенства (7.3.7)

$$-2\left(\boldsymbol{l}' + \boldsymbol{c}^{*\prime}\right)\boldsymbol{r}_x(\omega_k) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)\left[Q - \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}\right]\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{7.Д.86}$$

Заменим в (7.Д.85), (7.Д.86) $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{c}^*$ на $\boldsymbol{c}$, повторим доказательство утверждения 7.Д.1 и таким образом утверждение 7.3.1 доказано.

7.Д.5. Доказательство утверждения 7.3.2

Вектор $\boldsymbol{c}(\varepsilon)$, разрешающий задачу о минимуме функционала (7.3.37) на движениях системы (7.3.1), (7.3.38), удовлетворяет тождеству

$$[1 - \boldsymbol{c}'(\varepsilon)\boldsymbol{\beta}(-s)][1 - \boldsymbol{c}'(\varepsilon)\boldsymbol{\beta}(s)] = [1 - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(-s)][1 - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{\beta}(s)] + \varepsilon^2\boldsymbol{\beta}(-s)Q^{(1)}\boldsymbol{\beta}(s),$$
$$s = j\omega, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{7.Д.87}$$

которое нетрудно получить из (4.5.33), если заменить в нём $\boldsymbol{c}$ на $\boldsymbol{c}(\varepsilon)$ и положить

$$\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{c}^*, \quad Q^{(1)} = Q^{(2)} - \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}^{*\prime}. \tag{7.Д.88}$$

Исследуем зависимость вектора $\boldsymbol{c}(\varepsilon)$ от параметра ε. Для этого представим компоненты вектора

$$\beta_i(s) = \frac{b_i(s)}{d(s)} \quad i = \overline{1,n},$$

и запишем

$$d_\varepsilon(-s)d_\varepsilon(s) = d^*(-s)d^*(s) + \varepsilon^2\boldsymbol{b}'(-s)Q^{(1)}\boldsymbol{b}(s), \tag{7.Д.89}$$

где $d_\varepsilon(s) = d(s) - \boldsymbol{c}'(\varepsilon)\boldsymbol{b}(s)$, $d^*(s) = d(s) - \boldsymbol{c}^{*\prime}\boldsymbol{b}(s)$.

$d_\varepsilon(s)$ – это характеристический полином оптимальной системы (7.3.1), (7.3.38), а $d^*(s)$ – исходной системы (7.3.1), (7.3.2). Если ν_i и τ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – корни этих полиномов, то

$$d_\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \nu_i), \quad d^*(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - \tau_i).$$

Из условия ограниченности интеграла (7.3.37) следует, что

$$\operatorname{Re}\nu_i < 0 \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.Д.90}$$

Пусть для определённости $\operatorname{Re}\tau_i < 0 \ \left(i = \overline{1,\delta}\right)$, $\operatorname{Re}\tau_i \geq 0 \ \left(i = \overline{\delta+1,n}\right)$. Тогда $\delta = n$ означает асимптотическую устойчивость исследуемой системы (7.3.1), (7.3.2).

Из (7.Д.89) следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\nu_i \to \tau_i \quad i = \overline{1,\delta}, \quad \nu_i \to -\tau_i \quad i = \overline{\delta+1,n}.$$

Если $\delta = n$, то при $\varepsilon \to 0$, $\nu_i \to \tau_i \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ и следовательно $d_\varepsilon(s) \to d^*(s)$. Последнее означает, при условии полной управляемости пары $(A, \boldsymbol{b})$, что $\boldsymbol{c}(\varepsilon) \to \boldsymbol{c}^*$.

Если $\delta < n$, то $d_\varepsilon(s) \to \prod\limits_{i=1}^{\delta}(s-\tau_i) \prod\limits_{i=\delta+1}^{n}(s+\tau_i) \neq d^*(s)$, и поэтому $\boldsymbol{c}(\varepsilon) \to \boldsymbol{c}^{**}$, где $\boldsymbol{c}^{**}$ – единственный (в силу полной управляемости пары $(A, \boldsymbol{b})$ вектор, компоненты которого находятся после сравнения коэффициентов при одинаковых степенях s в обеих частях равенства

$$d(s) - \boldsymbol{c}^{**\prime}\tilde{\boldsymbol{\beta}}(s) = \prod_{i=1}^{\delta}(s-\tau_i) \prod_{i=\delta+1}^{n}(s+\tau_i). \tag{7.Д.91}$$

Поскольку равенству

$$d(s) - \boldsymbol{c}^{*\prime}\tilde{\boldsymbol{\beta}}(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-\tau_i) \tag{7.Д.92}$$

удовлетворяет также единственный вектор $\boldsymbol{c}^*$, то из последних двух выражений следует, что $\boldsymbol{c}^{**} \neq \boldsymbol{c}^*$.

Заключение к главе 7

Таким образом, результаты этой главы состоят в следующем.

1. Построена (п. 7.1.3) итерационная процедура АКОР по частотным параметрам объектов первого вида.

2. Доказана (теорема 7.1.2) сходимость этой процедуры.

3. Сравнение этой процедуры с идентификационным методом синтеза показывает значительное сокращение объёма вычислений.

4. Разработан метод частотных параметров, разрешающий задачи синтеза регуляторов по требованиям к точности и грубости (п. 7.2.1), а также точности, качеству и грубости (п. 7.2.2).

5. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости (критерии 7.3.1 и 7.3.2) систем с объектами первого вида, заданными частотными параметрами, и регуляторами, описываемыми алгебраическим соотношением с известными коэффициентами.

8. Частотные адаптивные регуляторы

Предмет этой главы – системы с несамотождественными объектами (однорежимными и многорежимными).

В таких системах нужно объединить в одном устройстве вычисление частотных параметров, расчёт параметров регулятора и его реализацию. Такое устройство, названное частотным декларативным регулятором, может быть реализовано в настоящее время, если использовать современную микропроцессорную технику.

Декларативные регуляторы занимают промежуточное положение между обычными и адаптивными регуляторами. Объединение в одном устройстве традиционных операций проектирования обычного регулятора (определение параметров объекта, синтез регулятора и его реализация) приводит к новым свойствам: декларативный регулятор, как и адаптивный задаётся целями управления (требованием устойчивости и точности управления) и настраивается на конкретный экземпляр объекта, но, в отличие от адаптивного, процессы идентификации (либо определения частотных параметров) и управления в нём разделены во времени. Последнее выступает в ряде случаев как преимущество, поскольку разделение этих процессов существенно упрощает анализ сходимости адаптации (настройки), являющийся основной проблемой адаптивных систем.

Использование частотных декларативных регуляторов для управления многорежимными объектами имеет ряд особенностей, учёт которых приводит к алгоритмам, которые названы частотным адаптивным управлением.

Существо подхода к построению декларативных и адаптивных частотных регуляторов было изложено в разделе 1.3.

Цель этой главы:

- алгоритмы работы частотных декларативных регуляторов однорежимных несамотождественных объектов первого и второго видов,
- алгоритмы частотного адаптивного управления для многорежимных несамотождественных объектов.

8.1. Декларативный регулятор ЧДР-1

8.1.1. Управление несамотождественными объектами

Пусть имеем несамотождественный объект управления

$$y^{(n)}+d_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+d_1\dot{y}+d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u+m_\alpha f^{(\alpha)}+\cdots+m_1\dot{f}+m_0f \quad (8.1.1)$$

с неизвестными параметрами d_i, b_j $\left(i = \overline{0, n-1},\ \ j = \overline{0, \gamma}\right)$. Известно, что он полностью управляем, устойчив по управлению [$b(s)$ – гурвицев полином], а

$$|f(t)| \le f^*, \tag{8.1.2}$$

где f^* – заданное число.

Если $f(t)$ ступенчатая функция, то известна оценка $|m_0| \le m_0^*$, а при гармонической $f(t)$ известны оценки параметров m_i $\left(i = \overline{0, \alpha}\right)$.

Задача 8.1.1. Для объекта (8.1.1) с неизвестными параметрами найти регулятор

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + g_1\dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + r_1\dot{y} + r_0 y, \tag{8.1.3}$$

такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени t^*, выполнялось требование к точности

$$|y(t)| \le y^*, \quad t > t^*, \tag{8.1.4}$$

где y^* – заданное число. ■

Если объект (8.1.1) – самотождественный, то достижение цели (8.1.4) осуществляется с помощью процедуры 8.1.1, состоящей из следующих операций:

Операция 1. Определить частотные параметры объекта.

Операция 2. Синтезировать регулятор (8.1.3) по частотным параметрам (решить задачу 6.1.2).

Операция 3. Реализовать (аппаратурно или программно) регулятор, действующий по алгоритму (8.1.3).

Операция 4. Подключить регулятор к объекту (замкнуть объект регулятором).

Операция 5. Достичь цели (8.1.4) через время $t_{рег}$.

■

Операции разделены в пространстве и во времени. Так, первая операция часто носит экспериментальный характер. Вторая и третья операции – это проектирование регулятора. Это приводит к тому, что для несамотождественных объектов они теряют смысл. Действительно, пусть на первом интервале пуск-останов определены ω-индексы объекта и спроектирован (синтезирован и реализован) регулятор. После подключения регулятора к объекту начинается второй интервал пуск-останов и может случиться так, что при этом реализуются параметры объекта, отличные от параметров на первом интервале. В этом случае цель (8.1.4) не будет достигнута.

Объединим выполнение всех операций процедуры 8.1.1 в одном устройстве, называемом *частотным декларативным регулятором*, и будем осуществлять эти операции без перерывов, затрачивая на каждую из них минимально необходимое время.

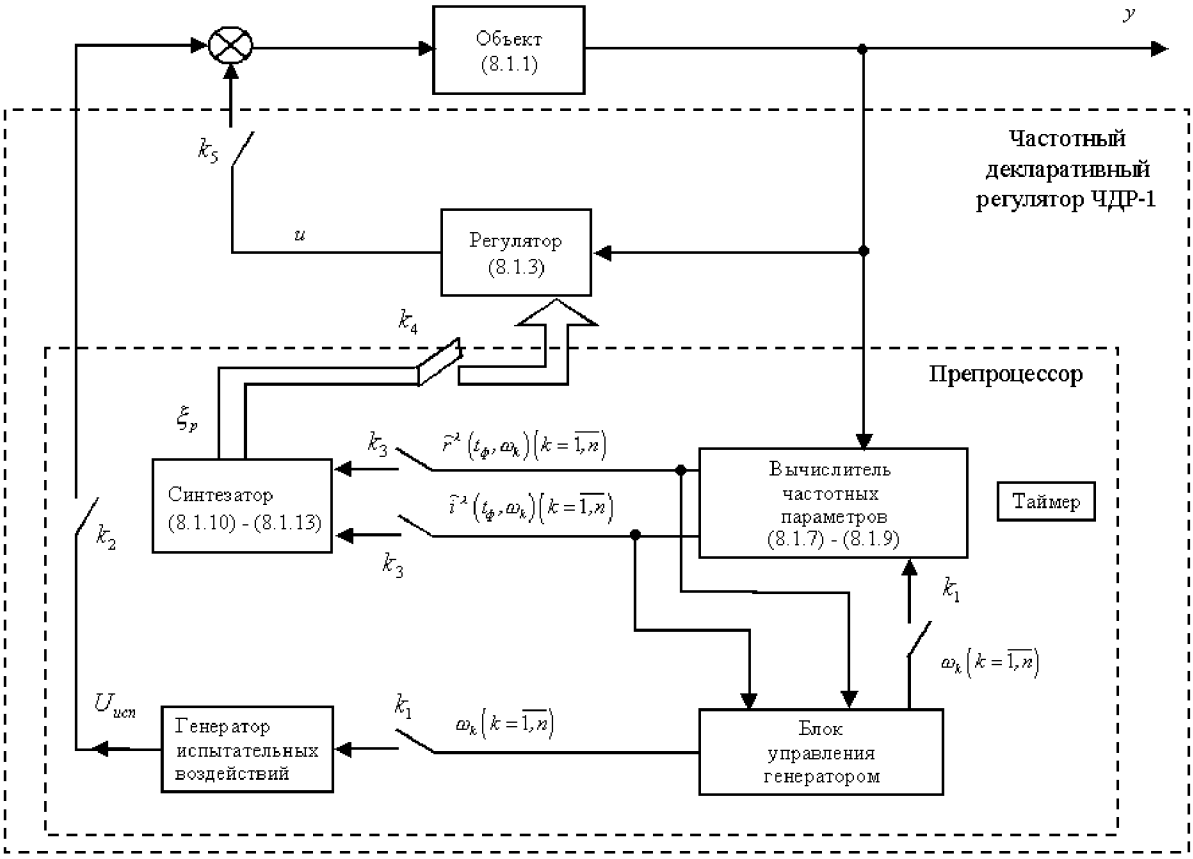

Рис. 8.1.1.

8.1.2. Структурная схема

Структурная схема декларативного регулятора ЧДР-1 для объектов второго вида приведена на рис. 8.1.1.

Он состоит из регулятора и препроцессора, в котором реализуются первая, вторая и четвертая операции процедуры 8.1.1.

Генератор испытательных воздействий формирует сигнал

$$u_{ucn}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k t, \tag{8.1.5}$$

в котором, в соответствии с (5.1.19),

$$\lambda \geq \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.1.6}$$

где s_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ – корни полинома $d(s)$.

Испытательные частоты ω_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$ вырабатываются блоком управления генератором.

Вычислитель частотных параметров состоит из умножителя и фильтра Фурье. Его структурная схема приведена на рис. 8.1.2.

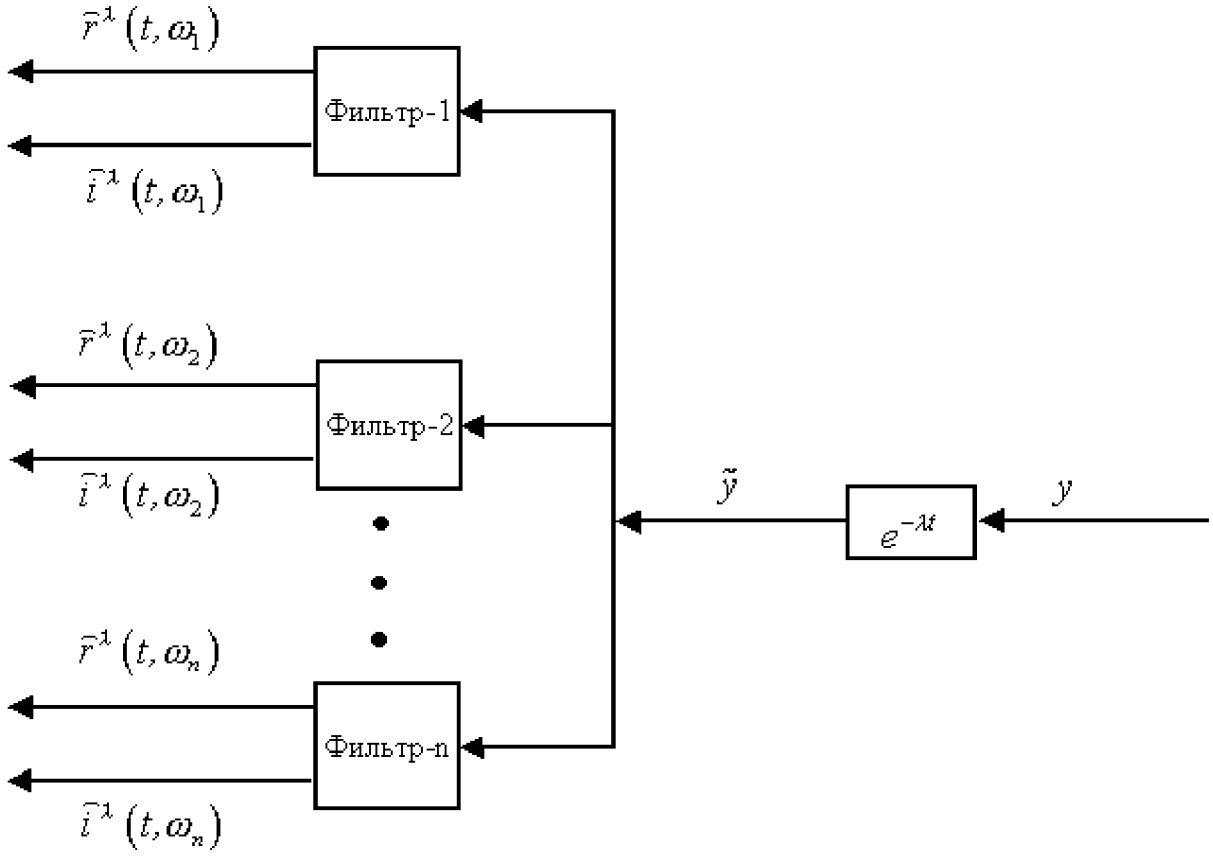

Рис. 8.1.2.

Выходом синтезатора служат параметры регулятора (8.1.3)

$$\boldsymbol{\xi}_p = \left[\begin{array}{cccc|cccc} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-1} \end{array}\right].$$

Таймер, входящий в состав препроцессора, управляет ключами К1–К5 (на рис. 8.1.1. не приведены связи таймера с другими устройствами регулятора).

8.1.3. Алгоритм препроцессора

Вычислитель частотных параметров формирует в момент $(t_0' + T_{\phi})$ окончания фильтрации оценки вида (5.3.13), (5.3.14)

$$\hat{r}^{\lambda}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int\limits_{t_0'}^{t_0'+T_{\Phi}} \tilde{y}(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1,n}, \tag{8.1.7}$$

$$\hat{i}^{\lambda}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int\limits_{t_0'}^{t_0'+T_{\Phi}} \tilde{y}(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1,n}. \tag{8.1.8}$$

где

$$\tilde{y}(t) = y(t) e^{-\lambda t}, \tag{8.1.9}$$

t_0' – момент начала фильтрации.

Сигналы $\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)$, $\hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ поступают в **синтезатор**, алгоритм работы которого заключается в решении уравнений (6.1.13), (6.1.14), где частотные параметры заменяются их оценками

$$\sum_{l=0}^{n-1} \rho_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\rho_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\mu_l(\omega_k)\right] r_l =$$
$$= \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\rho_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\mu_l(\omega_k)\right] \psi_l \quad k = \overline{1,n}, \quad (8.1.10)$$
$$\sum_{l=0}^{n-1} \mu_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\mu_l(\omega_k) + \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\rho_l(\omega_k)\right] r_l =$$
$$= \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\mu_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)\rho_l(\omega_k)\right] \psi_l \quad k = \overline{1,n}. \quad (8.1.11)$$

Выражения для $\rho_l(\omega_k)$ и $\mu_l(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ в этих уравнениях находятся из равенства (6.1.10)

$$(\lambda + j\omega_k)^l = \rho_l(\omega_k) + j\mu_l(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad l = \overline{0, 2n-\gamma}, \quad (8.1.12)$$

Числа ψ_l $\left(l = \overline{0, 2n-\gamma-1}\right)$ – это коэффициенты полинома $\psi(s)$, которые определяются требованиями к точности. Так, для ступенчатых внешних возмущений имеем, в соответствии с (6.1.32)

$$\psi(s) = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \psi_l s^l = \frac{m_0^* \bar{f}}{y^*} (\varepsilon^0 s + 1)^{2n-\gamma-1}. \quad (8.1.13)$$

Для гармонических внешних возмущений аналогичный полином строится с использованием неравенств (6.1.34).

Блок управления генератором работает в соответствии с одним из алгоритмов, описанных в п. 5.3.9 и п. 5.3.10. Так, при использовании алгоритма с паузами генератор испытательных воздействий начинает работать в момент времени $t_0 + T_{n.г}$, а на интервале $[t_0, t_0 + T_{n.г}]$, которое названо временем паузы генератора, проверяется выполнение неравенств (5.3.66)

$$\hat{r}^\lambda(t_0 + T_{n.г}, \omega_k) \le \varepsilon_\phi, \quad \hat{i}^\lambda(t_0 + T_{n.г}, \omega_k) \le \varepsilon_\phi \quad k = \overline{1,n}, \quad (8.1.14)$$

где ε_ϕ – допустимая погрешность фильтрации.

Если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, например, при $\omega_k = \omega_\nu$, то изменяем ω_ν. Блок управления генератором целесообразно использовать при $\lambda = 0$, когда объект асимптотически устойчив.

Таймер организует работу декларативного регулятора. В момент времени t_0 он запускает объект управления и замыкает ключ КЛ1. При $t_0' = t_0 + T_{n.г}$ замыкается

ключ КЛ2 и испытательное воздействие прикладывается к объекту. Через время $T_{ф}$ (при $t = t_0' + T_{ф}$) замыкается ключ КЛ3 (ключ КЛ1 при этом размыкается) и начинается вычисление параметров регулятора. При этом ключи КЛ2 и КЛ3 размыкаются. После завершения расчётов, на которые затрачивается время T_p, замыкается при $(t = t_0' + T_{ф} + T_p)$ ключ КЛ4. Затем в течение времени $T_{пер}$ данные (вектор $\boldsymbol{\xi}_p$) передаются в регулятор. После этого ключ КЛ4 размыкается и срабатывает ключ КЛ5, объект замыкается регулятором и в системе возникает переходный процесс длительностью $t_{рег}$. По окончании этого процесса выполняется неравенство (8.1.4). Таким образом, момент времени, начиная с которого достигается цель управления,

$$t^* = t_0 + T_{п.г} + T_{ф} + T_p + T_{пер} + t_{рег}. \tag{8.1.15}$$

8.1.4. Неопределённые структурные показатели

В задаче 8.1.1 предполагается, что структурные показатели объекта n и γ заданы.

Рассмотрим теперь случай, когда эти числа неизвестны. В этом случае препроцессор содержит еще одно устройство – **анализатор**, который осуществляет анализ устойчивости по одному из частотно-алгебраических критериев. При использовании первого из этих критериев анализатор осуществляет: а) решение системы алгебраических уравнений (6.2.19)-(6.2.21), б) проверку выполнения неравенств (6.2.24) Гурвица.

Структурная схема постпроцессора с анализатором приведена на рис. 8.1.3.

Анализатор решает уравнения

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\gamma}\left[\hat{\tilde{r}}(\omega_k)\rho_i(\omega_k) - \hat{\tilde{i}}(\omega_k)\mu_i(\omega_k)\right] l_i - \\ &- \sum_{i=0}^{2n-1}\left[\hat{r}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\rho_i(\omega_k) - \hat{i}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\mu_i(\omega_k)\right]\delta_i = 0 \quad k = \overline{1,\rho}, \end{aligned} \tag{8.1.16}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\gamma}\left[\hat{\tilde{r}}(\omega_k)\mu_i(\omega_k) + \hat{\tilde{i}}(\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right] l_i - \\ &- \sum_{i=0}^{2n-1}\left[\hat{r}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\mu_i(\omega_k) + \hat{i}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right]\delta_i = 0 \quad k = \overline{1,\rho}, \end{aligned} \tag{8.1.17}$$

где

$$\delta_{2n-1} = 1, \tag{8.1.18}$$

$$\hat{\tilde{r}}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1}\rho_i(\omega_k)g_i - \sum_{i=0}^{n-1}\left[\hat{r}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\rho_i(\omega_k) - \hat{i}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\mu_i(\omega_k)\right] r_i \quad k = \overline{1,p}, \tag{8.1.19}$$

$$\hat{\tilde{i}}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1}\mu_i(\omega_k)g_i - \sum_{i=0}^{n-1}\left[\hat{r}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\mu_i(\omega_k) - \hat{i}^{\lambda}(T_{ф},\omega_k)\rho_i(\omega_k)\right] r_i \quad k = \overline{1,p}, \tag{8.1.20}$$

$$p = n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*, \tag{8.1.21}$$

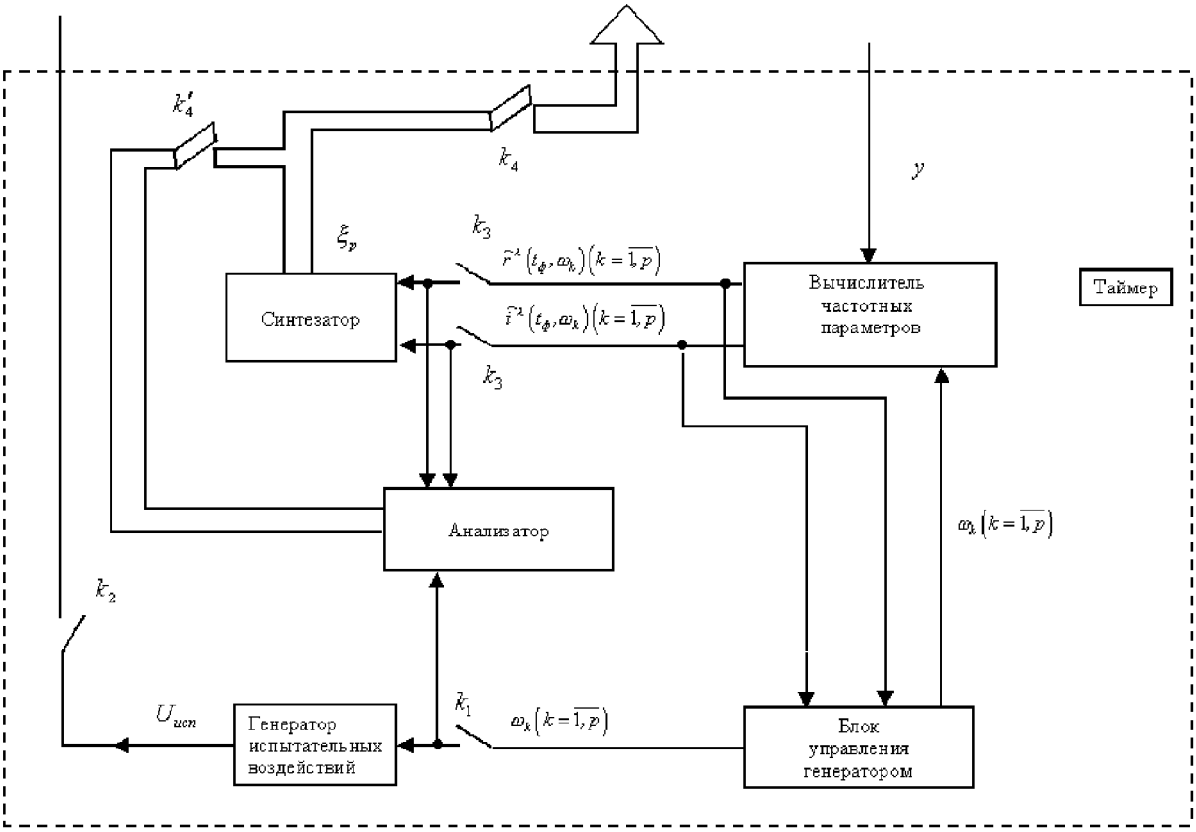

Рис. 8.1.3.

$$\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^* = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{2} & \text{для чётных } \gamma, \\ \dfrac{\gamma+1}{2} & \text{для нечётных } \gamma, \end{cases}, \tag{8.1.22}$$

и проверяет выполнение неравенств

$$\Delta_i > 0 \quad i = \overline{1, 2n-1}, \tag{8.1.23}$$

в которых Δ_i $\left(i = \overline{1, 2n-1}\right)$ определяются формулами (6.2.23).

Его работа описывается *итерационной процедурой 8.1.2*, которая является развитием процедуры 3.2.4 (процедура построения структурного грубого регулятора) на случай, когда параметры и структурные показатели уточнённой модели неизвестны.

Процедура 8.1.2 содержит следующие операции:

Операция 1. Задаться числами $n^{(0)}$ и $\gamma^{(0)}$ и найти в соответствии с (8.1.21)

$$p^{(0)} = n^{(0)} + \left\{\frac{\gamma^{(0)}}{2}\right\}^* + 2\,.$$

Операция 2. Использовать алгоритм п. 8.1.3, при $n = n^{(0)}$ и $\gamma = \gamma^{(0)}$, однако, после получения вектора $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$ замкнуть ключ КЛ4 и передать значение этого вектора в анализатор (вместо регулятора (8.1.3) как это было ранее).

Частотные параметры $\hat{r}^{\lambda}(T_{\oint}, \omega_k)$, $\hat{i}^{\lambda}(T_{\oint}, \omega_k)$ $\left(k = \overline{n^{(0)}+1, p^{(0)}}\right)$ снимаемые с выходов вычислителя частотных параметров не используются синтезатором, а поступают в анализатор вместе с $2n^{(0)}$ частотными параметрами.

Операция 3. Решить уравнения (8.1.16)-(8.1.21) при

$$n = n^{(1)} = n^{(0)} + 1, \quad \gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + 1. \tag{8.1.24}$$

Операция 4. Проверить выполнение неравенств (8.1.23). Если эти неравенства выполняются, то замкнуть ключ К4 и передать $\boldsymbol{\xi}_p^{(0)}$ в регулятор. Если хотя бы одно из неравенств (8.1.23) нарушается, то вернуться к операции 1, полагая в ней $n^{(0)} = n^{(1)}$, $\gamma^{(0)} = \gamma^{(1)}$, $p^{(0)} = p^{(1)} = n^{(1)} + \left\{\dfrac{\gamma^{(1)}}{2}\right\}^*$. Осуществить операцию 2 при $n = n^{(1)}$, $\gamma = \gamma^{(1)}$ и найти вектор $\boldsymbol{\xi}_p^{(1)}$, а затем операцию 3 при

$$n = n^{(2)} = n^{(1)} + 1, \quad \gamma = \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} + 1. \tag{8.1.25}$$

Если неравенства (8.1.23) выполняются, то вектор $\boldsymbol{\xi}_p^{(1)}$ передать в регулятор, а если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то осуществить следующий шаг итерационного процесса: в операции 1 полагать $n^{(0)} = n^{(2)}$, $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$, $p^{(0)} = p^{(2)} = n^{(2)} + \left\{\dfrac{\gamma^{(2)}}{2}\right\}^*$ и т.д.

■

Отметим, что в упомянутой выше процедуре 3.2.4 структурные параметры уточнённой модели n_{ym} и γ_{ym} предполагались известными. При этом условии в операции 3 процедуры 8.1.2 следует положить, вместо (8.1.24),

$$n = n_{ym}, \quad \gamma = \gamma_{ym}, \tag{8.1.26}$$

а число p в схеме на рис. 8.1.3. определять как

$$p = n_{ym} + \left\{\frac{\gamma_{ym}}{2}\right\}^*. \tag{8.1.27}$$

В этом случае процедура 8.1.2 служит для построения регулятора (8.1.3) неминимального порядка.

Возвращаясь к исходному предположению, когда числа n_{ym} и γ_{ym} неизвестны, отметим, что для большей гарантии эффективности процедуры 8.1.2 следует брать приращения структурных показателей при анализе (при выполнении операции 3) больше единицы и полагать вместо (8.1.24)

$$n = n^{(1)} = n^{(0)} + \alpha, \quad \gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \alpha, \quad \alpha \geq 1. \tag{8.1.28}$$

8.1.5. Свойства

Определим место декларативных регуляторов среди других видов регуляторов. Для этого классифицируем регуляторы по нескольким признакам: времени t_∂ достижения цели управления, групповые регуляторы – ТЭИ регуляторы, процедуральность – декларативность.

8.1.5.1. Время достижения цели управления

Этот признак характеризует меру близости времени достижения цели управления к времени регулирования $t_{рег}$. Так, в обычных регуляторах, которые получаются в результате операций идентификации, синтеза и реализации (частным случаем этих операций являются операции 1-3 процедуры 8.1.1) время $t_\partial - t_{рег}$ не связано с временем регулирования. В адаптивных системах числа t_∂ и $t_{рег}$ часто связаны, и при использовании эффективных алгоритмов адаптации эти числа соизмеримы. Декларативные регуляторы занимают промежуточное положение между обычными и адаптивными. Разность $t_\partial - t_{рег}$ у них больше чем у адаптивных, поскольку операции идентификации и управления осуществляются последовательно, а не параллельно как в адаптивных системах. С другой стороны, время $t_\partial - t_{рег}$ для декларативных регуляторов меньше чем для обычных, так как операции идентификации, синтеза и реализации осуществляются без перерывов.

8.1.5.2. Групповой регулятор. ТЭИ-регулятор

Рассмотрим вначале самотождественные объекты. Уравнение (8.1.1) описывает группу объектов, которая характеризуется вектором коэффициентов

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{\gamma-1} \end{array}\right], \tag{8.1.29}$$

и граничными векторами

$$\begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \underline{d}_0 & \underline{d}_1 & \cdots & \underline{d}_{n-1} & \underline{b}_0 & \underline{b}_1 & \cdots & \underline{b}_{\gamma-1} \end{array}\right], \\ \overline{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \cdots & \overline{d}_{n-1} & \overline{b}_0 & \overline{b}_1 & \cdots & \overline{b}_{\gamma-1} \end{array}\right], \end{array} \tag{8.1.30}$$

составленными из нижних и верхних границ значений параметров объекта. Таким образом,

$$\underline{\boldsymbol{\xi}}^{(2)} \le \boldsymbol{\xi}^{(2)} \le \overline{\boldsymbol{\xi}}^{(2)}. \tag{8.1.31}$$

Конкретный (данный) экземпляр объекта будем называть далее *изделием*. Каждое изделие описывается числовым вектором из множества (8.1.31), которое называется *вариантом вектора параметров объекта* $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Варианты порождаются разбросом параметров изделий в пределах технологических допусков на их изготовление, старением изделий и т.п.

При синтезе обычных регуляторов используется расчётный вектор $\boldsymbol{\xi}^{(2)*}$. По этому вектору находится регулятор, который можно назвать *групповым регулятором*, поскольку предполагается, что он обеспечивает требуемые точность и качество регулирования для каждого изделия из группы объектов. Для построения группового регулятора необходим анализ грубости синтезированной системы.

При больших разбросах параметров объекта относительно расчётного вектора может не существовать группового регулятора. В этом случае используют адаптивный регулятор, который в процессе работы настраивается (адаптируется) к конкретному экземпляру объекта и поэтому регулятор, обладающий таким свойством, будем называть *ТЭИ-регулятором* (Только Этого Изделия регулятор).

Очевидно, что декларативный регулятор относится к виду ТЭИ-регуляторов.

Если объект (8.1.1) – несамотождественный, то в число изделий следует включить дополнительно экземпляры конкретного объекта, которые реализуются при различных пусках. Другими словами, множество реализаций одного несамотождественного экземпляра объекта можно трактовать как множество экземпляров самотождественного объекта.

8.1.5.3. Процедуральные и декларативные регуляторы.

Синтез обычного регулятора завершается уравнением (8.1.3), которое описывает процедуру (алгоритм) преобразования входного сигнала $y(t)$ в выходной сигнал $y(t)$ и поэтому это уравнение будем называть процедуральным описанием регулятора или *процедуральным регулятором.*

Декларативный регулятор, в отличие от обычного, задаётся не алгоритмом управления (процедурой преобразования входного сигнала в выходной), а описанием (декларированием) цели управления. Алгоритм управления [уравнение (8.1.3)] – это результат работы декларативного регулятора. Таким образом, процедуральный регулятор – это описание того как нужно управлять, а декларативный – какой цели нужно достичь.

В рамках приведённой классификации обычный регулятор – это *процедуральный групповой регулятор*, а регулятор, приведённый на рис. 8.1.1. – *декларативный ТЭИ-регулятор.*

Заметим, что могут существовать *процедуральный ТЭИ-регулятор* и *декларативный групповой регулятор.*

Действительно, обычный регулятор для объекта с параметрами $\boldsymbol{\xi}^{(2)*}$ (которые использовались для расчёта регулятора) является ТЭИ-регулятором, а декларативный регулятор, в котором осуществляется идентификация лишь одного изделия, а синтезированный в нём закон управления используется для управления другими изделиями является групповым.

8.1.6. Следящие системы

Усложним задачу 8.1.1 условием

$$|y(t) - y_{ж}(t)| \le y^*, \quad t > t^*, \tag{8.1.32}$$

в котором $y_{ж}(t)$ – желаемый выход объекта, связанный с задающим воздействием соотношением

$$y_{ж}(s) = \frac{l_{м}(s)}{\psi_{м}(s)} v(s). \tag{8.1.33}$$

Регулятор, разрешающий эту задачу, описывается уравнением (6.1.47). Если выполняется условие согласования

$$\psi_0^{м} > \psi_0, \tag{8.1.34}$$

где $\psi_0 = \dfrac{m_0^* \bar{f}}{y^*}$, то коэффициентами ψ_l $\left(l = \overline{0, 2n - \gamma - 1}\right)$ в уравнениях (8.1.10), (8.1.11) служат параметры полинома

$$\psi(s) = \psi_{м}(s), \tag{8.1.35}$$

а $r^n(s) = l_{м}(s)$.

Примечание 8.1.1.

До момента подключения регулятора к объекту (это происходит при $t^{**} = t_0 + T_{п.г} + T_{ф} + T_p$) задающее воздействие не влияет на движение объекта и ошибка $|y(t) - y_{ж}(t)|$ может становиться на интервале $[t_0, t^{**}]$ недопустимо большой.

В связи с этим возможен такой алгоритм: на интервале $[t_0, t^{**}]$ прикладывать к объекту, наряду с $u_{исп}(t)$, сигнал

$$u_{м} = r^n(s) v. \tag{8.1.36}$$

В ряде случаев это уменьшит ошибку слежения, однако при этом увеличивается время фильтрации (к объекту приложено дополнительное $kf(t)$ возмущение (8.1.36), реакцию на которое нужно отфильтровать от сигналов возбуждённых испытательным воздействием). ■

Рассмотрим частный случай, когда объект асимптотически устойчив, а задающее воздействие содержит n известных гармоник и описывается выражением

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k t + v_1(t), \tag{8.1.37}$$

где ρ_k, ω_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$ – известные числа, а $v_1(t)$ – неизвестная функция.

В этом случае задающее воздействие может служить и как испытательное.

8.1.7. Проблема настройки времени фильтрации

Управление при неопределённых параметрах носит двойственный (дуальный) характер. Оно выступает как средство изучения объекта и как средство направления его к желаемому состоянию (цели управления). Изучающая часть управления формируется как испытательное воздействие, а направляющая имеет вид (8.1.3). Всегда существует противоречие между познавательной и направляющей сторонами управляющего воздействия. Действительно, слишком поспешное управление без достаточной информации с одной стороны, и слишком осторожное управление, хотя и основанное на накопленной информации, но действующее, когда надобность в нём миновала – с другой стороны, являются двумя крайностями и проблема состоит в том, чтобы наилучшим образом сочетать познавательную и направляющую стороны управляющего воздействия.

В рассматриваемом случае проблема сочетания познавательной и направляющей сторон управления имеет количественную характеристику – время фильтрации. Другими словами, задача состоит в рациональном выборе времени фильтрации – $T_{ф}$.

Переходя к выбору $T_{ф}$, рассмотрим различные виды управлений, которые строятся в зависимости от величины $T_{ф}$.

Осторожное управление. При таком управлении время фильтрации (время изучения объекта) выбирается достаточно большим. Укажем признаки достаточно большого $T_{ф}$ для асимптотически устойчивых объектов.

Первый признак: собственное движение (переходные процессы) в объекте за время фильтрации затухает. Для количественной характеристики этого признака используем значение C_0 степени устойчивости объекта

$$C_0 = \min\{|\operatorname{Re}\lambda_1|,\ |\operatorname{Re}\lambda_2|,\ \ldots,\ |\operatorname{Re}\lambda_n|\} \tag{8.1.38}$$

(где λ_i – собственные числа матрицы A) и будем говорить, что $T_{ф}$ достаточно велико, если

$$T_{ф} > \frac{1}{C_0}. \tag{8.1.39}$$

Другим признаком является неравенство

$$T_{ф} > \frac{2\pi}{\omega_1}, \tag{8.1.40}$$

которое выражает естественную нижнюю границу времени фильтрации, при которой период наиболее медленной испытательной гармоники меньше $T_{ф}$.

При достаточно большом времени фильтрации оценки частотных характеристик и их истинные значения – $r^{\lambda}(\omega_k)$, $i^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – близки. Это означает, что

$$\left|\hat{r}^{\lambda}(T_{ф}, \omega_k) - r^{\lambda}(\omega_k)\right| \le \varepsilon_{ф}, \quad \left|\hat{i}^{\lambda}(T_{ф}, \omega_k) - i^{\lambda}(\omega_k)\right| \le \varepsilon_{ф} \quad k = \overline{1,n}. \tag{8.1.41}$$

8.1.8. Алгоритмы сокращения времени фильтрации

Управление с настраиваемым временем фильтрации. Время фильтрации при осторожном управлении выбирается априори (до начала процесса адаптации). Ясно, что время $T_{ф}$, при котором выполняются неравенства (8.1.41), существенно зависит от начальных отклонений объекта, реализации внешнего воздействия $f(t)$ и помехи $æ(t)$. В связи с этим $T_{ф}$ берётся с достаточным запасом так, чтобы (8.1.41) выполнялось для каждой из функций $f(t)$ и $æ(t)$.

В действительности каждой конкретной реализации $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $f(t)$ и $æ(t)$ соответствует своё значение $T_{ф} = T_{ф}\left(\boldsymbol{x}^{(0)},\, f(t),\, æ(t)\right)$, при котором оценки и истинные значения частотных характеристик близки. Поэтому нужно определять (настраивать) его в процессе адаптации. Это позволит сократить время фильтрации для большого числа реализаций внешних воздействий, помех и начальных условий.

Для описания процесса настройки $T_{ф}$ будем полагать его в (8.1.7)-(8.1.11) переменным $(t_{ф})$, а зависимость оценок от времени фильтрации будем выражать, используя обозначения

$$\hat{r}^{\lambda}(t_{ф}, \omega_k), \quad \hat{i}^{\lambda}(t_{ф}, \omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \tag{8.1.42}$$

Из утверждения 5.3.3 следует сходимость процесса фильтрации

$$\lim_{t_{\Phi}\to\infty} \hat{r}^{\lambda}(t_{ф}, \omega_k) = r^{\lambda}(\omega_k), \quad \lim_{t_{\Phi}\to\infty} \hat{i}^{\lambda}(t_{ф}, \omega_k) = i^{\lambda}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \tag{8.1.43}$$

и поэтому искомый вектор

$$\boldsymbol{\xi}_p = \lim_{t_{\Phi}\to\infty} \boldsymbol{\xi}_p(t_{ф}). \tag{8.1.44}$$

Из этого равенства можно определить момент окончания фильтрации, исходя из близости $\boldsymbol{\xi}_p(t_{ф})$ и $\boldsymbol{\xi}_p$. Поскольку вектор $\boldsymbol{\xi}_p$ неизвестен, то используем признак близости векторов $\boldsymbol{\xi}_p(t_{ф})$ и $\boldsymbol{\xi}_p$ и будем искать $t_{ф}$ из неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_{pi}(t_{ф}) - \xi_{pi}(t_{ф} + \Delta t_{ф})| \le \varepsilon_{ф} \quad i = \overline{1, n}. \tag{8.1.45}$$

где $\Delta t_{ф}$ – достаточно малое положительное число.

Управление с возвратом. Пусть $T_{ф}$ удовлетворяет неравенству (8.1.40), а соотношение (8.1.39) может при этом нарушаться. Используя алгоритм п. 8.1.3 получим регулятор (8.1.3). После подключения его к объекту возможны две ситуации: первая – система (8.1.1), (8.1.3) – асимптотически устойчива; вторая – эта система неустойчива. Для того, чтобы различить эти ситуации, в процессе работы будем считать нарушение неравенства (8.1.4) признаком неустойчивости системы (8.1.1), (8.1.3). Если возникла первая ситуация, то задача 8.1.1 решена. При второй ситуации прекращаем [в момент выполнения равенства (8.1.4)] процесс управления (размыкаем ключ К5), повторяем фильтрацию, увеличивая время фильтрации, например, в два раза $\left(T_{ф}^{(1)} = 2T_{ф}^{(0)}\right)$ и вычисляем вектор параметра регулятора (8.1.3). Прикладывая это управление к объекту (8.1.1) вновь проверяем выполнение условия (8.1.4) т.д..

8.2. Декларативный регулятор ЧДР-2 и его экспериментальное исследование

8.2.1. Алгоритм регулятора

Рассмотрим асимптотически устойчивый и полностью управляемый объект первого вида с неизвестными параметрами

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(u + f), \quad z = \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}, \tag{8.2.1}$$

где $\boldsymbol{l}$ – заданный n-мерный вектор чисел, а внешнее возмущение $f(t)$ – ограниченная функция (8.1.2).

Пример 8.2.1. Найти регулятор

$$u = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \tag{8.2.2}$$

для объекта (8.2.1) с неизвестными параметрами такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени t^*, выполнялось целевое условие

$$|z(t)| \le z^*, \quad t > t^*, \tag{8.2.3}$$

в котором z^* – заданное число. ■

Регулятор (8.2.2) для самотождественных объектов можно найти используя аналог процедуры 8.1.1. Операция синтеза в такой процедуре сводится к решению задачи 7.2.1.

Построим декларативный регулятор для несамотождественных объектов (8.2.1), а также для самотождественных объектов, параметры конкретных экземпляров которых существенно отличаются (большой разброс параметров изделий). Структурная схема объекта с декларативным регулятором приведена на рис. 8.2.1.

Сигнал с генератора испытательных воздействий

$$u_{u\,cn}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k t. \tag{8.2.4}$$

Выход вычислителя частотных параметров

$$\hat{r}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int\limits_{t_0'}^{t_0'+T_{\Phi}} x(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}, \tag{8.2.5}$$

$$\hat{i}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int\limits_{t_0'}^{t_0'+T_{\Phi}} x(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}. \tag{8.2.6}$$

Эти вектора поступают в синтезатор, уравнения которого имеют, в соответствии с (7.1.12), (7.2.5), вид

$$M_r(T_{\phi})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}_r(T_{\phi}), \tag{8.2.7}$$

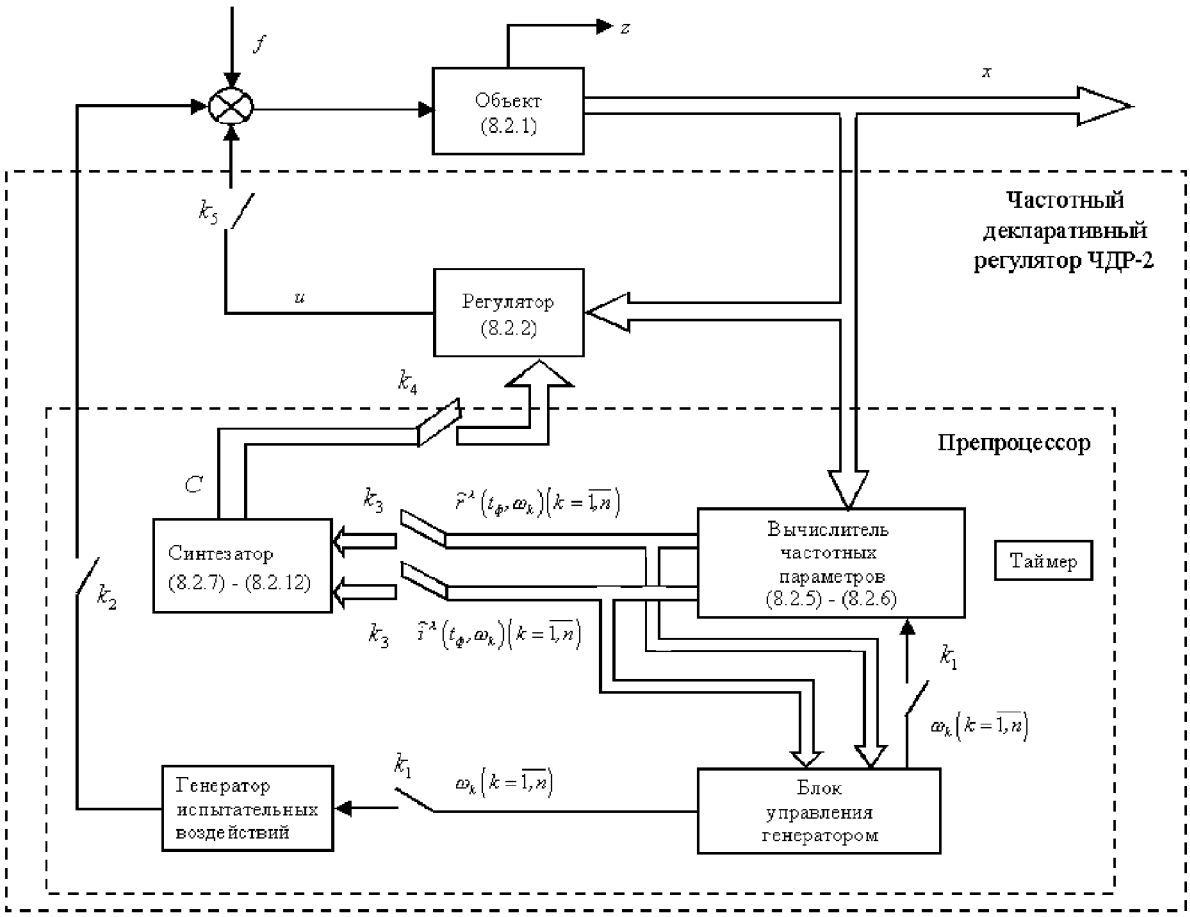

Рис. 8.2.1.

где

$$M_r(T_\phi) = -\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_1) & \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_2) & \cdots & \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_n) \end{pmatrix}', \tag{8.2.8}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_r(T_\phi) = \frac{1}{2}\Big[& \hat{\boldsymbol{r}}'_x(T_\phi,\omega_1)Q\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_1) + \hat{\boldsymbol{i}}'_x(T_\phi,\omega_1)Q\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_\phi,\omega_1) \\ & \hat{\boldsymbol{r}}'_x(T_\phi,\omega_2)Q\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_2) + \hat{\boldsymbol{i}}'_x(T_\phi,\omega_2)Q\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_\phi,\omega_2) \quad \cdots \\ & \hat{\boldsymbol{r}}'_x(T_\phi,\omega_n)Q\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_n) + \hat{\boldsymbol{i}}'_x(T_\phi,\omega_n)Q\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_\phi,\omega_n)\Big]'. \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Для ступенчатых внешних возмущений

$$Q = q\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}', \tag{8.2.10}$$

$$q \geq \frac{|\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}}(0)|\hat{f} - z^*}{0.5|\boldsymbol{l}'\hat{\boldsymbol{\beta}}(0)|^2 z^*}, \tag{8.2.11}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(0) = \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_\phi,\omega_0) + j\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_\phi,\omega_0), \quad \omega_0 = 0. \tag{8.2.12}$$

Работа регулятора организуется таймером, который управляется ключами К1–К5 в той же последовательности как и в регуляторе ЧДР-1.

Пример 8.2.1. Пусть имеем объект управления

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_1(u+f), \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2, \tag{8.2.13}$$

$$z = x_3, \tag{8.2.14}$$

подверженный действию ступенчатого возмущения

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t_0 \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t_0 < 0. \end{cases} \tag{8.2.15}$$

Требуется найти регулятор

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \tag{8.2.16}$$

такой, чтобы через время t^* выполнялось условие

$$|x_3(t)| \leq 0.5. \tag{8.2.17}$$

Объект (8.2.13) асимптотически устойчив, графики его переходных процессов, возбуждённых воздействием (8.1.15), приведены на рис. 8.2.2.

Эти графики получены путём интегрирования уравнений (8.2.13) на ЭВМ при численных значениях параметров

$$a_{11} = -0.97, \quad a_{21} = 1.03, \quad a_{22} = -0.206, \quad a_{23} = -0.13, \quad a_{32} = -1.03; \qquad b = 0.97.$$

Шаг интегрирования 0.01 с.

Из графика для $x_3(t)$ замечаем, что без регулятора требование (8.1.17) к точности не выполняется.

В связи с этим уравнения (8.2.13) были решены при последовательном испытательном воздействии

$$u_{исп} = \begin{cases} \sin\omega_1 t & \text{при} \quad t \in [0, 11T_1], \\ \sin\omega_2 t & \text{при} \quad t \in [11T_1, 11T_2], \\ \sin\omega_3 t & \text{при} \quad t \in [11(T_1+T_2), 11T_3], \end{cases} \tag{8.2.18}$$

где T_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ периоды испытательных частот

$$\omega_1 = 0.16 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 0.34 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 0.63 \text{ рад/с}. \tag{8.2.19}$$

Фильтруя последовательно реакции на каждую из трёх испытательных гармоник найдем вектора частотных параметров

$$\begin{array}{lll} \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_ф, \omega_1) = \quad , & \hat{\boldsymbol{i}}_x(T_ф, \omega_1) = \quad ; \\ \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_ф, \omega_2) = \quad , & \hat{\boldsymbol{i}}_x(T_ф, \omega_2) = \quad ; \\ \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_ф, \omega_3) = \quad , & \hat{\boldsymbol{i}}_x(T_ф, \omega_3) = \quad . \end{array} \tag{8.2.20}$$

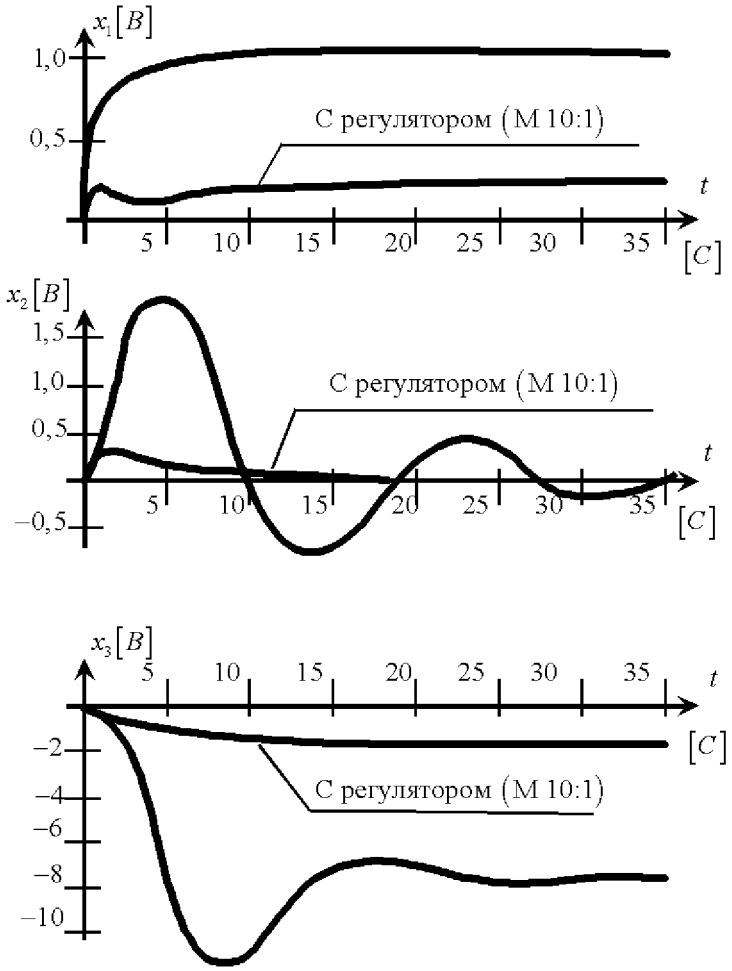

Рис. 8.2.2.

по которым была построена система линейных алгебраических уравнений (8.2.7), решение последней при

$$q_{11} = q_{22} = 0, \quad q_{33} = 1 \tag{8.2.21}$$

привело к параметрам регулятора (8.2.16)

$$c_1 = -18.5, \quad c_2 = -17.8, \quad c_3 = 1.58. \tag{8.2.22}$$

Графики переходных процессов в системе (8.2.13), (8.2.16) при таких параметрах регулятора приведены на рис. 8.2.2. ■

8.2.2. Анализатор

При неизвестной размерности вектора пространства состояний объекта применим итерационную процедуру, аналогичную процедуре 8.1.2. Для этого в состав процессора введём анализатор, основанный на критериях устойчивости, приведённых в п. 7.3. Построим алгоритм работы анализатора, используя второй из этих критериев (как более конструктивный).

Процедура 8.2.1. работы анализатора состоит из операций:

Операция 1. Задаться числом $n^{(0)}$.

Операция 2. Использовать алгоритм п. 8.2.1 при $n = n^{(0)}$ и найти вектор $\boldsymbol{c}_{(0)}$. Передать вектор $\boldsymbol{c}_{(0)}$ вместо регулятора в анализатор (это означает, что ключ КЛ4 остаётся разомкнутым).

Операция 3. На основе (7.3.24) сформировать уравнения

$$M^{(\alpha)}(T_{\phi})\boldsymbol{c}^{(\alpha+1)} = \boldsymbol{n}^{(\alpha)}(T_{\phi}) \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{8.2.23}$$

где

$$M^{(\alpha)}(T_{\phi}) = -\left[\begin{array}{cccc} M^{(\alpha)}_{[1]}(T_{\phi}) & M^{(\alpha)}_{[2]}(T_{\phi}) & \cdots & M^{(\alpha)}_{[n]}(T_{\phi}) \end{array}\right] \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{8.2.24}$$

$$\boldsymbol{n}^{(\alpha)}(T_{\phi}) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc} n^{(\alpha)}_{1}(T_{\phi}) & n^{(\alpha)}_{2}(T_{\phi}) & \cdots & n^{(\alpha)}_{n}(T_{\phi}) \end{array}\right] \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{8.2.25}$$

$$\begin{aligned} M^{(\alpha)}_{[k]}(T_{\phi}) &= \boldsymbol{r}^{l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\left[1 - \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}_{l}\boldsymbol{r}^{l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\right] - \\ &- \boldsymbol{i}^{\,l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\left[\quad \boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}_{l}\boldsymbol{i}^{\,l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\right] \quad k = \overline{1, n}, \\ n^{(\alpha)}_{k}(T_{\phi}) &= \boldsymbol{r}^{l\prime}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\left[\varepsilon^2\tilde{Q} + \boldsymbol{c}^{(\alpha)}_{l}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}_{l}\right]\boldsymbol{r}^{l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k) + \\ &+ \boldsymbol{i}^{\,l\prime}_{x}(T_{\phi}, \omega_k)\left[\varepsilon^2\tilde{Q} + \boldsymbol{c}^{(\alpha)}_{l}\boldsymbol{c}^{(\alpha)\prime}_{l}\right]\boldsymbol{i}^{\,l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}^{l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right] + \hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\left[\tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]}{\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]^2 + \left[\tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]^2} \quad k = \overline{1, n} \tag{8.2.26}$$

$$\boldsymbol{i}^{l}_{x}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right] - \hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\left[\tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]}{\left[1 + \tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{r}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]^2 + \left[\tilde{\boldsymbol{l}}'\hat{\boldsymbol{i}}_x(T_{\phi}, \omega_k)\right]^2} \quad k = \overline{1, n} \tag{8.2.27}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}^{(0)}_{l} &= -\boldsymbol{c}^{*}, \\ \tilde{\boldsymbol{l}} &= -\boldsymbol{c}^{*}, \end{aligned} \tag{8.2.28}$$

$\tilde{Q}$ – произвольная положительно-определённая матрица.

Операция 4. В этих уравнениях положить

$$n = n^{(0)} + 1, \quad \boldsymbol{c}^{*} = [\boldsymbol{c}_{(0)}, 0]' \tag{8.2.29}$$

и решить эти уравнения для различных значений ε и получить $n^{(0)}+1$-мерные вектора

$$\boldsymbol{c}_{l}(\varepsilon) = \lim_{\alpha\to\infty} \boldsymbol{c}^{(\alpha)}_{l}(\varepsilon). \tag{8.2.30}$$

Операция 5. Если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{c}_{l}(\varepsilon) = 0, \tag{8.2.31}$$

то передать вектор $\boldsymbol{c}_{(0)}$ в регулятор (замкнуть ключ КЛ4). Если соотношение (8.2.31) не выполняется, то вернуться к операции 1 и положить в ней $n = n^{(1)} = n^{(0)} + 1$. Затем осуществить операции 2 и 3, положив в последней операции $n = n^{(1)} = n^{(0)} + 2$, $\boldsymbol{c}^* = [\boldsymbol{c}_{(1)}, 0]'$, где $\boldsymbol{c}_{(1)}$ результат операции 2.

Вновь проверить выполнение соотношения (8.2.31). Если оно выполняется, то $\boldsymbol{c}_{(1)}$ передать в регулятор. Если не выполняется, вернуться к операции I, полагая $n = n^{(0)} + 2$ и т.д.

■

8.2.3. Описание экспериментальной установки

Для исследования частотного декларативного регулятора была создана экспериментальная установка. Она состоит из имитатора физического объекта (ИФО), аналого-цифрового преобразователя, цифро-аналогового преобразователя и микро-ЭВМ ««Электроника-60»».

Имитатор физического объекта, приведённый на рис. 8.2.3., представляет собой последовательное соединение инерционного (А1) и колебательного (А3-А5) звеньев, собранных на операционных усилителях (А2, А6, А7 – развязывающие усилители).

Вход ««f»» предназначен для подачи возмущения

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{8.2.32}$$

С помощью ключей S1-S5 осуществляется изменение параметров ИФО, приводящее к существенному изменению его динамических характеристик ($\bar{\text{S}}$ – ключ разомкнут, S – ключ замкнут).

В качестве аналого-цифрового преобразователя используется стандартный 10-ти разрядный преобразователь Ф7707/1 с коммутатором на 8 каналов. Одноканальный цифро-аналоговый преобразователь реализован на базе 10-ти разрядного ЦАП К572ПА1.

Программа микро-ЭВМ ««Электроника-60»», реализующая алгоритм п. 8.2.1 (для операции с фиксированной точкой и двух десятичных знаков после запятой) содержит 800 операторов Ассемблера и занимает объем 5.5 Кб.

8.2.4. Экспериментальное исследование

Задача адаптивного управления ставится так: для объекта, приведённого на рис. 8.2.3. требуется определить параметры регулятора

$$u_{упр}(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \tag{8.2.33}$$

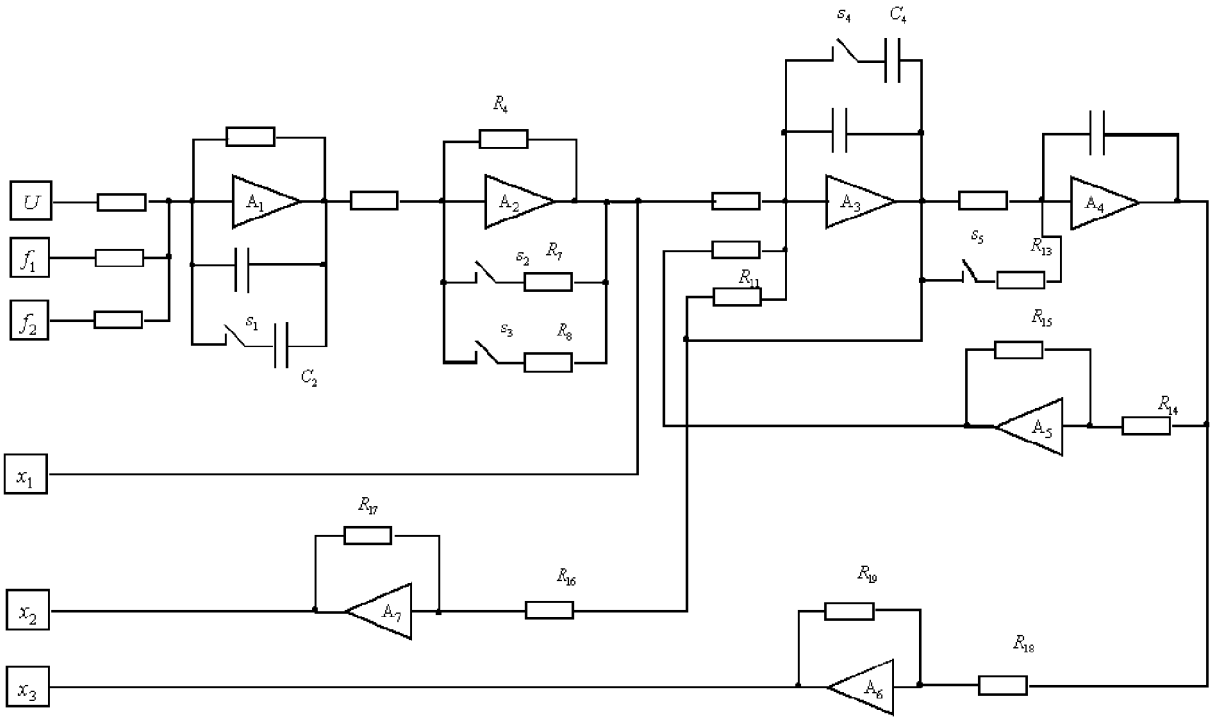

Рис. 8.2.3.

(x_1, x_2, x_3 доступны измерению), чтобы, при действии возмущения (8.2.32) с

$$\bar{f} = 1, \tag{8.2.34}$$

установившееся значение по переменной x_3 не превосходило заданного

$$|x_{3,уст}| \geq 1\,[B] \tag{8.2.35}$$

на любом из возможных режимов движений объекта, определяемым соответствующим положением ключей.

Эксперимент проводился в 2 этапа.

Сначала определялись параметры регулятора c_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ при действии возмущения с параметром $\bar{f} = 0.1$, а затем прикладывалось возмущение с $\bar{f} = 1$ и проверялось достижение цели (8.2.35) (одновременная подача испытательного сигнала и большого внешнего возмущения приводит к насыщению операционных усилителей).

Всего было проведено 3 серии экспериментов, общими для которых являются значения испытательных сигналов с частотами

$$\omega_1 = 0.16 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 0.34 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 0.63 \text{ рад/с}, \tag{8.2.36}$$

подававшимися последовательно во времени.

В первой серии исследовалось решение поставленной задачи для различных режимов движения имитатора физического объекта (см. таблицу 8.2.1) при $q_{33} = 0.3$.

Таблица 8.2.1. Достижение цели управления

Режим	Ключи	c_1	c_2	c_3	$x_{3,уст}$
1	$\bar{S}_1 S_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	− 0.4	− 0.4	+0.06	−0.73
2	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	− 6.86	− 3.97	+0.62	−0.74
3	$S_1 S_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	− 2.5	0	0	−0.75
4	$S_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	−12.9	− 2.06	+0.03	−0.75
5	$\bar{S}_1 S_3 S_4 \bar{S}_5$	− 0.51	− 1.1	+0.09	−0.65
6	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 S_4 \bar{S}_5$	− 4.15	−10.9	+0.63	−0.62
7	$S_1 S_3 S_4 \bar{S}_5$	+ 0.5	− 0.4	−0.33	−1
8	$S_1 \bar{S}_3 S_4 \bar{S}_5$	−14.3	− 8.61	+0.08	−0.74
9	$\bar{S}_1 S_3 \bar{S}_4 S_5$	− 1.5	− 1.63	+0.07	−0.77
10	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 S_5$	−15.8	−13.3	+0.18	−1
11	$S_1 S_3 \bar{S}_4 S_5$	− 1.5	− 0.5	−0.02	−0.73
12	$S_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 S_5$	−23.1	− 2.84	−0.45	−0.74
13	$\bar{S}_1 S_3 S_4 S_5$	− 4	− 5.27	−0.13	−0.75
14	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 S_4 S_5$	−24.8	−28.4	−0.18	−0.75
15	$S_1 S_3 S_4 S_5$	0	− 3.01	0	−0.87
16	$S_1 \bar{S}_3 S_4 S_5$	−35.2	−16.6	−1.36	−0.3

Значение $x_{3,уст}$ для различных режимов может быть уменьшено (таблица 8.2.2) при увеличении параметра q_{33}.

Таблица 8.2.2. Повышение точности регулирования

Режим	c_1	c_2	c_3	$x_{3,уст}$	Примечание
2	-20.83	-13.6	+1.89	-0.24	$q_{33} = 1$

Время фильтрации $T_ф$ определяется временем установления вынужденных колебаний в объекте управления при смене испытательных частот и составляет около 8 минут.

Процесс регулирования (достижение цели управления) после того как определены коэффициенты регулятора при действии возмущения типа ««ступенька»» с $\bar{f} = 1$ показан на рис. 8.2.4. (испытательный сигнал не подаётся).

Необходимость адаптации при изменении параметров ИФО исследовалась в третьей серии экспериментов. После определения коэффициентов регулятора для какого-либо режима происходило изменение параметров объекта управления, а адаптация к ««новому»» режиму не производилась (см. табл. 8.2.3).

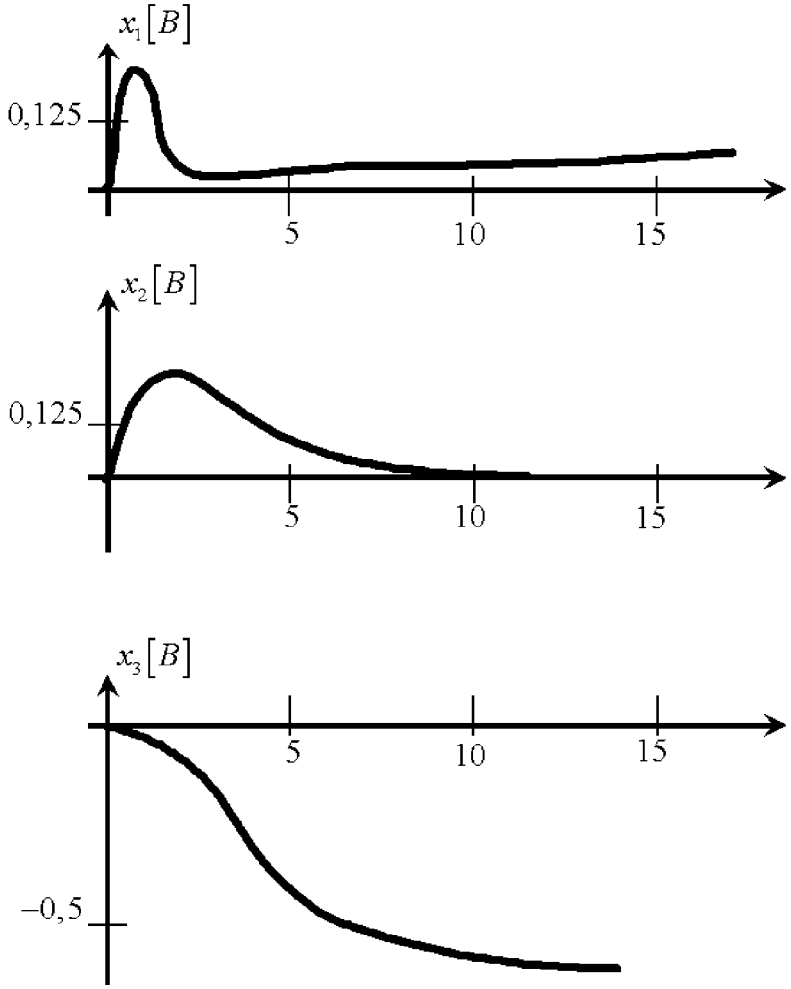

Рис. 8.2.4.

Таблица 8.2.3. Регулирование без адаптации

Регулятор для режима	Переход на режим	$x_{3,уст}$	Примечание
1	2	−4.9	Не выполняется
3	4	−3.73	требование
5	6	−4.76	по
9	10	−5	точности
11	12	−5.32	стабилизации
7	8	—	
13	14	—	неустойчива
15	16	—	

Результаты экспериментов показывают, что при переходе на ««новый»» режим возможна потеря устойчивости системы, замкнутой ««старым»» регулятором. После подстройки (таблица 8.2.1) обеспечивается устойчивость и заданная точность про-

цесса регулирования.

8.3. Управление многорежимными объектами

8.3.1. Объекты с известными моментами изменения режима

Многорежимный объект управления описывается уравнениями

$$y^{(n)}+d_{n-1}^{(i)}y^{(n-1)}+\cdots+d_1^{(i)}\dot{y}+d_0^{(i)}y=b_\gamma^{(i)}u^{(\gamma)}+\cdots+b_1^{(i)}\dot{u}+b_0^{(i)}u+m_\alpha^{(i)}f^{(\alpha)}+\cdots+m_1^{(i)}\dot{f}+m_0^{(i)}f, \quad (8.3.1)$$

заданными на интервалах

$$t_{i-1}\le t<t_i \quad i=1,2,\dots, \quad (8.3.2)$$

где t_{i-1} – заданный, момент начала i-го режима, а t_i – момент его окончания $(i=1,2,\dots)$.

Будем полагать, что в каждом из режимов объект полностью управляем и устойчив по управлению $[b^{(i)}(s)\ (i=1,2,\dots)$ – гурвицевы полиномы], а

$$|f(t)|\le f^*. \quad (8.3.3)$$

Пусть известны необходимые оценки чисел m_j^i $\left(j=\overline{0,\alpha},\ \ i=1,2,\dots\right)$. Если объект (8.3.1) – самотождественный, то, используя процедуру 8.1.1, построим многорежимный регулятор

$$g_{n-1}^{(i)}u^{(n-1)}+\cdots+g_1^{(i)}\dot{u}+g_0^{(i)}u=r_{n-1}^{(i)}y^{(n-1)}+\cdots+r_1^{(i)}\dot{y}+r_0^{(i)}y, \quad t_{i-1}\le t<t_i \quad i=1,2,\dots, \quad (8.3.4)$$

который обеспечивает достижение цели управления

$$|y(t)|\le y^*, \quad (8.3.5)$$

за время $t_{рег}$, если $t_{рег}<t_i-t_{i-1}$ для всех $i=1,2,\dots$.

Для несамотождественных объектов используем в каждом режиме частотный декларативный регулятор ЧДР-1. При этом возникают две особенности. Первая состоит в том, что длительности режимов $T^{(i)}=t_i-t_{i-1}$ должны быть согласованы с временем $t^{*(i)}$ достижения цели управления в каждом режиме.

Приведём условия такого согласования. Время достижения цели управления (время адаптации, время настройки) однорежимного объекта (8.1.1), определяемое выражением (8.1.15), зависит от реализовавшегося варианта параметров объекта, начальных условий, вида внешнего возмущения и поэтому введём *предельное время адаптации*

$$t^*_{пред}=\max_{\xi\in\Xi,\,|f(t)|\le f^*} t^*. \quad (8.3.6)$$

Для многорежимного объекта предельное время адаптации для каждого режима

$$t^{*(i)}_{пред}=\max_{\xi^i\in\Xi^i,\,|f(t)|\le f^*} t^{*(i)}. \quad (8.3.7)$$

Таким образом, условия согласования имеют вид

$$T^{(i)} > t^{*(i)}_{пред} \quad i = 1, 2, \dots . \tag{8.3.8}$$

Вторая особенность применения ЧДР-1 для многорежимных объектов состоит в том, что к началу второго режима объект замкнут регулятором и описывается уравнениями (8.3.1), (8.3.4) при $i = 1$.

Определение 8.3.1. Многорежимный объект называется *самотождественным в i-том режиме относительно регулятора $i-1$-го режима*, если система

$$d^{(i)}(s)y = b^{(i)}(s)u + m^{(i)}(s)f, \tag{8.3.9}$$

$$g^{(i-1)}(s)u = r^{(i-1)}(s)y, \tag{8.3.10}$$

асимптотически устойчива. ■

Далее будем полагать, что объект обладает указанным свойством для $i = 2, 3, \dots$.

Рассмотрим указанные особенности более подробно.

8.3.2. Частотно-квазистационарные объекты*

В связи с неконструктивным характером условия согласования (8.3.8) приведём проверяемый признак выполнения этого условия.

Заметим, что выражение (8.1.15) для времени адаптации доминирующим (определяющим) является время фильтрации $T_{ф}$. Определим, аналогично (8.3.6) *предельное время фильтрации*

$$T^{(i)}_{ф.пред} = \max_{\xi^i \in \Xi^i, |f(t)| \le f^*} T^{(i)}_{ф} \quad i = 1, 2, \dots . \tag{8.3.11}$$

Определение 8.3.2. Многорежимный объект называется *частотно-квазистационарным*, если предельное время фильтрации (предельное время определения частотных параметров) $T^{(i)}_{ф.пред}$ в каждом i-том режиме не превышает длительности $T^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots)$ этого режима. ■

Частотная квазистационарность объекта служит признаком выполнения условия (8.3.8).

Правда, здесь есть опасность, что система (8.3.1), (8.3.4) с частотно-квазистационарным объектом может оказаться неустойчивой, хотя в каждом режиме (при каждом $i = 1, 2, \dots$) корни её характеристического полинома имеют по построению отрицательные вещественные части. Эта неустойчивость хорошо известна в нестационарных системах (а система (8.3.1), (8.3.4) – частный случай нестационарной системы), когда они трактуются как совокупность стационарных систем. При этом может оказаться, что исходная нестационарная система неустойчива несмотря на гурвицевость бесчисленного множества стационарных систем, порождаемых ««замораживанием»» параметров нестационарной системы.

Заметим, что при условии (8.3.8) подобная ситуация маловероятна, поскольку переходные процессы затухают к моменту окончания режима.

8.3.3. Частотный адаптивный регулятор ЧАР-3

В первом режиме работы объекта управление формируется препроцессором ЧДР-1. Во втором и последующих режимах необходимо выделить частотные параметры объекта из частотных параметров объекта, замкнутого регулятором первого и других предыдущих режимов. Возможны два способа выделения: определение стабилизированных частотных параметров по формулам (5.2.31), (5.2.32) и использование частотных параметров входа и выхода, введённых определениями 5.2.5 и 5.2.6.

Первый способ реализуется путём введения в вычислитель частотных параметров ЧДР-1 дополнительного блока (блока-восстановителя ω-индексов объекта) выходом которого служат стабилизированные частотные параметры объекта

$$r\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\mathrm{Re}\,\frac{\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)+j\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)}{\left[1+\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)+j\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)\right]\cdot w_p^{(i-1)}(j\omega_k)}\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots \tag{8.3.12}$$

$$i\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\mathrm{Jm}\,\frac{\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)+j\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)}{\left[1+\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)+j\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)\right]\cdot w_p^{(i-1)}(j\omega_k)}\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots \tag{8.3.13}$$

Здесь $\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)$ и $\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)$ – выходы фильтров Фурье в i-том режиме.

Они формируются аналогично (8.1.7), (8.1.8). При этом, в силу устойчивости объекта в i-том режиме, замкнутого регулятором, полученным для $i-1$-го режима, полагаем $\lambda=0$. Таким образом,

$$\alpha\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\alpha_k\left(T_{\phi}^{(i)}\right)=\frac{2}{T_{\phi}}\int\limits_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1}+T_{\Phi}^{(i)}}y(\tau)\sin\omega_k\tau\,d\tau\quad k=\overline{1,n}, \tag{8.3.14}$$

$$\beta\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\beta_k\left(T_{\phi}^{(i)}\right)=\frac{2}{T_{\phi}}\int\limits_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1}+T_{\Phi}^{(i)}}y(\tau)\cos\omega_k\tau\,d\tau\quad k=\overline{1,n}. \tag{8.3.15}$$

При **втором способе** в препроцессор ЧДР-1 вводится вычислитель частотных параметров входа объекта и тогда препроцессор принимает вид, показанный на рис. 8.3.1. (в схеме препроцессора опущен таймер и управляемые им ключи).

Фильтр частотных параметров входа аналогичен фильтру частотных параметров выхода

$$\nu\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\nu_k\left(T_{\phi}^{(i)}\right)=\frac{2}{T_{\phi}}\int\limits_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1}+T_{\Phi}^{(i)}}u(\tau)\sin\omega_k\tau\,d\tau\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots, \tag{8.3.16}$$

$$\gamma\left(T_{\phi}^{(i)},\omega_k\right)=\gamma_k\left(T_{\phi}^{(i)}\right)=\frac{2}{T_{\phi}}\int\limits_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1}+T_{\Phi}^{(i)}}u(\tau)\cos\omega_k\tau\,d\tau\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots. \tag{8.3.17}$$

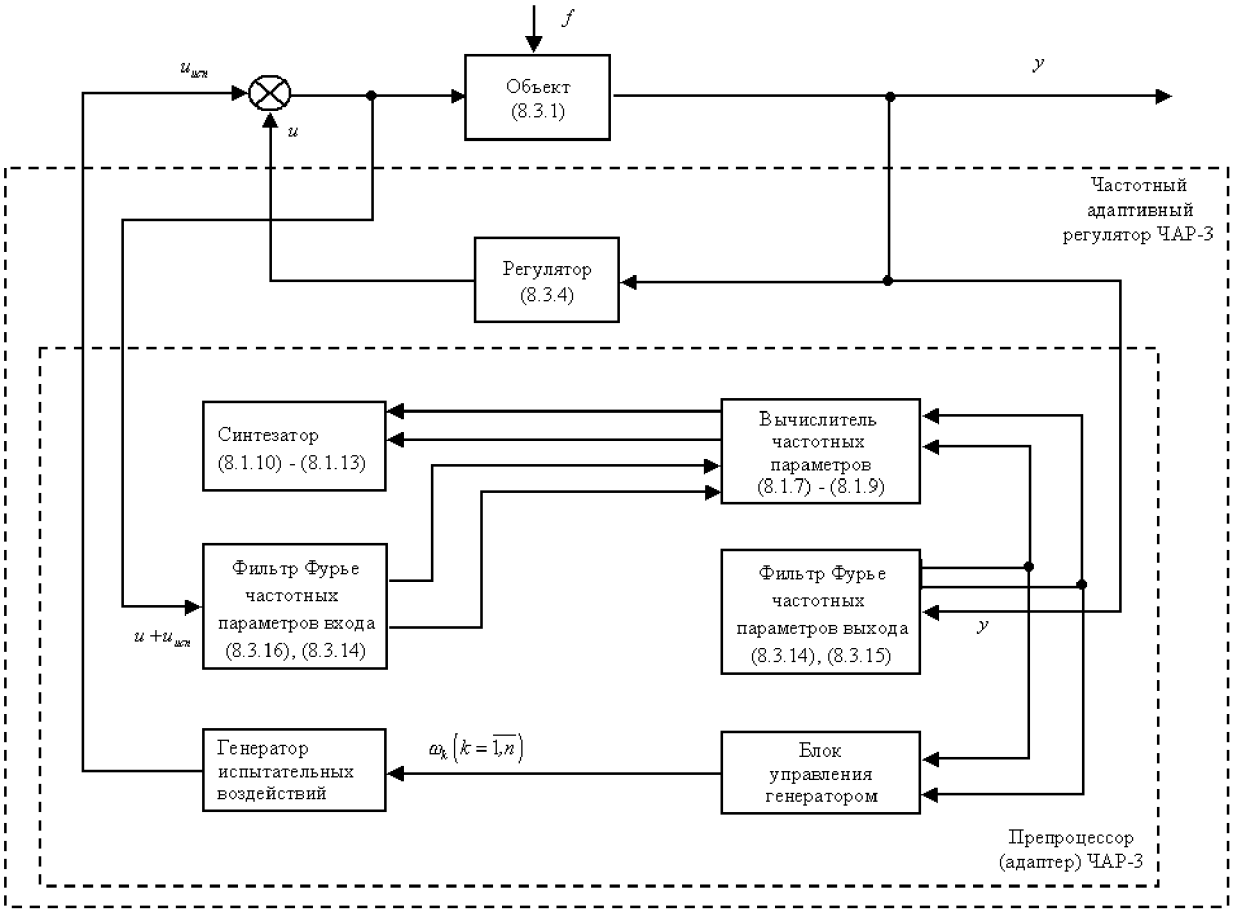

Рис. 8.3.1.

Вычислитель частотных параметров формирует в соответствии с (5.2.43)

$$r^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right) = \frac{\nu_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)\alpha_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)+\gamma_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)\beta_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)}{\nu_k^2\left(T_{ф}^{(i)}\right)+\gamma_k^2\left(T_{ф}^{(i)}\right)} \quad k=\overline{1,n} \quad i=2,3,\ldots, \tag{8.3.18}$$

$$i^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right) = \frac{\nu_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)\beta_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)-\gamma_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)\alpha_k\left(T_{ф}^{(i)}\right)}{\nu_k^2\left(T_{ф}^{(i)}\right)+\gamma_k^2\left(T_{ф}^{(i)}\right)} \quad k=\overline{1,n} \quad i=2,3,\ldots. \tag{8.3.19}$$

8.3.4. Объекты с неизвестными моментами изменения режима

Пусть при неизвестных моментах t_i $(i=1,2,\ldots)$ изменения режима известны оценки длительности режимов

$$\breve{T}^i \le T^i \quad i=1,2,\ldots, \tag{8.3.20}$$

где $\breve{T}^i$ $(i=1,2,\ldots)$ – заданные числа.

Определим моменты изменения режима регулятора

$$t_{ip} = i_p T^* \quad i_p=1,2,\ldots, \tag{8.3.21}$$

где $T^* = \min\{T^1, T^2, \dots\}$ – наименьшая продолжительность режимов объекта.

Это означает, что регулятор работает циклически (с периодом T^*) и описывается уравнением

$$\begin{gathered} g_{n-1}(i_pT^*)\,u^{(n-1)} + \dots + g_1(i_pT^*)\,\dot{u} + g_0(i_pT^*)\,u = \\ = r_{n-1}(i_pT^*)\,y^{(n-1)} + \dots + r_1(i_pT^*)\,\dot{y} + r_0(i_pT^*)\,y \quad i_p = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{8.3.22}$$

где $g_i(i_pT^*)$, $r_j(i_pT^*)$ $\quad i = \overline{0, n-1} \quad j = \overline{0, n-1}$ – параметры регулятора в i_p-том $\quad (i_p = 1, 2, \dots)$ режиме его работы. Естественно, что для периода T^* должно выполняться условие согласования (8.3.8)

$$T^* > t^{*(i)}_{npeд} \quad i = 1, 2, \dots. \tag{8.3.23}$$

Приведём ситуацию, когда это условие выполняется. Применим описанный адаптивный регулятор для стабилизации нестационарного объекта

$$\begin{gathered} y^{(n)} + d_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + d_1(t)\dot{y} + d_0(t)y = \\ = b_\gamma(t)u^{(\gamma)} + \dots + b_1(t)\dot{u} + b_0(t)u + m_\alpha(t)f^{(\alpha)} + \dots + m_1(t)\dot{f} + m_0(t)f, \end{gathered} \tag{8.3.24}$$

параметры которого изменяются достаточно медленно (например, при ««старении»» элементов объекта). Пусть, в частности, скорость изменения параметров удовлетворяет неравенствам

$$\left|\dot{d}_i(t)\right| \le \frac{\varepsilon_ф}{T^*}, \quad \left|\dot{b}_j(t)\right| \le \frac{\varepsilon_ф}{T^*} \quad i = \overline{0, n-1} \quad j = \overline{0, \gamma}, \tag{8.3.25}$$

где $\varepsilon_ф$ – допустимая величина погрешности фильтрации (определения) частотных параметров, а T^* – достаточно большое число.

Для такого объекта, который будем называть *объектом с дрейфующими параметрами* условие (8.3.23) выполняется при соответствующем выборе числа T^*. Кроме того, если выполняются неравенства (8.3.25), то объект (8.3.24) можно интерпретировать как многорежимный с моментами изменения режима $t_1 = T^*$, $t_2 = 2T^*$, $t_3 = 3T^*$, ...

Такой многорежимный объект почти наверное удовлетворяет определению 8.3.1, если погрешность определения его параметров по частотным параметрам не превышает $\varepsilon_ф$.

8.3.5. Объекты первого вида с регулятором ЧАР-4

Многорежимный объект первого вида описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(i)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{(i)}(u + f), \quad z = \boldsymbol{e}^{(i)\prime}\boldsymbol{x}, \quad t_{i-1} \le t < t_i \quad i = 1, 2, \dots. \tag{8.3.26}$$

Пусть при неизвестных моментах t_i перехода с режима на режим известны нижние границы длительности режимов – $\underline{T}_i$ $(i = 1, 2, \dots)$.

Адаптивный регулятор ЧАР-4 построим на основе частотного декларативного регулятора ЧДР-2, работающего в циклическом режиме. ЧАР-4 формирует управление

$$u = \boldsymbol{c}'\left(i_p T^*\right)\boldsymbol{x}, \quad (i_p - 1)T^* \le t < i_p T^* \quad i_p = 2, 3, \ldots . \tag{8.3.27}$$

Предполагается, что это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(i)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{(i)}(u+f), \quad u = \boldsymbol{c}'(t_{i-2})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{x}, \quad t_{i-1} \le t < t_i \quad i = 2, 3, \ldots . \tag{8.3.28}$$

В вычислитель частотных параметров ЧДР-2 включается дополнительный блок, преобразующий частотные параметры выходов объекта в его частотные параметры. Алгоритм работы этого блока определяется выражением (5.1.44) и имеет вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right) &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\left[1 + \boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right] - \boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\left[\boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]}{\left[1 + \boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]^2 + \left[\boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]^2} \\
&\qquad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \ldots ,
\end{aligned} \tag{8.3.29}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right) &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\left[\boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right] + \boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\left[1 + \boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]}{\left[1 + \boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]^2 + \left[\boldsymbol{c}^{(i-1)\prime}\boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)\right]^2} \\
&\qquad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \ldots .
\end{aligned} \tag{8.3.30}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)$, $\boldsymbol{\beta}_x\left(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k\right)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ – n-мерные вектора выходов фильтров Фурье в i-том режиме.

Примечание 8.3.1. Регулятор ЧАР-4 (также как и ЧАР-3) может не обеспечивать выполнения требования (8.2.3) к точности в начале каждого режима, когда идёт процесс фильтрации частотных параметров объекта в этих режимах, расчёт и формирование управления (8.3.27). ■

8.4. Система с эталонной моделью (следящие системы)

8.4.1. Структурная схема

Вновь рассмотрим многорежимный объект (8.3.1)

$$y^{(n)} + d_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)} + \cdots + d_1^{(i)}\dot{y} + d_0^{(i)} y = b_{\gamma}^{(i)} u^{(\gamma)} + \cdots + b_1^{(i)}\dot{u} + b_0^{(i)} u + m_{\alpha}^{(i)} f^{(\alpha)} + \cdots + m_1^{(i)}\dot{f} + m_0^{(i)} f, \tag{8.4.1}$$

заданный на интервалах

$$t_{i-1} \le t < t_i \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{8.4.2}$$

Требуется найти регулятор

$$\begin{aligned}
&g_{n-1}\left(i_p T^*\right) u^{(n-1)} + \cdots + g_1\left(i_p T^*\right)\dot{u} + g_0\left(i_p T^*\right) u = \\
&= r_{n-1}\left(i_p T^*\right) y^{(n-1)} + \cdots + r_1\left(i_p T^*\right)\dot{y} + r_0\left(i_p T^*\right) y + \\
&+ r_{n-1}^{n}\left(i_p T^*\right) v^{(n-1)} + \cdots + r_1^{n}\left(i_p T^*\right)\dot{v} + r_0^{n}\left(i_p T^*\right) v
\end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(i_p - 1)T^* \le t \le i_p T^* \\ &i_p = 1, 2, \ldots , \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

при котором выход объекта приближается к желаемому с заданной погрешностью

$$|y(t) - y_{ж}(t)| \le y^*, \tag{8.4.4}$$

при этом известна связь желаемого движения $y_{ж}(t)$ с задающим воздействием $v(t)$

$$y_{ж} = \frac{l_{м}(s)}{\psi_{м}(s)} v, \quad t > t_0. \tag{8.4.5}$$

Пусть как и для адаптивных систем регулирования допускается нарушение целевого условия (8.4.4) в начале каждого из режимов объекта. Положим также, для простоты, что $f(t)$ – ступенчатое внешнее воздействие, а коэффициент $\psi_0^{м}$ модели (8.4.5) удовлетворяет условию согласования

$$\psi_0^{м} > \frac{m_0^i \bar{f}}{y^*}, \tag{8.4.6}$$

при котором целевое условие (8.4.4) выполняется при $y_{ж}(t) = 0$.

Исследуем возможность использования регулятора, построенного в п. 8.1.6 для однорежимного объекта, в многорежимном варианте. В связи с этим представим выход объекта (8.4.1) как

$$y(t) = y^v(t) = y^f(t) = y^{ucn}(t), \tag{8.4.7}$$

где $y^v(t)$ – реакция (объекта с регулятором) на задающее воздействие $v(t)$, $y^f(t)$ – составляющая выходного сигнала, зависящая от внешнего возмущения, $y^{ucn}(t)$ – реакция на испытательное воздействие.

Последние две функции обычно соизмеримы, а регулирование должно осуществляться так, что

$$y^* > \max_{t_{i-1} \le t \le t_i} |y^f(t)| \ge 2 \div 3 \max_{t_{i-1} \le t \le t_i} |y^{ucn}(t)| \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{8.4.8}$$

Функция $y^v(t) \approx y_{ж}(t)$, как правило, не соизмеримо больше величины y^* и поэтому в регуляторе для однорежимного объекта полагалось $v(t) = 0$ до момента окончания фильтрации частотных параметров. Если же $v(t) \ne 0$, то процесс фильтрации сильно затягивается, так как функция $y^v(t)$, которая выступает при фильтрации как помеха, несоизмеримо больше полезного сигнала $y^{ucn}(t)$. По этим причинам регулятор для однорежимного объекта непригоден для многорежимного.

Для сокращения времени фильтрации при $v \ne 0$ будем вычитать из выходного сигнала объекта (8.4.7) основную его составляющую $y_{ж}(t)$, которую сформируем с помощью эталонной модели.

Эталонная модель – это физически реализованная эталонная модель замкнутой системы с передаточной функцией $w_{м}(s)$. На рис. 8.4.1. приведена структурная схема адаптивной следящей системы с эталонной моделью. В адаптере используется блок-восстановитель ω-индексов, который осуществляет вычисления по формулам (8.3.12), (8.3.13)

Она состоит из объекта и частотного адаптивного регулятора с эталонной моделью – ЧАР-3Э.

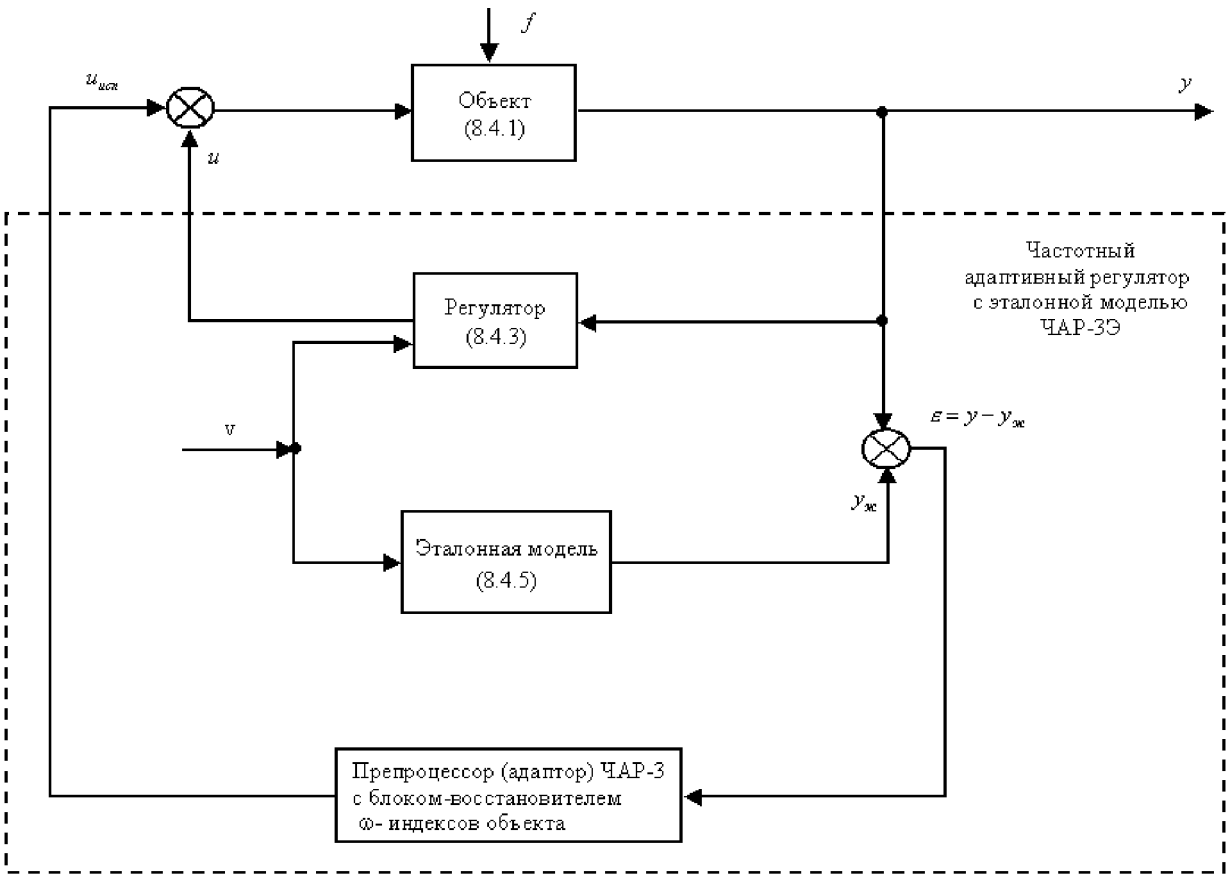

Рис. 8.4.1.

8.4.2. Первый режим работы объекта

В первом режиме работы регулятора $(0 \le t < T^*)$ задающее воздействие не подается $(v = 0)$ на объект и эталонную модель до окончания фильтрации и решения уравнений (8.1.10), (8.1.11), в которых

$$\psi_l = \psi_l^м \quad l = \overline{0, 2n - \gamma - 1}. \tag{8.4.9}$$

После подключения регулятора

$$\begin{aligned} & g_{n-1}(T^*)\, u^{(n-1)} + \cdots + g_1(T^*)\, \dot{u} + g_0(T^*)\, u = \\ & = r_{n-1}(T^*)\, y^{(n-1)} + \cdots + r_1(T^*)\, \dot{y} + r_0(T^*)\, y + \qquad T_{п.г} + T_ф + T_р \le t < T^*, \\ & + l_{n-1}^м \quad v^{(n-1)} + \cdots + l_1^м \quad \dot{v} + l_0^м \quad v \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

выход объекта

$$|y(t)| \le y^*, \quad (t^* \le t < T^*). \tag{8.4.11}$$

Пусть второй режим регулятора $(T^* \le t < 2T^*)$, когда к нему и эталонной модели приложено $v \ne 0$, полностью укладывается в первый режим работы объекта $(2T^* < t_1)$.

Найдём выражение для рассогласования сигналов $y(t)$ и $y_{ж}(t)$ на интервале $[T^*, T^* + T_{п.г} + T_{ф}]$ фильтрации.

Запишем уравнения (8.4.1), (8.4.10) в компактной форме

$$d^{(1)}(s)y = b^{(1)}(s)u + m^{(1)}(s)f + b^{(1)}(s)u_{исп}, \tag{8.4.12}$$

$$g(T^*, s)u = r(T^*, s)y + l_{м}(s)v. \tag{8.4.13}$$

Заменим в этих уравнениях $y = \varepsilon + y_{ж}$ и получим

$$\begin{aligned} d^{(1)}(s)\varepsilon &= b^{(1)}(s)u - d^{(1)}(s)y_{ж} + m^{(1)}(s)f + b^{(1)}(s)u_{исп}, \\ g(T^*, s)u &= r(T^*, s)\varepsilon + r(T^*, s)y_{ж} + l_{м}(s)v. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon = {} & \frac{b^{(1)}(s)l_{м}(s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}v - y_{ж} + \\ & + \frac{b^{(1)}(s)g(T^*, s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}u_{исп} + \frac{m^{(1)}(s)g(T^*, s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}f. \end{aligned} \tag{8.4.14}$$

По построению

$$d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s) = b^{(1)}(s)\psi_{м}(s), \tag{8.4.15}$$

$$g(T^*, s) = b^{(1)}(s), \tag{8.4.16}$$

и поэтому

$$\varepsilon = \frac{l_{м}(s)}{\psi_{м}(s)}v - y_{ж} + \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}u_{исп} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}f. \tag{8.4.17}$$

С учётом (8.4.5) получим

$$\varepsilon = \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}u_{исп} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}f. \tag{8.4.18}$$

После окончания фильтрации $u_{исп} = 0$ и эта ошибка удовлетворяет требованию (8.4.4) к точности.

Сравним (4.8.18) с выражением для выхода объекта в системе (8.4.12), (8.4.13) при $v = 0$

$$y = \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}u_{исп} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_{м}(s)}f. \tag{8.4.19}$$

Таким образом, использование эталонной подели позволяет рассматривать следящую систему как систему регулирования. Поэтому во втором режиме регулятора получим его параметры

$$g_i(2T^*) = g_i(T^*), \quad r_i(2T^*) = r_i(T^*) \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{8.4.20}$$

8.4.3. Второй режим работы объекта

Пусть второй режим работы объекта начался в начале третьего режима регулятора $t_2 = 2T^* + \varepsilon_m$, где ε_m – некоторое достаточно малое число, $\varepsilon_m < T_{п.г}$.

Выражение (8.4.14) для рассогласования сигналов эталонной модели и объекта принимает теперь вид

$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & \frac{b^{(2)}(s)l_м(s)}{d^{(2)}(s)g(T^*,s) - b^{(2)}(s)r(T^*,s)}v - y_ж + \\ & + \frac{b^{(2)}(s)g(T^*,s)}{d^{(2)}(s)g(T^*,s) - b^{(2)}(s)r(T^*,s)}u_{исп} + \frac{m^{(2)}(s)g(T^*,s)}{d^{(2)}(s)g(T^*,s) - b^{(2)}(s)r(T^*,s)}f,\end{aligned} \tag{8.4.21}$$

где $d^{(2)}(s)$, $b^{(2)}(s)$, $m^{(2)}(s)$ – операторы объекта (8.4.1) во втором режиме. В этом режиме модальное тождество, аналогичное (8.4.15), нарушается до окончания фильтрации и расчёта нового управления и поэтому

$$\varepsilon_v = y_ж - \frac{b^{(2)}(s)l_м(s)}{d^{(2)}(s)g(T^*,s) - b^{(2)}(s)r(T^*,s)}v \neq 0. \tag{8.4.22}$$

Помеха ε_v увеличивает время фильтрации, однако она меньше функции $y_ж(t)$, особенно, если второй режим не очень существенно отличается от первого.

Запишем передаточную функцию, связывающую в (8.4.21) переменные ε и $u_{исп}$ как

$$\frac{b^{(2)}(s)g(T^*,s)}{d^{(2)}(s)g(T^*,s) - b^{(2)}(s)r(T^*,s)} = \frac{w^{(2)}(s)}{1 - w^{(2)}(s)w_p(T^*,s)} = w^{(2)}_{зам}(s).$$

В блоке-восстановителе вычисляются, по формулам (8.3.12), (8.3.13), параметры объекта. При этом используются оценки $\alpha^{(2)}\left(T^{(2)}_ф, \omega_k\right)$, $\beta^{(2)}\left(T^{(2)}_ф, \omega_k\right)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ передаточной функции

$$w^{(2)}_{зам}(j\omega_k) = \alpha^{(2)}\left(T^{(2)}_ф, \omega_k\right) + j\beta^{(2)}\left(T^{(2)}_ф, \omega_k\right).$$

В третьем режиме работы регулятора его параметры $g_i(3T^*)$ и $r_i(3T^*)$ $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ находятся путём решения уравнений (8.1.10), (8.1.11) с коэффициентами (8.4.9) и т.д.

Применим ЧАР-3Э для построения следящей системы с объектом (8.3.24) с дрейфующими параметрами. В этом случае откажемся от циклической работы регулятора и будем определять моменты его перехода с режима на режим следующим образом.

Пусть задано число ε^*_v, определяющее допустимое превышение числа y^* в процессе фильтрации.

Моменты t^i_p определим как моменты, когда выход объекта достигает предельной величины

$$\left|y(t^i_p)\right| = y^* + \varepsilon^*_v. \tag{8.4.23}$$

Число ε^*_v определяет допустимое рассогласование выходов объекта и эталонной модели при $f = 0$. Кроме того, оно определяет время фильтрации в каждом режиме поскольку обычно $\varepsilon^*_v > y^*$.

Заключение к главе 8

Подведём итоги этой главы.

1. Построены алгоритмы работы частотного декларативного регулятора (ЧДР-1) для объектов второго вида, устойчивых по управлению.

2. Получена итерационная процедура 8.1.2, позволяющая применять регулятор ЧДР-1 для управления объектами с неизвестными структурными показателями объекта.

3. Построены алгоритмы работы частотного декларативного регулятора (ЧДР-2) для объектов первого вида. Этот алгоритм может быть дополнен процедурой 8.2.1, учитывающей неопределённость структурных показателей.

4. Проведены экспериментальные исследования ЧДР-2, реализованного на базе микро-ЭВМ ««Электроника-60»». Объектом управления служила схема на операционных усилителях, описываемая линейными уравнениями в трёхмерном пространстве состояний.

5. Сформированы алгоритмы работы частотного адаптивного регулятора (ЧАР-3) для управления многорежимными объектами второго вида, устойчивых по управлению.

6. Сформированы алгоритмы работы регулятора ЧАР-4 для объектов первого вида.

7. Предложен алгоритм управления с эталонной моделью, предназначенный для слежения с заданной точностью в системах с многорежимными объектами второго вида.

Часть 4. Многомерные системы

Результаты второй и третьей частей развиваются здесь на многомерный случай, когда система имеет более одной регулируемой либо управляющей переменных.

Исследование, как и в одномерном случае, осуществляется в три этапа: методы пространства состояний – аналитический синтез – метод частотных параметров, которые приводят к частотному управлению. При этом рассматривается, в основном, случай, когда число регулируемых переменных совпадает с числом управляющих. Это вызвано тем, что лишь в этом случае можно установить связь целей управления в методах пространства состояний с точностью регулирования и на этой основе построить процедуры аналитического синтеза.

Цель этой части:

- аналитический синтез регуляторов при известных коэффициентах уравнений объекта,
- анализ грубости, который значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем,
- метод частотных параметров для построения частотного управления самотождественными и несамотождественными объектами.

9. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта

Эта глава посвящена первым двум этапам, указанной выше триады: методом пространства состояний и аналитическому синтезу, рассмотренных для одномерного случая в главах 3 и 4.

Если процедуры АКОР легко обобщаются для объектов с векторным управлением, то развитие модального управления для объектов второго вида является уже не столь простым.

Вторая проблема связана с установлением связи между коэффициентами функционала оптимизации в процедуре АКОР и коэффициентами желаемого полинома в модальном управлении с точностью и качеством регулирования.

Таким образом, цель этой главы:

- постановка и решение задачи модального управления многомерными объектами второго вида,
- определение структуры и параметров желаемого полинома замкнутой системы, при которых модальное управление реализуемо и обеспечивает требуемую точность регулирования и слежения при ограниченных внешних возмущениях,
- установление связи между структурой и параметрами функционала оптимизации в задаче АКОР с качеством и точностью синтезированной системы и построение на этой основе процедур синтеза регуляторов для объектов первого и второго видов.

9.1. Модальное управление

9.1.1. Постановка задачи

Пусть имеется полностью управляемый и полностью наблюдаемый многомерный объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \tag{9.1.1}$$

где $\boldsymbol{u}(t)$ – m-мерный вектор управлений, $\boldsymbol{y}(t)$ – r-мерный вектор измеряемых переменных, A, B и D – заданные матрицы чисел размеров $n \times n$, $n \times m$ и $r \times n$ соответственно.

Уравнение многомерного регулятора запишем в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{9.1.2}$$

где $\boldsymbol{x}_p(t)$ – n_p-мерный вектор переменных состояния регулятора, A_p, B_p, D_p и F_p – матрицы чисел размеров $n_p \times n_p$, $n_p \times r$, $m \times n_p$ и $m \times r$.

Характеристический полином системы (9.1.1), (9.1.2)

$$d^u(s) = \det \left(\begin{array}{cc|cc} E_n s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -D_p & -F_p \\ \hline 0 & 0 & E_{n_p-1} s - A_p & -B_p \\ -D & 0 & 0 & E_r \end{array} \right) = \tag{9.1.3}$$
$$= s^{n+n_p} + d^u_{n+n_p-1} s^{n+n_p-1} + \cdots + d^u_1 s + d_0.$$

Задача 9.1.1. **(Задача модального управления многомерными объектами)** Для объекта (9.1.1) найти матрицы A_p, B_p, D_p и F_p регулятора (9.1.2) такие, чтобы характеристический полином (9.1.3) имел заданные корни s_i^* $\left(i = \overline{1, n+n_p}\right)$.

■

Примечание 9.1.1. Размерность n_p вектора состояний регулятора часто неизвестна, поэтому зададимся числом корней полинома (9.1.3), равным $2n - m$. Желаемый полином системы имеет вид

$$\delta(s) = \prod_{i=1}^{2n-m} (s - s_i^*) = \sum_{i=0}^{2n-m} \delta_i s^i. \tag{9.1.4}$$

■

Примечание 9.1.2. Решение задачи 9.1.1, в отличие от задачи 3.1.1 для одномерных систем, неединственно. Действительно, пусть все переменные состояния объекта (9.1.1) измеряются $(D = E_n)$, а размерность $n_p = 0$. Тогда уравнения искомого регулятора примут вид

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{9.1.5}$$

где C' $(C' = F_p)$ – искомая матрица размеров $m \times n$. Найдём матрицу M размеров $m \times n$ такую, чтобы система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + BM)\boldsymbol{x} + B_{[1]} u_1, \tag{9.1.6}$$

(где $B_{[1]}$ – первый столбец матрицы B, u_1 – первая компонента вектора $\boldsymbol{u}$) была полностью управляема.

Используем процедуру 3.4.1 и найдём управление

$$u_1 = C'_{[1]} \boldsymbol{x}, \tag{9.1.7}$$

вектор-строка $C'_{[1]}$ которого разрешает задачу (9.1.1), а искомая матрица

$$C' = M + \begin{pmatrix} C'_{[1]} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{9.1.8}$$

Существует множество матриц M, для которых ««объект»» (9.1.6) полностью управляем. Каждой из матриц этого множества соответствует свой вектор $\boldsymbol{c}'_{[1]}$ и своя матрица C'.

Неоднозначность решения задачи модального управления многомерных систем будем далее использовать для достижения требуемой точности стабилизации или слежения при заданных корнях характеристического полинома системы. ■

9.1.2. Подход к решению

Решение задачи 9.1.1 в одномерном случае, когда u и y – скаляры, состоит из трёх процедур: приведения объекта (9.1.1) в форме Коши к форме ««вход-выход»» (3.1.1), решения модального тождества (процедура 3.1.1) и приведения полученного регулятора (3.1.2) в форме ««вход-выход»» к форме Коши (9.1.2).

Первая из этих процедур не вызывает затруднений так как передаточная функция объекта – это отношение полиномов формы ««вход-выход»»

$$y = \boldsymbol{d}(Es - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{d}\widetilde{(Es - A)}\boldsymbol{b}}{d(s)} = \frac{b(s)}{d(s)}. \tag{9.1.9}$$

Последнюю процедуру также легко осуществить.

В многомерном случае решение задачи модального управления также состоит из указанных трёх процедур. Однако теперь эти процедуры значительно усложняются.

Так, приведение уравнений (9.1.1) к *форме вход-выход* описано в приложении 9.П.2 (процедура 9.П.2). Результатом приведения является уравнение

$$\left[D^{(\rho)}s^{\rho} + \cdots + D^{(1)}s + D^{(0)}\right]\boldsymbol{y} = \left[B^{(\gamma)}s^{\gamma} + \cdots + B^{(1)}s + B^{(0)}\right]\boldsymbol{u}, \tag{9.1.10}$$

где $D^{(i)}$, $B^{(j)}$ $\left(i = \overline{0,\rho},\ \ j = \overline{0,\gamma}\right)$ – матрицы чисел размеров $r \times r$, $r \times m$.

Запишем его в более компактной форме

$$D(s)\boldsymbol{y} = B(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.1.11}$$

где $D(s)$ и $B(s)$ – полиномиальные матрицы

$$D(s) = \sum_{i=0}^{\rho} D^{(i)}s^{i}, \quad B(s) = \sum_{j=0}^{\gamma} B^{(j)}s^{j}. \tag{9.1.12}$$

Наряду с формой ««вход-выход»» (9.1.10) ниже широко используется описание объекта в *канонической форме Лагранжа.* В этой форме уравнения объекта имеют вид

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \tag{9.1.13}$$

где $\boldsymbol{q}(t)$ – m-мерный вектор неполного состояния объекта

$$P(s) = \sum_{i=0}^{\mu} P^{(i)}s^{i}, \quad N(s) = \sum_{j=0}^{\nu} N^{(j)}s^{j}, \tag{9.1.14}$$

$P^{(i)}$, $N^{(j)}$ $\left(i=\overline{0,\mu},\ \ j=\overline{0,\nu}\right)$ – матрицы чисел размеров $m\times m$, $r\times m$.

Переход от уравнений (9.1.1) в форме Коши к уравнениям (9.1.13) приведён в приложении 9.П.1 (процедура 9.П.1).

Уравнения регулятора (9.1.2) также можно записать в этих двух формах.

В форме ««вход-выход»» регулятор записывается как

$$G(s)\boldsymbol{u}=R(s)\boldsymbol{y}, \tag{9.1.15}$$

где полиномиальные матрицы

$$G(s)=\sum_{i=0}^{\rho_{\text{р}}}G^{(i)}s^i,\quad R(s)=\sum_{j=0}^{\gamma_{\text{р}}}R^{(j)}s^j. \tag{9.1.16}$$

Уравнения (9.1.2) в канонической форме Лагранжа имеют вид

$$P_p(s)\boldsymbol{q}_p=\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{u}=N_p(s)\boldsymbol{q}_p, \tag{9.1.17}$$

где $\boldsymbol{q}_p(t)$ – r-мерный вектор неполного состояния регулятора,

$$P_p(s)=\sum_{i=0}^{\mu_{\text{р}}}P_p^{(i)}s^i,\quad N_p(s)=\sum_{j=0}^{\nu_{\text{р}}}N_p^{(j)}s^j. \tag{9.1.18}$$

Обратный переход от уравнений регулятора в форме ««вход-выход»» и канонической формы Лагранжа к уравнениям в форме Коши приведён в приложении 9.П.3.

Из приведённых форм описания объекта и регулятора можно сформировать четыре варианта моделей системы:

1-й вариант: объект и регулятор описываются в форме ««вход-выход»» (вариант ВВ-ВВ)

$$D(s)\boldsymbol{y}=B(s)\boldsymbol{u},\quad G(s)\boldsymbol{u}=R(s)\boldsymbol{y}, \tag{9.1.19}$$

2-й вариант: объект в канонической форме Лагранжа, а регулятор в форме ««вход-выход»» (вариант КЛ-ВВ)

$$P(s)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=N(s)\boldsymbol{q},\quad G(s)\boldsymbol{u}=R(s)\boldsymbol{y}, \tag{9.1.20}$$

3-й вариант: объект в форме ««вход-выход»», а регулятор в канонической форме Лагранжа (вариант ВВ-КЛ)

$$D(s)\boldsymbol{y}=B(s)\boldsymbol{u},\quad P_p(s)\boldsymbol{q}_p=\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{u}=N_p(s)\boldsymbol{q}_p, \tag{9.1.21}$$

4-й вариант: объект и регулятор в канонической форме Лагранжа (вариант КЛ-КЛ)

$$P(s)\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=N(s)\boldsymbol{q},\quad P_p(s)\boldsymbol{q}_p=\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{u}=N_p(s)\boldsymbol{q}_p. \tag{9.1.22}$$

9.1.3. Матричное модальное тождество

Построим модальное тождество, решение которого составляет центральную процедуру в решении задачи 9.1.1.

Рассмотрим вначале второй вариант (9.1.20) модели системы (9.1.1), (9.1.2)

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \quad G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.1.23}$$

Используем формулу для определителя блочной матрицы и получим характеристический полином системы (9.1.23)

$$\begin{aligned} d^u(s) = \det \begin{pmatrix} P(s) & -E \\ -R(s)N(s) & G(s) \end{pmatrix} &= \det P(s) \det \left[G(s) - R(s)N(s)P^{-1}(s)\right] = \\ &= \det \left[G(s)P(s) - R(s)N(s)\right]. \end{aligned} \tag{9.1.24}$$

Как и в одномерном случае сформируем, используя заданные корни s_i^* $\left(i = \overline{1, 2n-m}\right)$, желаемый полином (9.1.4).

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях полиномов $d^u(s)$ и $\delta(s)$ и получим систему алгебраических уравнений для определения параметров $g_{ij}^{(k)}$, $r_{il}^{(p)}$ $\left(i, j = \overline{1, m}, \ \ l = \overline{1, r}, \ \ k = \overline{1, \mu_p}, \ \ p = \overline{1, \nu_p}\right)$ регулятора. Эти алгебраические уравнения имеют множество решений. Поэтому построим $m \times m$ полиномиальную матрицу $\Delta(s)$, определитель которой

$$\det \Delta(s) = \delta(s). \tag{9.1.25}$$

Будем искать матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора из *матричного модального тождества*

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \Delta(s), \tag{9.1.26}$$

которое является матричным аналогом соотношения (3.1.20), разрешающего задачу модального управления одномерных систем.

Заметим, что для первого варианта модели системы

$$D(s)\boldsymbol{y} = B(s)\boldsymbol{u}, \quad G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y},$$

характеристический полином

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \begin{pmatrix} D(s) & -B(s) \\ -R(s) & G(s) \end{pmatrix} = \det D(s) \det \left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right] = \\ &= \det \left[G(s)D(s) - R(s)\tilde{D}(s)B(s)\right] \cdot \left[\frac{1}{\det D(s)}\right]^{m-1}. \end{aligned} \tag{9.1.27}$$

Он представляет собой отношение полиномов, которые делятся нацело. Такая форма описания характеристического полинома системы (9.1.1), (9.1.2) менее удобна по сравнению с (9.1.24) и поэтому далее ограничимся последней.

Для того чтобы описать условия существования и алгоритм решения тождества (9.1.26) введём ряд понятий, связанных с полиномиальными матрицами и исследуем свойства этих матриц.

9.1.4. Свойства полиномиальных матриц системы

Приведём вначале строгое понятие полиномиальной матрицы.

Определение 9.1.1. *Полиномиальной матрицей* называется матрица, элементами которой служат полиномы конечных степеней с вещественными коэффициентами. ■

Например, элемент матрицы $D(s)$, находящийся на пересечении i-той строки и j-того столбца

$$D_{ij}(s) = d_{ij}^{[\rho]} s^{\rho} + d_{ij}^{[\rho-1]} s^{\rho-1} + \cdots + d_{ij}^{[1]} s + d_{ij}^{[0]}.$$

Степень полиномиальной матрицы $A(s)$ – это степень полинома наивысшей степени в $A(s)$. Так, полиномы $D(s)$ и $B(s)$ имеют степени ρ и γ соответственно.

Степень j-того столбца матрицы $A(s)$, обозначаемого как $A_{[j]}(s)$, – это степень полинома наивысшей степени в $A_{[j]}(s)$. Степень j-того столбца $A(s)$ обозначается далее как $\partial_{cj}[A(s)]$ или просто ∂_{cj}.

Пример 9.1.1. Если

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2 - 3 & 1 & 2s \\ 4s + 2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s + 3 & -3s + 2 \end{pmatrix}, \tag{9.1.28}$$

то $\partial_{c1} = 2$, $\partial_{c2} = \partial_{c3} = 1$. ■

Аналогично определяется *степень j-той строки* матрицы $A(s)$, как степень полинома наивысшей степени в строке $A^{[i]}(s)$ матрицы $A(s)$. Степень i-той строки обозначается как $\partial_{ri}[A(s)]$ либо просто ∂_{ri}. Так, для матрицы (9.1.28) $\partial_{r1} = \partial_{r3} = 2$, $\partial_{r2} = 1$.

Обозначим $\Gamma_c[A(s)]$, или просто Γ_c, матрицу коэффициентов при наивысших степенях в столбцах матрицы $A(s)$ а $\Gamma_r[A(s)]$, или просто Γ_r – матрицу коэффициентов при наивысших степенях полиномов в строках матрицы $A(s)$.

Например, для матрицы (9.1.28)

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 9.1.2. Полиномиальная матрица $A(s)$ размеров $r \times m$ называется *столбцово-правильной* тогда и только тогда, когда $\Gamma_c[A(s)]$ имеет ранг, равный наименьшему из чисел r и m. Эта же матрица называется *строчно-правильной*, когда $\operatorname{rank} \Gamma_c[A(s)] = \min\{r, m\}$.

Квадратные полиномиальные матрицы называются столбцово- (строчно-) правильными, когда

$$\det \Gamma_c \neq 0 \quad (\det \Gamma_r \neq 0). \tag{9.1.29}$$

■

Свойство 9.1.1. Матрицы $P(s)$ и $N(s)$ объекта (9.1.13) в канонической форме Лагранжа, полученные из матриц объекта в форме Коши, обладают следующими свойствами:

а) Матрица $P(s)$ – столбцово-правильная.

б) Степень каждого столбца матрицы $P(s)$ не нулевая:

$$\partial_{cj}[P(s)] = \nu_j \geq 1 \quad j = \overline{1,m}, \tag{9.1.30}$$

где $\sum_{j=1}^{m} \nu_j = n$.

в) Степень каждого столбца матрицы $N(s)$ меньше или равна степени соответствующего столбца матрицы $P(s)$

$$\partial_{cj}[N(s)] \leq \partial_{cj}[P(s)] \quad j = \overline{1,m}. \tag{9.1.31}$$

■

Доказательство этих свойств приведено в приложении 9.П.1.5.

Свойство 9.1.2. Матрицы $D(s)$ и $B(s)$ объекта (9.1.12) в форме ««вход-выход»», полученные из матриц объекта в форме Коши обладают следующими свойствами:

а) Матрица $D(s)$ – строчно-правильная.

б) Степень каждой строки матрицы $D(s)$ не нулевая:

$$\partial_{ri}[D(s)] = \bar{\nu}_i \geq 1 \quad i = \overline{1,r}, \tag{9.1.32}$$

где $\sum_{i=1}^{r} \bar{\nu}_i = n$.

в) Степень каждой строки матрицы $B(s)$ меньше или равна степени соответствующей строки матрицы $D(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] \leq \partial_{ri}[D(s)] \quad i = \overline{1,r}. \tag{9.1.33}$$

Эти свойства следуют из результатов, приведённых в приложении 9.П.2.3.

9.1.5. Элиминантная матрица

Введём понятие элиминантной (исключающей) матрицы двух полиномиальных матриц $P(s)$ и $N(s)$ размеров $m \times m$ и $r \times m$, обладающих свойством 9.1.1.

Для удобства изложения рассмотрим вначале одномерный случай системы (9.1.1), когда $r = m = 1$. Для такой системы $p(s)$ и $n(s)$ – полиномы

$$p(s) = d(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0, \quad n(s) = b(s) = n_\gamma s^\gamma + \cdots + n_1 s + n_0. \tag{9.1.34}$$

Определение 9.1.3. Элиминантной (исключающей) матрицей M_e двух полиномов (9.1.34) называется следующая $2n \times 2n$ матрица чисел, составленная из коэффициентов этих полиномов

$$M_e = \left(\begin{array}{cccccc} n_0 & n_1 & \cdots & n_n & & \mathbf{0} \\ & n_0 & n_1 & \cdots & n_n & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & n_0 & n_1 & \cdots & n_n \\ \hline p_0 & p_1 & \cdots & p_n & & \mathbf{0} \\ & p_0 & p_1 & \cdots & p_n & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{array}\right). \tag{9.1.35}$$

■

Пример 9.1.2. Сформируем элиминантную матрицу полиномов $d(s)$ и $b(s)$ примера 3.1.1.

Полагая

$$d(s) = s^2 + d_0 = p(s) = s^2 + p_0, \quad b(s) = b_1 s + b_0 = n(s) = n_1 s + n_0,$$

запишем

$$M_e = \left(\begin{array}{cccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \\ \hline p_0 & p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 \end{array}\right), \quad M_e' = \left(\begin{array}{cc|cc} n_0 & 0 & p_0 & 0 \\ n_1 & n_0 & p_1 & p_0 \\ n_2 & n_1 & p_2 & p_1 \\ 0 & n_2 & 0 & p_2 \end{array}\right).$$

Сравним матрицу M_e' с матрицей коэффициентов уравнения (3.1.17). Нетрудно видеть, если записать это уравнение в следующей эквивалентной форме

$$\left(\begin{array}{cc|cc} b_0 & 0 & d_0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & d_0 \\ 0 & b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \times \left[\begin{array}{c} -r_0 \\ -r_1 \\ \hline g_0 \\ g_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array}\right],$$

то матрица его коэффициентов совпадет с M_e'. ■

Возвращаясь к многомерным объектам $(m \geq 1,\ r \geq 1)$, сформируем множество полиномиальных матриц

$$M_{ek}(s) = \left[\ N'(s)\ \ sN'(s)\ \ \cdots\ \ s^{k-1}N'(s) \,\middle|\, P'(s)\ \ sP'(s)\ \ \cdots\ \ s^{k-1}P'(s)\ \right]' \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{9.1.36}$$

Выразим каждую из матриц как произведение числовой матрицы M_{ek} размеров $k(m+r) \times (n+mk)$ на $(n+mk) \times m$ матрицу $S_{ek}(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Это означает,

что

$$\left(\begin{array}{c} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}N(s) \\ \hline P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}P(s) \end{array}\right) = M_{ek}S_{ek}(s) = M_{ek}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{\nu_1+k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s^{\nu_2+k-1} & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\nu_m+k-1} \end{array}\right) \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{9.1.37}$$

<u>Пример 9.1.3.</u> Пусть

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.1.38}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 1, \quad n = 3, \quad r = m = 2.$$

При $k = 1$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{array}\right)}_{M_{e1}(s)} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{M_{e1}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & s \end{array}\right)}_{S_{e1}(s)}.$$

При $k = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ s^2+s & 0 \\ s & s \\ \hline s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \\ s^3 & 0 \\ s & -s^2+s \end{array}\right)}_{M_{e2}(s)} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{M_{e2}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{array}\right)}_{S_{e2}(s)}.$$

■

Определение 9.1.4. *Элиминантной матрицей* двух полиномиальных матриц $P(s)$ и $N(s)$, обладающих свойством 9.1.1, называется матрица размеров $\check{\mu}(m+r)\times$ $\times(n+m\check{\mu})$, где $\check{\mu}$ – это наименьшее целое число k, для которого разность

$$\eta = (n+mk) - \operatorname{rank} M_{ek} \tag{9.1.39}$$

наименьшая при условии, что $k \geq \dfrac{n}{r}$. ■

Число $\check{\mu}$ будем называть *индексом элиминантной матрицы.*

Пример 9.1.4. Покажем, что в примере 9.1.3 матрица M_{e2} – элиминантная для полиномиальных матриц (9.1.38). Действительно, при $k=1$ число $\eta=1$ (этот случай можно было не рассматривать, так как $\dfrac{n}{r}>1$); при $k=2$ разность $\eta=0$; при $k=3$ значение $\eta\geq 0$. Таким образом, наименьшим из чисел, при котором $\eta=0$, является $k=2$ и поэтому $\check{\mu}=2$. ■

9.1.6. Решение модального тождества

Далее будем полагать, что матрица $\Delta(s)$ в тождестве (9.1.26) такова, что её можно представить как произведение числовой $m\times(n+m\check{\mu})$ матрицы Δ на матрицу $S_{e\check{\mu}}(s)$

$$\Delta(s) = \Delta S_{e\check{\mu}}(s). \tag{9.1.40}$$

Такое представление всегда существует, если степени столбцов матрицы $\Delta(s)$ удовлетворяют соотношению

$$\partial_{cj}[\Delta(s)] \leq \nu_j + \check{\mu} - 1 \quad j=\overline{1,m}. \tag{9.1.41}$$

Матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора будем искать в виде

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} G^{[i]}s^i, \quad R(s) = \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} R^{[i]}s^i.$$

Преобразуем левую часть рассматриваемого тождества

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = -\sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} R^{[i]}s^iN(s) + \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} G^{[i]}s^iP(s) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} -R^{[0]} & -R^{[1]} & \cdots & -R^{[\check{\mu}-1]} & G^{[0]} & G^{[1]} & \cdots & G^{[\check{\mu}-1]} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^{\check{\mu}-1}N(s) \\ \hline P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{\check{\mu}-1}P(s) \end{array}\right) = XM_{e\check{\mu}}S_{e\check{\mu}}(s), \tag{9.1.42}$$

где $m \times (r\check{\mu} + m\check{\mu})$ числовая матрица

$$X = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -R^{[0]} & -R^{[1]} & \cdots & -R^{[\check{\mu}-1]} & G^{[0]} & G^{[1]} & \cdots & G^{[\check{\mu}-1]} \end{array} \right). \tag{9.1.43}$$

Приравняем полиномы (9.1.40) и (9.1.42) и получим систему линейных алгебраических уравнений для параметров $G^{[i]}$, $R^{[i]}$ $\left(i = \overline{0, \check{\mu} - 1}\right)$ регулятора

$$X M_{e\check{\mu}} = \Delta. \tag{9.1.44}$$

Матрица $M_{e\check{\mu}}$ – прямоугольная, размеров $(r\check{\mu} + m\check{\mu}) \times (n + m\check{\mu})$. Так как по определению элиминантной матрицы $\check{\mu} \geq \dfrac{n}{r}$, то

$$\operatorname{rank} M_{e\mu} \leq n + m\check{\mu}.$$

Пусть $M_{e\mu}$ – матрица полного ранга:

$$\operatorname{rank} M_{e\mu} = \min\{n + m\check{\mu},\, r\check{\mu} + m\check{\mu}\} = n + m\check{\mu}. \tag{9.1.45}$$

Число уравнений в системе (9.1.44) меньше $\left(\text{при } \check{\mu} > \dfrac{n}{r}\right)$ либо равно $\left(\text{при } \check{\mu} = \dfrac{n}{r}\right)$ числу неизвестных. Для первого случая составим из $n + m\check{\mu}$ линейно независимых строк матрицы $M_{e\mu}$ квадратную матрицу $\bar{M}_e$ $(\det \bar{M}_e \neq 0)$ и сформируем матрицу $\bar{X}$ вычёркиванием $\check{\mu}r - n$ столбцов в X, связанных с $\check{\mu}r - n$ строками в $M_{e\mu}$. Тогда

$$\bar{X}\bar{M}_e = \Delta.$$

Отсюда

$$\bar{X} = \Delta \bar{M}_e^{-1}. \tag{9.1.46}$$

Для того, чтобы найти искомую матрицу X, можно вставить $\check{\mu}r - n$ нулевых столбцов в X, связанных с $\check{\mu}r - n$ строками $M_{e\mu}$, которые исключены в $\bar{M}_e$. Тогда

$$\bar{X}\bar{M}_e = X M_{e\mu} = \Delta. \tag{9.1.47}$$

Таким образом, если выполняются соотношения (9.1.41), (9.1.45), то всегда можно найти полиномы $G(s)$ и $R(s)$, разрешающие модальное тождество.

Теорема 9.1.1.

$$\operatorname{rank} M_{e\mu} = n + m\check{\mu}, \tag{9.1.48}$$

тогда и только тогда, когда объект (9.1.1) полностью управляем и полностью наблюдаем. ■

Доказательство этой теоремы, которая обобщает на многомерный случай теорему 3.1.1 и следствие 3.1.1, приведено в 9.Д.1.

Процедура 9.1.1. **(процедура решения модального тождества)** состоит из операций:

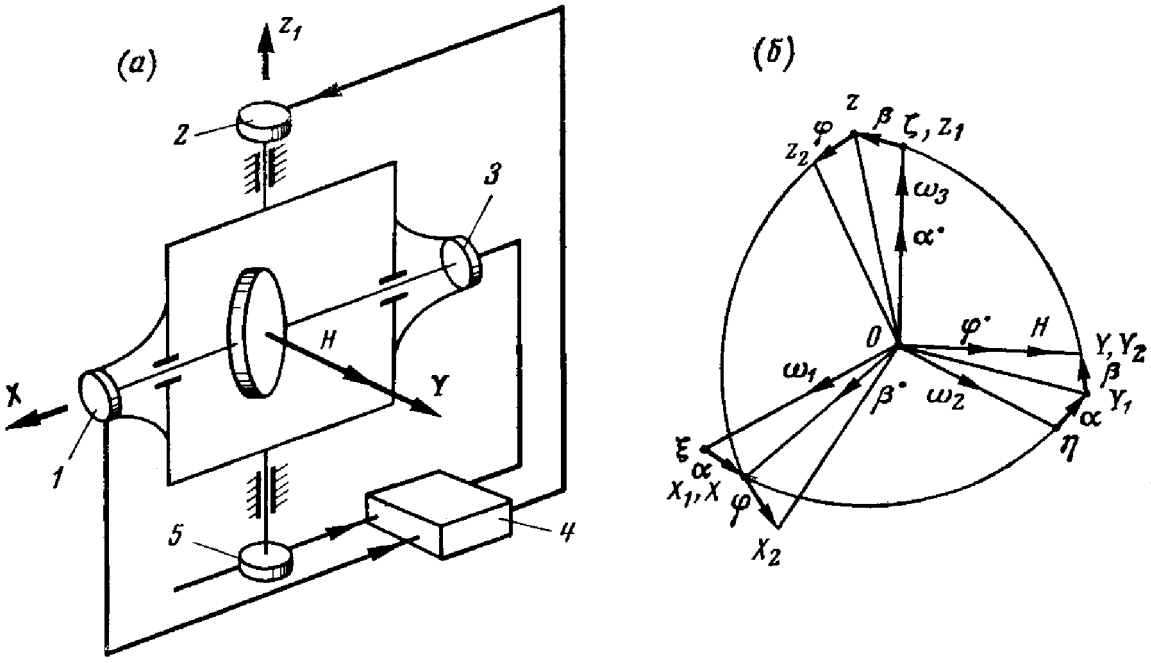

Рис. 9.1.1.

Операция 1. Построить элиминантную матрицу $M_{e\mu}$ полиномов $P(s)$ и $N(s)$.

Операция 2. Матрицу $\Delta(s)$, удовлетворяющую условию (9.1.41), представить в виде (9.1.40).

Операция 3. Из линейно независимых строк матрицы $M_{e\mu}$ сформировать неособую квадратную матрицу $\bar{M}_e$, найти по формуле (9.1.46) матрицу $\bar{X}$ и дополнить её нулевыми столбцами, связанными со строками, которые были исключены в $M_{e\mu}$ при построении $\bar{M}_e$. Искомые матрицы $G^{[i]}$, $R^{[i]}$ $\left(i = \overline{0, \check{\mu} - 1}\right)$ находятся в соответствии с (9.1.43) как составляющие матрицы X.

■

Пример 9.1.4. Решим задачу модального управления двухкомпонентным измерителем (датчиком) угловой скорости (ДУС'ом), построенным на основе трехстепенного гироскопа. Его схема приведена на рис. 9.1.1.

Регуляторы ДУС'а представляют собой систему привода главной оси гироскопа в нуль $(\alpha = \beta = 0)$, которая состоит из датчиков угла – 1,5, усилителя преобразователя – 4 и датчиков моментов – 2,3.

Уравнения ДУС'а имеют вид

$$\begin{aligned} a\ddot{\alpha} + h\dot{\beta} &= m_{z_1}, \quad & m_{z_1} &= k_2 u_2; \\ r\ddot{\beta} - h\dot{\alpha} &= m_x, \quad & m_x &= k_1 u_1. \end{aligned} \tag{9.1.49}$$

Они описывают трёхстепенной гироскоп по осям подвеса которого приложены моменты m_{z_1} и m_x, развиваемые датчиками моментов 2 и 3 соответственно. a и

r – моменты инерции гироскопа относительно его осей подвеса, h – кинематический момент гироскопа, α и β – углы поворота внешнего и внутреннего колец карданова подвеса. Эти углы измеряются датчиками 5 и 1 соответственно.

Пусть $k_1 = k_2 = 1$. Тогда уравнения (9.1.49) можно записать в канонической форме Лагранжа. Для этого введём безразмерные параметры

$$q_1 = \frac{r\beta}{r_0\beta_0}, \quad q_2 = \frac{a\alpha}{a_0\alpha_0},$$

(в которых положим для простоты $\alpha_0 = \beta_0 = 1\,\text{рад}$, $r_0 = a_0 = 1\ \textit{кгм}^2$) и обозначим

$$p_{12}^{[1]} = -\frac{h_\alpha a_0}{r_0\beta_0} = h, \quad p_{21}^{[1]} = \frac{h_\beta r_0}{a_0\alpha_0} = h. \tag{9.1.50}$$

Тогда уравнения (9.1.49) примут вид

$$\begin{pmatrix} s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{9.1.51}$$

Переменные α и β измеряются, поэтому, полагая

$$y_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

запишем

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \tag{9.1.52}$$

где $r = \dfrac{r}{r_0}$, $a = \dfrac{a}{a_0}$.

Требуется найти параметры регулятора

$$\begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{9.1.53}$$

такие, чтобы характеристический полином системы (9.1.51)-(9.1.53) имел заданные корни s_i $\left(i = \overline{1,6}\right)$.

Для решения этой задачи построим, в соответствии с **операцией 1**, элиминантную матрицу полиномов

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{9.1.54}$$

В рассматриваемом случае $n = 4$, $m = r = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 2$. Запишем (9.1.37) при

$k = 2$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} r & 0 \\ 0 & a \\ rs & 0 \\ 0 & as \\ \hline s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \\ s^3 & p_{12}^{[1]}s^2 \\ p_{21}^{[1]}s^2 & s^3 \end{array}\right)}_{M_{e2}(s)} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p_{12}^{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & p_{21}^{[1]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p_{12}^{[1]} & 0 \\ 0 & 0 & p_{21}^{[1]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{M_{e2}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \\ 0 & s^3 \end{array}\right)}_{S_{e2}(s)}. \qquad (9.1.55)$$

Нетрудно проверить, что $\det M_{e2} \neq 0$ и поэтому

$$\operatorname{rank} M_{e2} = 8 = n + m\check{\mu}, \quad (\check{\mu} = 2).$$

Операция 2. По заданным корням s_i^* $\left(i = \overline{1,6}\right)$ сформируем матрицу

$$\Delta(s) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \delta_{11}^{[0]} & \delta_{11}^{[1]} & \delta_{11}^{[2]} & \delta_{11}^{[3]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{22}^{[0]} & \delta_{22}^{[1]} & \delta_{22}^{[2]} & \delta_{22}^{[3]} \end{array}\right) \cdot S_{e2}(s) = \Delta S_{e2}(s), \qquad (9.1.56)$$

в которой числа $\delta_{11}^{[i]}$ и $\delta_{22}^{[i]}$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ определим из равенств

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{[0]} + \delta_{11}^{[1]}s + \delta_{11}^{[2]}s^2 + \delta_{11}^{[3]}s^3 &= (s - s_1^*)(s - s_2^*)(s - s_3^*), \\ \delta_{22}^{[0]} + \delta_{22}^{[1]}s + \delta_{22}^{[2]}s^2 + \delta_{22}^{[3]}s^3 &= (s - s_4^*)(s - s_5^*)(s - s_6^*). \end{aligned} \qquad (9.1.57)$$

Операция 3. Вычислим

$$X = \left(\begin{array}{cc|cc} -R^{[0]} & -R^{[1]} & G^{[0]} & G^{[1]} \end{array}\right) = \Delta M_{e2}^{-1}.$$

Заметим, что матрицы регулятора (9.1.53)

$$\left(G^{[1]}s + G^{[0]}\right)u = \left(R^{[1]}s + R^{[0]}\right)y \qquad (9.1.58)$$

можно определить непосредственно из модального тождества, сравнивая, как и в одномерном случае, матрицы при одинаковых степенях s. Действительно, модальное тождество имеет вид

$$\left(G^{[1]}s + G^{[0]}\right) \cdot \left(P^{[2]}s^2 + P^{[1]}s\right) - \left(R^{[1]}s + R^{[0]}\right) \cdot N^{[0]} = \Delta^{[3]}s^3 + \Delta^{[2]}s^2 + \Delta^{[1]}s + \Delta^{[0]}, \qquad (9.1.59)$$

где

$$P^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^{[1]} \\ p_{21}^{[1]} & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{[0]} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\Delta^{[3]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[3]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[3]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[2]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[2]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[2]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[1]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[1]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[1]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[0]} \end{pmatrix}.$$

Сравним матрицы при одинаковых степенях s

$$G^{[1]} = \Delta^{[3]}, \quad G^{[1]}P^{[1]} + G^{[0]} = \Delta^{[2]}, \quad G^{[0]}P^{[1]} - R^{[1]}N^{[0]} = \Delta^{[1]}, \quad -R^{[0]}N^{[0]} = \Delta^{[0]}.$$

Из этих уравнений получим

$$\begin{aligned} G^{[1]} &= \Delta^{[3]}, & G^{[0]} &= -\Delta^{[3]}P^{[1]} + \Delta^{[2]}, \\ R^{[1]} &= \left[\left(-\Delta^{[3]}P^{[1]} + \Delta^{[2]}\right)P^{[1]} - \Delta^{[1]}\right]\left[N^{[0]}\right]^{-1}, & R^{[0]} &= -\Delta^{[0]}\left[N^{[0]}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{9.1.60}$$

■

9.1.7. Условия реализуемости регулятора

Результатом решения модального тождества служит уравнение регулятора в форме ««вход-выход»»

$$\left(G^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1} + \cdots + G^{[1]}s + G^{[0]}\right)u = \left(R^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1} + \cdots + R^{[1]}s + R^{[0]}\right)y. \tag{9.1.61}$$

Приведём условия реализуемости этого регулятора. В одномерном случае $\check{\mu} = n$, а уравнение (9.1.61) имеет вид

$$\left(g_{n-1}s^{n-1} + \cdots + g_1 s + g_0\right)u = \left(r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0\right)y. \tag{9.1.62}$$

Регулятор, описываемый таким уравнением – реализуем, так как степень числителя его передаточной функции не превышает степени знаменателя.

Приведём (9.1.62) к форме Коши и получим уравнение регулятора в пространстве состояний

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{b}_p y, \quad u = \boldsymbol{d}_p\boldsymbol{x}_p + f_p y. \tag{9.1.63}$$

Уравнение (9.1.61), приведённое к форме Коши, имеет в общем случае вид

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + L_p(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.1.64}$$

Эти уравнения содержат ««чистые»» производные вектора $\boldsymbol{y}$ и поэтому не реализуемы. Реализуемая форма аналогично (9.1.2)

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}. \tag{9.1.65}$$

Из процедуры преобразования уравнений к форме Коши, описанная в 9.П.3, следует, что, если степень каждой строки матрицы $G(s)$ больше степени соответствующей строки матрицы $R(s)$

$$\partial_{ri}[G(s)] \geq \partial_{ri}[R(s)] \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.1.66}$$

то уравнения регулятора (9.1.61), приведённые к форме Коши, имеют реализуемую структуру (9.1.65).

Будем называть неравенства (9.1.66) *условием реализуемости регулятора* (9.1.61).

Если это условие нарушается, то дополним матрицу $G(s)$ в (9.1.61) $m \times m$ *реализующей матрицей*

$$L(s) = L^{(\rho)}s^{\rho} + \cdots + L^{(\mu)}s^{\mu}. \tag{9.1.67}$$

Структуру этого полинома выберем так, чтобы выполнялось условие реализуемости

$$\partial_{ri}[L(s) + G(s)] > \partial_{ri}[R(s)] \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.1.68}$$

Для определения параметров $L(s)$ рассмотрим характеристический полином объекта (9.1.13) с регулятором

$$[L(s) + G(s)]\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.1.69}$$

Аналогично (9.1.24) запишем, с учётом (9.1.26)

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \begin{pmatrix} P(s) & -E \\ -R(s)N(s) & L(s) + G(s) \end{pmatrix} = \\ &= \det\left[L(s)P(s) + G(s)P(s) - R(s)N(s)\right] = \det\left[L(s)P(s) + \Delta(s)\right]. \end{aligned} \tag{9.1.70}$$

Параметры $L(s)$ определим из тождества

$$\det\left[L(s)P(s) + \Delta(s)\right] = \delta(s)\delta_1(s), \tag{9.1.71}$$

где $\delta_1(s)$ – полином, корни которого несоизмеримо больше корней заданного полинома $\delta(s)$.

9.1.8. Компенсационная схема*

Изложим ещё один путь построения реализуемого регулятора. Будем искать его уравнение в виде

$$Q(s)\boldsymbol{u} = H^{(1)}(s)\boldsymbol{y} + H^{(2)}(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.1.72}$$

где $Q(s)$ – заданная $m \times m$ гурвицева матрица, обладающая свойствами

$$\partial_{ri}[Q(s)] \geq \partial_{ri}[H^{(1)}(s)], \quad \partial_{ri}[Q(s)] \geq \partial_{ri}[H^{(2)}(s)] \quad i = \overline{1, m}, \tag{9.1.73}$$

$$\partial_{ri}[Q(s)] = \check{\mu} - 1 \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.1.74}$$

Структурная схема такого регулятора в одномерном случае приведена на рис. 3.3.3. Неравенства (9.1.73) означают, что уравнение (9.1.71) приводимо к реализуемой форме Коши (9.1.2).

Действительно, положим в правой части (9.1.72) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(1)}$ и введём вектор $\boldsymbol{y}^{(1)} = \left[\boldsymbol{y}', \boldsymbol{u}^{(1)\prime}\right]'$. Тогда (9.1.72) примет в форме Коши вид

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p^{(1)}\boldsymbol{y}^{(1)}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p^{(1)}\boldsymbol{y}^{(1)}.$$

Возвращаясь к ««старым»» переменным, получим уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p^{(1,1)}\boldsymbol{y} + B_p^{(1,2)}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p^{(1,1)}\boldsymbol{y} + F_p^{(1,2)}\boldsymbol{u},$$

которые после несложных преобразований принимают вид (9.1.65).

Характеристический полином объекта (9.1.13) с регулятором (9.1.72)

$$d^u(s) = \det\left\{\left[Q(s) - H^{(2)}(s)\right]P(s) - H^{(1)}(s)N(s)\right\}. \tag{9.1.75}$$

Определим матрицы $H^{(1)}(s)$ и $H^{(2)}(s)$ из тождества

$$H^{(2)}(s)P(s) + H^{(1)}(s)N(s) = Q(s)F(s), \tag{9.1.76}$$

в котором $m \times m$ матрица $F(s)$ удовлетворяет условию

$$\partial_{ci}[F(s)] < \partial_{ci}[P(s)] \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.1.77}$$

Матрица $Q(s)F(s)$ в правой части этого тождества удовлетворяет условию (9.1.41) и поэтому оно разрешимо.

Подставим (9.1.76) в выражение (9.1.75) для характеристического полинома и получим

$$d^u(s) = \det Q(s)\det[P(s) - F(s)]. \tag{9.1.78}$$

Если выбрать матрицы $Q(s)$ и $F(s)$ так, чтобы они удовлетворяли тождеству

$$\det Q(s)\det[P(s) - F(s)] = \delta(s), \tag{9.1.79}$$

то из (9.1.76) получим матрицы

$$\begin{aligned} H^{(1)}(s) &= H^{(1)[\mu-1]}s^{\mu-1} + \cdots + H^{(1)[1]}s + H^{(1)[0]}, \\ H^{(2)}(s) &= H^{(2)[\mu-1]}s^{\mu-1} + \cdots + H^{(2)[1]}s + H^{(2)[0]}, \end{aligned}$$

разрешающие задачу 9.1.1 модального управления. При этом

$$\partial_{ri}\left[H^{(1)}(s)\right] \le \check{\mu} - 1, \quad \partial_{ri}\left[H^{(2)}(s)\right] \le \check{\mu} - 1 \quad i = \overline{1,m},$$

и поэтому выполняются неравенства (9.1.73), обеспечивающие реализуемость регулятора (9.1.72).

Построим матрицу $Q(s)$, удовлетворяющую условиям (9.1.73), (9.1.74) с определителем, равным заданному полиному

$$\delta_2(s) = s^{m(\check{\mu}-1)} + \delta^{(2)}_{m(\check{\mu}-1)-1}s^{m(\check{\mu}-1)-1} + \cdots + \delta^{(2)}_1 s + \delta^{(2)}_0 = \prod_{i=1}^{m(\check{\mu}-1)}(s - s_i^*). \tag{9.1.80}$$

Такая матрица имеет вид

$$Q(s) = \begin{pmatrix} s^{\check{\mu}-1} & 0 & \cdots & \alpha_{1m}(s) \\ -1 & s^{\check{\mu}-1} & \cdots & \alpha_{2m}(s) \\ 0 & -1 & \cdots & \alpha_{3m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\check{\mu}-1} + \alpha_{mm}(s) \end{pmatrix}, \tag{9.1.81}$$

где

$$\alpha_{im}(s) = \sum_{k=0}^{\check{\mu}-2} \delta_{(i-1)(\check{\mu}-1)+k} s^k \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.1.82}$$

Нетрудно проверить, что $\det Q(s) = \delta_2(s)$. Остальные $[n - m(\check{\mu}-1)]$ корни полинома $\delta(s) = \delta_2(s)\delta_3(s)$ обеспечиваются выбором $F(s)$ из условия

$$\det[P(s) - F(s)] = \delta_3(s) = \delta^{(3)}_{n-m(\check{\mu}-1)} s^{n-m(\check{\mu}-1)} + \cdots + \delta^{(3)}_1 s + \delta^{(3)}_0. \tag{9.1.83}$$

9.2. Синтез регуляторов и следящих систем на основе модального тождества

9.2.1. Показатели точности и качества

Рассмотрим процессы по регулируемым переменным $z_i(t)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ в системе (9.1.1), (9.1.2) при внешних возмущениях $f_i(t)$ $\left(i = \overline{1,\mu}\right)$. Эта система принимает теперь вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}; \tag{9.2.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{9.2.2}$$

где M и L – заданные матрицы размеров $n \times \mu$ и $m \times n$ соответственно.

Будем различать три вида возмущений: ступенчатое

$$f_i(t) = \begin{cases} \bar{f}_i & \text{при} \quad t \geq t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t < t_0, \end{cases} \qquad i = \overline{1,\mu}, \tag{9.2.3}$$

гармоническое

$$f_i(t) = f_{гарм.i} \sin \omega_i^f t \quad i = \overline{1,\mu}, \tag{9.2.4}$$

и произвольное ограниченное

$$|f_i(t)| \leq f_i^* \quad i = \overline{1,\mu}, \tag{9.2.5}$$

где $\bar{f}_i$, $f_{гарм.i}$, f_i^* $\left(i = \overline{1,\mu}\right)$ – заданные числа.

Процесс по i-той регулируемой переменной $z_i(t)$ можно разбить во времени на два процесса: установившийся и переходный. Первый из них – это обычный режим

работы системы, обусловленный внешними возмущениями. Переходный процесс вызывается начальными отклонениями и изменением состояния системы при возникновении возмущений. По истечении некоторого времени, называемого временем регулирования по i-той регулируемой переменной $(t_{рег.i})$, переходный процесс затухает до установившегося.

Каждый из этих процессов характеризуется своей точностью:

а) точность в установившемся режиме

$$z_{уст.i} = \max_{t_{\text{пер}.i} \le t \le \infty} |z_i(t)| \quad i = \overline{1,m}; \tag{9.2.6}$$

б) точность в переходном процессе

$$z_{перех.i} = \max_{t_0 \le t \le t_{\text{пер}.i}} |z_i(t)| \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.7}$$

Часто используют значение

$$\sigma_i = \frac{|z_{перех.i} - z_{уст.i}|}{|z_{уст.i}|} \cdot 100\% \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.2.8}$$

которое называется *перерегулированием по i-той регулируемой переменной.*

Время регулирования $(t_{рег.i})$ и перерегулирование (σ_i) по i-той регулируемой переменной называются *показателями качества системы по i-той регулируемой переменной*, а число $z_{уст.i}$ – *показателем точности по i-той регулируемой переменной.*

Геометрический смысл этих показателей заключается в следующем. Пусть найдено всё множество решений дифференциальных уравнений (9.2.1), (9.2.2), порождённых начальными условиями и внешними возмущениями из множества (9.2.5). Используем эти решения и найдём множество функций $z_i(t)$, описывающих возможное поведение i-той регулируемой переменной. Это множество часто можно заключить в две трубки как показано на рис. 9.2.1.

Параметры этих трубок позволяют найти показатели точности и качества. Отметим, что понятие времени регулирования по i-той регулируемой переменной точно не определено, а носит интуитивный характер. Для ступенчатых и гармонических внешних возмущений можно дать точное его определение.

При ступенчатых внешних возмущениях (9.2.3) определяют статические ошибки

$$z_{ст.i} = \lim_{t \to \infty} z_i(t) \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.2.9}$$

которые находятся как решения системы алгебраических уравнений, получаемой из (9.2.1), (9.2.2) при $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}_p = \mathbf{0}$.

Время регулирования по i-той регулируемой переменной в этом случае определяется (как и для одномерных систем) как время, через которое процесс по i-той

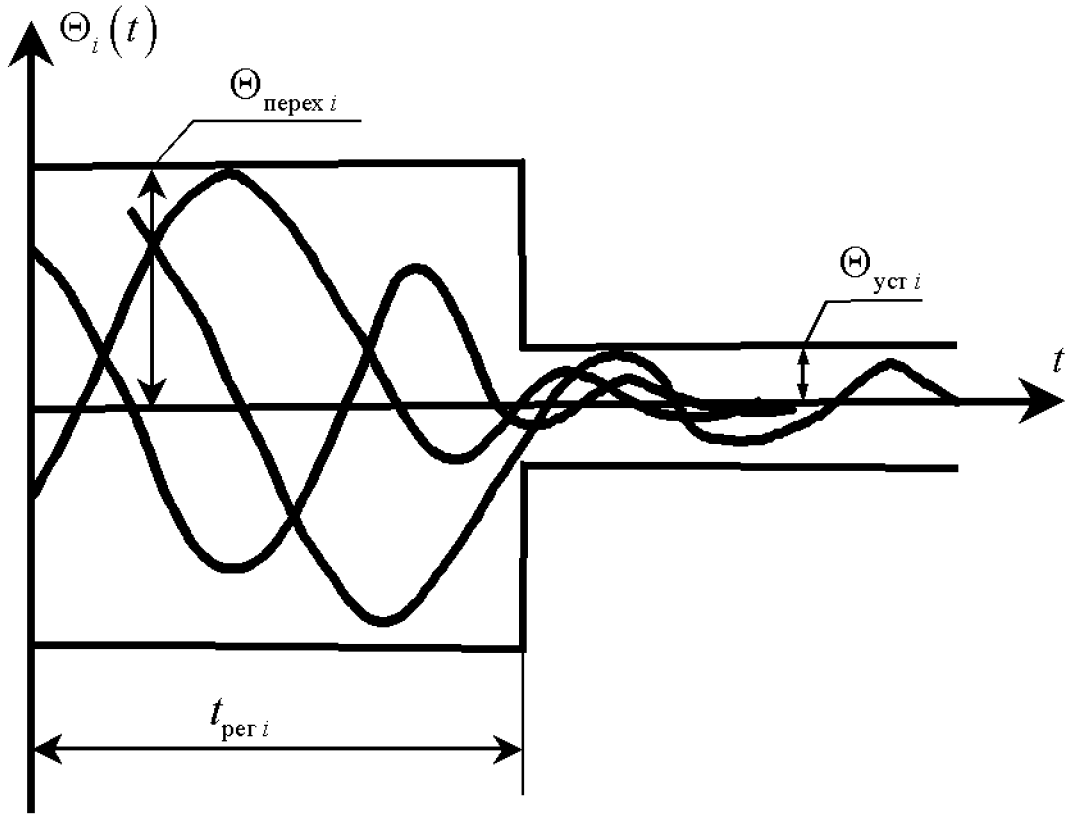

Рис. 9.2.1.

регулируемой переменной не выходит из зоны $\pm 5\% z_{уст.i}$. Используя эти зоны, находим, что

$$z_{уст.i} = 1.05|z_{ст.i}| \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.2.10}$$

При гармонических возмущениях (9.2.4) найдём

$$z_{гарм.i} = \lim_{t\to\infty} \sup_{t_1 \le t \le \infty} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.2.11}$$

Время регулирования по i-той регулируемой переменной – это время, через которое процесс по i-той регулируемой переменной не выходит из трубки

$$z_{уст.i} = 1.05 z_{гарм.i} \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.2.12}$$

9.2.2. Постановка задачи синтеза и уравнение качества

Выделим из объектов (9.2.1) объекты первого вида, для которых $M = B$ и $D = E_n$ и объекты второго вида, в которых измеряемые переменные совпадают с регулируемыми $(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z})$. Для этих видов объектов сформулируем задачу синтеза.

Задача 9.2.1. Для объекта (9.2.1) найти регулятор (9.2.2) такой, чтобы эта система удовлетворяла требованию к точности

$$z_{уст.i} \le z^*_{уст.i} \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.2.13}$$

и имела при ступенчатом внешнем возмущении показатели качества

$$\underline{t}_{рег.i} \le t_{рег.i} \le \overline{t}_{рег.i}, \quad \sigma_i \le \bar{\sigma}_i \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.14}$$

где $\underline{t}_{рег.i}$, $\overline{t}_{рег.i}$, $\bar{\sigma}_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Как и в одномерное случае, решение задачи 9.2.1 опирается на уравнение качества (уравнение желаемой модели замкнутой системы). Для его описания запишем (9.2.1) в форме ««вход-выход»»

$$D(s)\boldsymbol{y} = B(s)\boldsymbol{u} + M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.15}$$

Это уравнение нетрудно получить на основе процедуры 9.П.2, если ввести вектор $\boldsymbol{u}^{(1)} = [\boldsymbol{u}', \boldsymbol{f}']'$ и записать (9.2.1) как

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)}. \tag{9.2.16}$$

Для объектов первого вида

$$D(s)\boldsymbol{z} = B(s)\boldsymbol{u} + M(s)\boldsymbol{f}, \quad M(s) = B(s). \tag{9.2.17}$$

Объекты второго вида описываются (9.2.15) при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

Уравнением качества многомерных систем будем называть уравнение

$$\tilde{\Psi}(s)\boldsymbol{z} = M(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.2.18}$$

в котором полиномиальная матрица

$$\tilde{\Psi}(s) = \tilde{\Psi}^{[\tilde{æ}]}s^{\tilde{æ}} + \tilde{\Psi}^{[\tilde{æ}-1]}s^{\tilde{æ}-1} + \cdots + \tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]} \tag{9.2.19}$$

такова, что выполняются требования (9.2.13), (9.2.14) к точности и качеству.

Рассмотрим случай, когда нетрудно построить уравнение качества.

Определение 9.2.1. Объект (9.2.1) называется *устойчивым по возмущению*, если корни полинома $\det M(s)$ имеют отрицательные вещественные части. ■

Если объект устойчив по возмущению и размерность вектора возмущения f совпадает с числом регулируемых переменных $(\mu = m)$, то в уравнении качества можно принять

$$\tilde{\Psi}(s) = M(s)\tilde{\tilde{\Psi}}(s), \tag{9.2.20}$$

где полиномиальная матрица $\tilde{\tilde{\Psi}}(s)$ такова, что решения уравнения

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(s)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}, \tag{9.2.21}$$

удовлетворяют требованиям (9.2.13), (9.2.14).

Примем

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(s) = HT(s), \tag{9.2.22}$$

где $H = \operatorname{diag}\left[\begin{array}{cccc} h_{11} & h_{22} & \cdots & h_{mm} \end{array}\right]$, $T(s) = \operatorname{diag}\left[\begin{array}{cccc} t_{11}(s) & t_{22}(s) & \cdots & t_{mm}(s) \end{array}\right]$.

Тогда

$$z_i(s) = \frac{f_i(s)}{h_{ii}t_{ii}(s)} \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.23}$$

Определим числа h_{ii} $\left(i = \overline{1,m}\right)$ и полиномы $t_{ii}(s)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Для ступенчатых возмущений $\left(\text{когда } f_i(s) = \dfrac{\bar{f}_i}{s}\right)$ примем

$$h_{ii} \geq \frac{\bar{f}_i}{z^*_{уст.i}}, \tag{9.2.24}$$

$$t_{ii}(s) = (\tau_i s + 1) \quad \left(\frac{t_{рег.i}}{3} \leq \tau_i \leq \frac{\bar{t}_{рег.i}}{3}\right) \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.25}$$

Тогда оригинал изображения (9.2.23) имеет вид

$$z_i(t) = z^*_{уст.i}\left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau_i}}\right) \quad i = \overline{1,m},$$

и следовательно удовлетворяются требования (9.2.13), (9.2.14). Для гармонических внешних возмущений следует заменить в (9.2.24) числа $\bar{f}_i$ на $f_{гарм.i}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, а при неопределённых – f_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Заметим, что для формирования полиномов $t_{ii}(s)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ можно использовать процедуру 3.2.2 построения уравнения качества одномерных систем. Кроме того, когда размерность вектора возмущения меньше m, то можно представить $M\boldsymbol{f}$ как $M^{(1)}\boldsymbol{f}^{(1)}$, где $\boldsymbol{f}^{(1)}(t)$ – m-мерный вектор.

Если объект (9.2.1) не является устойчивым по возмущению (полином $\det m(s)$ не гурвицев), то для построения уравнения качества используется процедура, приведённая в 9.П.4.

Эта процедура обеспечивает выполнение неравенств

$$|z_i(t)| \leq z_i^* \quad i = \overline{1,m}, \quad t \geq t_0, \tag{9.2.26}$$

где z_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа.

9.2.3. Структурное модальное управление

Найдём связь вектора регулируемых переменных с вектором внешних возмущений в системе (9.2.1), (9.2.2) с объектом второго вида. Для этого запишем уравнения системы в форме ««вход-выход»»

$$D(s)\boldsymbol{y} = B(s)\boldsymbol{u} + M(s)\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}, \tag{9.2.27}$$

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.2.28}$$

Найдём зависимость векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{f}$. С учётом (9.2.27) получим

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)D^{-1}(s)B(s)\boldsymbol{u} + R(s)D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f},$$

или

$$\boldsymbol{u} = \left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1} R(s)D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.29}$$

Подставим это выражение в (9.2.27) и тогда искомая связь имеет вид

$$\boldsymbol{y} = D^{-1}(s)\left\{B(s)\left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1} R(s)D^{-1}(s) + E_m\right\} M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.30}$$

Пусть матрицы регулятора $G(s)$ и $R(s)$ удовлетворяют тождеству

$$G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s) = \tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s). \tag{9.2.31}$$

Очевидно, что это тождество разрешается для матриц

$$G(s) = B(s), \quad R(s) = D(s) - \tilde{\Psi}(s), \tag{9.2.32}$$

которые будем называть *матрицами структурного модального управления.*

Подставим (9.2.31) в (9.2.30) и получим

$$\boldsymbol{y} = D^{-1}(s)\left[D(s)\tilde{\Psi}^{-1}(s)R(s)D^{-1}(s) + E_m\right] M(s)\boldsymbol{f} = \left[\tilde{\Psi}^{-1}(s)R(s) + E_m\right] D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f}.$$

Учтём второе из решений (9.2.32) и тогда

$$\boldsymbol{y} = \tilde{\Psi}^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.33}$$

Это выражение совпадает (так как $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$) с уравнением качества (9.2.18). По построению матрицы $\tilde{\Psi}(s)$ процессы в системе (9.2.27), (9.2.28) с матрицами (9.2.32) удовлетворяют требованиям задачи 9.2.1, когда объект устойчив по возмущению. Если объект неустойчив по возмущению, то построение матрицы $\tilde{\Psi}(s)$ обеспечивает выполнения требований к точности (9.2.26).

Исследуем устойчивость системы со структурным модальным управлением.

Подставим в выражение (9.2.27) характеристического полинома системы (9.2.27), (9.2.28) тождество (9.2.31) и получим

$$d^u(s) = \det D(s) \det\left[\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s)\right] = \det\tilde{\Psi}(s) \det B(s). \tag{9.2.34}$$

Очевидно, что для асимптотической устойчивости системы со структурным модальным регулятором

$$B(s)\boldsymbol{u} = \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]\boldsymbol{y}, \tag{9.2.35}$$

необходимо и достаточно, чтобы полином $\det B(s)$ был гурвицевым. Последнее удобно описывать с помощью следующего понятия.

Определение 9.2.2. Объект (9.1.1) называется *устойчивым по управлению*, если корни полинома $\det B(s)$ имеют отрицательные вещественные части. ■

Итак, регулятор (9.2.35) решает задачу 9.2.1 для объектов устойчивых по управлению.

Исследуем единственность решения.

Утверждение 9.2.1. Матрицы (9.2.32) – единственное решение тождества (9.2.31). ■

Доказательство утверждения приведено в 9.Д.2.

9.2.4. Процедура синтеза регулятора

Для реализуемости регулятора (9.2.35) должно выполняться условие (9.1.66)

$$\partial_{ri}[B(s)] < \partial_{ri}\left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right] \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.36}$$

Наложим на матрицу $\tilde{\Psi}(s)$ ограничение

$$\Gamma_r\left[\tilde{\Psi}(s)\right] = \Gamma_r[D(s)]. \tag{9.2.37}$$

Тогда

$$\partial_{ri}\left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right] = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1,m},$$

и условие (9.2.36) примет вид

$$\partial_{ri}[B(s)] < \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.38}$$

Если оно нарушается, необходимо изменить правую часть тождества (9.2.31).

В связи с этим преобразуем это тождество. Заметим вначале, что по построению формы ««вход-выход»» и канонической формы Лагранжа

$$D^{-1}(s)B(s) = N(s)P^{-1}(s) = D(Es - A)^{-1}B, \tag{9.2.39}$$

и поэтому (9.2.31) можно записать в виде

$$G(s) - R(s)N(s)P^{-1}(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s)P^{-1}(s), \tag{9.2.40}$$

или, после умножения справа на матрицу $P(s)$, как

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s). \tag{9.2.41}$$

Матрицы (9.2.32) разрешают это тождество. Действительно, после их подстановки получим

$$B(s)P(s) - \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]N(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s),$$

или

$$B(s)P(s) - D(s)N(s) = 0.$$

Последнее выполняется в силу (9.2.39).

Введём в рассмотрение матричный полином

$$\mathcal{E}^0(s) = \operatorname{diag}\left[\ \varepsilon_1^0(s) \quad \varepsilon_2^0(s) \quad \cdots \quad \varepsilon_m^0(s)\ \right], \tag{9.2.42}$$

где

$$\varepsilon_i^0(s) = \left(\varepsilon_i^0 s + 1\right)^{\alpha_i} \qquad i = \overline{1,m}, \tag{9.2.43}$$

в которых ε_i^0 $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – достаточно малые положительные числа.

Сформируем тождество

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s), \tag{9.2.44}$$

которое отличается от (9.2.41) матрицей $\mathcal{E}^0(s)$.

Матрицы, разрешающие (9.2.44), будем искать в виде

$$G(s) = \left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right] B(s), \quad R(s) = D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s), \tag{9.2.45}$$

где $O^E(s)$ и $O^R(s)$ – некоторые полиномиальные матрицы.

Подставим (9.2.45) в (9.2.44) и получим, после умножения справа на $P^{-1}(s)$

$$\left[\mathcal{E}^0(s)+O^E(s)\right] B(s) - \left[D(s)-\tilde{\Psi}(s)+O^R(s)\right] N(s)P^{-1}(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s)P^{-1}(s). \tag{9.2.46}$$

Используем равенства (9.2.39) и приходим к тождеству

$$\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right] B(s) - \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s)\right] D^{-1}(s)B(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s),$$

которое после сокращения на $B(s)$ и умножения справа на $D(s)$ принимает вид

$$\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right] D(s) - \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s)\right] = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s),$$

или

$$O^E(s)D(s) - O^R(s) = -\left[\mathcal{E}^0(s) - E_m\right] \cdot \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]. \tag{9.2.47}$$

Найдём условия существования матриц $O^E(s)$ и $O^R(s)$, разрешающих это тождество.

Введём обозначения

$$P(s) = \check{P}(s) = D(s), \quad N(s) = \check{N}(s) = E_m, \tag{9.2.48}$$

$$\Delta(s) = \check{\Delta}(s) = -\left[\mathcal{E}^0(s) - E_m\right] \cdot \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right], \tag{9.2.49}$$

и запишем (9.2.47) в форме матричного модального тождества (9.1.26)

$$O^E(s)\check{P}(s) - O^R(s)\check{N}(s) = \check{\Delta}(s). \tag{9.2.50}$$

Для существования решения этого тождества достаточно чтобы полиномиальные матрицы $\check{P}(s)$ и $\check{N}(s)$ обладали свойством 9.1.1, а элиминатная матрица $\check{M}_{e\check{\mu}}$, сформированная для $\check{P}(s)$ и $\check{N}(s)$, имела ранг $n + m\check{\check{\mu}}$. Кроме того, для $\check{\Delta}(s)$ должно выполняться условие (9.1.41)

$$\partial_{cj}\left\{\left[\mathcal{E}^0(s) - E_m\right]\cdot\left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]\right\} \le \bar{\nu}_j + \check{\check{\mu}} - 1. \tag{9.2.51}$$

Пусть существуют матричные полиномы $O^E(s)$ и $O^R(s)$, разрешающие тождество (9.2.50).

Матрицы коэффициентов в этих полиномах можно сделать сколь угодно малыми выбором достаточно малых чисел ε_i^0 $\left(i = \overline{1,m}\right)$ в полиноме $\mathcal{E}^0(s)$.

Действительно, полином $\mathcal{E}^0(s)$ имеет структуру

$$\mathcal{E}^0(s) = E_m + \mathcal{E}^{01}s + \mathcal{E}^{02}s^2 + \cdots, \tag{9.2.52}$$

где $\mathcal{E}^{01} = \mathrm{diag}\left[\ \alpha_1\varepsilon_1^0\ \ \alpha_2\varepsilon_2^0\ \ \cdots\ \ \alpha_m\varepsilon_m^0\ \right]$, $\mathcal{E}^{02} = \mathrm{diag}\left[\ \alpha_1^{(2)}\left(\varepsilon_1^0\right)^2\ \ \alpha_2^{(2)}\left(\varepsilon_2^0\right)^2\ \ \cdots\ \ \alpha_m^{(2)}\left(\varepsilon_m^0\right)^2\ \right]$, $\alpha_i^{(2)}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – числа, зависящие от α_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Из этой структуры следует, что разность $\mathcal{E}^0(s) - E_m$ содержит матрицы, исчезающие вместе с числами ε_i^0 $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Так как элиминантная матрица $\check{M}_{e\check{\mu}}$ не зависит от этих чисел, то результат решения тождества (9.2.50) также будет представлять собой исчезающие полиномиальные матрицы.

Пренебрежём матрицей $O^R(s)$ в выражении (9.2.45) для $R(s)$ и запишем уравнение регулятора как

$$\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right]B(s)\boldsymbol{u} = \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]\boldsymbol{y}. \tag{9.2.53}$$

Условие его реализуемости (при ограничении (9.2.37)) имеет вид

$$\partial_{ri}\left\{\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right]B(s)\right\} \ge \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.54}$$

Резюмируем изложенное как последовательность решения задачи 9.2.1.

Процедура 9.2.1.**(Процедура аналитического синтеза регуляторов для объектов второго вида)** состоит из операций:

Операция 1. Привести уравнение объекта (9.2.1) к форме ««вход-выход»» (9.2.15) и сформировать полиномиальную матрицу $\tilde{\Psi}(s)$ уравнения качества (9.2.18). Эта матрица должна удовлетворять условию (9.2.37).

Операция 2. Сформировать регулятор (9.2.35). Если выполняется условие реализуемости (9.2.38), то перейти к операции 7, если оно нарушается – то к операции 3.

Операция 3. Проверить столбцовую правильность матрицы $\check{P}(s)=D(s)$. (Остальные признаки свойства 9.1.1 выполняются автоматически, так как $\partial_{cj}[D(s)] \geq 1$, а $\partial_{cj}[\check{N}(s)] = \partial_{cj}[E_m] = 0$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$), построить элиминантную матрицу $\check{M}_{e\check{\mu}}$ и убедиться, что

$$\operatorname{rank} \check{M}_{e\check{\mu}} = n + m\check{\check{\mu}}. \tag{9.2.55}$$

Операция 4. Построить полином $\mathcal{E}^0(s)$ по формуле (9.2.42). Его степени α_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ должны удовлетворять неравенству (9.2.51), а также соотношению

$$\partial_{ri}\left[\mathcal{E}^0(s)B(s)\right] \geq \bar{\nu}_i - 1 \quad i=\overline{1,m}. \tag{9.2.56}$$

которого обычно достаточно для выполнения условия реализуемости (9.2.54).

Операция 5. Решить, используя процедуру 9.1.1, тождество (9.2.50) и найти полиномиальные матрицы $O^E(s)$ и $O^R(s)$. Убедиться, что коэффициенты этих матриц достаточно малы. В противном случае вернуться к операции 4 и уменьшить числа ε_i^0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Операция 6. Сформировать уравнение (9.2.53) регулятора. Проверить выполнение условия (9.2.54). Если оно нарушается, вернуться к операции 4 и уточнить числа α_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Операция 7. Привести уравнение регуляторе к форме Коши (9.2.1).

■

9.2.5. Альтернативная процедура синтеза

Возможен другой путь решения задачи 9.2.1. Он основан на разрешении тождества (9.2.44), правая часть которого должна удовлетворять условию (9.1.41)

$$\partial_{ci}\left[\mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s)\right] \leq \bar{\nu}_i + \mu - 1. \tag{9.2.57}$$

Хотя тождество (9.2.44) и процедура его решения не содержат матрицы $D(s)$, нужно проверять её столбцовую правильность и условие (9.2.55). Это связано с тем, что этих условий достаточно для обеспечения малости матриц в $O^E(s)$ и $O^R(s)$ при малых ε_i^0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Процедура 9.2.2. (Второй вариант процедуры 9.2.1) состоит из операций:

Операция 1. Совпадает с операцией 1 процедуры 9.2.1.

Операция 2. Построить элиминантную матрицу $M_{e\mu}$ для $P(s)$ и $N(s)$ и найти индекс элиминантной матрицы $\check{\mu}$.

Операция 3. Построить полином $\mathcal{E}^0(s)$ по формуле (9.2.42). Его степени α_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ должны удовлетворять неравенствам (9.2.56), (9.2.57). Если эти неравенства противоречивы, то уточнить степени строк и столбцов матрицы $\tilde{\Psi}(s)$ уравнения качества.

Операция 4. Совпадает с операцией 3 процедуры 9.2.1.

Операция 5. Решить, используя процедуру 9.1.1, тождество (9.2.44) и найти матрицы $G(s)$ и $R(s)$. Сравнить эти матрицы с матрицами $\mathcal{E}^0(s)\cdot B(s)$ и $D(s)-\tilde{\Psi}(s)$ соответственно. Убедиться, что эти матрицы различаются несущественно. В противном случае вернуться к операции 3 и уменьшить числа ε_i^0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Операции 6 и 7. Совпадают с одноимёнными операциями процедуры 9.2.1.

■

Исследуем точность и качество системы с построенным регулятором (9.2.53). Найдём связь векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{f}$. Для этого подставим в выражение (9.2.30) тождество (9.2.44), которое запишем с учётом (9.2.39) в виде

$$G(s)-R(s)D^{-1}(s)B(s)=\mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s). \tag{9.2.58}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= D^{-1}(s)\left\{D(s)\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}R(s)D^{-1}(s)+E_m\right\}M(s)\boldsymbol{f}=\\ &=\left\{\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}R(s)+E_m\right\}D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f}=\\ &=\left\{\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}\left[D(s)-\tilde{\Psi}(s)\right]+E_m\right\}D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f}.\end{aligned} \tag{9.2.59}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках

$$\begin{aligned}&\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}\left[D(s)-\tilde{\Psi}(s)\right]+\tilde{\Psi}^{-1}(s)E_m\tilde{\Psi}(s)=\\ &=-\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left\{\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}-E_m\right\}\tilde{\Psi}(s)+\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}D(s).\end{aligned}$$

Пренебрежём первым слагаемым в правой части этого равенства при достаточно малых числах ε_i^0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Получим выражение

$$\boldsymbol{y}\approx\tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}M(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.2.60}$$

которое отличается от (9.2.33) полиномиальной матрицей $\mathcal{E}^0(s)$ с малыми коэффициентами.

Пример 9.2.1. Рассмотрим датчик угловой скорости в процессе измерения угловой скорости. В этом случае он описывается уравнениями, аналогичными уравнениям (9.1.49)

$$a\ddot{\alpha}+h\dot{\beta}=m_{z_1}+m_2,\quad r\ddot{\beta}-h\dot{\alpha}=m_x+m_1, \tag{9.2.61}$$

где $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – моменты, пропорциональные измеряемым угловым скоростям, трактуемые далее как внешние возмущения.

Введём безразмерные переменные

$$y_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \tag{9.2.62}$$

где $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ рад, сократим (9.2.61) на 1 н.м и обозначим

$$\begin{array}{llll} d_{12}^{[1]} = -\dfrac{h}{r}, & d_{21}^{[1]} = \dfrac{h}{a}, & b_{11}^{[0]} = \dfrac{1}{r}, & b_{22}^{[0]} = \dfrac{1}{a}, \\ m_x = u_1, & m_{z_1} = u_2, & m_1 = f_1, & m_2 = f_2, \end{array} \tag{9.2.63}$$

и запишем уравнения (9.2.61) в форме ««вход-выход»»

$$\begin{pmatrix} s^2 & d_{12}^{[1]}s \\ d_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \tag{9.2.64}$$

Задача состоит в нахождении такого регулятора (9.2.53), чтобы система (9.2.64), (9.2.53) при действии ступенчатых внешних возмущений

$$f_i(t) = \begin{cases} \bar{f}_i & \text{при} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad t < 0, \end{cases} \qquad i = \overline{1,2},$$

имела установившиеся ошибки

$$y_{уст.i} \leq y^*_{уст.i} \quad (y_i = z_i) \quad i = \overline{1,2}, \tag{9.2.65}$$

а её время регулирования при апериодическом переходном процессе удовлетворяло условию

$$t_{рег.i} = \bar{t}_{рег.i} \quad i = \overline{1,2}, \tag{9.2.66}$$

где $\bar{f}_i$, $y^*_{уст.i}$, $\bar{t}_{рег.i}$ $\left(i = \overline{1,2}\right)$ – заданные числа.

Для решения этой задачи используем процедуру 9.2.1.

Операция 1. Уравнения объекта (9.2.61) уже приведены к форме ««вход-выход»» (9.2.64) и поэтому переходим к построению уравнения качества. Объект (9.2.64) устойчив по возмущению $\left(\det M(s) = \det B(s) = b_{11}^{[0]} b_{22}^{[0]}\right)$ и поэтому в соответствии с (9.2.20), (9.2.22) запишем

$$M(s)\tilde{\tilde{\Psi}}(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11}(\tau_1 s + 1) & 0 \\ 0 & h_{22}(\tau_2 s + 1) \end{pmatrix}, \tag{9.2.67}$$

где

$$h_{ii} = \frac{\bar{f}_i}{y^*_{уст.i}}, \quad \tau_i = \frac{\bar{t}_{рег.i}}{3} \quad i = \overline{1,2}. \tag{9.2.68}$$

Эта матрица не удовлетворяет условию (9.2.37), поэтому сформируем

$$\tilde{\Psi}(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} h_{11}(\tau_1 s + 1)(T_1 s + 1) & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} h_{22}(\tau_2 s + 1)(T_2 s + 1) \end{pmatrix},$$

где

$$T_i = \frac{1}{b_{ii}^{[0]} h_{ii} \tau_i} \quad i = \overline{1,2}.$$

При этом постоянные времени T_i должны быть несоизмеримо меньше чисел τ_i $\left(i = \overline{1,2}\right)$. Это можно достичь выбирая

$$h_{ii} \geq \frac{\bar{f}_i}{y^*_{ycm.i}} \quad i = \overline{1,2}.$$

Операция 2. Индекс элиминантной матрицы объекта (9.2.61) $\check{\mu} = 2$. Он был определён в примере 9.1.4.

Операция 3. Построим полином $\mathcal{E}^0(s)$. Заметим, что в рассматриваемом случае

$$N(s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \nu_1 = \nu_2 = 2, \\ \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = 2. \end{matrix}$$

Полином $\mathcal{E}^0(s)$, удовлетворящий условиям (9.2.56), (9.2.57), имеет вид

$$\mathcal{E}^0(s) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 s + 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^0 s + 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i^0 \ll \tau_i$ $\left(i = \overline{1,2}\right)$.

Операция 4. Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} s^2 & d_{12}^{[1]} s \\ d_{21}^{[1]} s & s^2 \end{pmatrix}$$

столбцово-правильная матрица, а $\check{\mu} = \check{\check{\mu}} = 2$ и ранг $\check{M}_{e\check{\mu}} = 8$.

Операция 5. В тождестве (9.2.44) матрица

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} h_{11}(\tau_1 s + 1)(T_1 s + 1)(\varepsilon_1^0 s + 1) & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} h_{22}(\tau_2 s + 1)(T_2 s + 1)(\varepsilon_1^0 s + 1) \end{pmatrix},$$

а матрицы $P(s)$ и $N(s)$ имеют вид (9.1.54) и поэтому эта операция сводится к операции 3 примера 9.1.4 и искомые матрицы $G^{[0]}$, $G^{[1]}$, $R^{[0]}$, $R^{[1]}$ регулятора (9.1.58) имеют вид (9.1.60).

■

9.2.6. Задача слежения

Рассмотрим следящую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}; \tag{9.2.69}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y} + B_p^n\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{9.2.70}$$

где $\boldsymbol{v}(t)$ – æ-мерный вектор задающих воздействий, B_p^n – матрица чисел размеров $n_p \times$ æ.

Желаемые значения регулируемого вектора $\boldsymbol{z}(t)$ – цель управления – описываются m-мерной вектор-функцией $\boldsymbol{z}_{ж}(t)$. Вектор $\boldsymbol{z}_{ж}(t)$ задается уравнениями желаемой модели системы

$$\dot{\boldsymbol{x}}_м = A_м\boldsymbol{x}_м + B_м\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{z}_{ж} = L_м\boldsymbol{x}_м, \tag{9.2.71}$$

где $A_м$, $B_м$, $L_м$ – заданные матрицы чисел размеров $n_м \times n_м$, $n_м \times$ æ, $m \times n_м$ соответственно.

Во многих случаях задающее и желаемое движения совпадают

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{z}_{ж}(t). \tag{9.2.72}$$

Объём сведений о задающих воздействиях может быть различным: они могут быть известны априори, но неизмеряемы, либо, наоборот, – неизвестны заранее, но измеряемы в процессе работы системы.

Задача 9.2.2. (Задача синтеза следящих систем). При известных параметрах уравнений объекта (9.2.69) и уравнений (9.2.71) [либо (9.2.72)] связи цели управления с задающим воздействием найти уравнения (9.2.70) регулятора такие, чтобы ошибки слежения

$$|z_i(t) - z_{ж.i}(t)| \le \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1,m}, \quad t \ge t_{рег}, \tag{9.2.73}$$

где ε_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Уточним эту задачу для объектов второго вида. Запишем уравнения (9.2.69), (9.2.70) в форме ««вход-выход»»

$$D(s)\boldsymbol{y} = B(s)\boldsymbol{u} + M(s)\boldsymbol{f}, \quad (\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}), \tag{9.2.74}$$

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y} + R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.75}$$

В этой форме уравнения (9.2.71) желаемой модели примут вид

$$\Psi_м(s)\boldsymbol{y}_{ж} = L_м(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.76}$$

Задача 9.2.3. **(Задача синтеза следящих систем с объектами второго вида)** При заданных параметрах объекта (9.2.74) найти регулятор (9.2.75) такой, чтобы ошибки слежения

$$|y_i(t) - y_{ж.i}(t)| \le \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1,m}, \quad t \ge t_{рег}. \tag{9.2.77}$$

■

Заметим, что при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$ задача слежения сводится к задаче регулирования. Действительно, введём вектор ошибок слежения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_{ж}(t) \tag{9.2.78}$$

и положим в (9.2.75)

$$R^n(s) = -R(s), \tag{9.2.79}$$

тогда систему (9.2.74), (9.2.75) можно записать в виде

$$D(s)\boldsymbol{\varepsilon}^f = B(s)\boldsymbol{u} + M(s)\boldsymbol{f} - D(s)\boldsymbol{y}_{ж}, \quad G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{\varepsilon}^f. \tag{9.2.80}$$

Вводя вектор $\tilde{\boldsymbol{f}} = [\boldsymbol{f}', \boldsymbol{y}'_{ж}]'$ и матрицу $\tilde{M}(s) = [M'(s), -D'(s)]'$, приходим к уравнениям (9.2.27), (9.2.28) с точностью до обозначения $\boldsymbol{\varepsilon}^f = \boldsymbol{y}$. Требования к точности и качеству системы регулирования (9.2.80) будем формулировать в обобщённой форме (9.2.77): $\left|\varepsilon_i^f\right| \le \varepsilon_i^*$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, $t \ge t_0$.

9.2.7. Построение следящих систем при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$

Приведём другой путь решения задачи 9.2.3 при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$, не сводящий её к задаче регулирования.

Найдём вначале связь вектора $\boldsymbol{y}$ с вектором $\boldsymbol{v}$.

При $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ запишем аналогично (9.2.29)

$$\boldsymbol{u} = \left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1} R^n(s)\boldsymbol{v},$$

подставим это выражение в (9.2.74) и получим

$$\boldsymbol{y}^v = D^{-1}(s)B(s)\left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1} R^n(s)\boldsymbol{v}, \tag{9.2.81}$$

Таким образом, выход объекта

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^v + \boldsymbol{y}^f,$$

где $\boldsymbol{y}^f$ – реакция системы на внешнее возмущение, определяемая выражением (9.2.30)

$$\boldsymbol{y}^f = D^{-1}(s)\left\{B(s)\left[G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1} R(s)D^{-1}(s) + E_m\right\} M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.82}$$

Пусть матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора (9.2.75) получены в результате процедуры 9.2.2. Они удовлетворяют равенству (9.2.58), подставляя которое в (9.2.81), получим

$$\boldsymbol{y}^v = \tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1} R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.83}$$

При

$$R^n(s) = \tilde{\Psi}(s) \tag{9.2.84}$$

ошибка слежения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f = \boldsymbol{y}^v - \boldsymbol{y}_{ж} + \boldsymbol{y}^f = \tilde{\Psi}^{-1}(s)\left\{[\mathcal{E}^0(s)]^{-1} - E_m\right\}\tilde{\Psi}(s)\boldsymbol{y}_{ж} - \\ - \tilde{\Psi}^{-1}(s)\left\{[\mathcal{E}^0(s)]^{-1} - E_m\right\}\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)M(s)\boldsymbol{f} + \tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}M(s)\boldsymbol{f}.$$

Выберем коэффициенты ε_i^0 $\left(i = \overline{1,m}\right)$ полиномиальной матрицы $\mathcal{E}^0(s)$ достаточно малыми и получим приближенное выражение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f \approx \tilde{\Psi}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}M(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.2.85}$$

из которого следует, что выбором $\tilde{\Psi}(s)$ всегда можно выполнить требования (9.2.77) к точности слежения.

Таким образом, искомый регулятор имеет вид

$$\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right]B(s)\boldsymbol{u} = \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]\boldsymbol{y} + \tilde{\Psi}(s)\boldsymbol{y}_{ж}. \tag{9.2.86}$$

Условие его реализуемости

$$\partial_{ri}\left\{\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right]B(s)\right\} \geq \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.2.87}$$

отличается от условия (9.2.54), так как в соответствии с ограничением (9.2.37)

$$\partial_{ri}\left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right] \leq \partial_{ri}\tilde{\Psi}(s) - 1 \quad i = \overline{1,m}.$$

Изложенное является развитием процедуры 3.3.1 на многомерный случай.

9.2.8. Слежение при $\boldsymbol{v}(t) \neq \boldsymbol{y}_{ж}(t)$

Пусть $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{y}_{ж}(t)$ связаны уравнением (9.2.76) желаемой модели системы.

Положим в регуляторе

$$\left[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)\right]B(s)\boldsymbol{u} = \left[D(s) - \tilde{\Psi}(s)\right]\boldsymbol{y} + R^n(s)\boldsymbol{y}_{ж} \tag{9.2.88}$$

матрицы

$$\tilde{\Psi}(s) = \Psi_{м}(s), \quad R^n(s) = L_{м}(s). \tag{9.2.89}$$

Используем (9.2.83) и получим уравнение

$$\mathcal{E}^0(s)\Psi_{м}(s)\boldsymbol{y}^v = L_{м}(s)\boldsymbol{v}, \tag{9.2.90}$$

отличающееся от желаемой модели системы лишь малым оператором $\mathcal{E}^0(s)$ и поэтому $\boldsymbol{y}^v(t) \approx \boldsymbol{y}_{ж}(t)$.

Ошибка регулирования, определяемая приближённым выражением (9.2.60), имеет вид

$$\boldsymbol{y}^f \approx \Psi_{м}^{-1}(s)\left[\mathcal{E}^0(s)\right]^{-1}M(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.2.91}$$

Установившаяся ошибка при ступенчатом внешнем возмущении

$$\boldsymbol{y}^f_{уст} = \left(\Psi^{[0]}_м\right)^{-1} M^{[0]}\bar{\boldsymbol{f}}. \tag{9.2.92}$$

Если компоненты этого вектора удовлетворяют условию

$$\left|y^f_{уст.i}\right| \le \varepsilon^*_i \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.2.93}$$

то задача 9.2.3 решена при достаточно малых параметрах полиномиальной матрицы $\mathcal{E}^0(s)$ и $t > t_{рег}$.

Если матрица $\Psi_м(s)$ желаемой модели системы такова, что не выполняется требование (9.2.92) к точности, то аналогично одномерному случаю сформируем уравнение

$$\left[E_m s + \left(\Psi^{[0]}_м\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[0]}\right]\Psi_м(s)\boldsymbol{y}_ж = \left[E_m s + \left(\Psi^{[0]}_м\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[0]}\right]L_м(s)\boldsymbol{v}.$$

эквивалентное уравнению (9.2.76) желаемой модели и примем в регуляторе (9.2.86)

$$\Psi(s) = \left[E_m s + \left(\Psi^{[0]}_м\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[0]}\right]\Psi_м(s), \quad R^n(s) = \left[E_m s + \left(\Psi^{[0]}_м\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[0]}\right]L_м(s). \tag{9.2.94}$$

Тогда при ступенчатом внешнем возмущении

$$\boldsymbol{y}^f_{уст} = \left(\tilde{\Psi}^{[0]}\right)^{-1} M^{[0]}\bar{\boldsymbol{f}}, \tag{9.2.95}$$

требование к точности (9.2.93) выполняется при соответствующем выборе матрицы $\tilde{\Psi}^{[0]}$.

Соотношения (9.2.89), (9.2.94) накладывают ограничения на уравнения желаемой модели, связанные с существованием и реализуемостью регулятора (9.2.88).

9.2.9. Построение следящих систем при $\boldsymbol{f}(t) = 0$

При отсутствии внешних возмущений можно решить задачу 9.2.2, в которой $r \ne m$. Действительно, запишем уравнения объекта (9.2.69) в канонической форме Лагранжа

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{z} = L(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.2.96}$$

Уравнение регулятора будем искать по-прежнему в форме (9.2.75). Задающее воздействие связано с желаемой вектор-функцией $\boldsymbol{z}_ж(t)$ уравнением

$$\bar{\Psi}_м(s)\boldsymbol{z}_ж = L_м(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.97}$$

Найдём связь векторов $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{v}$ в системе (9.2.96), (9.2.75). Для этого умножим первое из уравнений (9.2.96) на $G(s)$ и с учётом (9.2.75) получим

$$[G(s)P(s) - R(s)N(s)]\boldsymbol{q} = R^n(s)\boldsymbol{v},$$

и следовательно,

$$\boldsymbol{z} = L(s)N(s)[G(s)P(s) - R(s)N(s)]^{-1}R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.98}$$

Матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора будем определять из тождества

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \bar{\Psi}_м(s)L(s)N(s), \tag{9.2.99}$$

и положим

$$R^n(s) = L_м(s). \tag{9.2.100}$$

При этих условиях из (9.2.98) следует

$$\boldsymbol{z} = \bar{\Psi}_м^{-1}(s)L_м(s)\boldsymbol{v}.$$

9.2.10. Компенсационная схема*

Изложим ещё один подход к построению следящих систем при $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ и $r \neq m$. Регулятор для объекта (9.2.96) будем формировать на основе (9.1.72)

$$Q(s)\boldsymbol{u} = H^{(1)}(s)\boldsymbol{y} + H^{(2)}(s)\boldsymbol{u} + R^n(s)\boldsymbol{v}, \tag{9.2.101}$$

где матрицы $H^{(1)}(s)$, $H^{(2)}(s)$ находятся из тождества (9.1.76), а гурвицева матрица $Q(s)$ определяется выражением (9.1.81).

Построим матрицу связи векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{v}$. Для этого исключим в уравнении (9.2.101) регулятора вектор $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{u}$ с помощью уравнений объекта и получим

$$Q(s)\boldsymbol{u} = \left[H^{(1)}(s)N(s) + H^{(2)}(s)P(s)\right]\boldsymbol{q} + R^n(s)\boldsymbol{v}.$$

Заменим в этом выражении $\boldsymbol{u}$ на $P(s)\boldsymbol{q}$. Найдём вектор $\boldsymbol{q}$ и подставим его во второе из уравнений объекта (9.2.96). Тогда

$$\boldsymbol{y} = N(s)\left[Q(s)P(s) - H^{(1)}(s)N(s) - H^{(2)}(s)P(s)\right]^{-1}R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.102}$$

С учётом (9.1.76) запишем

$$\boldsymbol{y} = N(s)[P(s) - F(s)]^{-1}Q^{-1}(s)R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{9.2.103}$$

Примем

$$R^n(s) = Q(s)R^v, \tag{9.2.104}$$

где R^v – некоторая матрица чисел, и получим

$$\boldsymbol{y} = N(s)[P(s) - F(s)]^{-1}R^v\boldsymbol{v}. \tag{9.2.105}$$

Выбором полиномиальной матрицы $F(s)$ и матрицы R^v можно приблизить связь векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{v}$ к матрице желаемой модели.

9.3. Синтез на базе процедур АКОР

9.3.1. Процедура АКОР и условие оптимальности в частотной форме

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{9.3.1}$$

все переменные состояния которого доступны измерению.

Задача 9.3.1. (Задача АКОР) Найти матрицу C регулятора

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{9.3.2}$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (9.3.1), (9.3.2), возбуждённых произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty (\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\, dt, \tag{9.3.3}$$

в котором Q – заданная положительно-определённая матрица. ■

Решение этой задачи АКОР, отличающейся от задачи 4.1.1 лишь векторным управлением, заключается в следующем.

Процедура 9.3.1. (процедура АКОР). Искомая матрица

$$C = -PB, \tag{9.3.4}$$

где положительно-определённая матрица P является решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0, \tag{9.3.5}$$

которое (решение $P > 0$) находится с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)\prime}P^{(\alpha+1)} = -Q - C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime} \quad \alpha = 1, 2, ..., \tag{9.3.6}$$

где

$$C^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}B, \tag{9.3.7}$$

$$A^{(\alpha)} = A + BC^{(\alpha)\prime}. \tag{9.3.8}$$

Если собственные числа – $\lambda_i\left[A^{(0)}\right]$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – матрицы $A^{(0)} = A + BC^{(0)\prime}$ таковы, что

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[A^{(0)}\right] < 0 \quad i = \overline{1,n}, \tag{9.3.9}$$

то последовательность матриц $P^{(\alpha)}$ обладает свойством

$$\lim_{\alpha\to\infty} P^{(\alpha)} = P. \tag{9.3.10}$$

■

Доказательство свойства 9.3.10 приведено в 4.Д.1.

Положительную определённость матрицы Q в задаче 9.3.1 можно, без изменения процедуры её решения, ослабить предполагая Q неотрицательно-определённой, удовлетворяющей условию (4.1.16).

Ниже широко используется условие оптимальности в частотной форме. Для его вывода прибавим и вычтем из левой части (9.3.5) матрицу sP и умножим результат слева на $B'(-Es-A)^{-1\prime}$, а справа – на $(Es-A)^{-1}B$. Получим

$$\begin{gathered} B'(-Es-A)^{-1\prime}[-PA+Ps-A'P-sP'+PBB'P-Q](Es-A)^{-1\prime}B = \\ = B'(-Es-A)^{-1\prime}PB + B'P(Es-A)^{-1\prime}B + \\ + B'(-Es-A)^{-1\prime}PBB'P(Es-A)^{-1}B - B'(-Es-A)^{-1\prime}H'H(Es-A)^{-1}B = 0, \end{gathered} \tag{9.3.11}$$

где $H'H = Q$.

Введём обозначения

$$H(s) = H(Es-A)^{-1}B = H\mathcal{B}(s), \tag{9.3.12}$$

$$W^{(1)}(s) = -C'(Es-A)^{-1}B = -C'\mathcal{B}(s), \tag{9.3.13}$$

где $W^{(1)}(s)$ – передаточная матрица разомкнутой системы (9.3.1), (9.3.2), а

$$\mathcal{B}(s) = (Es-A)^{-1}B. \tag{9.3.14}$$

С учётом этих обозначений, тождество (9.3.11) принимает вид

$$W^{(1)}(-s) + W^{(1)}(s) + W^{(1)\prime}(-s)W^{(1)}(s) = H'(-s)H(s). \tag{9.3.15}$$

Прибавим к обеим частям этого выражения единичную матрицу и получим окончательно

$$\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = E_m + H'(-s)H(s). \tag{9.3.16}$$

Это тождество при $s = j\omega$ $(0 \le \omega \le \infty)$ и является *условием оптимальности* закона управления (9.3.2) *в частотной форме*. При $m = 1$ оно совпадает с (4.2.9).

9.3.2. Точность при ступенчатых внешних возмущениях

Пусть система (9.3.1), (9.3.2) оптимальна в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{z}'Q^{(0)}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}\right)\, dt, \tag{9.3.17}$$

где $\boldsymbol{z}(t)$ – m-мерный вектор регулируемых переменных $(\boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x})$, а

$$Q^{(0)} = \operatorname{diag}\left[\begin{array}{cccc} q_{11}^{(0)} & q_{22}^{(0)} & \cdots & q_{mm}^{(0)} \end{array}\right]. \tag{9.3.18}$$

Пусть на объект действует внешнее возмущение, приложенное в местах приложения управления. Такой объект описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}), \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}. \tag{9.3.19}$$

Исследуем точность этой оптимальной системы. Установим вначале связь векторов $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{f}$. Эта связь имеет вид

$$\boldsymbol{z}(s) = L\mathcal{B}(s)\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{f}(s). \tag{9.3.20}$$

Действительно, преобразуя (9.3.19) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$\boldsymbol{z}(s) = L(Es - A)^{-1}B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}). \tag{9.3.21}$$

Исключим из этого выражения сумму $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}$. Запишем $\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x} = C'(Es-A)^{-1}\times$ $\times B(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f})$. Прибавим к обеим частям вектор $\boldsymbol{f}$ и получим соотношение

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{f}, \tag{9.3.22}$$

подставляя которое в (9.3.21) убеждаемся в справедливости связи (9.3.20).

Запишем эту связь в иной форме

$$\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]\cdot[L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}(s).$$

Отсюда

$$\boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right]'\left[E_m + W^{(1)}(s)\right][L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s). \tag{9.3.23}$$

Теперь воспользуемся условием оптимальности в частотной форме и запишем (9.3.23) как

$$\boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}\left[E_m + \mathcal{B}'(-s)L'Q^{(0)}L\mathcal{B}(s)\right][L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s), \tag{9.3.24}$$

или

$$\boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}[L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s) + \boldsymbol{z}'(-s)Q^{(0)}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s). \tag{9.3.25}$$

Заметим, что с учётом (9.3.21) можно записать последнее выражение в виде

$$[\boldsymbol{u}(-s) + \boldsymbol{f}(-s)]'[\boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{f}(s)] + \boldsymbol{z}'(-s)Q^{(0)}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s). \tag{9.3.26}$$

Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ – ступенчатое внешнее возмущение (9.2.3). В соответствии с теоремой о конечном значении оригинала умножим (9.3.26) на $-s^2$, найдём предел при $s \to \infty$ и получим

$$\left(\boldsymbol{u}_{cm} + \bar{\boldsymbol{f}}\right)'\left(\boldsymbol{u}_{cm} + \bar{\boldsymbol{f}}\right) + \boldsymbol{z}'_{cm}Q^{(0)}\boldsymbol{z}_{cm} = \bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}. \tag{9.3.27}$$

Так как $\left(\boldsymbol{u}_{cm}+\bar{\boldsymbol{f}}\right)'\left(\boldsymbol{u}_{cm}+\bar{\boldsymbol{f}}\right)\geq 0$, то $\boldsymbol{z}'_{cm}Q^{(0)}\boldsymbol{z}_{cm}=\sum\limits_{i=1}^{m}q_{ii}^{(0)}z_{cm.i}^2\leq\bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}$, и таким образом доказано следующее свойство.

Свойство 9.3.1. Статические ошибки системы (9.3.19), (9.3.2) регулятор (9.3.2) которой получен в результате решения задачи о минимуме функционала (9.3.17) на решениях системы (9.3.1), (9.3.2) удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{m}q_{ii}^{(0)}z_{cm.i}^2\leq\bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}. \tag{9.3.28}$$

■

Это свойство позволяет решить следующую задачу синтеза регуляторов по заданной точности.

Задача 9.3.2. Для объекта (9.3.19) найти регулятор (9.3.2) такой, чтобы система (9.3.19), (9.3.2) удовлетворяла при ступенчатых внешних возмущениях обладала точностью

$$|z_{cm.i}|\leq z_{cm.i}^{*}\quad i=\overline{1,m}, \tag{9.3.29}$$

где $z_{cm.i}^{*}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Для её решения определим коэффициенты матрицы $Q^{(0)}$ в функционале (9.3.17) из неравенства

$$q_{ii}^{(0)}\geq\frac{\bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}}{z_{cm.i}^{*2}}\quad i=\overline{1,m}. \tag{9.3.30}$$

В этом случае из неравенства (9.3.28) следует, что

$$z_{cm.i}^2\leq z_{cm.i}^{*2}\quad i=\overline{1,m}.$$

Используем процедуру 9.3.1 при

$$Q=L'Q^{(0)}L, \tag{9.3.31}$$

и находим матрицу C', разрешающую задачу 9.3.2.

9.3.3. Точность при гармонических воздействиях

Рассмотрим теперь случай, когда система (9.3.1), (9.3.2) оптимальная в смысле функционала (9.3.17) находится под воздействием гармонического возмущения (9.2.4). Пусть для простоты это одночастотное воздействие $\omega_i^f=\omega^f$ $\left(i=\overline{1,\mu}\right)$.

В установившемся режиме амплитуда вынужденных колебаний

$$z_{гарм.i}=\left|\left[L\mathcal{B}(j\omega^f)\left\{E_m+W^{(1)}(j\omega^f)\right\}^{-1}\boldsymbol{f}_{гарм}\right]_i\right|\quad i=\overline{1,m}, \tag{9.3.32}$$

где как и ранее

$[\boldsymbol{\psi}]_i$ – i-я компонента вектора $\boldsymbol{\psi}$.

Введём комплексные вектора

$$\boldsymbol{z}^{+} = L\mathcal{B}(j\omega^{f})\left[E_m + W^{(1)}(j\omega^{f})\right]^{-1}\boldsymbol{f}_{гарм}e^{j\omega^{f}t}, \tag{9.3.33}$$

$$\boldsymbol{z}^{-} = L\mathcal{B}(-j\omega^{f})\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega^{f})\right]^{-1}\boldsymbol{f}_{гарм}e^{-j\omega^{f}t}. \tag{9.3.34}$$

Они описывают реакции системы (9.3.19), (9.3.2) на ««возмущения»» $\boldsymbol{f}^{+}(t) = \boldsymbol{f}_{гарм}e^{j\omega^{f}t}$ и $\boldsymbol{f}^{-}(t) = \boldsymbol{f}_{гарм}e^{-j\omega^{f}t}$ соответственно.

Аналогично (9.3.23) запишем

$$\boldsymbol{z}^{-\prime}[L\mathcal{B}(-j\omega^{f})]^{-1\prime}\left[E_m+W^{(1)}(-j\omega^{f})\right]'\left[E_m+W^{(1)}(j\omega^{f})\right][L\mathcal{B}(j\omega^{f})]^{-1}\boldsymbol{z}^{+}=\boldsymbol{f}'_{гарм}\boldsymbol{f}_{гарм}. \tag{9.3.35}$$

Используем тождество (9.3.16) при $s = j\omega^{f}$ и найдём, что

$$\boldsymbol{z}^{-\prime}[L\mathcal{B}(-j\omega^{f})]^{-1\prime}[L\mathcal{B}(j\omega^{f})]^{-1}\boldsymbol{z}^{+} + \boldsymbol{z}^{-\prime}Q^{(0)}\boldsymbol{z}^{+} = \boldsymbol{f}'_{гарм}\boldsymbol{f}_{гарм}. \tag{9.3.36}$$

По построению, вектора $\boldsymbol{z}^{-}$ и $\boldsymbol{z}^{+}$ – комплексно сопряжённые и поэтому

$$\boldsymbol{z}^{-\prime}[L\mathcal{B}(-j\omega^{f})]^{-1\prime}[L\mathcal{B}(j\omega^{f})]^{-1}\boldsymbol{z}^{+} \geq 0. \tag{9.3.37}$$

Кроме того, они обладают следующим свойством

$$\boldsymbol{z}^{-\prime}Q^{(0)}\boldsymbol{z}^{+} = \sum_{i=1}^{m} q_{ii}^{(0)} z_i^{-} z_i^{+} = \sum_{i=1}^{m} q_{ii}^{(0)}\left[L\mathcal{B}(-j\omega^{f})\left\{E_m + W^{(1)}(-j\omega^{f})\right\}^{-1}\boldsymbol{f}_{гарм}\right]_i \cdot$$
$$\cdot\left[L\mathcal{B}(j\omega^{f})\left\{E_m + W^{(1)}(j\omega^{f})\right\}^{-1}\boldsymbol{f}_{гарм}\right]_i = \sum_{i=0}^{m} q_{ii}^{(0)} z_{гарм.i}^{2}. \tag{9.3.38}$$

Используем неравенство (9.3.37) и свойство (9.3.38) получим из (9.3.36) соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ii}^{(0)} z_{гарм.i}^{2} \leq \boldsymbol{f}'_{гарм}\boldsymbol{f}_{гарм}, \tag{9.3.39}$$

которое выражает следующее свойство оптимальных систем при гармонических воздействиях.

<u>Свойство 9.3.2.</u> Амплитуда установившихся вынужденных колебаний объекта (9.3.19), при $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{гарм}\sin\omega^{f}t$ с регулятором (9.3.2), полученным в результате решения задачи о минимуме функционала (9.3.17) на решениях системы (9.3.1), (9.3.2) удовлетворяют неравенству (9.3.39). ■

Это свойство позволяет решить задачу 9.3.2 синтеза регулятора (9.3.2) для объекта (9.3.19) при гармонических возмущениях и требованиях к точности

$$z_{гарм.i} \leq z_{гарм.i}^{*} \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.3.40}$$

где $z_{гарм.i}^{*}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа.

Действительно, если принять

$$q_{ii}^{(0)} \geq \frac{\boldsymbol{f}'_{гарм}\boldsymbol{f}_{гарм}}{z_{гарм.i}^{*2}} \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.3.41}$$

то используя процедуру 9.3.1 получим матрицу C, при которой выполняются требования (9.3.40) к точности.

9.3.4. Синтез на основе АКОР по критерию обобщённой работы

Пусть объект (9.3.1) – асимптотически устойчив, а матрица регулятора (9.3.2)

$$C = -P^{(1)}B, \tag{9.3.42}$$

где $P^{(1)}$ – положительно-определённая матрица, получаемая на первом шаге ($\alpha = 1$) итерационной процедуры 9.3.1.

Это означает, что матрица $P^{(1)}$ является решением уравнения Ляпунова (9.3.6)

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} = -Q. \tag{9.3.43}$$

Решение этого уравнения и вычисление матрицы C составляют процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Она является развитием процедуры 4.1.2 на случай векторного управления.

Условие оптимальности по критерию обобщённой работы в частотной форме имеет вид

$$W^{(1)\prime}(-s) + W^{(1)}(s) = H'(-s)H(s), \quad s = j\omega, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{9.3.44}$$

Это тождество нетрудно получить повторяя преобразования (9.3.11)-(9.3.15).

Исследуем точность системы (9.3.19), (9.3.2), регулятор которой получен из выражений (9.3.42), (9.3.43) при $Q = L'Q^{(0)}L$. Для этого запишем тождество (9.3.23) в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}\left[W^{(1)\prime}(-s) + W^{(1)}(s)\right][L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s) = \\ = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s) - \boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}\left[E_m + W^{(1)\prime}(-s)W^{(1)}(s)\right][L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s). \end{gathered} \tag{9.3.45}$$

Используем условие оптимальности и запишем

$$\begin{gathered} \boldsymbol{z}'(-s)Q^{(0)}\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{f}'(-s)\boldsymbol{f}(s) - \\ -\boldsymbol{z}'(-s)[L\mathcal{B}(-s)]^{-1\prime}\left[E_m + W^{(1)\prime}(-s)W^{(1)}(s)\right][L\mathcal{B}(s)]^{-1}\boldsymbol{z}(s). \end{gathered} \tag{9.3.46}$$

Пусть $\boldsymbol{f}(t)$ – ступенчатое внешнее возмущение. Тогда из этого выражения следует аналогично (9.3.27)

$$\boldsymbol{z}'_{cm}Q^{(0)}\boldsymbol{z}_{cm} + (\boldsymbol{u}_{cm} + \boldsymbol{f})'W^{(1)\prime}(0)W^{(1)}(0)(\boldsymbol{u}_{cm} + \boldsymbol{f}) = \bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}. \tag{9.3.47}$$

Учитывая неотрицательность второго слагаемого приходим к неравенству (9.3.28).

Если $\boldsymbol{f}(t)$ – гармоническое воздействие, то нетрудно убедиться в справедливости неравенства (9.3.39).

Таким образом, задача 9.3.1 может быть решена на основе процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, если матрицу Q в (9.3.49) сформировать в соответствии с (9.3.30), (9.3.31). При гармонических воздействиях неравенства (9.3.30) заменяются на (9.3.41).

9.3.5. Учёт требований к качеству

Усложним задачу 9.3.2 требованием (9.2.14) к качеству переходных процессов. Тогда она совпадёт с задачей 9.2.1. Для её решения исследуем систему (9.3.1), (9.3.2), регулятор которой получен в результате минимизации функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{z}' Q^{(0)} \boldsymbol{z} + \dot{\boldsymbol{z}}' Q^{(1)} \dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{u}' \boldsymbol{u} \right) \, dt, \tag{9.3.48}$$

где

$$Q^{(1)} = \operatorname{diag} \left(\begin{array}{cccc} \tau_1^2 q_{11}^{(0)} & \tau_2^2 q_{22}^{(0)} & \cdots & \tau_m^2 q_{mm}^{(0)} \end{array} \right). \tag{9.3.49}$$

В развёрнутой форме он имеет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left[\sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} \left(z_i^2 + \tau_i^2 \dot{z}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^m u_i^2 \right] \, dt. \tag{9.3.50}$$

Заметим, что экстремалями (минималями) функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} \left(z_i^2 + \tau_i^2 \dot{z}_i^2 \right) \, dt \tag{9.3.51}$$

служат кривые $z_i(t) = z_i(t_0) e^{-t/\tau_i} \ \left(i = \overline{1, m} \right)$, которые являются решениями уравнения качества (9.2.18) при $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ и структуре $\tilde{\Psi}(s)$, определяемой выражениями (9.2.22)-(9.2.25).

Приведём (9.3.50) к стандартной форме (9.3.3). Учтём, что

$$\dot{\boldsymbol{z}} = L \dot{\boldsymbol{x}} = LA\boldsymbol{x} + LB\boldsymbol{u},$$

и запишем (9.3.48) как

$$\begin{gathered} J = \int\limits_0^\infty \Big[\boldsymbol{x}' \left(L' Q^{(0)} L + A' L' Q^{(1)} L A \right) \boldsymbol{x} + \\ + \boldsymbol{x}' A' L' Q^{(1)} L B \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' B' L' Q^{(1)} L A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}' \left(E_m + B' L' Q^{(1)} L B \right) \boldsymbol{u} \Big] \, dt, \end{gathered} \tag{9.3.52}$$

Этот функционал содержит произведения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ и кроме того, матрица при произведении управлений является недиагональной. Это может привести (см. п. 4.5.2, п. 10.3.3) к малым запасам устойчивости оптимальной системы. В связи с этим наложим дополнительное ограничение на свойства объекта (9.3.1)

$$LB = 0. \tag{9.3.53}$$

При выполнении этого равенства функционал (9.3.52) примет вид

$$J = \int\limits_0^\infty \left[\boldsymbol{x}' \left(L' Q^{(0)} L + A' L' Q^{(1)} L A \right) \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}' \boldsymbol{u} \right] \, dt. \tag{9.3.54}$$

Условие оптимальности (9.3.16) запишем как

$$\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = E_m + \mathcal{B}'(-s)\left(L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA\right)\mathcal{B}(s). \tag{9.3.55}$$

Распишем подробнее его правую часть. С учётом соотношения $A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E$ получим

$$E_m + B'(-Es - A)^{-1\prime}L'Q^{(0)}L(Es - A)^{-1}B + B'(-Es - A)^{-1\prime}A'L'Q^{(1)}LA(Es - A)^{-1}B = \\ = E_m + [L\mathcal{B}(-s)]'Q^{(0)}[L\mathcal{B}(s)] - s^2[L\mathcal{B}(-s)]'Q^{(1)}[L\mathcal{B}(s)].$$

Таким образом (9.3.55) примет вид

$$\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = E_m + [L\mathcal{B}(-s)]'[Q^{(0)} - s^2Q^{(1)}][L\mathcal{B}(s)]. \tag{9.3.56}$$

При достаточно больших значениях $q_{ii}^{(0)}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ одним из решений этого уравнения является

$$W^{(1)}(s) \approx H^{(0)}(Ts + E_m)[L\mathcal{B}(s)], \tag{9.3.57}$$

где

$$H^{(0)\prime}H^{(0)} = Q^{(0)}, \quad T = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_m \end{pmatrix}. \tag{9.3.58}$$

Действительно, подставляя (9.3.57) в (9.3.56) найдём, что правая и левая части (9.3.56) отличаются суммой матриц $W^{(1)\prime}(-s)$ и $W^{(1)}(s)$, которой можно пренебречь по сравнению с произведением $W^{(1)\prime}(-s)W^{(1)}(s)$, если $q_{ii}^{(0)}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ достаточно велики.

Подставляя (9.3.57) в (9.3.20) и пренебрегая в (9.3.20) единичной матрицей, получим

$$\boldsymbol{z}(s) \approx (Ts + E_m)^{-1}\left[H^{(0)}\right]^{-1}\boldsymbol{f}(s). \tag{9.3.59}$$

В развёрнутой форме это соотношение имеет вид (9.2.23)

$$z_i(s) \approx \frac{f_i(s)}{\sqrt{q_{ii}^{(0)}}(\tau_i s + 1)} \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.3.60}$$

Отсюда следует, что движение системы (9.3.19), (9.3.2), оптимальной при $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, в смысле функционала (9.3.48) близко к движению m автономных (несвязанных) систем.

Резюмируем изложенное как процедуру решения задачи 9.2.1.

Процедура 9.3.2.**(процедура аналитического синтеза регуляторов по заданным точности и качеству)**.

Операция 1. Проверить ограничение (9.3.53) и сформировать матрицу

$$Q = L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA, \tag{9.3.61}$$

в которой $Q^{(0)}$ определяется неравенствами (9.3.30) либо (9.3.41), а матрица $Q^{(1)}$ – на основе (9.3.49), где

$$\tau_i = \frac{\overline{t}_{рег.i}}{3} \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.3.62}$$

Операция 2. Использовать процедуру 9.3.1 и найти матрицу C' регулятора 9.3.2.

Операция 3. Вычислить передаточную матрицу $W^{(1)}(s)$ и проверить выполнение условия (9.3.57) либо решить уравнения системы (9.3.19), (9.3.2) и убедиться в выполнении требований к точности и качеству.

■

Необходимость операции 3 вызвана тем, что пока не доказана единственность решения матричного тождества (9.3.56) в виде (9.3.57).

Приведём теперь пример, подтверждающий правдоподобность приведённых рассуждений о качестве оптимальных систем.

Пример 9.3.1. Рассмотрим уравнения возмущённого продольного движения вертолета в строю.

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{v}_x &= -0.031\Delta v_x + 0.003\Delta v_y - 3.4\Delta\omega_z - 9.8\Delta v - 1.04\Delta\varphi - 15.\Delta æ,\\
\Delta\dot{v}_y &= 0.049\Delta v_x - 0.62\Delta v_y - 0.7\Delta\omega_z - 74\Delta\varphi - 47\Delta æ,\\
\Delta\dot{\omega}_z &= -0.77\cdot 10^{-3}\Delta v_x - 0.47\cdot 10^{-2}\Delta v_y - 0.32\Delta\omega_z - \Delta\varphi - 3.3\Delta æ,\\
\Delta\dot{x} &= \Delta v_x,\\
\Delta\dot{y} &= \Delta v_y,\\
\Delta\dot{v} &= \Delta\omega_z,
\end{aligned} \tag{9.3.63}$$

где $\Delta\omega_z$, Δv_x, Δv_y, Δv, Δx, Δy – угловая скорость, скорости по осям x и y, угол тангажа, дистанция и высота относительно ведущего вертолета соответственно, $\Delta\varphi$ – общий шаг несущего винта, $\Delta æ$ – угол продольного отклонения автомата перекоса относительно фюзеляжа.

Измерительные приборы (гировертикаль, датчик угловой скорости, датчик высоты полета, устройство измерения дальности и пеленга до ведущего вертолета) доставляют информацию о всех переменных состояния вертолета.

Регулируемыми переменными являются

$$z_1 = \Delta x, \quad z_2 = \Delta y. \tag{9.3.64}$$

Требуется найти параметры регулятора (автопилота совместного движения вертолетов), обеспечивающего при действии на вертолёт ступенчатых внешних возмущений (порывы ветра)

$$f_1(t) = f_2(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{при} \quad t \geq t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t < t_0, \end{cases} \tag{9.3.65}$$

следующие показатели качества и точности:

Вариант 1. Время регулирования по координатам Δx и Δy

$$t_{рег.1} \approx 30 \text{ с}, \quad t_{рег.2} \approx 10 \text{ с}, \tag{9.3.66}$$

при этом статические ошибки должны удовлетворять ограничениям

$$|\Delta x_{ст}| \leq 0.33 \text{ м}, \quad |\Delta y_{ст}| \leq 0.33 \text{ м}. \tag{9.3.67}$$

Вариант 2. Время регулирования по координатам Δx и Δy

$$t_{рег.1} \approx 10 \text{ с}, \quad t_{рег.2} \approx 30 \text{ с}, \tag{9.3.68}$$

а требования к точности совпадают с (9.3.67).

В соответствии с (9.3.50) строим функционал оптимизации

$$J = \int\limits_0^\infty \left[q_{11}^{(1)} \left(\Delta x^2 + \tau_1^2 \Delta \dot{x}^2 \right) + q_{22}^{(1)} \left(\Delta y^2 + \tau_2^2 \Delta \dot{y}^2 \right) + \Delta\varphi^2 \Delta æ^2 \right] dt, \tag{9.3.69}$$

где

$$q_{11}^{(1)} = q_{22}^{(1)} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1. \tag{9.3.70}$$

а величины τ_1 и τ_2 для вариантов 1 и 2 (9.3.71)

$$\begin{array}{lll} \text{Вариант 1:} & \tau_1 = 10, & \tau_2 = 3.33. \\ \text{Вариант 2:} & \tau_1 = 3.33, & \tau_2 = 10. \end{array} \tag{9.3.72}$$

Решая задачу АКОР, получим регуляторы для первого и второго вариантов соответственно

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -0.87 \cdot 10^{-2} \Delta v_x + \Delta v_y - 5.83 \Delta\omega_z - 0.59 \cdot 10^{-2} \Delta x + 0.316 \Delta y - 6.76 \Delta v, \\ \Delta æ = -3.45 \Delta v_x - 0.574 \Delta v_y + 35.6 \Delta\omega_z - 0.301 \Delta x - 0.55 \Delta y + 42.3 \Delta v, \end{cases} \tag{9.3.73}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0.655 \Delta v_x + 2.8 \Delta v_y - 6.81 \Delta\omega_z + 0.146 \Delta x + 0.281 \Delta y - 7.93 \Delta v, \\ \Delta æ = -1.24 \Delta v_x + 1.46 \Delta v_y + 12.3 \Delta\omega_z - 0.281 \Delta x + 0.146 \Delta y + 14.4 \Delta v. \end{cases} \tag{9.3.74}$$

На рис. 9.3.1. и рис. 9.3.2. приведены графики переходных процессов для второго и первого вариантов. Из них следует, что времена переходных процессов и точность близки к требуемым. ■

9.3.6. Следящие системы

Уравнения регулятора (9.2.70) принимают в задаче 9.2.2 синтеза следящих систем с объектами (9.3.19) вид

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x} + K\boldsymbol{v}, \tag{9.3.75}$$

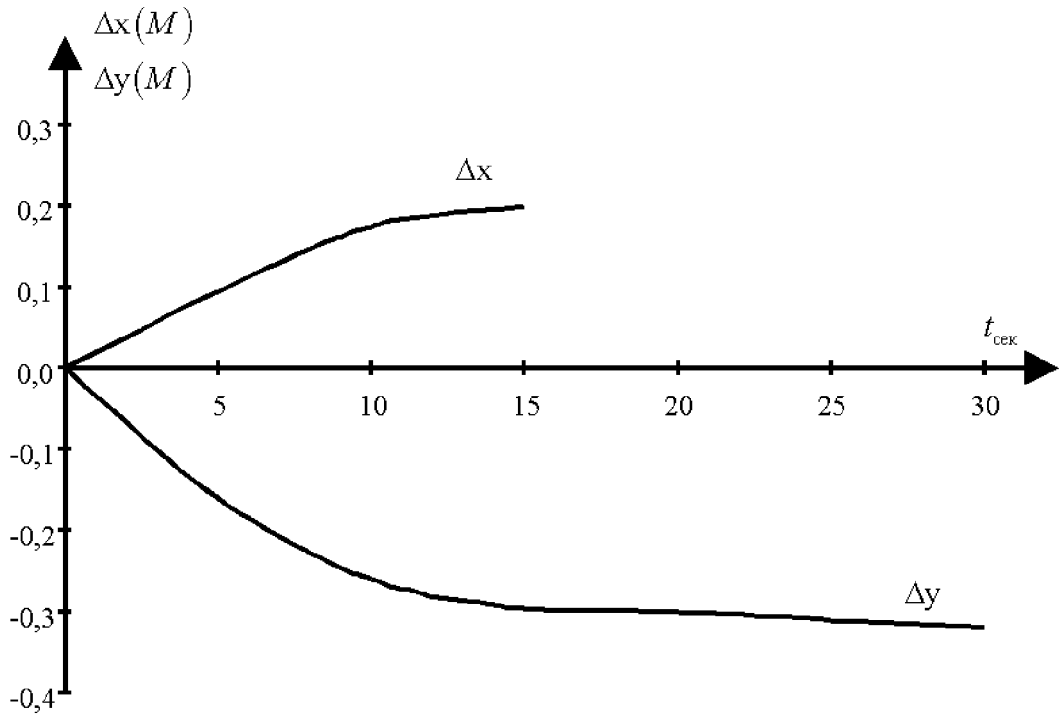

Рис. 9.3.1.

где K – искомая матрица размеров $m \times m$.

Найдём эту матрицу при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{z}_{ж}(t)$, исходя из требований (9.2.73) к ошибкам слежения.

Связь вектора регулируемых переменных с вектором задающих воздействий следует непосредственно из (9.3.20)

$$\boldsymbol{z}(s) = L\mathcal{B}(s)\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}[\boldsymbol{f}(s) + K\boldsymbol{v}(s)]. \tag{9.3.76}$$

Если матрица C' регулятора (9.3.75) получена с помощью процедуры 9.3.2, то используя приближённое соотношение (9.3.57), получим

$$\boldsymbol{z}(s) \approx (Ts + E_m)^{-1}\left[H^{(0)}\right]^{-1}[\boldsymbol{f}(s) + K\boldsymbol{v}(s)]. \tag{9.3.77}$$

Примем

$$K = H^{(0)}. \tag{9.3.78}$$

Тогда составляющие, вызванные задающим воздействием описываются как

$$z_i(s) \approx \frac{v_i(s)}{\tau_i s + 1} = \frac{z_{ж.i}(s)}{\tau_i s + 1} \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.3.79}$$

Это означает, что при достаточно малых τ_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ процедура 9.3.2 и выражение (9.3.78) обеспечивают требования (9.2.73) к точности слежения.

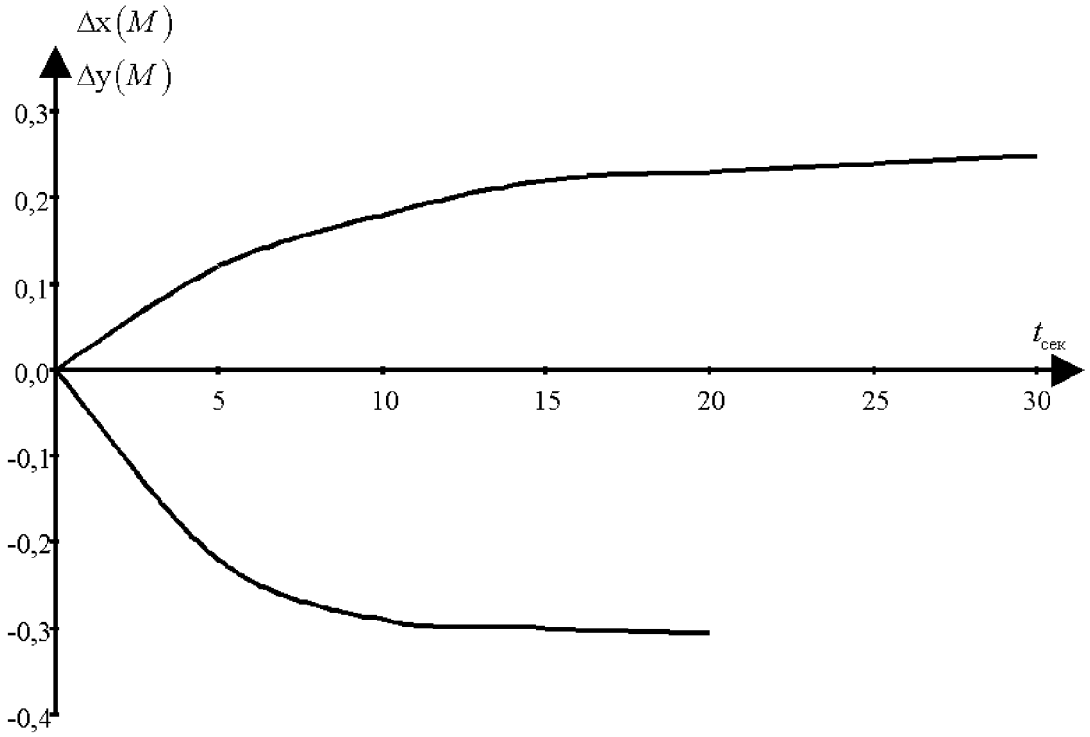

Рис. 9.3.2.

Пусть $\boldsymbol{v}(t) \neq \boldsymbol{z}_{ж}(t)$. В этом случае дополним уравнения регулятора (9.3.75) уравнением (9.2.71) желаемой модели системы и получим при условии (9.3.78) искомый регулятор

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{м} = A_{м}\boldsymbol{x}_{м} + B_{м}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{z}_{ж} = L_{м}\boldsymbol{x}_{м}, \quad \boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x} + K\boldsymbol{z}_{ж}. \tag{9.3.80}$$

Действительно, вектор составляющих $\boldsymbol{z}(s)$, вызванных задающим воздействием записывается, аналогично (9.3.77),

$$\boldsymbol{z}(s) \approx (Ts + E_m)^{-1}\left[H^{(0)}\right]^{-1} K\boldsymbol{z}_{ж}(s).$$

Отсюда, при условии (9.3.78), получим

$$\boldsymbol{z}(s) \approx (Ts + E_m)^{-1}\Psi_{м}^{-1}(s)L_{м}(s)\boldsymbol{v}, \tag{9.3.81}$$

где

$$\Psi_{м}^{-1}(s)L_{м}(s) = L_{м}(Es - A_{м})^{-1}B_{м}. \tag{9.3.82}$$

9.3.7. Объект второго вида

Опишем применение процедуры АКОР для решения задачи 9.2.1 с объектами второго вида.

Рассмотрим устойчивый по управлению объект (9.2.15) приведённый к столбцово-правильной форме ««вход-выход»», описанный в п. 9.П.2.4

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}(s)\boldsymbol{u}. \tag{9.3.83}$$

Введем ««новое»» управление

$$\boldsymbol{u}^* = \left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1} \tilde{B}(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.3.84}$$

при котором уравнение (9.3.83) примет вид

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}^{(0)}\boldsymbol{u}^*. \tag{9.3.85}$$

Используем матрицу (9.2.19) уравнения качества и сформируем функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left\{ \left[\tilde{\Psi}^{[æ]} y^{(æ)} + \cdots + \tilde{\Psi}^{[1]}\dot{y} + \tilde{\Psi}^{[0]} y\right]' \left[\tilde{\Psi}^{[æ]} y^{(æ)} + \cdots + \tilde{\Psi}^{[1]}\dot{y} + \tilde{\Psi}^{[0]} y\right] \lambda^2 + \boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{u}^* \right\} dt, \tag{9.3.86}$$

в котором λ – некоторое число, а матрицы $\tilde{\Psi}^{[i]}$ $\left(i = \overline{0, æ}\right)$ обладают следующими свойствами: полиномиальная матрица $\tilde{\Psi}(s)$ вида (9.2.19) – столбцово-правильная и может быть представлена в виде

$$\tilde{\Psi}(s) = \begin{pmatrix} s^{æ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{æ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{æ_m} \end{pmatrix} \cdot \tilde{\Psi}^{[æ]} - \tilde{A}_y S(s), \tag{9.3.87}$$

где $æ = \max\{æ_1, æ_2, \ldots, æ_m\}$,

$$S(s) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & s & \cdots & s^{æ_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{æ_2-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s & \cdots & s^{æ_m-1} \end{array}\right)', \tag{9.3.88}$$

а $\tilde{A}_y$ – матрица чисел размеров $m \times \left(\sum\limits_{i=1}^{m} æ_i\right)$, при этом

$$æ_i = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m}. \tag{9.3.89}$$

Заметим, что, по построению, матрица $\tilde{D}(s)$ обладает теми же свойствами, если заменить $æ_i$ на $\bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ и поэтому уравнения объекта (9.3.85) и функционал (9.3.86) легко записать в стандартной форме (9.3.1), (9.3.3). Действительно, введём переменные

$$\begin{array}{llllll} \check{x}_1 & = y_1, & \check{x}_2 & = \dot{y}_1, & \ldots, & \check{x}_{\bar{\nu}_1} = y_1^{(\bar{\nu}_1-1)}; \\ \check{x}_{\bar{\nu}_1+1} & = y_2, & \check{x}_{\bar{\nu}_1+2} & = \dot{y}_2, & \ldots, & \check{x}_{\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2} = y_2^{(\bar{\nu}_2-1)}; \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{x}_{n-\bar{\nu}_m+1} & = y_m, & \check{x}_{n-\bar{\nu}_m+2} & = \dot{y}_m, & \ldots, & \check{x}_n = y_m^{(\bar{\nu}_m-1)}, \end{array} \tag{9.3.90}$$

и запишем уравнение объекта

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{B}\boldsymbol{u}^* \tag{9.3.91}$$

и функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\lambda^2 \check{\boldsymbol{x}}'\check{H}'\check{H}\check{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{u}^*\right)\, dt, \tag{9.3.92}$$

где $\check{A}$, $\check{B}$ и $\check{H}$ – специфические матрицы, составленные из элементов матриц $\tilde{D}(s)$, $\tilde{B}^{(0)}$ и $\tilde{\Psi}(s)$ соответственно.

Используем процедуру 9.3.1 (АКОР), получим

$$\boldsymbol{u}^* = \check{C}'\check{\boldsymbol{x}}, \tag{9.3.93}$$

или, с учётом обозначений (9.3.90)

$$\boldsymbol{u}^* = C(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.3.94}$$

Отсюда, на основе (9.3.84), получим уравнение искомого регулятора

$$\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1} \tilde{B}(s)\boldsymbol{u} = C(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.3.95}$$

Исследуем свойства системы (9.3.85), (9.3.94), оптимальной в смысле функционала (9.3.86), в зависимости от параметра λ^2.

Далее ограничимся случаем, когда степени $\bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ строк матрицы $\tilde{D}(s)$ равны между собой

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = \cdots = \bar{\nu}_m = \bar{\nu}. \tag{9.3.96}$$

Это означает, что $\dfrac{n}{m} = \bar{\nu}$ – целое число. Если это не так, то можно дополнить уравнения (9.3.1) некоторой подсистемой уравнений первого порядка с малым параметром при производных так, чтобы n нацело делилось на m.

<u>Утверждение 9.3.1.</u> Если выполняются условия (9.3.96), (9.3.89), а матрицы $\tilde{\Psi}^{(æ)}$ и $\tilde{\Psi}^{(æ-1)}$ уравнения качества (9.3.87) выбраны из условий

$$\tilde{\Psi}^{(æ)\prime}\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)} - \tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)\prime}\tilde{\Psi}^{(æ)} = 0, \tag{9.3.97}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{D}}^{(æ)\prime}\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)} - \tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)\prime}\tilde{\tilde{D}}^{(æ)} = \\ = \left\{\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)}\left[\tilde{\Psi}^{(æ)}\right]^{-1}\tilde{\Psi}^{(æ-1)}\right\}'\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)} - \tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)\prime}\left\{\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)}\left[\tilde{\Psi}^{(æ)}\right]^{-1}\tilde{\Psi}^{(æ-1)}\right\},\end{gathered} \tag{9.3.98}$$

в которых

$$\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)} = \left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}^{(æ+1)} = \left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}^{(\bar{\nu})}, \qquad \tilde{\tilde{D}}^{(æ)} = \left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}^{(æ)} = \left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}^{(\bar{\nu}-1)}, \tag{9.3.99}$$

то движение оптимальной системы (9.3.85), (9.3.94) описывается при достаточно больших значениях λ^2 уравнением

$$\left\{\tilde{\tilde{D}}^{(æ+1)}\left[\tilde{\Psi}^{(æ)}\right]^{-1}\lambda^{-1}s + E_m\right\}\tilde{\Psi}(s)\boldsymbol{y} = 0. \tag{9.3.100}$$

■

Обоснование утверждения приведено в 9.Д.3.

Исключим вектор $\boldsymbol{u}^*$ из (9.3.85) с помощью (9.3.94) и получим уравнение

$$\left[\tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}C(s)\right]\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

сравнивая которое с (9.3.100), заключаем, что

$$\left[E_m\lambda^{-1}s + E_m\right]\tilde{\Psi}(s) = \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}C(s). \tag{9.3.101}$$

При внешних возмущениях объект (9.3.83) принимает вид (9.2.15) и движение оптимальной системы описывается с учётом (9.3.97) уравнением

$$\left[E_m\lambda^{-1}s + E_m\right]\tilde{\Psi}(s)\boldsymbol{y} = M(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.3.102}$$

решения которого будут (при соответствующем выборе λ) сколь угодно близки к решениям уравнения качества (9.2.18).

9.3.8. Реализуемый регулятор

Для реализуемости регулятора (9.3.5) должно выполняться условие

$$\partial_{ri}\left\{\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\right\} \geq \partial_{ri}\left[C(s)\right] \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.3.103}$$

При нарушении этого условия заменим (9.3.92) функционалом

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\lambda^2\check{\boldsymbol{x}}'\check{H}'\check{H}\check{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u}^{*\prime}\boldsymbol{u}^* + \varepsilon_1^2\dot{\boldsymbol{u}}^{*\prime}\dot{\boldsymbol{u}}^* + \cdots + \varepsilon_\psi^2\boldsymbol{u}^{(\psi)*\prime}\boldsymbol{u}^{(\psi)*}\right)\,dt, \tag{9.3.104}$$

в котором ε_i $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$ – достаточно малые числа.

Их можно определять на основе рекомендации 4.4.1, заменив в формуле (4.4.46) $\bar{\omega}_{cp}$ на $\bar{\omega}_{cp.об}$, где $\bar{\omega}_{cp.об}$ – *прогнозируемая обобщнная частота среза* системы (9.3.91), (9.3.93).

Понятие *обобщнной частоты среза* и прогнозируемой частоты среза будет введено в следующей главе. Таким образом, (4.4.46) принимает вид

$$\varepsilon^0 = \frac{\sqrt{\psi}}{(5 \div 10)\bar{\omega}_{cp.об}}, \tag{9.3.105}$$

а числа ε_i определяются как и ранее

$$\varepsilon_i = \frac{c_\psi^i}{\psi^i}(\varepsilon^0)^{2i} \quad i = \overline{1,\psi}, \tag{9.3.106}$$

где c_ψ^i – число сочетаний ψ элементов по i.

Решение задачи о минимуме функционала (9.3.104) на связях (9.3.85) сводится к процедуре 9.3.1 АКОР. Действительно, если ввести дополнительно к (9.3.90) m-мерные вектора

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{u}^*, \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = \dot{\boldsymbol{u}}^*, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{x}^{(\psi-1)} = \boldsymbol{u}^{(\psi-1)*}; \qquad \tilde{\tilde{\boldsymbol{u}}} = \varepsilon_\psi \boldsymbol{u}^{(\psi)*}, \tag{9.3.107}$$

то получим аналогичные (4.1.57), (4.1.55) уравнения объекта и функционал в стандартной форме (9.3.1), (9.3.2).

В результате процедуры 9.3.1 найдём, с учётом обозначений (9.3.107), регулятор

$$\left(\mathcal{E}^{[\psi]}s^\psi + \cdots + \mathcal{E}^{[1]}s + \mathcal{E}^{[0]}\right)\boldsymbol{u}^* = C'\check{\boldsymbol{x}}, \tag{9.3.108}$$

где $\mathcal{E}^{[i]}$ $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$ – матрицы чисел, для которых справедливо аналогичное (4.4.43), (4.4.44) свойство

$$\mathcal{E}^{[i]} \approx E_m \varepsilon_i^0 \quad i = \overline{1,\psi}, \quad \mathcal{E}^{[0]} \approx E_m, \tag{9.3.109}$$

где ε_i^0 $\left(i = \overline{1,\psi}\right)$ – коэффициенты полинома $\varepsilon^0(s) = 1 + \varepsilon_1^0 s + \cdots + \varepsilon_\psi^0 s^\psi$, определяемого из тождества

$$\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s) = 1 - \varepsilon_1^2 s^2 + \cdots + (-1)^\psi \varepsilon_\psi^2 s^{2\psi}. \tag{9.3.110}$$

Учтём обозначения (9.3.84), (9.3.90) и запишем (9.3.108) в виде

$$\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\boldsymbol{u} = C(s)\boldsymbol{y}. \tag{9.3.111}$$

Этот результат реализуем, так как всегда можно выбрать число (ψ) производных в функционале (9.3.104) чтобы выполнялось условие

$$\partial_{ri}\left\{\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\right\} \geq \partial_{ri}\left[C(s)\right] \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.3.112}$$

При внешних возмущениях нетрудно получить на основе (9.2.15), (9.3.107) выражение ошибки стабилизации

$$\boldsymbol{y} = \left[\tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)C(s)\right]^{-1}\tilde{M}(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.3.113}$$

которое совпадает с (9.3.100) при $\mathcal{E}(s) = E_m$.

9.3.9. Следящие системы с объектами второго вида при $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_{ж}(t)$

Уравнения (9.2.74), (9.2.75) следящей системы с регулятором (9.3.111) принимают вид

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}(s)\boldsymbol{u} + \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}, \tag{9.3.114}$$

$$\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\boldsymbol{u} = C(s)\boldsymbol{y} + R^n(s)\boldsymbol{y}_{ж}. \tag{9.3.115}$$

где $R^n(s)$ – полиномиальная матрица, которую будем определять из допустимой ошибки слежения (9.2.77).

Примем

$$R^n(s) = \mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s) - C(s). \tag{9.3.116}$$

Исключим из системы (9.3.114), (9.3.115) вектор $\boldsymbol{u}$. Для этого представим первое из этих уравнений в виде

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}^{(0)}\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\boldsymbol{u} + \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}.$$

С учётом второго уравнения системы и выражения для $R^n(s)$ получим

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)\left\{C(s)\boldsymbol{y} - C(s)\boldsymbol{y}_{ж} + \mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s)\boldsymbol{y}_{ж}\right\} + \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.3.117}$$

Отсюда следует уравнение вида (9.3.113) для ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}_{ж}(t)$:

$$\left[\tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)C(s)\right]\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.3.118}$$

Это означает, что, если оператор слежения $R^n(s)$ определён выражением (9.3.116), то ошибка слежения совпадает с погрешностью регулирования.

Регулятор (9.3.115) с оператором (9.3.16) не реализуем. Поэтому рассмотрим близкий к нему реализуемый регулятор

$$O(s)\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\boldsymbol{u} = C(s)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_{ж}) + \mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s)\boldsymbol{y}_{ж}. \tag{9.3.119}$$

который отличается от (9.3.115) полиномиальной матрицей

$$O(s) = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} o_1(s) & o_2(s) & \cdots & o_m(s) \end{bmatrix}, \tag{9.3.120}$$

где

$$o_i(s) = (1 + o_i s)^{\beta_i} \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.3.121}$$

o_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – достаточно малые числа, удовлетворяющие условиям

$$o_i < \varepsilon_i^0 \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.3.122}$$

а степени β_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ находятся из условия реализуемости регулятора (9.3.119)

$$\partial_{ri}\left\{O(s)\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{B}(s)\right\} \geq \partial_{ri}\left\{\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s)\right\} \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.3.123}$$

Найдём ошибку слежения с таким регулятором. Аналогично (9.3.117) запишем

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\left\{C(s)\boldsymbol{y} - C(s)\boldsymbol{y}_{ж} + \mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s)\boldsymbol{y}_{ж}\right\} + \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}. \tag{9.3.124}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}\left[\tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)C(s)\right]\boldsymbol{\varepsilon} = \\ = \left\{\tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{D}(s) - \tilde{D}(s)\right\}\boldsymbol{y}_{ж} + \tilde{M}(s)\boldsymbol{f}.\end{gathered} \tag{9.3.125}$$

Ошибка слежения содержит теперь две составляющие: погрешность стабилизации $\boldsymbol{y}^f$, близкую к решению уравнения (9.3.18), и ошибку слежения при $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$

$$\tilde{L}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1} - E_m\right\}\tilde{D}(s)\boldsymbol{y}_{ж}, \tag{9.3.126}$$

где $\tilde{L}(s) = \left[\tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)C(s)\right]$.

Первое слагаемое в фигурных скобках можно представить как

$$\tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s)\left[\tilde{B}^{(0)}\right]^{-1} = E_m + OK(s),$$

где $O = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} o_1 & o_2 & \cdots & o_m \end{pmatrix}$, $K(s)$ – некоторая полиномиальная матрица.

Подставляя это выражение в (9.3.126), заключаем, что ошибка

$$\tilde{L}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = OK(s)D(s)\boldsymbol{y}_{ж}, \tag{9.3.127}$$

может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малых чисел o_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Приложения к главе 9

9.П. Приложения

9.П.1. Приведение уравнений объекта к канонической форме Лагранжа

9.П.1.1. Каноническая форма управляемости

Пусть задан полностью управляемый многомерный объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{9.П.1}$$

где A и B – известные матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно. Матрица B имеет ранг m.

Полная управляемость объекта (9.П.1) означает, что

$$\operatorname{rank} K_y = n, \tag{9.П.2}$$

где матрица управляемости

$$K_y = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}. \tag{9.П.3}$$

Определение 9.П.1. Объект (9.П.1) в канонической форме управляемости имеет вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{B}\boldsymbol{u}, \tag{9.П.4}$$

где

$$\check{A}=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc}
0&1&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
0&0&1&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&0&\cdots&1&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
&&*&\cdots&*&*&*&*&\cdots&*&\cdots&*&*&*&\cdots&*\\
\hline
0&0&0&\cdots&0&0&1&0&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
0&0&0&\cdots&0&0&0&1&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\
&&*&\cdots&*&*&*&*&\cdots&*&\cdots&*&*&*&\cdots&*\\
\hline
\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
\hline
0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\
0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&0&1&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&0&\cdots&0&0&0&0&\cdots&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1\\
&&*&\cdots&*&*&*&*&\cdots&*&\cdots&*&*&*&\cdots&*
\end{array}\right),\quad
\check{B}=\left(\begin{array}{cccc}
0&0&\cdots&0\\
0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&\cdots&0\\
1&*&\cdots&*\\
\hline
0&0&\cdots&0\\
0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&\cdots&0\\
0&1&\cdots&*\\
\hline
\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
\hline
0&0&\cdots&0\\
0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\
0&0&\cdots&0\\
0&0&\cdots&1
\end{array}\right). \tag{9.П.5}$$

Матрица $\check{A}$ представляет собой блочную матрицу, в которой диагональные блоки $\check{A}_{ii}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ имеют размеры $\nu_i\times\nu_i$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Каждый из диагональных блоков содержит единичную матрицу размеров $(\nu_i-1)\times(\nu_i-1)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, нулевой первый столбец и, вообще говоря, отличные от нуля элементы, показанные символом ««*»».

Недиагональные блоки $\check{A}_{ij}$ $(i\neq j)$ этой матрицы состоят из нулей за исключением может быть последней строки.

Матрица $\check{B}$ состоит из блоков размеров $\nu_i\times m$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Элементы блоков состоят из нулей кроме последней строки. При этом первые $i-1$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ элементов этих строк также равны нулю, а i-элементы $\left(i=\overline{1,m}\right)$ – единице. ■

Числа ν_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, определяющие размеры блоков матриц $\check{A}$ и $\check{B}$, называются *индексами управляемости.*

Процедура 9.П.1.а. Определение индексов управляемости состоит из операций:

Операция 1. Сформируем матрицу управляемости (9.П.3)

$$K_y=\left(\boldsymbol{b}^{(1)}\,\boldsymbol{b}^{(2)}\cdots\boldsymbol{b}^{(m)}\,\middle|\,A\boldsymbol{b}^{(1)}\,A\boldsymbol{b}^{(2)}\cdots A\boldsymbol{b}^{(m)}\,\middle|\cdots\middle|\,A^{n-1}\boldsymbol{b}^{(1)}\,A^{n-1}\boldsymbol{b}^{(2)}\cdots A^{n-1}\boldsymbol{b}^{(m)}\right), \tag{9.П.6}$$

где $\boldsymbol{b}^{(i)}$ – i-тый столбец матрицы B $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Операция 2. Выберем из $n\times m$ столбцов этой матрицы n линейно независимых (такие столбцы матрицы K_y существуют в силу полной управляемости объекта). Для этого будем перебирать столбцы $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $A\boldsymbol{b}^{(1)}$, …, $A^{n-1}\boldsymbol{b}^{(1)}$ до тех пор

пока вектор $A^{\nu_1}\boldsymbol{b}^{(1)}$ не будет выражаться в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $A\boldsymbol{b}^{(1)}$, ..., $A^{\nu_1-1}\boldsymbol{b}^{(1)}$. Будем полагать $\nu_1 < n$. В противном случае (когда $\nu_1 = n$) объект (9.П.1) полностью управляем первой компонентой вектора $\boldsymbol{u}$.

Операция 3. Присоединим к полученному набору ν_1 векторов столбцы $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $A\boldsymbol{b}^{(2)}$, ..., $A^{\nu_2-1}\boldsymbol{b}^{(2)}$. При этом число ν_2 таково, что вектор $A^{\nu_2}\boldsymbol{b}^{(2)}$ выражается как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{b}^{(1)}$, $A\boldsymbol{b}^{(1)}$, ..., $A^{\nu_1-1}\boldsymbol{b}^{(1)}$; $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $A\boldsymbol{b}^{(2)}$, ..., $A^{\nu_2-1}\boldsymbol{b}^{(2)}$. Пусть $\nu_1+\nu_2 < n$. В противном случае (когда $\nu_1+\nu_2 = n$) объект полностью управляем первыми двумя компонентами вектора $\boldsymbol{u}$.

Операция 4. Присоединим к построенному набору $\nu_1 + \nu_2$ линейно независимых векторов столбцы $\boldsymbol{b}^{(3)}$, $A\boldsymbol{b}^{(3)}$, ..., $A^{\nu_3-1}\boldsymbol{b}^{(3)}$ и т.д. до тех пор, пока не получим квадратную матрицу

$$L=\Big(\boldsymbol{b}^{(1)}\, A\boldsymbol{b}^{(1)} \cdots A^{\nu_1-1}\boldsymbol{b}^{(1)} \Big| \boldsymbol{b}^{(2)}\, A\boldsymbol{b}^{(2)} \cdots A^{\nu_2-1}\boldsymbol{b}^{(2)} \Big| \cdots \Big| \boldsymbol{b}^{(m)}\, A\boldsymbol{b}^{(m)} \cdots A^{\nu_m-1}\boldsymbol{b}^{(m)}\Big), \tag{9.П.7}$$

обладающую свойством

$$\det L \neq 0. \tag{9.П.8}$$

Заметим, что

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = n. \tag{9.П.9}$$

■

Примечание 9.П.1. Для сокращения перебора столбцов матрицы управляемости (9.П.6) несколько видоизменим вторую операцию. Включим m столбцов матрицы B в матрицу L, так как эти столбцы линейно независимы (матрица B имеет ранг m). Остальные $n-m$ столбцов матрицы L будем находить в соответствии с операциями 2, 3 и 4, заменив в них вектор $\boldsymbol{b}^{(1)}$ на матрицу B. ■

9.П.1.2. Построение матриц канонической формы

Установим теперь связь матриц A и B объекта (9.П.1) с матрицами $\check{A}$ и $\check{B}$ его описания в канонической форме управляемости. Для этого введём числа

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.П.10}$$

найдём вектора $\tilde{q}_k$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, являющиеся σ_k $\left(i = \overline{1,m}\right)$ строками матрицы L^{-1}, и сформируем матрицу

$$Q=\Big[\tilde{q}_1'\,(\tilde{q}_1 A)' \cdots \left(\tilde{q}_1 A^{(\nu_1-1)}\right)' \Big| \tilde{q}_2'\,(\tilde{q}_2 A)' \cdots \left(\tilde{q}_2 A^{(\nu_2-1)}\right)' \Big| \cdots \Big| \tilde{q}_m'\,(\tilde{q}_m A)' \cdots \left(\tilde{q}_m A^{(\nu_m-1)}\right)' \Big]'. \tag{9.П.11}$$

Утверждение 9.П.1. Неособая матрица Q, определяемая выражением (9.П.11) является матрицей преобразования

$$\check{\boldsymbol{x}} = Q\boldsymbol{x} \tag{9.П.12}$$

уравнения (9.П.1) к канонической форме (9.П.4) и, следовательно, матрицы $\check{A}$ и $\check{B}$ связаны с матрицами A и B соотношениями

$$\check{A} = QAQ^{-1}, \quad \check{B} = QB. \tag{9.П.13}$$

■

Опуская доказательство этого утверждения, сравним выражения (9.П.13) с соотношениями (3.4.9), полученными при $m = 1$. Нетрудно видеть, что $Q = T$. Отличие выражений матриц Q и T состоит в том, что при построении Q не используются коэффициенты характеристического полинома объекта, необходимые для формирования матрицы $T = \check{K}K^{-1}$.

Пример 9.П.1. Преобразуем уравнения (3.4.14), (3.4.15) к канонической форме.

В рассматриваемом случае

$$K_y = L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 6 & 39 \end{pmatrix}, \tag{9.П.14}$$

$L^{-1} = \begin{pmatrix} 39 & -17 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{93}$, и следовательно $\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{93}$, $\tilde{q}_1 A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{93}$.

Таким образом, матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{q}}_1 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{93}, \tag{9.П.15}$$

совпадает с матрицей T, определяемой выражением (3.4.17). ■

Пример 9.П.2. Преобразуем к канонической форме управляемости систему (9.П.1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.П.16}$$

Нетрудно проверить, что матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^{(1)} & \boldsymbol{b}^{(2)} & A\boldsymbol{b}^{(2)} & A^2\boldsymbol{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{9.П.17}$$

и следовательно, в рассматриваемом случае

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 3; \qquad \sigma_1 = \nu_1 = 1, \quad \sigma_2 = \nu_1 + \nu_2 = n = 4.$$

Для построения матрицы преобразования Q вычислим первую и четвёртую строки матрицы L^{-1}

$$\tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{q}}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{q}}_2 A \\ \tilde{\boldsymbol{q}}_2 A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\check{A} = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \check{B} = QB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.П.18}$$

■

9.П.1.3. Структурная теорема

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + F\boldsymbol{u}. \tag{9.П.19}$$

Его передаточная матрица

$$W(s) = D(Es - A)^{-1}B + F. \tag{9.П.20}$$

Используем неособое преобразование (9.П.12) и запишем (9.П.19) в виде

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{B}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \tilde{D}\check{\boldsymbol{x}} + F\boldsymbol{u}, \tag{9.П.21}$$

где

$$\tilde{D} = DQ^{-1}. \tag{9.П.22}$$

Преобразование (9.П.12) не изменяет передаточной матрицы объекта. Действительно,

$$W(s) = D\,(Es - A)^{-1}B + F = DQ^{-1}\left(Es - QAQ^{-1}\right)^{-1}QB + F = \tilde{D}\left(Es - \check{A}\right)^{-1}\check{B} + F. \tag{9.П.23}$$

Выразим передаточную матрицу объекта через нетривиальные строки матриц $\check{A}$ и $\check{B}$. Для этого образуем матрицы A_y и B_y, составив их из σ_k $\left(k=\overline{1,m}\right)$ строк матриц $\check{A}$ и $\check{B}$. Нетрудно заметить, что B_y – правая верхняя треугольная матрица с единицами по диагонали

$$B_y = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введём в рассмотрение матрицу

$$S(s) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & s & \cdots & s^{\nu_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{\nu_2-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s & \cdots & s^{\nu_m-1} \end{array}\right)'. \qquad (9.\text{П}.24)$$

<u>Теорема 9.П.1.</u> (Структурная теорема) Если объект (9.П.19) полностью управляем, а матрица B имеет ранг m, то его передаточная матрица (9.П.20) может быть преобразована как

$$W(s) = \tilde{D}S(s)T^{-1}(s)B_y + F = \left[\tilde{D}S(s) + FB_y^{-1}T(s)\right]\left[B_y^{-1}T(s)\right]^{-1}, \qquad (9.\text{П}.25)$$

где

$$T(s) = \begin{pmatrix} s^{\nu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\nu_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\nu_m} \end{pmatrix} - A_yS(s). \qquad (9.\text{П}.26)$$

■

Доказательство. Сравнивая (9.П.23) с (9.П.25) заключаем, что для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\tilde{D}\left(Es - \check{A}\right)^{-1}\check{B} = \tilde{D}S(s)T^{-1}(s)B_y.$$

Для этого достаточно убедиться в выполнении тождества

$$\left(Es - \check{A}\right)^{-1}\check{B} = S(s)\left[B_y^{-1}T(s)\right]^{-1},$$

которое эквивалентно соотношению

$$\left(Es - \check{A}\right)S(s) = \check{B}B_y^{-1}T(s). \qquad (9.\text{П}.27)$$

Последнее сразу следует из определений матриц $S(s)$, B_y и $T(s)$ и доказывается непосредственной подстановкой этих матриц в (9.П.27).

Убедимся в справедливости (9.П.27) в частном случае, когда $n = 5$, $m = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$. Для этого случая

$$Es - \check{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\check{a}_{21} & s-\check{a}_{22} & -\check{a}_{23} & -\check{a}_{24} & -\check{a}_{25} \\ \hline 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ -\check{a}_{51} & -\check{a}_{52} & -\check{a}_{53} & -\check{a}_{54} & s-\check{a}_{55} \end{array}\right), \; S(s) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{array}\right), \; \check{B} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & \check{b}_{22} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$B_y = \begin{pmatrix} 1 & \check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \check{a}_{22}s - \check{a}_{21} & -\check{a}_{25}s^2 - \check{a}_{24}s - \check{a}_{23} \\ -\check{a}_{52}s - \check{a}_{51} & s^3 - \check{a}_{55}s^2 - \check{a}_{54}s - \check{a}_{53} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left(Es - \check{A}\right) S(s) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ s^2 - \check{a}_{22}s - \check{a}_{21} & -\check{a}_{25}s^2 - \check{a}_{24}s - \check{a}_{23} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\check{a}_{52}s - \check{a}_{51} & s^3 - \check{a}_{55}s^2 - \check{a}_{54}s - \check{a}_{53} \end{array}\right),$$

$$\check{B}B_y^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & \check{b}_{22} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \times \begin{pmatrix} 1 & -\check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

умножая $\check{B}B_y^{-1}$ на $T(s)$, получим $\left(Es - \check{A}\right) S(s)$.

9.П.1.4. Процедура приведения

Важным практическим результатом структурной теоремы является возможность представления передаточной матрицы объекта как произведения $r \times m$ полиномиальной матрицы

$$N(s) = \tilde{D}S(s) + FB_y^{-1}T(s), \tag{9.П.28}$$

и матрицы, обратной полиномиальной матрице

$$P(s) = B_y^{-1}T(s), \tag{9.П.29}$$

размеров $m \times m$.

Действительно, из выражения (9.П.25) и обозначений (9.П.28), (9.П.29) следует, что

$$W(s) = N(s)P^{-1}(s). \tag{9.П.30}$$

Уравнение объекта, имеющего такую передаточную матрицу, имеет вид (9.1.13)

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}. \tag{9.П.31}$$

Опишем алгоритм перехода от уравнений (9.П.19) к уравнениям (9.П.31).

Процедура 9.П.1.**(процедура приведения уравнений в форме Коши к канонической форме Лагранжа)** состоит из операций:

Операция 1. Найти индексы управляемости ν_1, ν_2, ..., ν_m, используя процедуру 9.П.1.

Операция 2. Построить в соответствии с (9.П.11) матрицу преобразования Q и вычислить по формулам (9.П.13), (9.П.22) матрицы $\check{A}$, $\check{B}$ и $\tilde{D}$.

Операция 3. Сформировать из нетривиальных строк матриц $\check{A}$ и $\check{B}$ матрицы A_y и B_y, а также матрицу $S(s)$.

Операция 4. Определить на основе (9.П.26) матрицу $T(s)$ и вычислить по формулам (9.П.28), (9.П.29) искомые матрицы $P(s)$ и $N(s)$.

■

Пример 9.П.2. Рассмотрим полностью управляемый объект (9.П.19) с параметрами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.П.32}$$

Нетрудно проверить, что рассматриваемый объект с одним входом полностью управляем.

Операция 1. Находим индекс управляемости $\nu_1 = n = 3$.

Операция 2. Строим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и находим

$$QAQ^{-1} = \check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad QB = \check{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad DQ^{-1} = \tilde{D} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операция 3. Формируем

$$A_y = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_y = 1, \quad S(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix}'.$$

Операция 4. Определяем

$$T(s) = s^3 - A_y S(s) = s^3 - s^2 - 9s + 9 = (s-1)(s+3)(s-3),$$

и вычисляем

$$\begin{aligned} P(s) = T(s), \quad N(s) &= \begin{pmatrix} -s^2 + 4s + 5 \\ s^2 - 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s^3 - s^2 - 9s + 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -s^2 + 4s + 5 \\ s^3 - 9s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+1)(-s+5) \\ s(s+3)(s-3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.П.33}$$

Передаточная матрица объекта

$$\begin{aligned} W(s) = N(s)P^{-1}(s) &= \begin{pmatrix} (s+1)(-s+5) \\ s(s+3)(s-3) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+3)(s-3)} = \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{(s+1)(-s+5)}{(s-1)(s+3)(s-3)} \\ \dfrac{s}{s-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.П.34}$$

■

9.П.1.5. Свойства матриц канонической формы

Из выражений (9.П.29), (9.П.26) следует, что матрица $P(s)$ – столбцово-правильная. Действительно,

$$\Gamma_c[P(s)] = B_y^{-1},$$

и поэтому

$$\det \Gamma_c[P(s)] = 1 \neq 0. \tag{9.П.35}$$

Последнее означает, в соответствии с определением 9.1.2, что $P(s)$ – столбцово-правильная.

Сравним теперь матрицы $P(s)$ и $N(s)$. Из выражений (9.П.28), (9.П.29) следует, что степень каждого столбца $N_{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ матрицы $N(s)$ меньше или равна степени соответствующего столбца $P_{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ матрицы $P(s)$

$$\partial_{ci}[N(s)] \leq \partial_{ci}[P(s)] \quad i = \overline{1,m}. \tag{9.П.36}$$

9.П.2. Приведение уравнений объекта к форме ««вход-выход»»

9.П.2.1. Каноническая форма наблюдаемости

Пусть задан полностью наблюдаемый объект управления

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \tag{9.П.37}$$

где A и D – матрицы чисел размеров $n \times n$ и $r \times n$ соответственно. Матрица D имеет ранг r.

Полная наблюдаемость объекта (9.П.37) означает, что

$$\operatorname{rank} K_н = n, \tag{9.П.38}$$

где матрица наблюдаемости

$$K_н = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{9.П.39}$$

<u>Определение 9.П.2.</u> Объект (9.П.37) в канонической форме наблюдаемости имеет вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = \check{D}\check{\boldsymbol{x}}, \tag{9.П.40}$$

где

$$\check{A} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
1 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & *
\end{array}\right), \tag{9.П.41}$$

$$\check{D} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right). \qquad (9.\text{П}.42)$$

Матрица $\check{A}$ – это блочная матрица. Ее диагональные блоки $\check{A}_{ii}$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$ имеют размеры $\bar{\nu}_i \times \bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$, содержащие единичные матрицы размеров $(\bar{\nu}_i - 1)\times(\bar{\nu}_i - 1)$, нулевые первые строки и вообще говоря, отличные от нуля элементы последних столбцов, отмеченные символом «*». Недиагональные блоки $\check{A}_{ij}$ $\left(i, j = \overline{1,r}\right)$ $(i \neq j)$ этой матрицы состоят из нулей за исключением их последнего столбца. Матрица $\check{D}$ состоит из аналогичных блоков размеров $r \times \bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$. При этом $i - 1$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$ элементов последних столбцов i-тых блоков равны нулю, а i-е элементы этих столбцов – единице. ■

Числа $\bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$ называются *индексами наблюдаемости.*

9.П.2.2. Дуальные системы и построение матриц канонической формы

Запишем матрицу наблюдаемости (9.П.39) в виде

$$K_н = \left[\begin{array}{cccc} D' & (DA)' & \cdots & (DA^{n-1})' \end{array}\right]',$$

или

$$K_н = \left[\begin{array}{cccc} D' & A'D' & \cdots & (A^{n-1})'\,D' \end{array}\right]. \qquad (9.\text{П}.43)$$

Сравним эту матрицу с матрицей управляемости (9.П.3). Нетрудно видеть, что они совпадают при условии, что

$$B = \bar{B} = D', \quad A = \bar{A} = A'. \qquad (9.\text{П}.44)$$

Определение 9.П.4. Система

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{B}\bar{\boldsymbol{u}}, \qquad (9.\text{П}.45)$$

где $\bar{A} = A'$, $\bar{B} = D'$, называется дуальной (двойственной) системой для системы (9.П.37). ■

Из построения дуальной системы следует утверждение.

Утверждение 9.П.2. Если дуальная система полностью управляема, то исходная система (9.П.37) – полностью наблюдаема. ■

Используем это утверждение и применим процедуру 9.П.1 для определения индексов наблюдаемости $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, ..., $\bar{\nu}_r$. Для этого положим в операциях этой процедуры $A = \bar{A}$ и $B = \bar{B}$ (где $\bar{A} = A'$, $\bar{B} = D'$).

Для построения матриц $\check{\bar{A}}$ и $\check{D}$ канонической формы наблюдаемости (9.П.40) используем матрицу

$$\bar{L}=\Big[\ \bar{\boldsymbol{b}}^{(1)}\ \ \bar{A}\bar{\boldsymbol{b}}^{(1)}\ \cdots\ \bar{A}^{\bar{\nu}_1-1}\bar{\boldsymbol{b}}^{(1)}\Big|\bar{\boldsymbol{b}}^{(2)}\ \ \bar{A}\bar{\boldsymbol{b}}^{(2)}\ \cdots\ \bar{A}^{\bar{\nu}_2-1}\bar{\boldsymbol{b}}^{(2)}\Big|\cdots\Big|\bar{\boldsymbol{b}}^{(r)}\ \ \bar{A}\bar{\boldsymbol{b}}^{(r)}\ \cdots\ \bar{A}^{\bar{\nu}_r-1}\bar{\boldsymbol{b}}^{(r)}\ \Big], \tag{9.П.46}$$

и найдём матрицу

$$\bar{Q}=\Big[\bar{\boldsymbol{q}}_1'\left(\bar{\boldsymbol{q}}_1\bar{A}\right)'\cdots\left(\bar{\boldsymbol{q}}_1\bar{A}^{\bar{\nu}_1-1}\right)'\Big|\bar{\boldsymbol{q}}_2'\left(\bar{\boldsymbol{q}}_2\bar{A}\right)'\cdots\left(\bar{\boldsymbol{q}}_2\bar{A}^{\bar{\nu}_2-1}\right)'\Big|\cdots\Big|\bar{\boldsymbol{q}}_r'\left(\bar{\boldsymbol{q}}_r\bar{A}\right)'\cdots\left(\bar{\boldsymbol{q}}_r\bar{A}^{\bar{\nu}_r-1}\right)'\Big], \tag{9.П.47}$$

где $\bar{\boldsymbol{q}}_1$ является $\bar{\nu}_1$-строкой матрицы $\bar{L}^{-1}$, $\bar{\boldsymbol{q}}_2$ – $(\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2)$-строкой матрицы $\bar{L}^{-1}$, и т.д.

На основе утверждений 9.П.1 и 9.П.2 заключаем, что искомые матрицы

$$\check{\bar{A}}=\left(\bar{Q}\bar{A}\bar{Q}^{-1}\right)',\quad \check{D}=\left(\bar{Q}\bar{B}\right)', \tag{9.П.48}$$

или

$$\check{\bar{A}}=\left(\bar{Q}A'\bar{Q}^{-1}\right)'=\bar{Q}^{-1\prime}A\bar{Q}', \tag{9.П.49}$$

$$\check{D}=D\bar{Q}'. \tag{9.П.50}$$

9.П.2.3. Процедура приведения

Пусть объект управления описывается уравнениями (9.П.19)

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=D\boldsymbol{x}+F\boldsymbol{u}.$$

Введём новый вектор состояния

$$\check{\boldsymbol{x}}=\bar{Q}^{-1\prime}\boldsymbol{x}\quad\left(\boldsymbol{x}=\bar{Q}'\check{\boldsymbol{x}}\right). \tag{9.П.51}$$

и получим из этих уравнений

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}}=\bar{Q}^{-1\prime}A\bar{Q}'\check{\boldsymbol{x}}+\bar{Q}^{-1\prime}B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=D\bar{Q}'\check{\boldsymbol{x}},$$

или

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}}=\check{\bar{A}}\check{\boldsymbol{x}}+\tilde{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=\check{D}\check{\boldsymbol{x}},$$

где

$$\tilde{B}=\bar{Q}^{-1\prime}B. \tag{9.П.52}$$

Как и в случае формы управляемости определим $(n\times r)$ матрицу $A_н$, составленную из нетривиальных столбцов матрицы $\check{\bar{A}}$. Это столбцы матрицы $\check{\bar{A}}$ с номерами $\bar{\sigma}_1=\bar{\nu}_1$, $\bar{\sigma}_2=\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2$, $\ldots$, $\bar{\sigma}_r=\sum\limits_{i=1}^{r}\bar{\nu}_i$.

Аналогично построим матрицу

$$D_н = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.П.53}$$

Введём матрицу

$$\bar{S}(s) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_2-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_r-1} \end{array}\right) \tag{9.П.54}$$

и сформируем дуальную («наблюдаемую версию») структурную теорему: если объект (9.П.19) полностью наблюдаем, а матрица D имеет ранг r, то его передаточная матрица может быть представлена как

$$W(s) = D_н \bar{T}^{-1}(s)\bar{S}(s)\tilde{B} + F = \left[\bar{T}(s)D_н^{-1}\right]^{-1}\left[\bar{S}(s)\tilde{B} + \bar{T}(s)D_н^{-1}F\right], \tag{9.П.55}$$

где

$$\bar{T}(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{\nu}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\bar{\nu}_r} \end{pmatrix} - \bar{S}(s)A_н. \tag{9.П.56}$$

Доказательство выражения (9.П.55) повторяет доказательство структурной теоремы 9.П.1.

Запишем передаточную матрицу (9.П.55) в виде

$$W(s) = D^{-1}(s)B(s), \tag{9.П.57}$$

где полиномиальная матрица размеров $r \times r$

$$D(s) = \bar{T}(s)D_н^{-1}, \tag{9.П.58}$$

а

$$B(s) = \bar{S}(s)\tilde{B} + \bar{T}(s)D_н^{-1}F \tag{9.П.59}$$

– полиномиальная матрица размеров $r \times m$.

Из выражений (9.П.56), (9.П.58) следует, что матрица $D(s)$ – строчно-правильная, так как $\Gamma_r[D(s)] = D_н^{-1}$, а $\det D_н^{-1} = 1$.

Сравнивая матрицы $D(s)$ и $B(s)$ заключаем, что степень каждой строки $B^{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$ матрицы $B(s)$ меньше или равна степени соответствующей строки $D^{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$ матрицы $D(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] \le \partial_{ri}[D(s)] \quad i = \overline{1,r}. \tag{9.П.60}$$

Процедура 9.П.2. **(процедура приведения уравнений в форме Коши к форме ««вход-выход»»)** состоит из операций:

Операция 1. Найти индексы наблюдаемости $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, ..., $\bar{\nu}_r$, используя процедуру 9.П.1 при $A = \bar{A}$, $\left(\bar{A} = A'\right)$, $B = \bar{B}$, $\left(\bar{B} = D'\right)$.

Операция 2. Построить в соответствии с (9.П.47) матрицу преобразования $\bar{Q}$ и вычислить по формулам (9.П.49), (9.П.50), (9.П.52), матрицы $\check{\bar{A}}$, $\check{D}$ и $\tilde{B}$.

Операция 3. Сформировать из нетривиальных строк матриц $\check{\bar{A}}$ и $\check{D}$ матрицы $A_н$ и $D_н$, а также матрицу $\bar{S}(s)$.

Операция 4. Определить на основе (9.П.56) матрицу $\bar{T}(s)$ и вычислить по формулам (9.П.58), (9.П.59) искомые матрицы $D(s)$ и $B(s)$.

■

Пример 9.П.3. Продолжим исследование объекта (9.П.19) с параметрами (9.П.32), рассмотренного в примере 9.П.2. Приведём уравнения этого объекта к форме ««вход-выход»».

Нетрудно проверить, что он полностью наблюдаем, а матрица преобразования

$$\bar{Q}^{-1\prime} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда находим

$$\bar{Q}^{-1\prime} A \bar{Q}' = \check{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^{-1\prime} B = \tilde{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D\bar{Q}' = \check{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $r = 2$, $\bar{\nu}_1 = 2$, $\bar{\nu}_2 = 1$, $\bar{\sigma}_1 = 2$ и $\bar{\sigma}_2 = 3 = n$. Далее,

$$A_н = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_н = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{S}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определяем

$$\bar{T}(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \bar{S}(s) A_н = \begin{pmatrix} s^2 - 9 & -8 \\ 0 & s - 1 \end{pmatrix},$$

и находим

$$D(s) = \bar{T}(s)$$

и

$$B(s) = \bar{S}(s)\tilde{B} + \bar{T}(s) D_н^{-1} F = \begin{bmatrix} 3 - s \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - 5 \\ s \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что передаточная матрица $W(s) = D^{-1}(s)B(s)$ совпадает с передаточной матрицей (9.П.34). ■

9.П.2.4. Столбцово-правильная форма ««вход-выход»»

Уравнение (9.1.11), получаемое в результате процедуры 9.П.2 содержит строчно-правильную матрицу $D(s)$.

Опишем приведение уравнений (9.П.19) при $F = 0$ к форме ««вход-выход»»

$$\tilde{D}(s)\boldsymbol{y} = \tilde{B}(s)\boldsymbol{u},$$

в которой полиномиальная матрица $\tilde{D}(s)$ – столбцово-правильная.

Пусть известны индексы наблюдаемости объекта (9.П.19) $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$, ..., $\bar{\nu}_r$. Продифференцируем второе из соотношений (9.П.19) с учётом первого из них, γ раз, где $\gamma = \max\{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_r\} - 1$. Получим систему (9.Д.1), на основе которой сформируем связь (9.Д.2) вектора состояния $\boldsymbol{x}$ с векторами управления и измеряемых переменных

$$\boldsymbol{x} = \Gamma^{-1} S_{eo}(s)\boldsymbol{y} - \Gamma^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i\right)\boldsymbol{u} = \Phi(s)\boldsymbol{y} + \tilde{F}(s)\boldsymbol{u},$$

где

$$S_{eo}(s) = \left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
s & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s^{\bar{\nu}_1-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & s & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & s^{\bar{\nu}_2-1} & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & \cdots & s \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & s^{\bar{\nu}_r-1}
\end{array}\right), \qquad
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \Gamma^{-1} S_{eo}(s), \\
\tilde{F}(s) &= -\Gamma^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i\right),
\end{aligned}$$

а выражения для матриц Γ, Γ_0, Γ_1, ..., $\Gamma_{\gamma-1}$ приведены в п. 9.Д.1.

Выберем из системы (9.Д.1) следующие r уравнений

$$s^{\bar{\nu}_i}\boldsymbol{y}_i = \left[DA^{\bar{\nu}_i}\boldsymbol{x} + \sum_{j=0}^{\bar{\nu}_i-1} DA^{\bar{\nu}_i-1-j}Bs^j\boldsymbol{u}\right]^{[i]} \qquad i = \overline{1, r},$$

где, как и ранее, $[\cdot]^{[i]}$ – i-тая строка матрицы в скобках, и подставим в них выражение

для вектора $\boldsymbol{x}$. Тогда получим уравнение в форме ««вход-выход»», в котором

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} [Es^{\bar{\nu}_1} - DA^{\bar{\nu}_1}\Phi(s)]^{[1]} \\ [Es^{\bar{\nu}_2} - DA^{\bar{\nu}_2}\Phi(s)]^{[2]} \\ \vdots \\ [Es^{\bar{\nu}_r} - DA^{\bar{\nu}_r}\Phi(s)]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(s) = \begin{pmatrix} \left[DA^{\bar{\nu}_1}\tilde{F}(s) + \sum\limits_{j=0}^{m_1-1} DA^{\bar{\nu}_1-1-j}Bs^j\right]^{[1]} \\ \left[DA^{\bar{\nu}_2}\tilde{F}(s) + \sum\limits_{j=0}^{m_2-1} DA^{\bar{\nu}_2-1-j}Bs^j\right]^{[2]} \\ \vdots \\ \left[DA^{\bar{\nu}_r}\tilde{F}(s) + \sum\limits_{j=0}^{m_r-1} DA^{\bar{\nu}_r-1-j}Bs^j\right]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что матрица $\tilde{D}(s)$ – столбцово-правильная.

Для этого представим

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{\nu}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\bar{\nu}_r} \end{pmatrix} - M(s),$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} \left[L^{(1)}S_{eo}(s)\right]^{[1]} \\ \left[L^{(2)}S_{eo}(s)\right]^{[2]} \\ \vdots \\ \left[L^{(r)}S_{eo}(s)\right]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Здесь $L^{(i)} = DA^{\bar{\nu}_i}\Gamma^{-1}$ $\left(i = \overline{1,r}\right)$.

Запишем

$$M(s) = \tilde{L}S_{eo}(s),$$

где

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \left[L^{(1)}\right]^{[1]} \\ \left[L^{(2)}\right]^{[2]} \\ \vdots \\ \left[L^{(r)}\right]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения следует, что

$$\partial_{ci}[M(s)] \le \partial_{ci}[S_{eo}(s)] = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1,r}.$$

Возвращаясь к матрице $\tilde{D}(s)$, получим, с учётом последнего,

$$\partial_{ci}\left[\tilde{D}(s)\right] = \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1,r},$$

и при этом

$$\Gamma_c\left[\tilde{D}(s)\right] = E_r.$$

9.П.3. Преобразование уравнений к форме Коши

9.П.3.1. Существо подхода

Рассмотрим объект, уравнения которого в форме Лагранжа имеют вид

$$P(s)\boldsymbol{z} = Q(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.61}$$

$$\boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{z} + F(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.62}$$

где $\boldsymbol{z}(t)$ – q-мерный вектор неполного (частичного) состояния объекта; $P(s)$, $Q(s)$, $N(s)$ и $F(s)$ – полиномиальные матрицы размеров $q \times q$, $q \times m$, $r \times q$ и $r \times m$ соответственно.

Частным случаем этих уравнений служит каноническая форма Лагранжа, в которой $q = m$, $Q(s) = E$, $F(s) = 0$.

Задача состоит в преобразовании этих уравнений к виду

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{9.П.63}$$

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + L(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.64}$$

где $L(s)$ - полиномиальная матрица размеров $r \times m$.

Из уравнений Лагранжа выделим частный случай, когда полиномиальные матрицы в (9.П.61), (9.П.62) обладают следующими свойствами:

1 свойство: Матрица $P(s)$ – строчно-правильная. Это означает, что

$$\det \Gamma_r[P(s)] \neq 0. \tag{9.П.65}$$

2 свойство: Матрица коэффициентов при наивысших степенях в строках $P(s)$ – единичная

$$\Gamma_r = E_q. \tag{9.П.66}$$

3 свойство: Степень каждой строки $P^{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$ матрицы $P(s)$ больше степени соответствующей строки $Q^{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$ матрицы $Q(s)$

$$\partial_{ri}[P(s)] > \partial_{ri}[Q(s)]. \tag{9.П.67}$$

Уравнения, обладающие такими свойствами, будем называть *приводимыми уравнениями Лагранжа* и записывать

$$P_0(s)\bar{\boldsymbol{z}}_0 = \bar{Q}_0(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.68}$$

$$\boldsymbol{y} = N_0(s)\bar{\boldsymbol{z}}_0 + T(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.69}$$

где матрицы $P_0(s)$ и $\bar{Q}_0(s)$ обладают свойствами (9.П.65)-(9.П.67).

Уравнения (9.П.68), (9.П.69) легко приводятся, как показано ниже, к форме Коши и поэтому процедура перехода от исходных уравнений (9.П.61), (9.П.62) к этой форме состоит из двух частей: преобразования исходных уравнений к приводимым уравнениям и преобразования последних к форме Коши.

9.П.3.2. Преобразование приводимых уравнений

Процедура 9.П.3. перехода от уравнений (9.П.68), (9.П.69) к уравнениям (9.П.63), (9.П.64) в определённом смысле обратна процедуре 9.П.2 и состоит из следующих операций:

Операция 1. Запишем $q \times q$ матрицу $P_0(s)$ как

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{\nu}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\bar{\nu}_q} \end{pmatrix} - \tilde{S}(s)\tilde{L}, \tag{9.П.70}$$

где $\bar{\nu}_i \geq 1$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$, $\tilde{L}$ – матрица чисел размеров $n \times q$, а полиномиальная $q \times n$ матрица

$$\tilde{S}(s) = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_2-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_q-1} \end{array}\right). \tag{9.П.71}$$

Определим из равенства (9.П.70) матрицу $\tilde{L}$ и сформируем искомую матрицу A, заменяя в $n \times n$ матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.П.72}$$

столбцы с номерами $\bar{\sigma}_k$ $\left(k = \overline{1,q}\right)$ $\left(\bar{\sigma}_k = \sum_{i=1}^{k} \bar{\nu}_i\right)$ соответствующими столбцами $\tilde{L}_{[1]}$, $\tilde{L}_{[2]}$, ..., $\tilde{L}_{[q]}$ матрицы $\tilde{L}$.

Операция 2. Находим из равенства

$$\bar{Q}_0(s) = \tilde{S}(s)\tilde{B} \tag{9.П.73}$$

матрицу $\tilde{B}$ размеров $n \times m$ и полагаем

$$B = \tilde{B}. \tag{9.П.74}$$

Операция 3. Формируем матрицу $\bar{D}$ размеров $r \times n$ путём подстановки в нулевую $r \times n$ матрицу вместо столбцов с номерами $\bar{\sigma}_k$ $\left(k = \overline{1,q}\right)$ соответствующих столбцов единичной матрицы E_q. Эта матрица связывает вектора $\bar{\boldsymbol{z}}_0$ и $\boldsymbol{x}$

$$\bar{\boldsymbol{z}}_0 = \bar{D}\boldsymbol{x}. \tag{9.П.75}$$

Операция 4. Подставим последнее выражение в (9.П.69) и получим, исключая производные $\boldsymbol{x}(t)$ с помощью (9.П.63)

$$\boldsymbol{y} = N_0(s)\bar{\boldsymbol{z}}_0 + \bar{F}(s)\boldsymbol{u} = N_0(s)\bar{D}\boldsymbol{x} + \bar{F}(s)\boldsymbol{u} = D\boldsymbol{x} + L_0(s)\boldsymbol{u}. \qquad (9.\text{П}.76)$$

■

Пример 9.П.4. Рассмотрим объект, описываемый полиномами

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^2+6 & 0 \\ 2s+3 & s^2+3s+1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_0(s) = \begin{pmatrix} 1 & s+3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(s) = 0. \qquad (9.\text{П}.77)$$

Операция 1.

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} - \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)}_{\tilde{S}(s)} \times \underbrace{\left(\begin{array}{cc} -6 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -3 & -1 \\ -2 & -3 \end{array}\right)}_{\tilde{L}}. \qquad (9.\text{П}.78)$$

Операция 2 и 3.

$$\bar{Q}_0(s) = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)}_{\tilde{S}(s)} \times \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)}_{\tilde{B}}, \quad \bar{D} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

■

9.П.3.3. Преобразование уравнений к приводимой форме

Пусть матрицы $P(s)$ и $Q(s)$ уравнения (9.П.61) не обладают свойствами (9.П.65)-(9.П.67). Преобразование таких матриц к матрицам $P_0(s)$ и $\bar{Q}_0(s)$ состоит из процедуры построения матрицы $U_L(s)$ такой, чтобы матрица $U_L(s)P(s)$ была строчно-правильной, операции преобразования матрицы $\Gamma_r[P(s)]$ в единичную и процедуры выделения из матрицы $Q(s)$ некоторой матрицы $\bar{Q}_0(s)$ так, чтобы $P(s)$ и $\bar{Q}_0(s)$ обладали свойствами (9.П.67).

Построение матрицы $U_L(s)$, обеспечивающей достижение свойства (9.П.75), является сложной задачей, решение которой приводится в следующем подразделе. Поэтому допустим пока, что такая матрица найдена. После умножения на неё уравнения (9.П.61) слева получим

$$U_L(s)P(s)\boldsymbol{z} = U_L(s)Q(s)\boldsymbol{u}. \qquad (9.\text{П}.79)$$

Если $\Gamma_r[U_L(s)P(s)] \neq E_q$, то введём вектор

$$\boldsymbol{z}_0 = \Gamma_r \boldsymbol{z}, \tag{9.П.80}$$

подставим его в (9.П.79) и запишем это уравнение как

$$P_0(s)\boldsymbol{z}_0 = Q_0(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.81}$$

где

$$P_0(s) = U_L(s)P(s)\Gamma_r^{-1}, \quad Q_0(s) = U_L(s)Q(s). \tag{9.П.82}$$

Переходя к процедуре, обеспечивающей свойство (9.П.67), введём понятие строго правильных матриц.

Определение 9.П.3. Передаточная матрица $W(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$ называется *строго правильной* если степени полиномов числителей всех её элементов $w_{ij}(s)$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$ ниже степеней знаменателей этих элементов. Если степень числителя хотя бы одного из элементов равна степени знаменателя этого элемента, то передаточная матрица называется *правильной*. ■

Если передаточная матрица $W(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$ не является строго правильной, то нарушается условие (9.П.67). В связи с этим выделим строго правильную часть $W(s)$.

Процедура 9.П.4. представления передаточной матрицы как

$$W(s) = P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s), \tag{9.П.83}$$

(где $P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s)$ – строго-правильная передаточная матрица) состоит из операций:

Операция 1. Выразим каждый элемент $w_{ij}(s) = \dfrac{\tilde{q}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)}$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$ матрицы $W(s)$ как

$$w_{ij}(s) = \frac{\hat{r}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)} + h_{ij}(s) \quad i = \overline{1,q} \quad j = \overline{1,m},$$

где $h_{ij}(s)$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$ – полиномы (среди которых могут быть и равные нулю), а $\deg \hat{r}_{ij}(s) < \deg \tilde{p}_{ij}(s)$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$.

Таким образом,

$$w_{ij}(s) = \bar{w}_{ij}(s) + h_{ij}(s) \quad i = \overline{1,q} \quad j = \overline{1,m},$$

где $\bar{w}_{ij}(s) = \dfrac{\hat{r}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)}$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$ – строго правильные передаточные функции.

Операция 2. Составим из полиномов $h_{ij}(s)$ $\left(i = \overline{1,q},\ \ j = \overline{1,m}\right)$ матрицу $H(s)$ и найдём из тождества

$$P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$$

матрицу

$$\bar{Q}_0(s) = Q_0(s) - P_0(s)H(s). \tag{9.П.84}$$

■

Уравнение (9.П.81) можно записать с учётом последнего выражения в виде

$$\boldsymbol{z}_0 = P_0^{-1}(s)Q_0(s)\boldsymbol{u} = \left[P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s)\right]\boldsymbol{u}.$$

Введём вектор

$$\bar{\boldsymbol{z}}_0 = \boldsymbol{z}_0 - H(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.85}$$

и получим

$$P_0(s)\bar{\boldsymbol{z}}_0 = \bar{Q}_0(s)\boldsymbol{u}. \tag{9.П.86}$$

Рассмотрим выражение (9.П.62) для измеряемого вектора.

Учтём преобразования (9.П.85) и (9.П.80) и получим

$$\boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{z} + F(s)\boldsymbol{u} = N(s)\Gamma_r^{-1}\boldsymbol{z}_0 + F(s)\boldsymbol{u} = N_0(s)\boldsymbol{z}_0 + F(s)\boldsymbol{u} = N_0(s)\bar{\boldsymbol{z}}_0 + T(s)\boldsymbol{u}, \tag{9.П.87}$$

где

$$N_0(s) = N(s)\Gamma_r^{-1}, \quad T(s) = N_0(s)H(s) + F(s). \tag{9.П.88}$$

Таким образом, уравнения (9.П.86), (9.П.87) совпадают с приводимыми уравнениями (9.П.68), (9.П.69).

9.П.3.4. Построение матрицы $U_L(s)$

Матрица $U_L(s)$, обеспечивающая строчную правильность произведения $U_L(s)P(s)$ в (9.П.79), должна иметь определитель, равный ненулевому действительному числу (такие матрицы $U_L(s)$ называются *унимодулярными матрицами.* Это требование необходимо, так как в противном случае повышается порядок характеристического полинома объекта (9.П.79).

Теорема 9.П.2. Для всякой неособой матрицы $P(s)$ всегда можно указать унимодулярную матрицу $U_R(s)$ $[U_L(s)]$, которая приводит $P(s)$ к столбцово-правильной форме (строчно-правильной форме) [$P(s)U_R(s)$ – столбцово-правильная матрица, $U_L(s)P(s)$ – строчно-правильная]. ■

Доказательство. Приведём конструктивное доказательство теоремы, выражающее процедуру построения $U_R(s)$. Пусть $P(s)$ не является столбцово-правильной матрицей. Это означает, что $\Gamma_c[P(s)] = 0$. Введём в рассмотрение матрицу

$$P^c(s) = \Gamma_c \cdot \mathrm{diag}\begin{pmatrix} s^{\partial_{c1}} & s^{\partial_{c2}} & \dots & s^{\partial_{cq}} \end{pmatrix}, \tag{9.П.89}$$

где ∂_{ci} $\left(i = \overline{1,q}\right)$ – степень i-того столбца матрицы $P(s)$.

Так как

$$\det P^c(s) = (\det \Gamma_c)\, s^p = 0 \qquad \left(p = \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}\right),$$

то столбцы $P^c_{[i]}(s)$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$ матрицы $P^c(s)$ – линейно-зависимы и поэтому существуют одночлены $\alpha_i(s)$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$, при которых

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i(s) P^c_{[i]}(s) = 0 \tag{9.П.90}$$

для двух или более отличных от нуля $\alpha_i(s)$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$.

По крайней мере один из этих одночленов может быть сделан равным единице делением (9.П.90) на одночлен $\alpha_k(s)$ наинизшей степени.

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i(s)}{\alpha_k(s)} P^c_{[i]}(s) = \sum_{i=1}^{q} \tilde{\alpha}_i(s) P^c_{[i]}(s) = 0,$$

где $\tilde{\alpha}_k(s) = 1$.

Теперь сформируем унимодулярную матрицу

$$U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \tilde{\alpha}_2(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_{k+1}(s) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_q(s) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что k-тый столбец матрицы $P^c(s)U_R^{(1)}(s)$ равен нулю, а матрица $P^{(1)}(s) = P(s)U_R^{(1)}(s)$ совпадает с $P(s)$ за исключением k-того столбца, степень которого в матрице $P^{(1)}(s)$ меньше, чем в матрице $P(s)$.

Рассмотрим теперь матрицу $P^{(1)c}(s)$. Её определитель

$$\det P^{(1)c}(s) = \left(\det \Gamma_c^{(1)}\right) s^{p_1} \qquad \left(p_1 < p = \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}\right).$$

Если $\det \Gamma_c^{(1)} \neq 0$, то $U_R^{(1)}(s)$ – искомая матрица и $P^{(1)}(s)$ – столбцово-правильная. При $\det \Gamma_c^{(1)} = 0$ повторяем описанную процедуру и находим $U_R^{(2)}(s)$ и т.д. до тех пор, пока не получим, на j-том шаге процедуры, $\det \Gamma_c^{(j)} \neq 0$. Тогда $U_R = \prod_{i=1}^{j} U_R^{(i)}(s)$ – искомая унимодулярная матрица.

Доказательство второй части теоремы о существовании матрицы $U_L(s)$ аналогично.

Для непосредственного использования описанного алгоритма будем приводить матрицу $\bar{P}(s) = P'(s)$ к столбцово-правильной форме. Тогда матрица $\hat{P}(s) = [P'(s)U_R(s)]' = U_R'(s)P(s) = U_L(s)P(s)$ – строчно-правильная.

Таким образом, искомая матрица

$$U_L(s) = U_R'(s),$$

где $U_R(s)$ – унимодулярная матрица, приводящая $P'(s)$ к столбцово-правильной форме.

Пример 9.П.5. Рассмотрим объект с матрицей

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2+3s+1 & 2s+3 \\ s^3+3s^2+s & 3s^2+3s+6 \end{pmatrix}.$$

Формируем матрицу

$$\bar{P}(s) = P'(s) = \begin{pmatrix} s^2+3s+1 & s^3+3s^2+s \\ 2s+3 & 3s^2+3s+6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma_c\left[\bar{P}(s)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \Gamma_c = 0,$$

$$\bar{P}^c(s) = \begin{pmatrix} s^2 & s^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}^c_{[1]}(s) = \begin{pmatrix} s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}^c_{[2=r]}(s) = \begin{pmatrix} s^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полиномы $\alpha_1(s)$ и $\alpha_2(s)$, при которых $\alpha_1(s)\bar{P}^c_{[1]}(s) + \alpha_2(s)\bar{P}^c_{[2]}(s) = 0$, имеют вид $\alpha_1(s) = -s$, $\alpha_2(s) = 1$, и следовательно

$$U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\bar{P}(s)U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} s^2+3s+1 & 0 \\ 2s+3 & s^2+6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_c\left[\bar{P}(s)U_R^{(1)}(s)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и таким образом, искомая матрица

$$U_L(s) = U_R^{(1)\prime}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$U_L(s)P(s) = \begin{pmatrix} s^2+3s+1 & 2s+3 \\ 0 & s^2+6 \end{pmatrix}$$

– строчно-правильная. ■

9.П.4. Построение уравнения качества

9.П.4.1. Постановка задачи

Запишем уравнение качества (9.2.18) в развёрнутой форме

$$\sum_{k=1}^{m} \tilde{\psi}_{ik}(s) z_k = \sum_{k=1}^{m} m_{ik}(s) f_k \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.П.91}$$

где $f_k(t)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – произвольные ограниченные функции

$$|f_k(t)| \le f_k^* \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.П.92}$$

а $m_{ik}(s)$ $\left(i,k = \overline{1,m}\right)$ – заданные полиномы.

Задача 9.П.1. Определить коэффициенты полиномов $\tilde{\psi}_{ik}(s)$ $\left(i,k = \overline{1,m}\right)$ уравнения (9.П.91) такие, чтобы при наиболее неблагоприятных внешних возмущениях из множества (9.П.92) удовлетворялись требования к точности

$$|z_i(t)| \le z_i^* \quad i = \overline{1,m}, \quad 0 \le t \le \infty, \tag{9.П.93}$$

где z_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Для решения задачи положим часть искомых полиномов

$$\tilde{\psi}_{ik}(s) = 0 \quad \text{при} \quad k \ne i, \tag{9.П.94}$$

и покажем, что в этом случае решение задачи 9.П.1 сводится к решению задачи 3.П.1 для одномерных систем. При условии (9.П.94) уравнения (9.П.91) примут вид

$$\tilde{\psi}_{ii}(s) z_i = \sum_{k=1}^{m} m_{ik}(s) f_k \quad i = \overline{1,m},$$

или в развёрнутой форме

$$\begin{gathered}\left(\tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i]} s^{\bar{\nu}_i} + \tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i-1]} s^{\bar{\nu}_i-1} + \dots + \tilde{\psi}_{ii}^{[1]} s + \tilde{\psi}_{ii}^{[0]}\right) z_i = \left(m_{i1}^{[\alpha_1]} s^{\alpha_1} + \dots + m_{i1}^{[1]} s + m_{i1}^{[0]}\right) f_1 + \\ + \left(m_{i2}^{[\alpha_2]} s^{\alpha_2} + \dots + m_{i2}^{[1]} s + m_{i2}^{[0]}\right) f_2 + \dots + \left(m_{im}^{[\alpha_m]} s^{\alpha_m} + \dots + m_{im}^{[1]} s + m_{im}^{[0]}\right) f_m.\end{gathered} \tag{9.П.95}$$

На основе свойства суперпозиции запишем

$$z_i = z_{i1} + z_{i2} + \dots + z_{im} \quad i = \overline{1,m},$$

где $z_{ik}(t)$ $\left(i,k = \overline{1,m}\right)$ – решения уравнений

$$\left(\tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i]} s^{\bar{\nu}_i} + \dots + \tilde{\psi}_{ii}^{[1]} s + \tilde{\psi}_{ii}^{[0]}\right) z_{ik} = \left(m_{ik}^{[\alpha_k]} s^{\alpha_k} + \dots + m_{ik}^{[1]} s + m_{ik}^{[0]}\right) f_k \quad i,k = \overline{1,m}. \tag{9.П.96}$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнением (3.П.75) для одномерных систем и поэтому для их решений справедлива оценка (3.П.83), которая принимает вид

$$\begin{gathered}\left|z_{ik\max}(\infty)\right| \leq \\ \leq \frac{f_k^*\left|m_{ik}^{[0]}\right|}{\tilde{\psi}_{ii}^{[0]}}\left[2^{\alpha_k}\frac{\left|m_{ik}^{[\alpha_k]}\right|}{\left|m_{ik}^{[0]}\right|}\prod_{j=1}^{\alpha_k}\left|s_j^{(i)}\right| + \cdots + 2^2\frac{\left|m_{ik}^{[2]}\right|}{\left|m_{ik}^{[0]}\right|}\left|s_1^{(i)}s_2^{(i)}\right| + 2\frac{\left|m_{ik}^{[1]}\right|}{\left|m_{ik}^{[0]}\right|}\left|s_1^{(i)}\right| + 1\right] \\ i,k=\overline{1,m},\end{gathered} \tag{9.П.97}$$

где $s_j^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,\bar{\nu}_i}\right)$ – корни полиномов $\tilde{\psi}_{ii}(s)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Определим эти корни из условий (9.П.93)

$$\sum_{k=1}^{m} z_{ik\max}(\infty) \leq z_i^* \quad i=\overline{1,m}, \tag{9.П.98}$$

или

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{f_k^*\left|m_{ik}^{[0]}\right|}{\tilde{\psi}_{ii}^{[0]}}\left[\sum_{\gamma=1}^{\alpha_k}2^{\gamma}\frac{\left|m_{ik}^{[\gamma]}\right|}{\left|m_{ik}^{[0]}\right|}\prod_{j=1}^{\gamma}\left|s_j^{(i)}\right| + 1\right] \leq z_i^* \quad i=\overline{1,m}. \tag{9.П.99}$$

Примем, аналогично (3.П.83)

$$\prod_{j=1}^{\alpha}\left|s_j^{(i)}\right| < \max\frac{\left|m_{ik}^{[0]}\right|}{\left|m_{ik}^{[\gamma]}\right|2^{\alpha}} \quad i=\overline{1,m}, \tag{9.П.100}$$

где

$$\alpha = \max\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m\}. \tag{9.П.101}$$

Тогда неравенство (9.П.99) примет вид

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{f_k^*\left|m_{ik}^{[0]}\right|}{\tilde{\psi}_{ii}^{[0]}}(\alpha+1) \leq z_i^* \quad i=\overline{1,m}.$$

Представим

$$\tilde{\psi}_{ii}^{[0]} = \prod_{j=1}^{\alpha}\left|s_j^{(i)}\right| \cdot \prod_{\mu=\alpha+1}^{\bar{\nu}^{(i)}}\left|s_\mu^{(i)}\right| \quad i=\overline{1,m}.$$

и найдём корни $s_{\alpha+1}^{(i)}$, $s_{\alpha+2}^{(i)}$, $\ldots$, $s_{\bar{\nu}_i}^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ из условий

$$\prod_{\mu=\alpha+1}^{\bar{\nu}^{(i)}}\left|s_\mu^{(i)}\right| \geq \sum_{k=1}^{m}\frac{f_k^*\left|m_{ik}^{[0]}\right|(\alpha+1)}{z_i^*\prod\limits_{j=1}^{\alpha}\left|s_j^{(i)}\right|} \quad i=\overline{1,m}. \tag{9.П.102}$$

Таким образом, неравенства (9.П.100) и (9.П.102) доставляют корни полиномов $\tilde{\psi}_{ii}(s)$, разрешающих задачу 9.П.1.

Доказательства к главе 9

9.Д. Доказательство теорем и утверждений

9.Д.1. Доказательство теоремы 9.1.1

Докажем вначале **достаточность** условий теоремы. Наблюдаемость объекта (9.1.1) означает, что его вектор состояния можно выразить через измеряемые вектора $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{u}$ и их производные. Убедимся в этом. Продифференцируем второе из соотношений (9.1.1) с учётом первого из них γ раз, где $\gamma = \max\{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_r\} - 1$, а $\bar{\nu}_i$ $\left(i = \overline{1, r}\right)$ – индексы наблюдаемости объекта. Получим

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= D\boldsymbol{x}, && (I)\\
s\boldsymbol{y} &= Ds\boldsymbol{x} = D(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}), && (II)\\
s^2\boldsymbol{y} &= D\left(A^2\boldsymbol{x} + AB\boldsymbol{u} + Bs\boldsymbol{u}\right), && (III)\\
\vdots \quad \vdots & \qquad\quad \vdots && \quad\ \vdots\\
s^\gamma\boldsymbol{y} &= D\left(A^\gamma\boldsymbol{x} + \sum_{i=0}^{\gamma-1} A^{\gamma-i-1}Bs^i\boldsymbol{u}\right). && (\gamma + I)
\end{aligned} \tag{9.Д.1}$$

Выберем из этой системы $r \times (\gamma+1)$ уравнений систему из n уравнений, составив её из $\bar{\nu}_1$ первых уравнений подсистем (9.Д.1.I), (9.Д.1.II), ..., (9.Д.1.$\gamma+I$), $\bar{\nu}_2$ вторых уравнений этих же подсистем, затем из $\bar{\nu}_3$ уравнений и т.д. до $\bar{\nu}_r$ уравнений этих подсистем.

Сформированная таким образом система имеет вид

$$\Gamma\boldsymbol{x} = S_{eo}(s)\boldsymbol{y} - \left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i\right)\boldsymbol{u}, \tag{9.Д.2}$$

где $S_{eo}(s)$ – это матрица $S_{ek}(s)$ при $k = 0$, а матрицы чисел Γ (размера $n \times n$) и Γ_i $\left(i = \overline{0, \gamma-1}\right)$ (размера $n \times m$) определяются по формулам

$$\Gamma = \begin{pmatrix} [D]^{[1]} \\ [DA]^{[1]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-1}]^{[1]} \\ \hline [D]^{[2]} \\ [DA]^{[2]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-1}]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ \hline [D]^{[r]} \\ [DA]^{[r]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-1}]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ [DB]^{[1]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-2}B]^{[1]} \\ \hline 0 \\ [DB]^{[2]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-2}B]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ [DB]^{[r]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-2}B]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{\gamma-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-1-\gamma}B]^{[1]} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-1-\gamma}B]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-1-\gamma}B]^{[r]} \end{pmatrix},$$

где $[\cdot]^{[i]}$ означает i-тую строку матрицы, указанной в скобках.

Из (9.Д.2) следует выражение вектора состояния

$$\boldsymbol{x} = \Gamma^{-1} S_{eo}(s)\boldsymbol{y} + \Gamma^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i\right)\boldsymbol{u}, \tag{9.Д.3}$$

которое существует, так как матрица Γ состоит из линейно независимых строк матрицы наблюдаемости (9.П.39), и поэтому $\det \Gamma \neq 0$.

Объект (9.1.1), приведённый к канонической форме Лагранжа, описывается уравнениями

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \tag{9.Д.4}$$

которые легко приводятся к форме Коши, если ввести переменные

$$\begin{array}{llllll}
\check{x}_1 & = q_1, & \check{x}_2 & = \dot{q}_1, & \ldots, & \check{x}_{\nu_1} = q_1^{(\nu_1-1)}; \\
\check{x}_{\nu_1+1} & = q_2, & \check{x}_{\nu_1+2} & = \dot{q}_2, & \ldots, & \check{x}_{\nu_1+\nu_2} = q_2^{(\nu_2-1)}; \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\check{x}_{n-\nu_m+1} & = q_m, & \check{x}_{n-\nu_m+2} & = \dot{q}_m, & \ldots, & \check{x}_n = q_m^{(\nu_m-1)}.
\end{array} \tag{9.Д.5}$$

Эквивалентная (9.Д.4) система имеет вид

$$\dot{\check{\boldsymbol{x}}} = \check{A}\check{\boldsymbol{x}} + \check{B}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \tilde{D}\check{\boldsymbol{x}}. \tag{9.Д.6}$$

Её вектор состояния – это m-мерный вектор $\boldsymbol{q}$ и его производные.

Выразим вектор $\boldsymbol{q}$ и его производные через измеряемые вектора $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{u}$ и их производные. Для этого продифференцируем (9.Д.4) $k-1$ раз и получим систему

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, & s\boldsymbol{y} = sN(s)\boldsymbol{q}, & \ldots, & s^{k-1}\boldsymbol{y} = s^{k-1}N(s)\boldsymbol{q}, \\
\boldsymbol{u} = P(s)\boldsymbol{q}, & s\boldsymbol{u} = sP(s)\boldsymbol{q}, & \ldots, & s^{k-1}\boldsymbol{u} = s^{k-1}P(s)\boldsymbol{q},
\end{array}$$

которую запишем в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} N(s)\boldsymbol{q} \\ sN(s)\boldsymbol{q} \\ \vdots \\ s^{k-1}N(s)\boldsymbol{q} \\ \hline P(s)\boldsymbol{q} \\ sP(s)\boldsymbol{q} \\ \vdots \\ s^{k-1}P(s)\boldsymbol{q} \end{pmatrix} = M_{ek}S_{ek}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ s\boldsymbol{y} \\ \vdots \\ s^{k-1}\boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{u} \\ s\boldsymbol{u} \\ \vdots \\ s^{k-1}\boldsymbol{u} \end{pmatrix}. \tag{9.Д.7}$$

Система (9.Д.7) – это система $(r+m)k$ линейных алгебраических уравнений для определения $n+mk$ неизвестных q_1, $\dot{q}_1$, $\ldots$, $q_1^{(\nu_1+k-1)}$; q_2, $\dot{q}_2$, $\ldots$, $q_2^{(\nu_2+k-1)}$; $\ldots$; q_m, $\dot{q}_m$, $\ldots$, $q_m^{(\nu_m+k-1)}$. В числе этих неизвестных содержатся составляющие

(9.Д.5) вектора пространства состояний. Этот вектор выражается (в силу полной наблюдаемости объекта) через вектора $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{u}$ и их производные. Такое выражение можно получить, решая (9.Д.7), и поэтому существует $k \geq \dfrac{n}{r}$, для которого ранг $M_{ek} = n + mk$.

Докажем теперь **необходимость** условий теоремы. Вначале введём некоторые определения. Назовем полиномиальную матрицу $K(s)$ *общим правым делителем* матриц $A(s)$ и $L(s)$ в том и только в том случае, когда существуют матрицы $A^{(1)}(s)$ и $L^{(1)}(s)$ такие, что

$$A(s) = A^{(1)}(s)K(s), \quad L(s) = L^{(1)}(s)K(s). \tag{9.Д.8}$$

Если $P(s) = Q(s)R(s)$, то говорят, что матрица $R(s)$ является правым делителем матрицы $P(s)$, а матрица $P(s)$ *кратна слева* матрице $R(s)$.

Определение 9.Д.1. Матрица $K(s)$ называется *наибольшим общим правым делителем* матриц $A(s)$ и $L(s)$ в том и только в том случае, когда а) матрица $K(s)$ – общий правый делитель матриц $A(s)$ и $L(s)$, б) матрица $K(s)$ кратна слева каждому общему правому делителю матриц $A(s)$ и $L(s)$. ■

Определение 9.Д.2. Матрицы $A(s)$ и $L(s)$ называются *взаимно простыми справа*, если наибольший общий правый делитель этих матриц – унимодулярная матрица (унимодулярная матрица – это полиномиальная матрица, определитель которой – неравное нулю действительное число). ■

Аналогичным образом определяются наибольший общий левый делитель и матрица взаимно простая слева.

Приведём без доказательства важное свойство матриц $P(s)$, $N(s)$ и $D(s)$, $B(s)$ описания объекта (9.1.1) в канонической форме Лагранжа и форме Коши.

Свойство 9.Д.1. Матрицы $P(s)$ и $N(s)$ взаимно просты справа если, и только если, объект полностью управляем. Матрицы $D(s)$ и $B(s)$ взаимно просты слева если, и только если, объект полностью наблюдаем. ■

Покажем, что матрицы $P(s)$ и $N(s)$ взаимно просты справа, если выполняется равенство (9.1.48) теоремы.

Действительно, примем в тождестве (9.1.26) $\Delta(s) = E_m$ и, используя процедуру 9.1.1, найдём, при условии (9.1.48), матрицы $G^{(1)}(s)$ и $R^{(1)}(s)$, удовлетворяющие уравнению

$$G^{(1)}(s)P(s) - R^{(1)}(s)N(s) = E_m. \tag{9.Д.9}$$

Отсюда заключаем, что E_m – наибольший общий правый делитель матриц $P(s)$ и $N(s)$ и, следовательно, эти матрицы взаимно просты справа.

9.Д.2. Доказательство утверждения 9.2.1

Преобразуем тождество (9.2.31) к следующей эквивалентной форме

$$D(s) - B(s)G^{-1}(s)R(s) = B(s)G^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s). \tag{9.Д.10}$$

Для этого умножим (9.2.31) слева на $G^{-1}(s)$ и получим

$$E_m - G^{-1}(s)R(s)D^{-1}(s)B(s) = G^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s).$$

Это соотношение умножим справа на $\left[D^{-1}(s)B(s)\right]^{-1}$, а затем слева на $B(s)$ и тогда приходим к (9.Д.10).

Покажем, что (9.2.31) – единственное решение (9.Д.10). Допустим противное к утверждению.

Пусть существуют полиномиальные матрицы

$$\bar{G}(s) \neq B(s) \quad \text{и} \quad \bar{R}(s) \neq D(s) - \tilde{\Psi}(s), \tag{9.Д.11}$$

также как и (9.2.32) удовлетворяющие тождеству (9.Д.10). Это означает, что

$$D(s) - B(s)\bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s) = B(s)\bar{G}^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s). \tag{9.Д.12}$$

Вычтем (9.Д.10) из (9.Д.12) и получим

$$B(s)\left[G^{-1}(s)R(s) - \bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s)\right] = B(s)\left[\bar{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s)\right]\tilde{\Psi}(s).$$

Учитывая, что $G(s) = B(s)$, находим

$$R(s) - B(s)\bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s) = B(s)\bar{G}^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s) - \tilde{\Psi}(s),$$

или

$$B(s)\bar{G}^{-1}(s) = \left[R(s) + \tilde{\Psi}(s)\right] \cdot \left[\bar{R}(s) + \tilde{\Psi}(s)\right]^{-1}.$$

Отсюда

$$\bar{G}(s) = \left[\bar{R}(s) + \tilde{\Psi}(s)\right] \cdot \left[R(s) + \tilde{\Psi}(s)\right]^{-1} B(s). \tag{9.Д.13}$$

Заметим, что

$$\det\left[R(s) + \tilde{\Psi}(s)\right] = \det D(s) \neq 0. \tag{9.Д.14}$$

Кроме того, $\det D(s) \neq \text{const}$. (9.Д.15)

Последнее означает, что $\bar{G}(s)$ матрица дробно-рациональных функций, а не полиномиальная матрица. Это противоречит предположению о существовании полиномиальных матриц $\bar{G}(s)$ и $\bar{R}(s)$, удовлетворяющих (9.Д.10).

9.Д.3. Обоснование утверждения 9.3.1

Запишем уравнения для экстремалей функционала (9.3.86) на связях (9.3.85). Исключим в функционале вектор $\boldsymbol{u}^*$ с помощью уравнений связей и получим

$$J = \int\limits_0^\infty \Big\{ \lambda^2 \cdot \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]}\boldsymbol{y}^{(æ)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]}\dot{\boldsymbol{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]}\boldsymbol{y}\Big]' \cdot \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]}\boldsymbol{y}^{(æ)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]}\dot{\boldsymbol{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]}\boldsymbol{y}\Big] + \\ + \Big[\tilde{\tilde{D}}^{[\bar{\nu}]}\boldsymbol{y}^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{\tilde{D}}^{[1]}\dot{\boldsymbol{y}} + \tilde{\tilde{D}}^{[0]}\boldsymbol{y}\Big]' \cdot \Big[\tilde{\tilde{D}}^{[\bar{\nu}]}\boldsymbol{y}^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{\tilde{D}}^{[1]}\dot{\boldsymbol{y}} + \tilde{\tilde{D}}^{[0]}\boldsymbol{y}\Big] \Big\}\, dt, \tag{9.Д.16}$$

где $\bar{\nu} = \max\{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_m\}$.

Уравнение Эйлера-Пуассока для безусловных экстремалей этого функционала имеет вид

$$\Big\{ \lambda^2 \cdot \Big[(-1)^{æ}\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + (-1)\tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big]' \cdot \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big] + \\ + \Big[(-1)^{\bar{\nu}}\tilde{\tilde{D}}^{[\bar{\nu}]}s^{(\bar{\nu})} + \dots + (-1)\tilde{\tilde{D}}^{[1]}s + \tilde{\tilde{D}}^{[0]}\Big]' \cdot \Big[\tilde{\tilde{D}}^{[\bar{\nu}]}s^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{\tilde{D}}^{[1]}s + \tilde{\tilde{D}}^{[0]}\Big] \Big\}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}. \tag{9.Д.17}$$

При достаточно больших значениях λ^2 получим приближённое соотношение

$$\Big\{ \lambda^2 \cdot \Big[(-1)^{æ}\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + (-1)\tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big]' \cdot \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big] + \\ + (-1)^{æ+1}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}s^{2(æ+1)} + \Big[(-1)^{æ+1}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ]} + (-1)^{æ}\tilde{\tilde{D}}^{[æ]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\Big]\, s^{2(æ+1)} \Big\}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \tag{9.Д.18}$$

которое можно записать в виде

$$\lambda^2 \cdot \Big\{ \Big[-\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\lambda^{-1}s + E_m\Big] \cdot \Big[(-1)^{æ}\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + (-1)\tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big] \Big\}' \cdot \\ \cdot \Big\{ \Big[\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\lambda^{-1}s + E_m\Big] \cdot \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]}s^{(æ)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]}s + \tilde{\Psi}^{[0]}\Big] \Big\}\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}. \tag{9.Д.19}$$

Действительно, раскрывая в этом уравнении скобки, получим

$$\lambda^2 \cdot \Big\{ (-1)^{æ+1}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\lambda^{-1}s^{æ+1} + (-1)^{æ}\Big[\tilde{\Psi}^{[æ]} + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\lambda^{-1}\Big]\, s^{æ} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]} \Big\}' \cdot \\ \cdot \Big\{ \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\lambda^{-1}s^{æ+1} + \Big[\tilde{\Psi}^{[æ]} + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\lambda^{-1}\Big]\, s^{æ} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]} \Big\}\, \boldsymbol{y} = \\ = \lambda^2 \cdot \Big\{ (-1)^{æ+1}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\lambda^{-2}s^{2(æ+1)} + \\ + \Big\langle (-1)^{æ+1}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\Big[\tilde{\Psi}^{[æ]} + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\lambda^{-1}\Big]\, \lambda^{-1} + \\ + (-1)^{æ}\Big[\tilde{\Psi}^{[æ]} + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\lambda^{-1}\Big]'\, \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\lambda^{-1} \Big\rangle \cdot \\ \cdot s^{2(æ+1)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]\prime}\tilde{\Psi}^{[0]} \Big\}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}. \tag{9.Д.20}$$

Сравнивая последние выражения с (9.Д.18), заключаем, что они совпадают, если

$$\tilde{\tilde{D}}^{[æ]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]} - \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ]} =$$
$$= \left\{\tilde{\Psi}^{[æ]}\lambda + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\right\}'\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]} - \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\left\{\tilde{\Psi}^{[æ]}\lambda + \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]}\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\right\}. \tag{9.Д.21}$$

Для того, чтобы это условие не зависело от параметра λ достаточно принять

$$\tilde{\Psi}^{[æ]\prime}\tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]} - \tilde{\tilde{D}}^{[æ+1]\prime}\tilde{\Psi}^{[æ]} = 0. \tag{9.Д.22}$$

Тогда (9.Д.21) примет вид (9.3.98).

Из уравнения (9.Д.18) для экстремалей функционала (9.Д.16) следует уравнение (9.3.100) для его минималей и, таким образом, утверждение обосновано.

Заметим, что при $\tilde{B}^{(0)} = E_m$ условия (9.3.97), (9.3.98) принимают более простой вид. Действительно, учитывая, что, по построению $\tilde{D}^{(\bar{\nu})} = E_m$ (и следовательно, $\tilde{\tilde{D}}^{(\bar{\nu})} = E_m$), запишем (9.Д.22) как условие симметричности

$$\left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right)' = \left(\tilde{\Psi}^{[æ]}\right), \tag{9.Д.23}$$

а (9.3.98) примет вид

$$\tilde{\tilde{D}}^{[æ]\prime} - \tilde{\tilde{D}}^{[æ]} = \left\{\left[\tilde{\Psi}^{[æ]}\right]^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\right\}' - \left\{\left[\tilde{\Psi}^{[æ]}\right]^{-1}\tilde{\Psi}^{[æ-1]}\right\}. \tag{9.Д.24}$$

Заключение к главе 9

Резюмируем изложенное в этой главе.

1. Введены две формы описания объекта и регулятора: каноническая форма Лагранжа (9.1.13), (9.1.17) и форма ««вход-выход»» (9.1.11), (9.1.15). Описаны в 9.П.1 и 9.П.2 способы приведения уравнений к этим формам.

2. Сформировано матричное модальное тождество (9.1.26). Получены условия его разрешимости: свойство 9.1.1, полная управляемость и полная наблюдаемость объекта (теорема 9.1.1), а также неравенство (9.1.41). Построена процедура 9.1.1 решения модального тождества и реализующая матрица (9.1.67), приводящие к модальному управлению, для которого выполняется условие реализуемости (9.1.66).

3. Для объектов, устойчивых по управлению, найдена структура (9.2.41) модального тождества, которая приводит к матрицам (9.2.32) структурного модального управления, обеспечивающим требуемую точность и качество управления при соответствующем выборе матрицы уравнения качества (9.2.18). Сформированы процедуры 9.2.1 и 9.2.2 аналитического синтеза регуляторов для объектов второго вида.

4. Установлены связи (9.3.28), (9.3.29) между значениями установившихся ошибок оптимальных систем при ступенчатых и гармонических внешних возмущениях с коэффициентами функционала оптимизации.

5. На основе этих связей и процедур АКОР построена процедура 9.3.2 аналитического синтеза регуляторов для объектов первого вида, и аналогичная процедура для объектов второго вида, обеспечивающая, как показано в следующей главе, бóльшую, вообще говоря, грубость системы по сравнению с процедурами 9.2.1 и 9.2.2.

6. Разработаны алгоритмы управления в следящих системах с объектами первого и второго видов.

10. Анализ грубости*

Многомерность системы существенно усложняет исследование её грубости. При этом основной проблемой является формирование конструктивных критериев грубости. Для её решения возможны два направления. Первое состоит в развитии частотных показателей грубости одномерных систем на многомерный случай. Второе направление связано с разработкой критериев, характерных для многомерных систем.

После формирования критериев можно исследовать грубость систем, получаемых в результате методов пространства состояния либо процедур аналитического синтеза, изложенных в предыдущей главе.

Цель этой главы:

- формирование частотных показателей грубости, а также критериев грубости, учитывающих специфические особенности, вызванные многомерностью системы,
- анализ грубости систем, регуляторы которых получены на основе процедур АКОР, и выявление границ показателей грубости, независящих от параметров объекта управления и функционала оптимизации.

Такие границы были получены в главе 4 для одномерных систем. Заметим, что для таких систем, построенных на базе модального управления в главе 3, не удалось установить какие-либо инвариантные (относительно параметров объекта и желаемого характеристического полинома) показатели грубости.

Поэтому в настоящей главе не рассматриваются системы, построенные с применением модального управления.

10.1. Передаточные функции и матрицы многомерных систем

10.1.1. Частотные передаточные матрицы

Рассмотрим многомерную асимптотически устойчивую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + F_o\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}; \tag{10.1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_p^{(0)}, \tag{10.1.2}$$

где B, B_p, D, D_p, F_o, F_p – заданные матрицы чисел.

Пусть объект управления (10.1.1) полностью управляем и полностью наблюдаем. Тогда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n, \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} D' & A'D' & \cdots & (A^{n-1})'D' \end{pmatrix} = n. \tag{10.1.3}$$

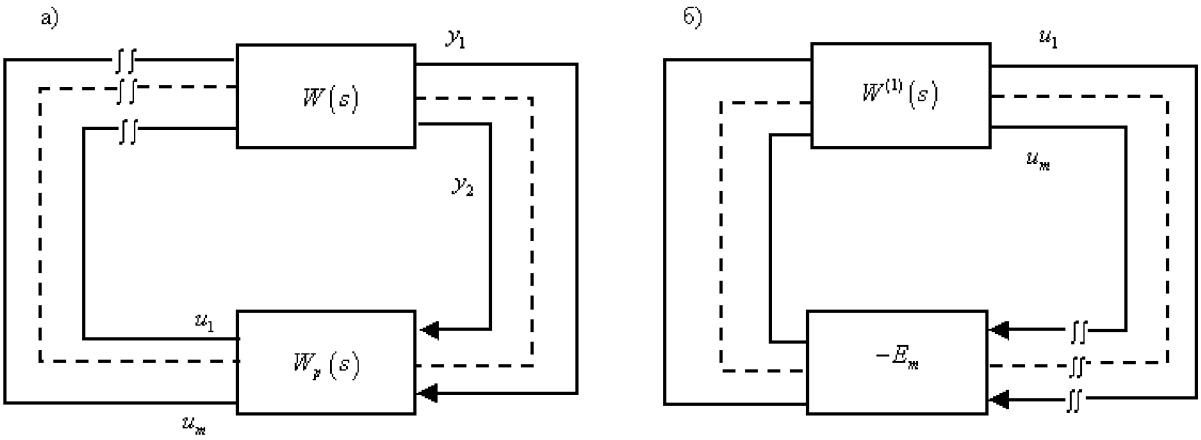

Рис. 10.1.1.

Определение 10.1.1. *Передаточной матрицей – $W(s)$ – объекта* называется матрица, связывающая изображение по Лапласу (при нулевых начальных условиях) вектора выхода – $\boldsymbol{y}(s)$ – с вектором входа – $\boldsymbol{u}(s)$.

Эта матрица

$$W(s) = D(E_n s - A)^{-1}B + F_o. \tag{10.1.4}$$

■

Если регулятор полностью управляем вектором $\boldsymbol{y}$ и полностью наблюдаем по сигналу $\boldsymbol{u}$, то его передаточная матрица

$$W_p(s) = D_p(E_{n_p} s - A_p)^{-1}B_p + F_p. \tag{10.1.5}$$

Определение 10.1.2. *Передаточная матрица системы* (10.1.1), (10.1.2) *разомкнутой по входам объекта* называется матрица

$$W^{(1)}(s) = -W_p(s)W(s). \tag{10.1.6}$$

Передаточной матрицей этой же *системы разомкнутой по всем входам регулятора* называется матрица

$$W^{(2)}(s) = -W(s)W_p(s). \tag{10.1.7}$$

■

На рис. 10.1.1. и рис. 10.1.2. приведены эквивалентные структурные схемы системы (10.1.1), (10.1.2), на которых волнистыми линиями показаны размыкание системы на всех входах объекта (рис. 10.1.1.) либо на всех входах регулятора (рис. 10.1.2.)

Определение 10.1.3. Если в (10.1.4)-(10.1.7) положить $s = j\omega$, то они описывают *частотные передаточные матрицы объекта регулятора и разомкнутой по всем входам объекта (либо регулятора)* системы соответственно. ■

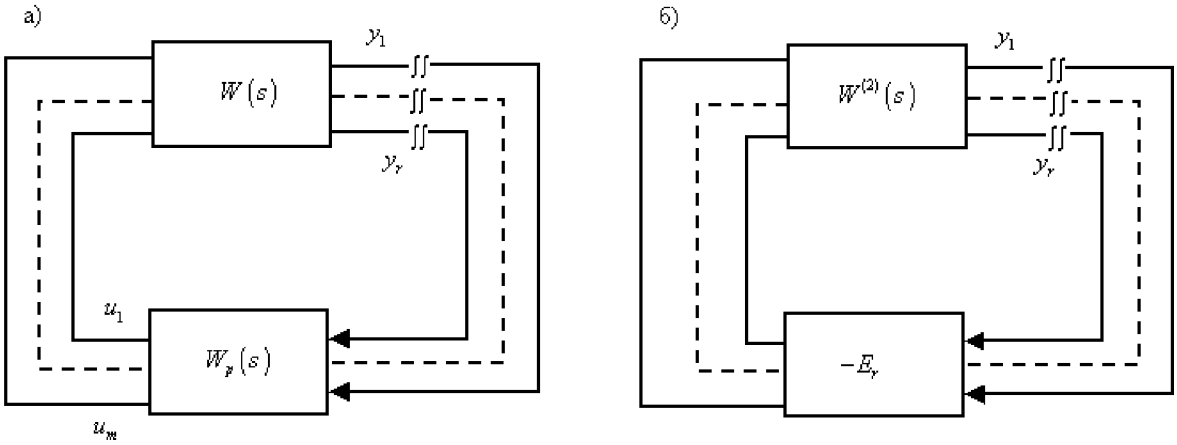

Рис. 10.1.2.

Пример 10.1.1. Найдём передаточные матрицы системы, описываемой уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + 3u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \tag{10.1.8}$$

$$u_1 = -y_1, \quad u_2 = -y_2. \tag{10.1.9}$$

Уравнения (10.1.8) – это уравнения объекта, а (10.1.9) – регулятора, который в отличие от (10.1.2) описывается не дифференциальными, а алгебраическими уравнениями.

Передаточные матрицы объекта и регулятора

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix},$$
$$W_p(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.1.10}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{10.1.11}$$

хотя обычно $W^{(1)}(s) \neq W^{(2)}(s)$. ■

Пример 10.1.2. Рассмотрим двухкомпонентный измеритель угловой скорости (9.1.49) с регулятором

$$g_2\ddot{u}_1 + g_1\dot{u}_1 + g_0u_1 = r_{14}\alpha + r_{13}\dot{\alpha} + r_{12}\dot{\beta} + r_{11}\beta, \tag{10.1.12}$$

$$g_2\ddot{u}_2 + g_1\dot{u}_2 + g_0u_2 = r_{24}\alpha + r_{23}\dot{\alpha} + r_{22}\dot{\beta} + r_{21}\beta. \tag{10.1.13}$$

Введём безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad x_2 = \frac{\dot{\beta}}{\dot{\beta}_0}, \quad x_3 = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_0}, \quad x_4 = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \tag{10.1.14}$$

где $\alpha_0 = \beta_0 = 1\,\text{рад}$, $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 1\,\text{рад/сек}$, и обозначим

$$a_{23} = \frac{h}{r}\alpha_0, \quad a_{32} = -\frac{h}{a}\beta_0; \qquad b_{21} = \frac{k_1}{r}, \quad b_{32} = \frac{k_1}{a}. \tag{10.1.15}$$

Тогда уравнения (9.1.49) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{23}x_3 + b_{21}u_1, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + b_{32}u_2, \quad \dot{x}_4 = x_3, \tag{10.1.16}$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_4. \tag{10.1.17}$$

Уравнения регулятора также можно записать в виде (10.1.2). Действительно, вводя обозначения

$$x_{p.1} = g_2u_1, \quad x_{p.3} = g_2\dot{u}_1 + g_1u_1 - r_{13}\alpha - r_{12}\beta, \tag{10.1.18}$$

$$x_{p.2} = g_2u_2, \quad x_{p.4} = g_2\dot{u}_2 + g_1u_2 - r_{23}\alpha - r_{22}\beta, \tag{10.1.19}$$

получим (10.1.20)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p.1} &= x_{p.3} - g_1u_1 + r_{12}\beta + r_{13}\alpha, & \dot{x}_{p.3} &= -g_0u_1 + r_{11}\beta + r_{14}\alpha, \\ \dot{x}_{p.2} &= x_{p.4} - g_1u_2 + r_{22}\beta + r_{23}\alpha, & \dot{x}_{p.4} &= -g_0u_2 + r_{21}\beta + r_{24}\alpha. \end{aligned} \tag{10.1.21}$$

Учитывая (10.1.14), (10.1.17) запишем уравнения регулятора в форме Коши (10.1.2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p.1} &= -\frac{g_1}{g_2}x_{p.1} + x_{p.3} + r_{12}y_1 + r_{13}y_2, & \dot{x}_{p.2} &= -\frac{g_1}{g_2}x_{p.2} + x_{p.4} + r_{22}y_1 + r_{23}y_2, \\ \dot{x}_{p.3} &= -\frac{g_0}{g_2}x_{p.1} + r_{11}y_1 + r_{14}y_2, & \dot{x}_{p.4} &= -\frac{g_0}{g_2}x_{p.2} + r_{21}y_1 + r_{24}y_2, \\ u_1 &= \frac{1}{g_2}x_{p.1}, & u_2 &= \frac{1}{g_2}x_{p.2}. \end{aligned} \tag{10.1.22}$$

Передаточная матрица объекта (10.1.16), (10.1.17) (10.1.23) (10.1.24)

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{32} & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2\left(s^2 - a_{23}a_{32}\right)}. \end{aligned} \tag{10.1.25}$$

Эту передаточную матрицу можно получить другим путём, если представить (10.1.16), (10.1.17) как систему из двух уравнений

$$s^2y_1 - a_{23}sy_2 = b_{21}u_1, \quad s^2y_2 - a_{32}sy_1 = b_{32}u_2. \tag{10.1.26}$$

Передаточную матрицу регулятора также легко записать на основе (10.1.12),(10.1.13)

$$W_p(s) = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}s & r_{14} + r_{13}s \\ r_{21} + r_{24}s & r_{24} + r_{23}s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{g_2s^2 + g_1s + g_0}. \tag{10.1.27}$$

Передаточная матрица двухкомпонентного измерителя угловой скорости разомкнутого по обоим входам объекта (роторы датчиков моментов разъединены со статорами) имеют вид

$$W^{(1)}(s) = -\begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}s & r_{14}+r_{13}s \\ r_{21}+r_{24}s & r_{24}+r_{23}s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \frac{1}{s^2\left(s^2-a_{23}a_{32}\right)\left(g_2s^2+g_1s+g_0\right)}, \tag{10.1.28}$$

и передаточная матрица этой системы разомкнутой по обоим входам регулятора (роторы датчиков углов разъединены со статорами этих датчиков)

$$W^{(2)}(s) = -\begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}s & r_{14}+r_{13}s \\ r_{21}+r_{24}s & r_{24}+r_{23}s \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \frac{1}{s^2\left(s^2-a_{23}a_{32}\right)\left(g_2s^2+g_1s+g_0\right)}, \tag{10.1.29}$$

■

Возвращаясь к рассмотрению системы (10.1.1), (10.1.2) найдём связь между характеристическими полиномами и передаточными матрицами разомкнутой системы.

Утверждение 10.1.1. *Характеристический полином многомерной системы* (10.1.1), (10.1.2)

$$d^u(s) = d^c(s)\det\left[E_m + W^{(1)}(s)\right], \tag{10.1.30}$$

либо

$$d^u(s) = d^c(s)\det\left[E_r + W^{(2)}(s)\right], \tag{10.1.31}$$

где

$$d^c(s) = \det\left(E_n s - A\right)\cdot\det\left(E_{n_\text{р}} s - A_p\right). \tag{10.1.32}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 10.Д.1.

В одномерном случае, когда $m = r = 1$

$$W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s) = W_{раз}(s), \tag{10.1.33}$$

а выражения (10.1.30) и (10.1.31) для характеристического полинома совпадают с соотношением (2.1.11).

10.1.2. Обобщённая передаточная функция

В одномерном случае наряду с определением 5.1.1 передаточной функции разомкнутой системы можно ввести эквивалентное альтернативное определение. Для его построения разделим характеристический полином (3.1.3) на произведение $d^c(s) = d(s)g(s)$. Тогда

$$\frac{d^u(s)}{d^c(s)} = 1 + w_{раз}(s). \tag{10.1.34}$$

Определим

$$w_{раз}(s) = 1 - \frac{d^u(s)}{d^c(s)}. \tag{10.1.35}$$

Такое описание передаточной функции разомкнутой системы не связано с размерностью векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{u}$ и поэтому может быть использовано для определения обобщённой передаточной функции многомерной системы, которая в одномерном случае совпадает с передаточной функцией разомкнутой системы.

Определение 10.1.4. *Обобщённой передаточной функцией многомерной системы* называется функция

$$w_{об}(s) = \frac{d^u(s)}{d^c(s)} - 1. \tag{10.1.36}$$

Если положить $s = j\omega$, то полученная передаточная функция называется *обобщённой частотной передаточной функцией многомерной системы.* ■

Утверждение 10.1.2. Обобщённая передаточная функция многомерной системы

$$w_{об}(s) = \det\left[E_m + W^{(1)}(s)\right] - 1 \tag{10.1.37}$$

либо

$$w_{об}(s) = \det\left[E_r + W^{(2)}(s)\right] - 1. \tag{10.1.38}$$

■

Доказательство утверждения следует непосредственно из (10.1.36), (10.1.30), (10.1.31).

Используя передаточную функцию $w_{об}(s)$ можно судить об устойчивости многомерной системы на основе критерия Найквиста. Действительно, этот критерий позволяет установить отсутствие корней полинома $d^u(s)$ с положительными или нулевыми вещественными частями по поведению годографа частотной передаточной функции, определяемой (10.1.36) при $s = j\omega$, в окрестности критической точки $(-1, j0)$. Это означает, что годограф функции $w_{об}(j\omega)$ может быть применён для анализа грубости многомерной системы, если в качестве критерия грубости использовать ««расстояние»» годографа от критической точки.

Пример 10.1.3. Найдём передаточную функцию системы (10.1.8), (10.1.9). Используя (10.1.11), получим

$$w_{об}(s) = \det\begin{pmatrix} 1 + (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & 1 + (s+1)^{-1} \end{pmatrix} - 1 = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2} - 1 = \frac{2s+3}{(s+1)^2}. \tag{10.1.39}$$

■

Пример 10.1.4. Передаточная функция двухкомпонентного измерителя угловой

скорости, рассмотренного в примере 10.1.2, имеет, если использовать (10.1.28), вид

$$w_{об}(s) = \det \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{-b_{21}s^2(r_{11}+r_{12}s) + a_{32}b_{21}s(r_{14}+r_{13}s)}{d(s)g(s)} & \dfrac{-a_{23}b_{32}s(r_{11}+r_{12}s) + b_{32}s^2(r_{14}+r_{13}s)}{d(s)g(s)} \\ \dfrac{-b_{21}s^2(r_{21}+r_{22}s) + a_{32}b_{21}\ (r_{24}+r_{23}s)}{d(s)g(s)} & 1 + \dfrac{-a_{23}b_{32}\ (r_{21}+r_{22}s) + b_{32}s^2(r_{24}+r_{23}s)}{d(s)g(s)} \end{pmatrix}, \tag{10.1.40}$$

где $d(s) = s^2\left(s^2 - a_{23}a_{32}\right)$, $g(s) = g_2s^2 + g_1s + g_0$. ■

10.1.3. Передаточная функция многомерной системы разомкнутой по ν-му входу объекта

Рассмотрим вначале случай, когда все переменные состояния объекта (10.1.1) доступны непосредственному измерению ($D = E_n$, $F_o = 0$) и поэтому уравнение регулятора описывается не дифференциальным, а алгебраическим уравнением.

Система (10.1.1), (10.1.2) примет в этом случае вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{10.1.41}$$

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{10.1.42}$$

где C – заданная матрица чисел размеров $n \times m$.

Запишем систему (10.1.41), (10.1.42) в следующих эквивалентных формах

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}\boldsymbol{x} + B_{[\nu]}\boldsymbol{u}_\nu, \tag{10.1.43}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu = C'_{[\nu]}\boldsymbol{x}, \tag{10.1.44}$$

где $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$; $\boldsymbol{u}_\nu$ – ν-тая компонента вектора $\boldsymbol{u}$; $B_{[\nu]}$ – γ-тый столбец матрицы B; $C_{[\nu]}$ – γ-тый столбец матрицы C; $B_{\neg\nu}$ – матрица размеров $n \times (m-1)$, получаемая из матрицы B после вычёркивания ν-го столбца; $C_{\neg\nu}$ – матрица, получаемая из матрицы C после вычёркивания ν-го столбца.

««Объект»» (10.1.43) – это исходный объект (10.1.41) вместё с $(m-1)$-ним регулятором. Другими словами, представим (10.1.41) в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_{\neg\nu}\boldsymbol{u}_{\neg\nu} + B_{[\nu]}\boldsymbol{u}_\nu = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{10.1.45}$$

$$\boldsymbol{u}_{\neg\nu} = C'_{\neg\nu}\boldsymbol{x}, \tag{10.1.46}$$

где $\boldsymbol{u}_{\neg\nu} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1 & \cdots & u_{\neg\nu-1} & u_{\neg\nu+1} & \cdots & u_m \end{array}\right)$ и замечаем, что (10.1.43) – это объект (10.1.41), замкнутый регулятором (10.1.46).

Таким образом, многомерной системе ставится в соответствие m одномерных, эквивалентных систем (10.1.43), (10.1.44).

Определение 10.1.5. *Передаточной функцией* $w_\nu^{(1)}(s)$ *многомерной системы разомкнутой по* ν*-му входу объекта* называется (взятая с обратным знаком) передаточная функция, связывающая ν-тый выход регулятора с ν-тым входом объекта, к которому вместо $u_\nu(s)$ приложено воздействие $f_\nu(s)$.

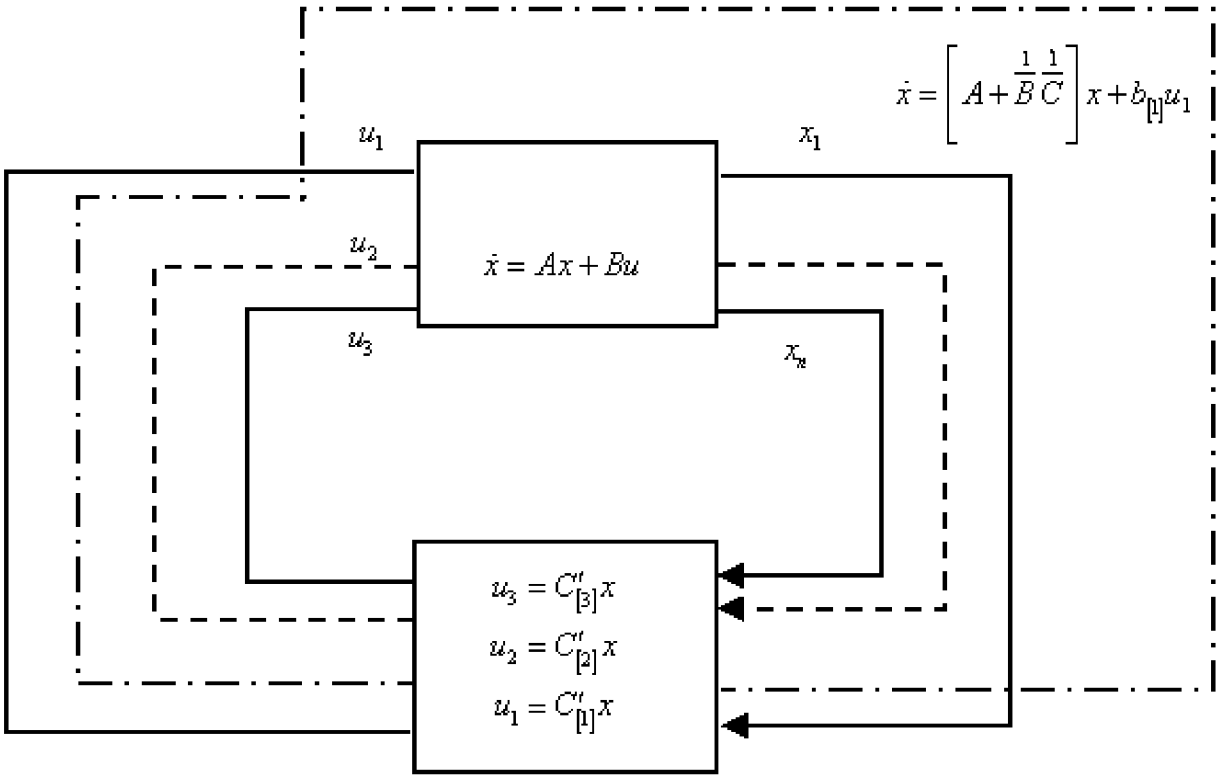

Рис. 10.1.3.

Если в этой передаточной функции положить $s = j\omega$, то она называется *частотной передаточной функцией многомерной системы, разомкнутой по* ν*-му входу объекта.* ■

Структурная схема системы (10.1.43), (10.1.44) при $m = 3$ и $\nu = 1$ приведена на рис. 10.1.3.

На этом рисунке штрих-пунктирной линией показан ««объект»» (10.1.43).

Передаточная матрица этого ««объекта»»

$$W^{(\nu)}(s) = \left(E_n s - A - B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}\right)^{-1} B_{[\nu]} \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.1.47}$$

а ««регулятора»» (10.1.44)

$$W_p^{(\nu)}(s) = C'_{[\nu]}. \tag{10.1.48}$$

Передаточные функции многомерной системы (10.1.41), (10.1.42), разомкнутой по ν-му входу объекта, имеют вид

$$W_\nu^{(1)}(s) = -C'_{[\nu]}\left(E_n s - A - B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}\right)^{-1} B_{[\nu]} \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{10.1.49}$$

Представляя

$$w_\nu(s) = \frac{k_\nu(s)}{d_\nu(s)} \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.1.50}$$

запишем характеристический полином системы (10.1.41), (10.1.42)

$$d^u(s) = d_\nu(s) + k_\nu(s). \tag{10.1.51}$$

Примечание 10.1.1. Частотные передаточные функции $w_\nu(j\omega)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ можно было бы применить для анализа устойчивости многомерной системы (10.1.41), (10.1.42) используя критерий Найквиста. К сожалению пока не доказано, что, если для каждой из $w_\nu(j\omega)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ выполняются условия устойчивости Найквиста, то система (10.1.41), (10.1.42) будет устойчивой. Одним из препятствий на пути такого доказательства является следующее обстоятельство. Объект (10.1.41) полностью управляем, однако этим свойством может не обладать хотя бы один из ««объектов»» (10.1.43). Это означает, что полиномы $d_\nu(s)$ и $k_\nu(s)$ могут иметь один или несколько одинаковых корней, которые не сказываются на протекании годографа $w_\nu(j\omega)$. Если указанные корни имеют положительные вещественные части, то система является неустойчивой, несмотря на то, что для $w_\nu(j\omega)$ выполняются условия устойчивости.

Поэтому выполнение условий устойчивости Найквиста для каждой $w_\nu(j\omega)\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ является необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы (10.1.41), (10.1.42). ■

Пример 10.1.5. Запишем систему (10.1.8), (10.1.9) в следующих двух эквивалентных формах

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2, \quad u_1 = -x_1, \tag{10.1.52}$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad u_2 = -x_2. \tag{10.1.53}$$

Передаточная функция разомкнутой системы (10.1.52)

$$W_1^{(1)}(s) = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1(s)}{d_1(s)}. \tag{10.1.54}$$

Передаточная функция разомкнутой системы (10.1.53)

$$W_2^{(1)}(s) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_2(s)}{d_2(s)}. \tag{10.1.55}$$

Таким образом, передаточные функции системы (10.1.8), (10.1.9), разомкнутой вначале по первому, а затем по второму входам объекта, совпадают. При этом ««объект»» системы (10.1.52) не вполне управляем, а ««объект»» системы (10.1.53) не вполне наблюдаем по сигналу $u_2 = -x_2$. Поэтому обе передаточные функции (10.1.54) и (10.1.55) содержат в числителе и знаменателе гурвицев полином (s+2). ■

В заключение приведём содержательный пример передаточной функции многомерной системы, разомкнутой по 1-му входу объекта.

Пример 10.1.6. Рассмотрим двухкомпонентный измеритель угловой скорости, описываемый уравнениями (10.1.16), (10.1.12), (10.1.13).

Пренебрежём малыми инерционными членами в левой части уравнений (10.1.12),

(10.1.13) регулятора. Тогда эти уравнения примут вид

$$u_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4, \tag{10.1.56}$$

$$u_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4, \tag{10.1.57}$$

где $c_{1i} = \dfrac{r_{1i}}{g_0}$, $c_{2i} = \dfrac{r_{2i}}{g_0}$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$. (10.1.58)

Запишем систему (10.1.16), (10.1.56), (10.1.57) в виде двух эквивалентных систем.

Первая из них (10.1.59) (10.1.60)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= a_{23}x_3 + b_{21}u_1,\\
\dot{x}_3 &= b_{32}c_{21}x_1 + (b_{32}c_{22} + a_{32})x_2 + b_{32}c_{23}x_3 + b_{32}c_{24}x_4,\\
\dot{x}_4 &= x_3,\\
u_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4.
\end{aligned} \tag{10.1.61}$$

Вторая (10.1.62) (10.1.63)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= b_{21}c_{11}x_1 + b_{21}c_{12}x_2 + (b_{21}c_{13} + a_{23})x_3 + b_{21}c_{14}x_4,\\
\dot{x}_3 &= a_{32}x_2 + b_{32}u_2,\\
\dot{x}_4 &= x_3,\\
u_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4.
\end{aligned} \tag{10.1.64}$$

На основе (10.1.59)-(10.1.61) получим передаточную функцию измерителя угловой скорости разомкнутой по первому входу (статор и ротор датчика момента 3 на рис. 9.1.1. – разъединены).

$$w_1^{(1)}(s) = -\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ -b_{32}c_{21} & -(a_{32}+b_{32}c_{22}) & s-b_{32}c_{23} & -b_{32}c_{24} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10.1.65}$$

Уточним физический смысл частотной передаточной функции $w_1(j\omega)$ – ДУСа, разомкнутого по датчику момента 3. Отсоединим датчик момента 3 от наружной рамки гироскопа и будем прикладывать к ней момент от внешнего силового устройства, изменяющийся по гармоническому закону с частотой ω. При этом датчик момента 3 будет развивать гармонически изменяющийся момент. Отношение амплитуды этого момента к амплитуде момента от внешнего устройства – $a_1(\omega)$ и сдвиг фазы – $\varphi_1(\omega)$ – этих моментов образует $a_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}$.

На основе (10.1.62)-(10.1.64) аналогично строится передаточная функция ДУСа, разомкнутого по датчику моментов 2. ■

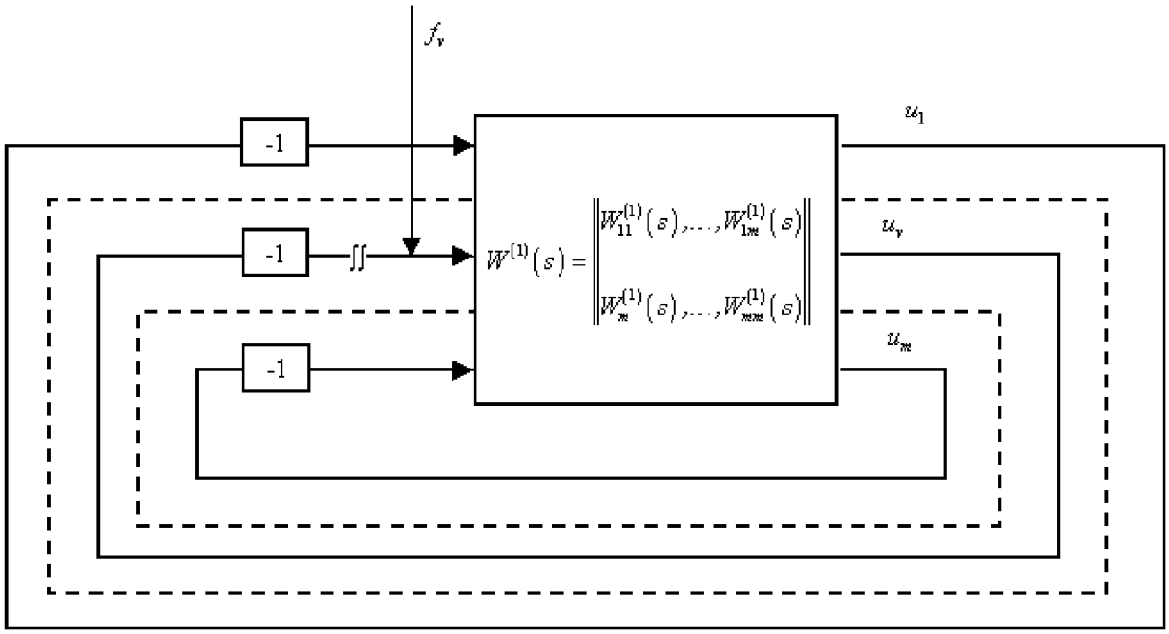

Рис. 10.1.4.

10.1.4. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по ν-му входу объекта (общий случай)

Возвращаясь к рассмотрению системы (10.1.1), (10.1.2), отметим, что определение 10.1.4 передаточной функции многомерной системы, разомкнутой по ν-му входу объекта, сохраняется и в этом общем случае.

Для построения передаточной функции $w_\nu(s)$ разомкнем систему по ν-му входу объекта и приложим к этому входу внешнее воздействие f_ν. Найдём связь между воздействиями и реакциями на него на ν-ом выходе регулятора. Для этого воспользуемся передаточной матрицей $W_{раз}^{(1)}(s)$ многомерной системы, разомкнутой по всем входам объекта.

Структурная схема разомкнутой по ν-му входу объекта системы приведена на рис. 10.1.4.

Непосредственно из этой структурной схемы следует

$$u_i = -\sum_{j=1}^{\nu-1} w_{ij}^{(1)}(s)u_j + w_{i\nu}^{(1)}(s)f_\nu - \sum_{j=\nu+1}^{m} w_{ij}^{(1)}(s)u_j, \quad i = \overline{1,\nu-1},\overline{\nu+1,m} \qquad (10.1.66)$$

$$u_\nu = -\sum_{j=1}^{\nu-1} w_{\nu j}^{(1)}(s)u_j + w_{\nu\nu}^{(1)}(s)f_\nu - \sum_{j=\nu+1}^{m} w_{\nu j}^{(1)}(s)u_j. \qquad (10.1.67)$$

Введём обозначения

$$\left[W^{(1)}(s)\right]_{\widetilde{\nu\nu}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} w_{11}^{(1)}(s) & \cdots & w_{1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{1m}^{(1)}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\nu-1,1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu-1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{\nu-1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu-1,m}^{(1)}(s) \\ \hline w_{\nu+1,1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu+1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{\nu+1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu+1,m}^{(1)}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{m,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{m,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{mm}^{(1)}(s) \end{array}\right), \quad (10.1.68)$$

$$\left[W^{(1)}(s)\right]'_{[\tilde{\nu}]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} w_{1\nu}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu-1,\nu}^{(1)}(s) & w_{\nu+1,\nu}^{(1)}(s) & \cdots & w_{m,\nu}^{(1)}(s) \end{array}\right), \quad (10.1.69)$$

$$\left[W^{(1)}(s)\right]^{[\tilde{\nu}]} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} w_{\nu 1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{\nu,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu,m}^{(1)}(s) \end{array}\right). \quad (10.1.70)$$

Из этих обозначений следует: матрица $\left[W^{(1)}(s)\right]_{\widetilde{\nu\nu}}$ получается из матрицы $W^{(1)}(s)$ после вычёркивания ν-го столбца и ν-той строки, вектор-столбец $\left[W^{(1)}(s)\right]_{[\tilde{\nu}]}$ – это ν-тый столбец матрицы $W^{(1)}(s)$, из которого вычеркнут ν-тый элемент; вектор-строка $\left[W^{(1)}(s)\right]^{[\tilde{\nu}]}$ – это ν-тая строка матрицы $W^{(1)}(s)$, у которой (строки) вычеркнута ν-тая компонента.

Запишем (10.1.66), (10.1.67) в более компактной форме

$$\boldsymbol{u}_{\neg\nu} = -\left[W^{(1)}(s)\right]_{\widetilde{\nu\nu}} \boldsymbol{u}_{\neg\nu} + \left[W^{(1)}(s)\right]_{[\tilde{\nu}]} f_\nu, \quad (10.1.71)$$

$$u_\nu = -\left[W^{(1)}(s)\right]^{[\tilde{\nu}]} u_\nu + w_{\nu\nu}^{(1)}(s) f_\nu. \quad (10.1.72)$$

Из (10.1.71) получим

$$\boldsymbol{u}_{\neg\nu} = \left\{E_{m-1} + \left[W^{(1)}(s)\right]_{\widetilde{\nu\nu}}\right\}^{-1} \left[W^{(1)}(s)\right]_{[\tilde{\nu}]} f_\nu. \quad (10.1.73)$$

Подставляя это выражение в (10.1.72), получим

$$u_\nu = w_\nu^{(1)}(s) f_\nu, \quad (10.1.74)$$

где

$$w_\nu^{(1)}(s) = w_{\nu\nu}^{(1)}(s) - \left[W^{(1)}(s)\right]^{[\tilde{\nu}]} \left\{E_{m-1} + \left[W^{(1)}(s)\right]_{\widetilde{\nu\nu}}\right\}^{-1} \left[W^{(1)}(s)\right]_{[\tilde{\nu}]}. \quad (10.1.75)$$

и таким образом доказано следующее утверждение.

Утверждение 10.1.3. Передаточные функции многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) разомкнутой по ν-му входу объекта $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ имеют вид (10.1.75). ■

Пример 10.1.6. Запишем передаточные функции для системы с двумя управлениями. При $m = 2$ на основе (10.1.75) получим

$$w_1^{(1)}(s) = w_{11}^{(1)}(s) - w_{12}^{(1)}(s)\left[1 + w_{22}^{(1)}(s)\right]^{-1} w_{21}^{(1)}(s), \quad (10.1.76)$$

$$w_2^{(1)}(s) = w_{22}^{(1)}(s) - w_{21}^{(1)}(s)\left[1 + w_{11}^{(1)}(s)\right]^{-1} w_{12}^{(1)}(s). \quad (10.1.77)$$

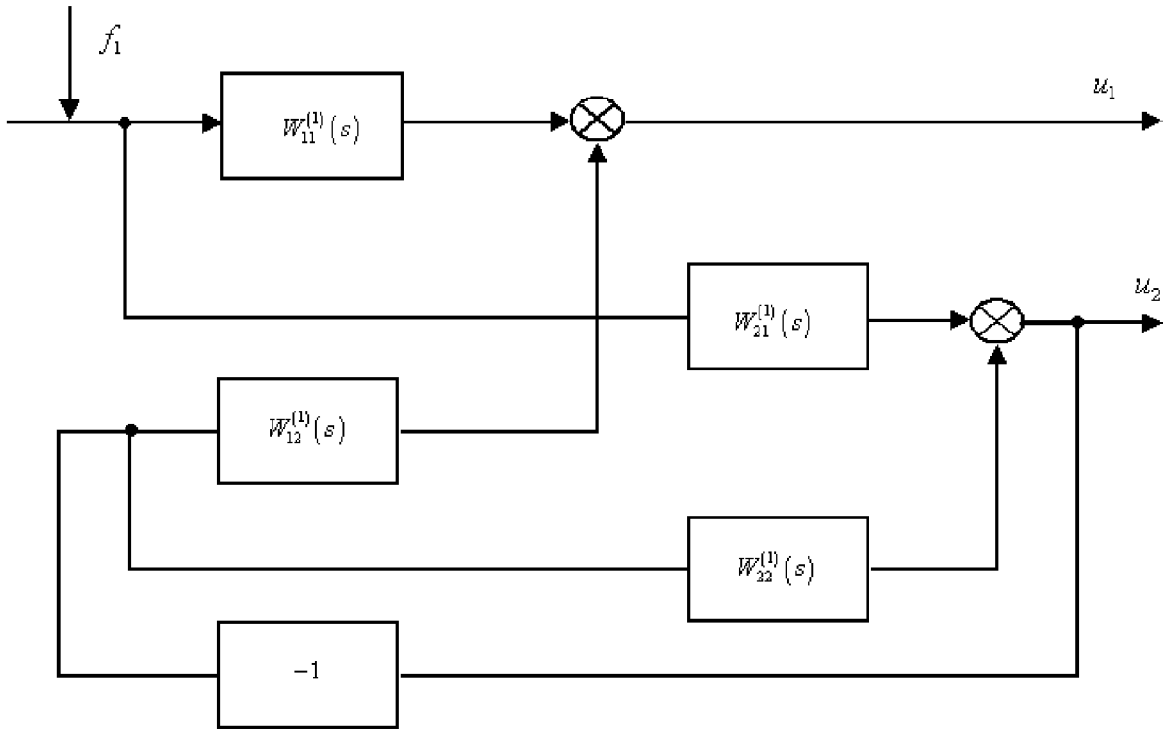

Рис. 10.1.5.

Эти передаточные функции нетрудно получить, если рассмотреть структурные схемы системы с двумя управлениями, аналогичные структурной схеме, приведённой на рис. 10.1.4.

На рис. 10.1.5. приведена структурная схема, разомкнутая на первом входе объекта, а на рис. 10.1.6. – на втором его входе.

Непосредственно из рис. 10.1.5. следует, что

$$u_1 = w_{11}^{(1)}(s)f_1 - w_{12}^{(1)}(s)u_2, \quad u_2 = w_{21}^{(1)}(s)f_1 - w_{22}^{(1)}(s)u_2.$$

Из этих выражений получаем, исключая u_2, соотношение (10.1.76). Аналогично, из рис. 10.1.6. $u_1 = w_{12}^{(1)}(s)f_2 - w_{11}^{(1)}(s)u_1$, $u_2 = w_{22}^{(1)}(s)f_2 - w_{21}^{(1)}(s)u_1$ и тогда получим (10.1.77). ■

Пример 10.1.7. Рассмотрим систему (10.1.8), (10.1.9). Передаточная матрица этой системы, разомкнутой по обоим входам объекта, имеет вид (10.1.11)

$$W^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (10.1.76), (10.1.77), получим передаточные функции $w_1^{(1)}(s) = (s+1)^{-1}$, $w_2^{(1)}(s) = (s+1)^{-1}$, которые совпадают с функциями (10.1.54), (10.1.55). ■

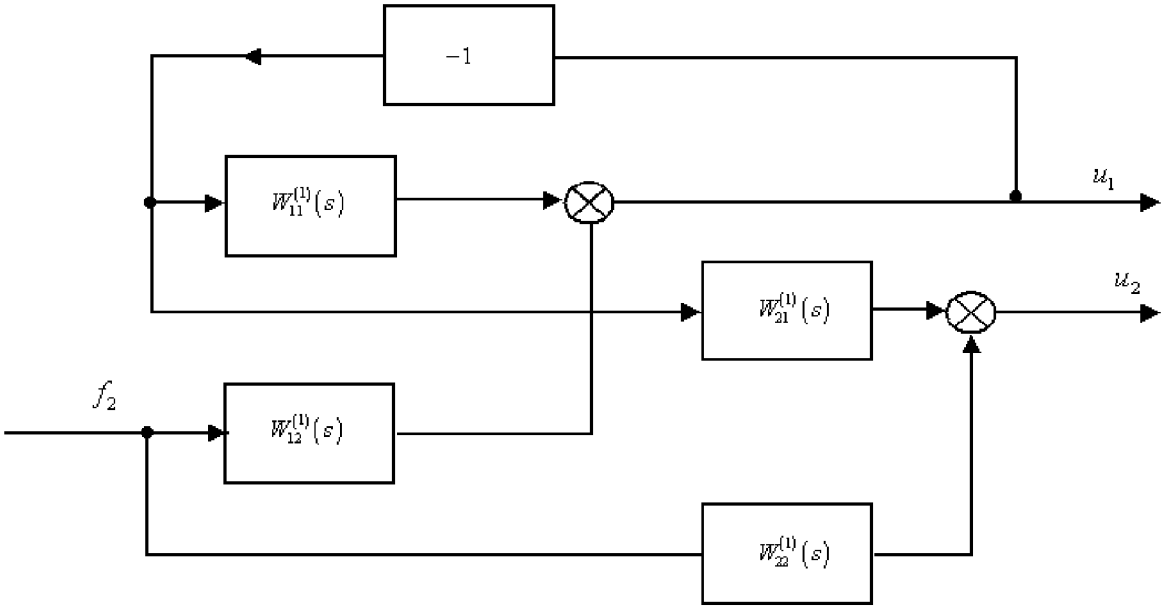

Рис. 10.1.6.

Пример 10.1.8. Построим передаточные функции системы с тремя управлениями. При $m = 3$ из (10.1.75) получим

$$w_1^{(1)}(s) = w_{11}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{12}^{(1)}(s) & w_{13}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{22}^{(1)}(s) & w_{23}^{(1)}(s) \\ w_{32}^{(1)}(s) & 1 + w_{33}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{21}^{(1)}(s) \\ w_{31}^{(1)}(s) \end{bmatrix}, \quad (10.1.78)$$

$$w_2^{(1)}(s) = w_{22}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{21}^{(1)}(s) & w_{23}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{11}^{(1)}(s) & w_{13}^{(1)}(s) \\ w_{31}^{(1)}(s) & 1 + w_{33}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{12}^{(1)}(s) \\ w_{32}^{(1)}(s) \end{bmatrix}, \quad (10.1.79)$$

$$w_3^{(1)}(s) = w_{33}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{31}^{(1)}(s) & w_{33}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{11}^{(1)}(s) & w_{12}^{(1)}(s) \\ w_{21}^{(1)}(s) & 1 + w_{22}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{13}^{(1)}(s) \\ w_{23}^{(1)}(s) \end{bmatrix}. \quad (10.1.80)$$

■

10.1.5. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по μ-му входу регулятора

Определение 10.1.6. *Передаточной функцией* – $w_\mu^{(2)}(s)$ – *многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) разомкнутой по* μ*-му входу регулятора* называется передаточная функция, связывающая μ-тый выход объекта $y_\mu(s)$ с μ-тым входом регулятора, к которому вместо $y_\mu(s)$ приложено воздействие $f_\mu(s)$, взятое с обратным знаком. Если в этой передаточной функции положить $s = j\omega$, то она называется частотной передаточной функцией многомерной системы, разомкнутой по μ-му входу регулятора. ■

Рассмотрим приведённую на рис. 10.1.7. структурную схему системы (10.1.1), (10.1.2), разомкнутую по μ-му входу регулятора.

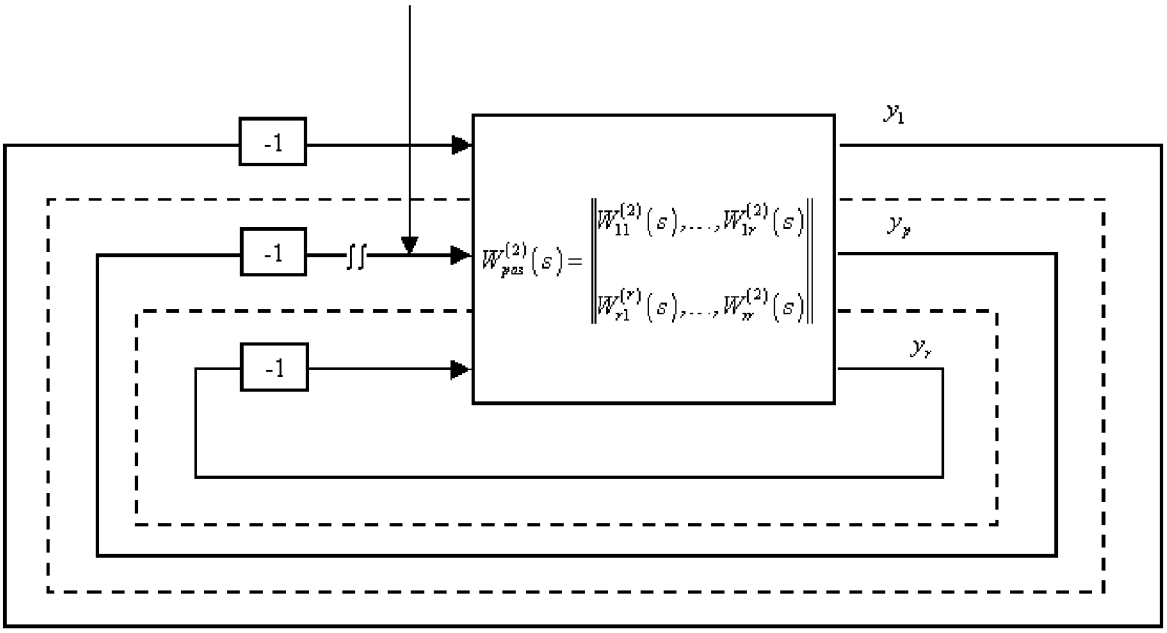

Рис. 10.1.7.

Сравнивая эту схему со схемой рис. 10.1.4., замечаем их сходство и поэтому, заменяя в преобразованиях (10.1.67)-(10.1.75) $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{y}$, а m на r, приходим к следующему.

Утверждение 10.1.4. Передаточные функции $w_{\mu}^{(2)}(s)$ многомерной системы (10.1.1), (10.1.2), разомкнутой по μ-му входу регулятора, имеют вид

$$w_{\mu}^{(2)}(s) = w_{\mu\mu}^{(2)}(s) - \left[W^{(2)}(s)\right]^{[\tilde{\mu}]} \left\{E_{r-1} + \left[W^{(2)}(s)\right]_{\widetilde{\mu\mu}}\right\}^{-1} \left[W^{(2)}(s)\right]_{[\tilde{\mu}]}. \qquad (10.1.81)$$

■

Пример 10.1.9. Рассмотрим систему (10.1.8), (10.1.9). Передаточная матрица этой системы, разомкнутой по всем входам регулятора имеет вид (10.1.11). Выражение (10.1.81) при $r = 2$ представляется (по аналогии с (10.1.76), (10.1.77)) как

$$w_1^{(2)}(s) = w_{11}^{(2)}(s) - w_{12}^{(2)}(s)\left[1 + w_{22}^{(2)}(s)\right]^{-1} w_{21}^{(2)}(s), \qquad (10.1.82)$$

$$w_2^{(2)}(s) = w_{22}^{(2)}(s) - w_{21}^{(2)}(s)\left[1 + w_{11}^{(2)}(s)\right]^{-1} w_{12}^{(2)}(s). \qquad (10.1.83)$$

Используя эти формулы, получим на основе (10.1.11)

$$w_1^{(2)}(s) = (s+1)^{-1}, \quad w_2^{(2)}(s) = (s+1)^{-1}. \qquad (10.1.84)$$

■

10.2. Запасы устойчивости многомерных систем

10.2.1. Обобщённые запасы устойчивости

Рассмотрим асимптотически устойчивую многомерную систему (10.1.1), (10.1.2). Обобщённая передаточная функция этой системы, определяемая соотношениями

(10.1.37), (10.1.38), является аналогом передаточной функции разомкнутой системы в одномерном случае. Используя эту аналогию, определяем на основе $w_{об}(j\omega)$ запасы по фазе и модулю и радиус запасов устойчивости, заменив в (2.П.10), (2.П.12) $w_{раз}(j\omega)$ на $w_{об}(j\omega)$.

Определение 10.2.1. *Обобщённые запасы устойчивости многомерной системы* (10.1.1), (10.1.2) по фазе $\varphi_{об.з}$ и модулю $L_{об}$ имеют вид

$$\varphi_{об.з} = \min_{\substack{\omega^{(1)}_{\text{об.ср}} \in \Omega^{(1)}_{\text{об.ср}} \\ \omega^{(2)}_{\text{об.ср}} \in \Omega^{(2)}_{\text{об.ср}}}} \left\{180^\circ + \arg w_{об}(j\omega^{(1)}_{об.ср}),\ 180^\circ - \arg w_{об}(j\omega^{(2)}_{об.ср})\right\}, \quad (10.2.1)$$

$$L_{об} = \min_{\substack{\omega^{(1)}_{\text{об.ф}} \in \Omega^{(1)}_{\text{об.ф}} \\ \omega^{(2)}_{\text{об.ф}} \in \Omega^{(2)}_{\text{об.ф}}}} \left\{a_{об}(\omega^{(1)}_{об.ф}),\ \frac{1}{a_{об}(\omega^{(2)}_{об.ф})}\right\}, \quad (10.2.2)$$

где множества $\Omega_{об.ср} = \Omega^{(1)}_{об.ср} \cup \Omega^{(2)}_{об.ср}$ и $\Omega_{об.ф} = \Omega^{(1)}_{об.ф} \cup \Omega^{(2)}_{об.ф} \cup \Omega^{(3)}_{об.ф}$ составляют решения уравнений

$$a_{об}(\omega_{об.ср}) = 1, \quad \operatorname{Jm} w_{об}(j\omega_{об.ф}) = 0, \quad (10.2.3)$$

в которых $a_{об}(\omega) = \operatorname{mod} w_{об}(j\omega)$, а разбиение этих множеств на подмножества осуществляется на основе соотношений

$$\operatorname{Jm} w_{об}(j\omega_{ср}) < 0 \quad \text{– множество} \quad \Omega^{(1)}_{об.ср}, \quad (10.2.4)$$

$$\operatorname{Jm} w_{об}(j\omega_{ср}) > 0 \quad \text{– множество} \quad \Omega^{(2)}_{об.ср}, \quad (10.2.5)$$

$$\operatorname{Re} w_{об}(j\omega) < -1 \quad \text{– множество} \quad \Omega^{(1)}_{об.ф}, \quad (10.2.6)$$

$$-1 \le \operatorname{Re} w_{об}(j\omega) \le 0 \quad \text{– множество} \quad \Omega^{(2)}_{об.ф}, \quad (10.2.7)$$

$$\operatorname{Re} w_{об}(j\omega) > 0 \quad \text{– множество} \quad \Omega^{(3)}_{об.ф}. \quad (10.2.8)$$

■

Определение 10.2.2. *Обобщённым радиусом запасов устойчивости* многомерных систем (10.1.1), (10.1.2) называется число

$$r_{об} = \min_{0 \le \omega \le \infty} |1 + w_{об}(j\omega)|. \quad (10.2.9)$$

■

Пример 10.2.1. Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 + \alpha u_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2. \quad (10.2.10)$$

Пусть он замкнут регуляторами

$$u_1 = -(4+\alpha)x_1 + (1+3\alpha)x_2, \quad u_2 = x_1 - 3x_2. \quad (10.2.11)$$

В (10.2.10),(10.2.11) α – некоторое произвольное число.

Вычислим обобщённый радиус запасов устойчивости этой системы. Нетрудно видеть, что

$$W(s) = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_p(s) = \begin{pmatrix} -(4+\alpha) & (1+3\alpha) \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Используем (10.1.6) и получим

$$W^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} (4+\alpha) & -(1+3\alpha) \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s-1} = \begin{pmatrix} (4+\alpha) & (4+\alpha)\alpha - (1+3\alpha) \\ -1 & -\alpha+3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Тогда, в соответствии с (10.1.37),

$$\begin{aligned} 1 + w_{об}(s) &= \det\left[E_2 + W^{(1)}(s)\right] = \\ &= \det \begin{pmatrix} s-1+4+\alpha & (4+\alpha)\alpha - (1+3\alpha) \\ -1 & s-1-\alpha+3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = \\ &= \det \begin{pmatrix} s+3+\alpha & \alpha^2+\alpha-1 \\ -1 & s+2-\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{s^2+5s+5}{(s-1)^2}. \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

Нетрудно видеть, что

$$|1 + w_{об}(j\omega)|^2 = [1 + w_{об}(-j\omega)][1 + w_{об}(j\omega)] = \frac{(5-\omega^2)^2 + 25\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \geq 1 \quad \text{для всех} \quad \omega.$$

Это означает, в соответствии с (10.2.9), что

$$r_{об} \geq 1. \tag{10.2.13}$$

Отсюда следует также

$$\varphi_{об.з} \geq 60^\circ, \quad L_{об} \geq 2. \tag{10.2.14}$$

Покажем теперь, что несмотря на выполнение условий (10.2.13), (10.2.14) грубости по обобщённым частотным показателям, система (10.2.5), (10.2.6) обладает (при больших значениях α) малой степенью грубости.

В связи с этим заметим вначале, что обобщённая передаточная функция (10.2.12) этой системы не зависит от параметра α, который сокращается при приведении подобных членов в процессе вычисления определителя.

Параметр α входит как в уравнение объекта (10.2.10), так и в уравнение регулятора (10.2.11), и следовательно, он реализуется различными физическими устройствами, а поэтому возмущения этого параметра в (10.2.10) отличаются от его возмущений в (10.2.11).

В связи с этим обозначим в (10.2.10) $\alpha = \tilde{\alpha}$. Исключая из (10.2.10) u_1 и u_2 с помощью (10.2.11) запишем уравнение этой системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - (4+\alpha)x_1 + (1+3\alpha)x_2 + \tilde{\alpha}(x_1 - 3x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (x_1 - 3x_2). \end{aligned}$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + (3 + \alpha - \tilde{\alpha}) & -1 - 3\alpha + 3\tilde{\alpha} \\ -1 & s + 2 \end{pmatrix} = s^2 + (5 + \alpha - \tilde{\alpha})s + (5 - \alpha + \tilde{\alpha}). \tag{10.2.15}$$

Пусть регулятор (10.2.11) не подвержен параметрическим возмущениям и $\alpha = 10^3$, а параметрические возмущения объекта составляют лишь 1% от номинального значения. Другими словами,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha, \quad \text{где} \quad |\Delta\alpha| \le \frac{|\alpha|}{100}. \tag{10.2.16}$$

Как нетрудно видеть из (10.2.15) при столь малых (1%) параметрических возмущениях возможно нарушение устойчивости системы. ■

10.2.2. Запасы устойчивости на входе объекта и регулятора

Обратимся теперь к передаточным функциям многомерной системы, разомкнутой по ν-му входу объекта либо μ-му входу регулятора. Эти передаточные функции были введены после представления многомерной системы как некоторой совокупности эквивалентных ей одномерных систем.

Для каждой из этих одномерных систем можно определить запасы устойчивости и радиус запасов устойчивости.

Определение 10.2.3. *Запасы устойчивости многомерной системы* (10.1.1), (10.1.2) *на входе объекта*

- по фазе:

$$\varphi_з^{(1)} = \min\left\{\varphi_{1.з}^{(1)},\ \varphi_{2.з}^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_{m.з}^{(1)}\right\}, \tag{10.2.17}$$

где

$$\varphi_{\nu.з}^{(1)} = \min_{\substack{\omega_{\nu.\text{ср}}^{(1)} \in \Omega_{\nu.\text{ср}}^{(1)} \\ \omega_{\nu.\text{ср}}^{(2)} \in \Omega_{\nu.\text{ср}}^{(2)}}} \left\{180^\circ + \arg W_\nu(j\omega_{\nu.cp}^{(1)}),\ 180^\circ - \arg W_\nu(j\omega_{\nu.cp}^{(2)})\right\} \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{10.2.18}$$

- по модулю:

$$L^{(1)} = \min\left\{L_1^{(1)},\ L_2^{(1)},\ \ldots,\ L_m^{(1)}\right\}, \tag{10.2.19}$$

где

$$L_\nu^{(1)} = \min_{\substack{\omega_{\nu.\text{ф}}^{(1)} \in \Omega_{\nu.\text{ф}}^{(1)} \\ \omega_{\nu.\text{ф}}^{(2)} \in \Omega_{\nu.\text{ф}}^{(2)}}} \left\{a_\nu(\omega_{\nu.ф}^{(1)}),\ \frac{1}{a_\nu(\omega_{\nu.ф}^{(2)})}\right\} \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{10.2.20}$$

Множества $\Omega_{\nu.cp}$ и $\Omega_{\nu.ф}$ составляют решения уравнений

$$a_\nu^{(1)}(\omega_{\nu.cp}) = 1, \quad \operatorname{Jm} W_\nu^{(1)}(j\omega_{\nu.ф}) = 0 \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{10.2.21}$$

где $a_\nu(\omega) = \operatorname{mod} W_\nu(j\omega)$. Разбиение этих множеств на подмножества осуществляется на основе соотношений (10.2.4)-(10.2.8), если в них заменить $W_{об}(j\omega)$ на $W_\nu(j\omega)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$. ■

Определение 10.2.4. *Запасы устойчивости многомерной системы* (10.1.1), (10.1.2) *на входе регулятора* определяются выражениями: по фазе – (10.2.17), (10.2.18); по модулю – (10.2.19), (10.2.20), если в них заменить в $\varphi_з^{(1)}$ и $L^{(1)}$ верхний индекс $^{(1)}$ на $^{(2)}$, ν на μ и m на r. ■

Определение 10.2.5. *Радиусом запасов устойчивости многомёрной системы* (10.1.1), (10.1.2) *на входе объекта* называется число

$$r^{(1)} = \min\left\{r_1^{(1)},\, r_2^{(1)},\, \ldots,\, r_m^{(1)}\right\}, \tag{10.2.22}$$

где

$$r_\nu^{(1)} = \min_{0\le\omega\le\infty}\left|1 + w_\nu^{(1)}(j\omega)\right| \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{10.2.23}$$

■

Определение 10.2.6. *Радиусом запасов устойчивости многомёрной системы* (10.1.1), (10.1.2) *на входе регулятора* называется число

$$r^{(2)} = \min\left\{r_1^{(2)},\, r_2^{(2)},\, \ldots,\, r_r^{(2)}\right\}, \tag{10.2.24}$$

где

$$r_\mu^{(2)} = \min_{0\le\omega\le\infty}\left|1 + w_\mu^{(2)}(j\omega)\right| \quad \mu = \overline{1,r}. \tag{10.2.25}$$

■

Пример 10.2.2. Найдём запасы устойчивости системы (10.2.10), (10.2.11) на входе объекта.

Для этого запишем эту систему в следующей эквивалентной форме

$$\dot{x}_1 = x_1 - (4+\alpha)x_1 + (1+3\alpha)x_2 + \alpha u_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \tag{10.2.26}$$

$$u_2 = x_1 - 3x_2. \tag{10.2.27}$$

Передаточная функция системы (10.2.10), (10.2.11), разомкнутой по второму входу объекта, имеет вид

$$W_2^{(1)}(s) = -\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+3+\alpha & 1+3\alpha \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s-1 & 1+3\alpha \\ 0 & s+3+\alpha \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)(s+3+\alpha)} =$$

$$= \frac{(3-\alpha)s + (8+\alpha)}{(3+\alpha)\left(\dfrac{1}{3+\alpha}s+1\right)(s-1)} = \frac{8+\alpha}{3+\alpha} \cdot \frac{\dfrac{3-\alpha}{8+\alpha}s+1}{\left(\dfrac{1}{3+\alpha}s+1\right)(s-1)}.$$

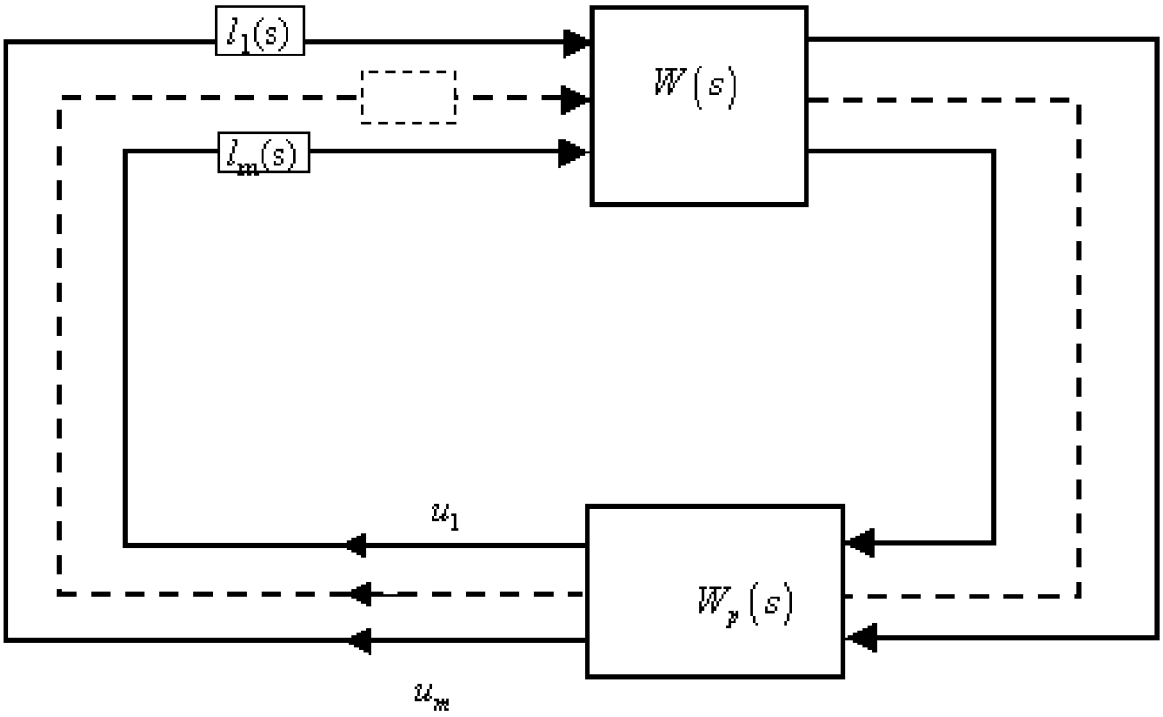

Рис. 10.2.1.

Пусть $\alpha = 10^3$, тогда

$$w_2^{(1)}(s) \approx \frac{-s+1}{(10^{-3}s+1)(s-1)} = -\frac{1}{10^{-3}s+1}. \qquad (10.2.28)$$

Отсюда следует, что

$$r_2^{(1)} \to 0, \quad \varphi_2^{(1)} \to 0, \quad L_2^{(1)} \to 0 \quad \text{при} \quad \omega \to 0. \qquad (10.2.29)$$

Это означает, что (в отличие от обобщённых показателей грубости) запасы устойчивости системы (10.2.10), (10.2.11), обладающей малой степенью грубости, малы. ■

10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости

Рассмотрим структурную схему, приведённую на рис. 10.2.1.

Блоки с передаточными функциями $l_\nu(s)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ описывают мультипликативное параметрическое возмущение передаточной матрицы объекта (10.1.1).

Будем рассматривать два вида передаточных функций $l_\nu(s)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$.

Первый вид

$$l_\nu(j\omega) = l_\nu \quad \nu = \overline{1,m}, \qquad (10.2.30)$$

где l_ν $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ – некоторые положительные числа.

Второй вид

$$l_\nu(j\omega) = e^{j\psi_\nu} \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.2.31}$$

где ψ_ν $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ – числа.

Рассмотрим вначале случай, когда передаточные функции $l_\nu(s)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ имеют вид (10.2.30) и найдём нижние – $\underline{l}_\nu$ и верхние $\overline{l}_\nu$ границы интервала $\left[\underline{l}_\nu, \overline{l}_\nu\right]$ такие, что, если значения l_ν $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ находятся внутри или на границе интервала

$$\underline{l}_\nu \le l_\nu \le \overline{l}_\nu \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.2.32}$$

то система, приведённая на рис. 10.2.1. сохраняет асимптотическую устойчивость. Если хотя бы одно из чисел l_ν $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ выходит за пределы (10.2.32), то эта система становится неустойчивой.

Пусть теперь $l_\nu(s)$ имеет вид (10.2.31). Найдём нижние – $\underline{\psi}_\nu$ и верхние – $\overline{\psi}_\nu$ границы интервала $\left[\underline{\psi}_\nu, \overline{\psi}_\nu\right]$, при которых система сохраняет свойство асимптотической устойчивости, если

$$\underline{\psi}_\nu \le \psi_\nu \le \overline{\psi}_\nu \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.2.33}$$

и становится неустойчивой, если хотя бы одно из значений ψ_ν входит за пределы (10.2.33).

Определение 10.2.7. *Многосвязным запасом устойчивости системы* (10.1.1), (10.1.2) *на входе объекта по фазе* называется совокупность интервалов (10.2.33), а *многосвязным запасом устойчивости этой системы на входе объекта по модулю* называется совокупность интервалов (10.2.32). ■

К сожалению это определение неконструктивно, так как остаётся неясным как найти указанные в нём интервалы.

Кроме того, система (10.1.1), (10.1.2) характеризуется $4m$ числами (являющимися границами интервалов), что затрудняет сравнение систем, различных по грубости.

Для формирования более удобного показателя грубости заметим, что интервалы (10.2.32) и (10.2.33) содержат числа $l_\nu = 1$, $\psi_\nu = 0$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$, соответствующие исходной (параметрически невозмущённой) системе (10.1.1), (10.1.2) и поэтому можно утверждать, что

$$\underline{l}_\nu < 1, \quad \overline{l}_\nu > 1; \qquad \underline{\psi}_\nu < 0, \quad \overline{\psi}_\nu > 0 \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{10.2.34}$$

и тогда можно найти числа

$$\varphi_з^M = \min\left\{\left|\underline{\psi}_1\right|, \left|\underline{\psi}_2\right|, \ldots, \left|\underline{\psi}_m\right|; \overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_m\right\}, \tag{10.2.35}$$

$$L^M = \min\left\{\frac{1}{\underline{l}_1}, \frac{1}{\underline{l}_2}, \ldots, \frac{1}{\underline{l}_m}; \overline{l}_1, \overline{l}_2, \ldots, \overline{l}_m\right\}. \tag{10.2.36}$$

Определение 10.2.8. Многосвязными запасами устойчивости системы (10.1.1), (10.1.2) на входе объекта по фазе – $\varphi_з^M$ – по модулю – L^M – называются числа, получаемые из соотношений (10.2.35), (10.2.36). ■

Если на структурной схеме (рис. 10.2.1.) перенести блоки с передаточными функциями $l_\nu(s)$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$ со входа объекта на вход регулятора $\left(\text{полагая при этом } \nu = \overline{1,r}\right)$, то нетрудно ввести аналогичные определения многосвязных запасов устойчивости системы на входе регулятора.

10.3. Показатели грубости оптимальных систем

10.3.1. Границы обобщённых показателей грубости

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{10.3.1}$$

с векторным управлением

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{10.3.2}$$

оптимальным в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty (\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\, dt, \quad Q > 0. \tag{10.3.3}$$

Передаточная матрица системы (10.3.1), (10.3.2), разомкнутой по всем входам объекта

$$W^{(1)}(s) = -C'(Es - A)^{-1}B \tag{10.3.4}$$

удовлетворяет тождеству (9.3.16), на основе которого можно записать

$$\det\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right] \cdot \det\left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = \det\left[E_m + H'(-s)H(s)\right]. \tag{10.3.5}$$

Используем утверждение 10.1.2 и запишем (10.3.5) как

$$[1 + w_{об}(-s)] \cdot [1 + w_{об}(s)] = \det\left[E_m + H'(-s)H(s)\right]. \tag{10.3.6}$$

Обозначим

$$\psi_{об}(\omega) = \det\left[E_m + H'(-j\omega)H(j\omega)\right] - 1 \tag{10.3.7}$$

и запишем условие оптимальности в частотной форме

$$[1 + w_{об}(-j\omega)] \cdot [1 + w_{об}(j\omega)] = 1 + \psi_{об}(\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{10.3.8}$$

Теорема 10.3.1. Обобщённые запасы устойчивости оптимальной системы (10.3.1), (10.3.2) имеют границы

$$\varphi_{об.з} \ge 60^\circ, \quad L_{об} \ge 2. \tag{10.3.9}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.2. Оно повторяет доказательство теоремы 4.2.1, если

$$\varphi_{об}(\omega) \geq 0 \tag{10.3.10}$$

и поэтому вывод этого неравенства составляет основное содержание 10.Д.2.

Сопоставим выражение (10.2.9) для определения радиуса запасов устойчивости с условием оптимальности в частотной форме.

При условии (10.3.10) очевидно следующее.

Утверждение 10.3.1. Обобщённый радиус запасов устойчивости оптимальной системы (10.3.1), (10.3.2)

$$r_{об} \geq 1. \tag{10.3.11}$$

■

Исследуем теперь запасы устойчивости на входе объекта.

Геометрический смысл (10.3.11) как и ранее состоит в том, что годограф АФЧХ, соответствующий $w_{об}(s)$, не пересекает запретного круга единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$.

Теорема 10.3.2. Оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) обладает запасом устойчивости на входе объекта

$$\varphi_з^{(1)} \geq 60^\circ, \quad L^{(1)} \geq 2. \tag{10.3.12}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.3.

Теорема 10.3.3. Оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) имеет многосвязные запасы устойчивости на входе объекта

$$\varphi_з^{(1)M} \geq 60^\circ, \quad L^{(1)M} \geq 2. \tag{10.3.13}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.4.

10.3.2. Возможность малых запасов устойчивости на входе регулятора

Подведя итог изложенному выше, отметим, что система (10.3.1), (10.3.2) оптимальная в смысле функционала (10.3.3) является грубой по управлению по показателям: обобщённым запасам устойчивости, односвязным запасам устойчивости и многосвязным запасам устойчивости.

В связи с этим возникает вопрос: всегда ли эта оптимальная система является грубой по измеряемым переменным? К сожалению, ответ на этот вопрос отрицателен, о чём свидетельствует следующий пример.

Пример 10.3.1. Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 + u, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \tag{10.3.14}$$

$$u = 3 \cdot 10^3 y_1 - 10^3 y_2. \tag{10.3.15}$$

Уравнение (10.3.14) описывает объект управления, а (10.3.15) – регулятор.

Эта система является оптимальной в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left[101 \cdot 10^4 \cdot (3y_1 - y_2)^2 + u^2\right] dt. \tag{10.3.16}$$

Проверим это. Найдём для объекта (10.3.14) оптимальный, в смысле функционала (10.3.16), регулятор. Уравнение Риккати имеет в рассматриваемом случае вид

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix} = -101 \cdot 10^4 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{10.3.17}$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, это уравнение разрешает матрица

$$P = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.3.18}$$

и тогда $c_1 = 3 \cdot 10^3$, $c_2 = -10^3$. (10.3.19)

Исследуем теперь оптимальную систему (10.3.14), (10.3.15). Её передаточная функция при размыкании на входе объекта имеет вид

$$W^{(1)}(s) = -\begin{bmatrix} 3 \cdot 10^3 & -10^3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10^3 s}{s^2 + 5s + 4}. \tag{10.3.20}$$

Запасы устойчивости, определённые на основе этой передаточной функции

$$\varphi_з^{(1)} > 90^\circ, \quad L^{(1)} \to \infty. \tag{10.3.21}$$

Найдём теперь передаточную функцию системы, разомкнутой на первом входе регулятора. В соответствии с определением 10.1.6 разомкнём рассматриваемую систему на первом входе регулятора и приложим к этому входу воздействие $f_1(t)$.

Тогда сигнал на первом выходе объекта описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + (-2 - 10^3)x_2 + 3 \cdot 10^3 f_1(t), \\ y_1 = x_1.\end{gathered}$$

Найдём связь изображений $y_1(s)$ и $f_1(s)$

$$y_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s+2+10^3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot f_1(s) = \frac{3 \cdot 10^3}{s^2 + (5+10^3)s + 3 \cdot 10^3 + 4}. \tag{10.3.22}$$

Тогда

$$W_1^{(2)}(s) = \frac{3 \cdot 10^3}{s^2 + (5 + 10^3)s + 3 \cdot 10^3 + 4}, \tag{10.3.23}$$

$$W_1^{(2)}(j\omega) = \frac{-3 \cdot 10^3(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)}{(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)^2 + (5 + 10^3)^2\omega^2} + j\frac{(5 + 10^3)\omega}{(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)^2 + (5 + 10^3)^2\omega^2}. \tag{10.3.24}$$

Отсюда заключаем, что при $\omega = 0$,

$$\operatorname{Re} W_1^{(2)}(j0) = -\frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 + 4} = -0.998, \quad \operatorname{Jm} W_1^{(2)}(j0) = 0. \tag{10.3.25}$$

и, следовательно, годограф АФХ, соответствующий передаточной функции (10.3.24), проходит близко к критической точке $(-1, j0)$. Запас по модулю при этом имеет недопустимо малое значение $L = 1.002$.

Рассмотрим теперь, что означают столь малые запасы устойчивости на входе регулятора.

Характеристический полином системы (10.3.14), (10.3.15) имеет вид

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + 3 & -1 \\ -3 \cdot 10^3 - 2 & s + 2 + 10^3 \end{pmatrix} = s^2 + (5 + 10^3)s + 4. \tag{10.3.26}$$

Допустим теперь, что коэффициент при x_1, в первом из уравнений объекта (10.3.14), отличается от расчётного значения (-3) на 0.3% и равен (-2.99). Характеристический полином системы имеет в этом случае вид

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + 2.99 & -1 \\ -3 \cdot 10^3 - 2 & s + 2 + 10^3 \end{pmatrix} = s^2 + (4.99 + 10^3)s - 6.02. \tag{10.3.27}$$

Таким образом, малые запасы устойчивости оптимальной системы (10.3.14), (10.3.15) по входу регулятора свидетельствуют о её высокой чувствительности к изменению параметра (-3) в уравнении объекта. ■

10.3.3. Возможность малых запасов устойчивости на входе объекта в системах оптимальных в смысле функционалов, содержащих недиагональную матрицу при управлениях

Рассмотрим систему

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(0)}, \tag{10.3.28}$$

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{10.3.29}$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'R\boldsymbol{u}]\, dt, \tag{10.3.30}$$

где Q и R – положительно-определённые матрицы, R – матрица общего вида, не являющаяся диагональной.

Матрица C (10.3.29) определяется в этом случае равенством

$$C = -PBR^{-1}, \tag{10.3.31}$$

где положительно-определённая матрица P служит решением уравнения

$$PA + A'P - PBR^{-1}BP + Q = 0. \tag{10.3.32}$$

Эти уравнения нетрудно получить из (9.3.4), (9.3.5). Действительно, введём новое управление

$$\bar{\boldsymbol{u}} = M\boldsymbol{u}, \tag{10.3.33}$$

где

$$M'M = R. \tag{10.3.34}$$

Тогда уравнения объекта (10.3.28) и функционал (10.3.30) примут вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \bar{B}\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{10.3.35}$$

$$J = \int\limits_0^\infty [\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \bar{\boldsymbol{u}}'\bar{\boldsymbol{u}}]\, dt, \tag{10.3.36}$$

где

$$\bar{B} = BM^{-1}. \tag{10.3.37}$$

Нетрудно видеть, что (10.3.35) и (10.3.36) совпадают с уравнением (9.3.1) и функционалом (9.3.3). Заменим в (9.3.4) и (9.3.5) B на $\bar{B}$, учтём (10.3.37) и получим (10.3.31), (10.3.32).

Условие оптимальности в частотной форме принимает теперь вид

$$\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' R \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = R + H'(-j\omega)H'(j\omega), \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{10.3.38}$$

Это следует непосредственно из (9.3.11) если в нём положить на основе (10.3.31), $PB = -CR$ и учесть уравнение (10.3.32).

Утверждение 10.3.2. Обобщённые запасы устойчивости системы (10.3.28), (10.3.29), оптимальной в смысле функционала (10.3.30),

$$\varphi_{об.з} \ge 60^\circ, \quad L_{об} \ge 2. \tag{10.3.39}$$

■

Для доказательства запишем тождество (10.3.38) как

$$\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right]' R \left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = M' \left[E_m + H'_M(-s)H_M(s)\right] M, \tag{10.3.40}$$

где

$$H_M(s) = H(s)M^{-1} = H(E_m s - A)^{-1} B M^{-1}, \tag{10.3.41}$$

и получим, после сокращения на $\det R \neq 0$, тождество

$$\det\left[E_m + W^{(1)}(-s)\right] \det\left[E_m + W^{(1)}(s)\right] = \det\left[E_m + H'_M(-s)H_M(s)\right]. \tag{10.3.42}$$

Отсюда следует

$$[1 + w_{об}(-s)] \cdot [1 + w_{об}(s)] = \det\left[E_m + H'_M(-s)H_M(s)\right]. \tag{10.3.43}$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (10.3.6) и поэтому, повторяя доказательство теоремы 10.3.1, получим (10.3.39).

Исследуем теперь запасы устойчивости системы (10.3.28), (10.3.29) на входе объекта. Здесь не удаётся доказать существование границ запасов устойчивости (10.3.12). Более того, ниже приводится пример, свидетельствующий о том, что запасы устойчивости рассматриваемой оптимальной системы могут быть малыми.

Приведём некоторые эвристические соображения о причинах такого явления.

Представим систему (10.3.28), (10.3.29) в следующей эквивалентной форме вида (10.1.43), (10.1.44)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(A + B_{\neg\nu} C'_{\neg\nu}\right)\boldsymbol{x} + B_{[\nu]} u_\nu, \tag{10.3.44}$$

$$u_\nu = C'_{[\nu]}\boldsymbol{x}. \tag{10.3.45}$$

Из оптимальности управления (10.3.29) следует, что

$$C_{\neg\nu} = -P\left[BR^{-1}\right]_{\neg\nu}, \quad C_{[\nu]} = -P\left[BR^{-1}\right]_{[\nu]}. \tag{10.3.46}$$

Функционал (10.3.30) также представим, используя обозначения (10.1.68)-(10.1.70), в эквивалентных формах

$$J = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'R\boldsymbol{u}]\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'_{\neg\nu}[R]_{\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}}\boldsymbol{u}_{\neg\nu} + 2\left(R'_{[\tilde{\nu}]}\boldsymbol{u}_{\neg\nu}\right)u_\nu + r_{\nu\nu}u_\nu^2\right] dt, \tag{10.3.47}$$

$$J = \int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}'\left(Q + C_{\neg\nu}[R]_{\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}}C'_{\neg\nu}\right)\boldsymbol{x} + 2\left(R'_{[\tilde{\nu}]}C'_{\neg\nu}\boldsymbol{x}\right)u_\nu + r_{\nu\nu}u_\nu^2\right] dt. \tag{10.3.48}$$

Если в (10.3.44), (10.3.45) исключить матрицу $C_{\neg\nu}$ с помощью первого из соотношений (10.3.46), то естественно ожидать (как и в случае $R = E_m$), что система (10.3.44), (10.3.45) со скалярным управлением является оптимальной в смысле функционала (10.3.48). Однако этот функционал содержит произведения $\boldsymbol{x}$ и u_ν и поэтому

(как следует из примера 4.5.1) система (10.3.44), (10.3.45) может обладать малыми запасами устойчивости.

Пример 10.3.2. Рассмотрим систему (10.2.10), (10.2.11), подробно изученную в примерах 10.2.1, 10.2.2, где показано, что эта система обладает малой степенью грубости, а её запасы (10.2.29) по фазе и модулю на входе объекта малы при достаточно больших значениях α.

Покажем, что эта система является оптимальной в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left[x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{9}u_1^2 + \frac{2}{9}(4\alpha+5)u_1u_2 + \frac{1}{9}(4\alpha^2+10\alpha+9)u_2^2\right] dt. \qquad (10.3.49)$$

Итак, пусть имеется объект (10.2.10) и требуется найти управления

$$u_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2, \quad u_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2, \qquad (10.3.50)$$

такие, чтобы на движениях системы (10.2.10), (10.2.50) минимизировался функционал (10.3.49). Уравнения (10.3.31), (10.3.32), разрешающие эту задачу, имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 4\alpha^2+10\alpha+9 & -4\alpha-5 \\ -4\alpha-5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (10.3.51)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\alpha^2+10\alpha+9 & -4\alpha-5 \\ -4\alpha-5 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (10.3.52)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что разрешающая уравнение (10.3.51) матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (10.3.53)$$

Подставляя эту матрицу в (10.3.52), получим управление (10.2.11). ■

10.3.4. Границы запасов устойчивости систем, оптимальных по критерию обобщённой работы

Пусть матрица C в регуляторе (10.3.2) получена в результате процедуры АКОР по критерию обобщённой работы. Это означает, что

$$C = -P^{(1)}B, \qquad (10.3.54)$$

где положительно-определённая матрица $P^{(1)}$ служит решением уравнения Ляпунова (9.3.43)

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} = -Q. \qquad (10.3.55)$$

Теорема 10.3.4. Система (10.3.1), (10.3.2) оптимальная по критерию обобщённой работы обладает запасами устойчивости по входу объекта

$$\varphi_з^{(1)} > 90^\circ, \quad L^{(1)} \to \infty. \tag{10.3.56}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.5. Эта теорема является обобщением утверждения 4.2.3 на случай векторного управления.

Теорема 10.3.5. Многосвязные запасы устойчивости по входу системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы,

$$\varphi_з^{(1)M} > 90^\circ, \quad L^{(1)M} \to \infty. \tag{10.3.57}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.6.

Приложения к главе 10

10.П. Матрицы возвратной разности и их сингулярные значения

10.П.1. Аддитивные параметрические возмущения

Пусть на входе объекта управления (10.1.1) действует вместе с управлением внешнее возмущение $\boldsymbol{f}(t)$. Тогда уравнения (10.1.1), (10.1.2) примут вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}), \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + F_o\boldsymbol{u}, \tag{10.П.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{10.П.2}$$

где $\boldsymbol{f}(t)$ – неизвестный m-мерный вектор.

Найдём связь между вектором – $\boldsymbol{u}$ – выхода регулятора (10.П.2) и вектором $\boldsymbol{f}$.

Преобразуя (10.П.1), (10.П.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим, учитывая (10.1.4), (10.1.5)

$$\boldsymbol{y} = W(s)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}), \quad \boldsymbol{u} = W_p(s)\boldsymbol{y}. \tag{10.П.3}$$

Отсюда, исключая $\boldsymbol{y}(s)$, заключаем

$$\boldsymbol{u} = -\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1} W^{(1)}(s)\boldsymbol{f}. \tag{10.П.4}$$

На основе этого выражения нетрудно построить структурную схему системы (10.П.1), (10.П.2), которая приведена на рис. 10.П.1.

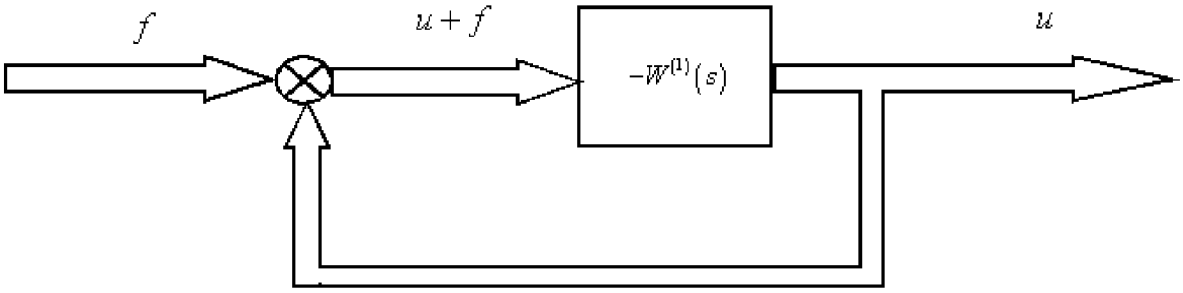

Рис. 10.П.1.

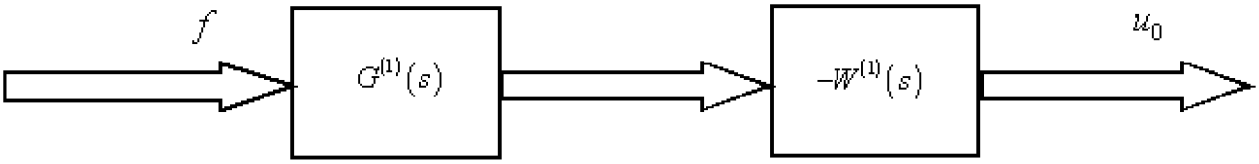

Рис. 10.П.2.

Схема, приведённая на этом рисунке, содержит обратную связь. Эквивалентная ей схема без обратной связи приведена на рис. 10.П.2.

Передаточная матрица $G(s)$ (размеров $m \times m$) в этой схеме выбирается так, чтобы

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0. \tag{10.П.5}$$

Очевидно, что для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$G^{(1)}(s) = \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}. \tag{10.П.6}$$

Матрицы $W^{(1)}(s)$ и $G^{(1)}(s)$ определяются номинальными значениями параметров системы (10.П.1), (10.П.2).

Пусть эта система подвержена параметрическим возмущениям. Матрицы $W^{(1)}(s)$ и $G^{(1)}(s)$ параметрически возмущённой системы будем обозначать как $W_\alpha^{(1)}(s)$ и $G_\alpha^{(1)}(s)$ соответственно. Для простоты будем полагать, параметрические возмущения в блоке, реализующем $G^{(1)}(s)$, отсутствуют. Это означает, что

$$G_\alpha^{(1)}(s) = G^{(1)}(s). \tag{10.П.7}$$

Кроме того, пусть

$$W_\alpha^{(1)}(s) = W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s), \tag{10.П.8}$$

где $\Delta W^{(1)}(s)$ – передаточная матрица (размеров $m \times m$), определяемая параметрическими аддитивными возмущениями системы (10.П.1), (10.П.2).

Структурные схемы параметрически возмущённой замкнутой и разомкнутой систем приведены: на рис. 10.П.3. и рис. 10.П.4.

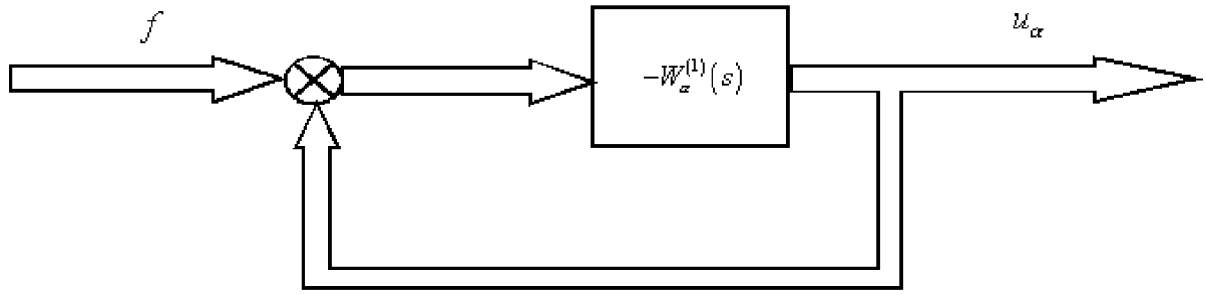

Рис. 10.П.3.

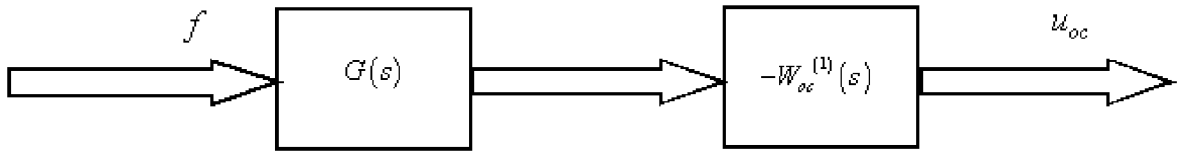

Рис. 10.П.4.

Введём в рассмотрение разность векторов управлений исходной параметрически возмущённой замкнутой системы

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}. \tag{10.П.9}$$

Аналогично, разность этих векторов для разомкнутой системы

$$\boldsymbol{e}_0^{(1)} = \boldsymbol{u}_{0\alpha} - \boldsymbol{u}_0. \tag{10.П.10}$$

Определение 10.П.1. Замкнутая система называется менее чувствительной по управлению к параметрическим возмущениям по сравнению с разомкнутой, если

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}^{(1)\prime}(t)\boldsymbol{e}^{(1)}(t)\,dt \le \int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}_0^{(1)\prime}(t)\boldsymbol{e}_0^{(1)}(t)\,dt. \tag{10.П.11}$$

■

10.П.2. Условие низкой чувствительности

Найдём условия, накладываемые на матрицу $W^{(1)}(s)$, при которых система (10.П.1), (10.П.2) менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая система. Для этого исследуем связь векторов $\boldsymbol{e}^{(1)}$ и $\boldsymbol{e}_0^{(1)}$, с вектором $\boldsymbol{f}$.

Непосредственно из рис. 10.П.3. и рис. 10.П.4. следует

$$\boldsymbol{u}_\alpha = -\left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1} W_\alpha^{(1)}(s)\boldsymbol{f}. \tag{10.П.12}$$

Разность

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(1)} &= \boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u} = -\left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1} W_\alpha^{(1)}(s)\boldsymbol{f} + \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1} W^{(1)}(s)\boldsymbol{f} = \\ &= -\left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1} \cdot \Big\{W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s) - \\ &\quad - \left[E_m + W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s)\right] \cdot \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1} W^{(1)}(s)\Big\}\boldsymbol{f} = \\ &= -\left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1} \cdot \left\{\Delta W^{(1)}(s) \cdot \left[E_m - \left(E_m + W^{(1)}(s)\right)^{-1} W^{(1)}(s)\right]\right\}\boldsymbol{f}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$E_m - \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1} W^{(1)}(s) = E_m + W^{(1)}(s) \tag{10.П.13}$$

(в этом нетрудно убедиться умножая (10.П.13) слева на $E_m + W^{(1)}(s)$, получим окончательно

$$\boldsymbol{e} = -\left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1} \Delta W^{(1)}(s) \left[E_m + W^{(1)}(s)\right] \boldsymbol{f}. \tag{10.П.14}$$

Рассмотрим теперь разомкнутую систему. Из рис. 10.П.4. и (10.П.6) следует

$$\boldsymbol{u}_{0\alpha} = -W_\alpha^{(1)}(s)G^{(1)}(s)\boldsymbol{f} = -W_\alpha^{(1)}(s)\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{f}. \tag{10.П.15}$$

Подчеркнём, что матрица $G^{(1)}(s)$ строилась так, чтобы параметрические невозмущённые замкнутая и разомкнутая системы совпадали. После построения этой матрицы нужно ««забыть»» о её происхождении и считать, что входящая в $G^{(1)}(s)$ матрица $W^{(1)}(s)$ лишь формально совпадает с передаточной матрицей системы (10.П.1), (10.П.2).

Найдём теперь разность

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{u}_{0\alpha} - \boldsymbol{u}_0 = -W_\alpha^{(1)}(s)G^{(1)}(s)\boldsymbol{f} + W^{(1)}(s)G^{(1)}(s)\boldsymbol{f} = -\Delta W^{(1)}(s)\left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{f}. \tag{10.П.16}$$

Сравнивая (10.П.14) с (10.П.16) заключаем, что

$$\boldsymbol{e} = \left[E_m + W_\alpha^{(1)}(s)\right]^{-1}\boldsymbol{e}_0. \tag{10.П.17}$$

При малых параметрических возмущениях $W_\alpha^{(1)}(s) \approx W^{(1)}(s)$ и поэтому в (10.П.17) заменим $W_\alpha^{(1)}(s)$ на $W^{(1)}(s)$.

Определение 10.П.2. Передаточная матрица

$$S^{(1)}(s) = \left[E_m + W^{(1)}(s)\right]^{-1} \tag{10.П.18}$$

называется *оператором чувствительности* по управлению, а матрица $E_m + W^{(1)}(s)$ называется *матрицей возвратной разности по управлению.* ■

Теорема 10.П.1. Замкнутая система менее чувствительна по управлению к параметрическим возмущениям, если её оператор чувствительности удовлетворяет условиям

$$S^{(1)\prime}(-j\omega)S^{(1)}(j\omega) \le E_m, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{10.П.19}$$

■

Доказательство. Используя теорему Парсеваля (4.Д.74) запишем при условии, что $\boldsymbol{e}(s) = S(s)\boldsymbol{e}_0(s)$

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}'(t)\boldsymbol{e}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}'(-j\omega)\boldsymbol{e}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}_0'(-j\omega)S^{(1)\prime}(-j\omega)S^{(1)}(j\omega)\boldsymbol{e}_0(j\omega)d\omega. \tag{10.П.20}$$

С другой стороны

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}_0'(t)\boldsymbol{e}_0(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}_0'(-j\omega)\boldsymbol{e}_0(j\omega)\,d\omega. \tag{10.П.21}$$

Из (10.П.20), (10.П.21) следует, что неравенство (10.П.11) выполняется, если выполняется условие (10.П.19) и таким образом теорема 10.П.1 доказана.

Отметим, что неравенство (10.П.19) – это выражение неотрицательности матрицы $E_m - S^{(1)\prime}(-j\omega)S^{(1)}(j\omega)$ для всех ω.

Используя обозначение (10.П.18) получим явный вид условия низкой чувствительности

$$\left[E_m + W^{(1)\prime}(-j\omega)\right]\cdot\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] \geq E_m, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \tag{10.П.22}$$

В случае скалярного управления (когда $m = 1$) это условие принимает вид

$$[1 + w_{раз}(-j\omega)]\cdot[1 + w_{раз}(j\omega)] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \tag{10.П.23}$$

Сравнивая это неравенство с (2.2.9), получаем следствие теоремы 10.П.1.

Следствие 10.П.1. Если замкнутая система со скалярным управлением менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая система, то радиус запасов устойчивости на входе объекта такой системы не менее 1. ■

Таким образом, произведение матрицы возвратной разности на её сопряжённую служит мерой грубости системы регулирования.

10.П.3. Чувствительность по регулируемым переменным

Аналогично вводится понятие оператора чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по регулируемым переменным.

Действительно, пусть на вход регулятора (10.1.2) действует вместе с вектором измеряемых переменных – $\boldsymbol{y}$ – внешнее возмущение (помеха) $\boldsymbol{\varphi}$. Уравнения (10.1.1), (10.1.2) имеют в этом случае вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x} + F_o\boldsymbol{u}, \tag{10.П.24}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}), \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}. \tag{10.П.25}$$

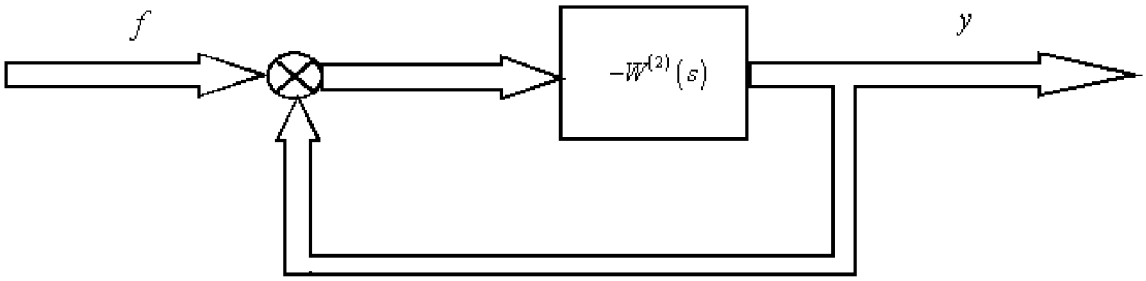

Рис. 10.П.5.

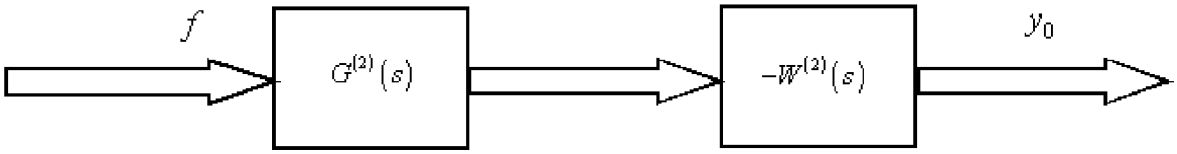

Рис. 10.П.6.

Структурная схема этой системы приведена на рис. 10.П.5.

Эквивалентная разомкнутая система приведена на рис. 10.П.6.
где $G^{(2)}(s) = E_r + W^{(2)}(s)$.

Введём разность

$$\boldsymbol{e}^{(2)} = \boldsymbol{y}_\alpha - \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{e}_0^{(2)} = \boldsymbol{y}_{0\alpha} - \boldsymbol{y}_0, \tag{10.П.26}$$

где $\boldsymbol{y}_\alpha$ и $\boldsymbol{y}_{0\alpha}$ – выходы объекта в параметрически возмущённых замкнутой и разомкнутой системах соответственно.

Определение 10.П.3. Замкнутая система называется менее чувствительной по регулируемым переменным к параметрическим возмущениям по сравнению с разомкнутой, если

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}^{(2)\prime}(t)\boldsymbol{e}^{(2)}(t)\,dt \le \int\limits_0^\infty \boldsymbol{e}_0^{(2)\prime}(t)\boldsymbol{e}_0^{(2)}(t)\,dt. \tag{10.П.27}$$

■

Теорема 10.П.2. Замкнутая система менее чувствительна по регулируемым переменным к параметрическим возмущениям, если её оператор чувствительности по регулируемым переменным

$$S^{(2)}(s) = \left[E_r + W^{(2)}(s)\right]^{-1} \tag{10.П.28}$$

удовлетворяет условию

$$S^{(2)\prime}(-j\omega)S^{(2)}(j\omega) \le E_r, \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{10.П.29}$$

■

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 10.П.1.

Следствие 10.П.2. Если замкнутая система со скалярной изменяемой переменной менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая, то радиус запасов устойчивости на входе регулятора такой системы не менее 1 $\left(r^{(2)} \geq 1\right)$. ■

10.П.4. Анализ грубости на основе матриц возвратной разности

Рассмотрим подробнее соотношение (10.П.22), выражающее условие низкой чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по управлению. Оно является сокращённой (символической) формой описания неравенства Эрмитовых форм

$$\bar{\boldsymbol{z}}' \left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] \boldsymbol{z} \geq \bar{\boldsymbol{z}}'\boldsymbol{z} \quad \forall \boldsymbol{z}, \omega, \tag{10.П.30}$$

где $\boldsymbol{z}$ – m-мерный вектор комплексных чисел, а $\bar{\boldsymbol{z}}$ – комплексно-сопряжённый к нему вектор.

Для проверки этого неравенства нужно вычислить собственные числа симметричной матрицы $\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right]$, которые будем обозначать $\lambda_k^{(1)}(\omega)$ $\left(k = \overline{1, m}\right)$. Если

$$\lambda_k^{(1)}(\omega) \geq 1 \quad k = \overline{1, m}, \quad \forall \omega, \tag{10.П.31}$$

то неравенство (10.П.30) выполняется.

Действительно, Эрмитову матрицу $\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right]$, всегда можно представить как

$$\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)}(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{(1)}(\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m^{(1)}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \bar{U}',$$

где U – унитарная матрица, обладающая свойством

$$\bar{U}'U = E_m.$$

Введём новый вектор

$$\boldsymbol{\eta} = \bar{U}'\boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{z} = \left[\bar{U}'\right]^{-1} \boldsymbol{\eta} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{z} = U\boldsymbol{\eta}\right),$$

тогда (10.П.30) примет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_k^{(1)}(\omega) \bar{\eta}_k \eta_k \geq \sum_{k=1}^{m} \bar{\eta}_k \eta_k.$$

Отсюда следует (10.П.31).

Условие (10.П.29) низкой чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по регулируемым переменным также можно записать в виде

$$\left[E_r + W^{(2)}(-j\omega)\right]' \left[E_r + W^{(2)}(j\omega)\right] \geq E_r \quad \forall\omega. \tag{10.П.32}$$

Это неравенство выполняется, если

$$\lambda_k^{(2)}(\omega) \geq 1 \quad k = \overline{1,r}, \quad \forall\omega, \tag{10.П.33}$$

где $\lambda_k^{(2)}(\omega)$ – собственные числа Эрмитовой матрицы

$$\left[E_r + W^{(2)}(-j\omega)\right]' \left[E_r + W^{(2)}(j\omega)\right].$$

При скалярном управлении

$$\lambda_1^{(1)}(\omega) = \left[1 + w^{(1)}(-j\omega)\right] \left[1 + w^{(1)}(j\omega)\right], \tag{10.П.34}$$

а при скалярной измеряемой переменной

$$\lambda_1^{(2)}(\omega) = \left[1 + w^{(2)}(-j\omega)\right] \left[1 + w^{(2)}(j\omega)\right]. \tag{10.П.35}$$

Пример 10.П.1. Исследуем матрицу возвратной разности системы (10.1.8), (10.1.9), рассмотренной в примере 10.1.1. Передаточные матрицы $W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s)$ этой системы имеют вид (10.1.11) и следовательно матрица

$$\left[E_2 + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_2 + W^{(1)}(j\omega)\right] = \left[E_2 + W^{(2)}(-j\omega)\right]' \left[E_2 + W^{(2)}(j\omega)\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{1-j\omega} & \dfrac{3}{1-j\omega} \\ 0 & 1 + \dfrac{1}{1-j\omega} \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{1+j\omega} & \dfrac{3}{1+j\omega} \\ 0 & 1 + \dfrac{1}{1+j\omega} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2-j\omega}{1-j\omega} & 0 \\ \dfrac{3}{1-j\omega} & \dfrac{2-j\omega}{1-j\omega} \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \dfrac{2+j\omega}{1+j\omega} & \dfrac{3}{1+j\omega} \\ 0 & \dfrac{2+j\omega}{1+j\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega^2+4}{\omega^2+1} & \dfrac{3(2-j\omega)}{\omega^2+1} \\ \dfrac{3(2+j\omega)}{\omega^2+1} & \dfrac{\omega^2+13}{\omega^2+1} \end{pmatrix}.$$

переходя к нахождению собственных чисел последней матрицы, составим характеристический полином

$$d(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \dfrac{\omega^2+4}{\omega^2+1} & -\dfrac{3(2-j\omega)}{\omega^2+1} \\ -\dfrac{3(2+j\omega)}{\omega^2+1} & \lambda - \dfrac{\omega^2+13}{\omega^2+1} \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2\omega^2+17}{\omega^2+1}\lambda + \frac{\omega^4+8\omega^2+16}{(\omega^2+1)^2}.$$

Корни этого полинома

$$\lambda_1(\omega) = \frac{2\omega^2 + 17 + \sqrt{36\omega^2+125}}{2(\omega^2+1)}, \quad \lambda_2(\omega) = \frac{2\omega^2 + 17 - \sqrt{36\omega^2+125}}{2(\omega^2+1)}. \tag{10.П.36}$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_1(\omega) > 1 \quad \forall\omega, \tag{10.П.37}$$

а $\lambda_2(\omega)$ может принимать значение меньше 1.

Действительно, при $\omega = 3$

$$\lambda_2(3) = 0.69 < 1. \tag{10.П.38}$$

Это соотношение имеет принципиальное значение. Дело в том, что система (10.1.8), (10.1.9) обладает хорошими запасами устойчивости, а неравенства (10.П.19) и (10.П.29) для неё нарушаются. В связи с этим исследуем систему (10.1.8), (10.1.9) более детально. Убедимся вначале, что для этой системы

$$r_{об} \geq 1, \quad \varphi_3^{(1)} = \varphi_3^{(2)} =\geq 90^\circ, \quad L^{(1)} = L^{(2)} \to \infty. \tag{10.П.39}$$

Действительно, из (10.1.39) следует, что

$$1 + w_{об}(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}.$$

Тогда $|1 + w_{об}(j\omega)|^2 = \dfrac{(\omega^2+4)^2}{(\omega^2+1)^2} \geq 1 \ \ \forall\omega$.

Это означает, что $r_{об} \geq 1$.

Далее, на основе (10.1.55), (10.1.54), (10.1.84) заключаем, что

$$W_1^{(1)}(s) = W_2^{(1)}(s) = W_1^{(2)}(s) = W_2^{(2)}(s) = (s+1)^{-1}. \tag{10.П.40}$$

Годограф АФЧХ, соответствующий этой передаточной функции, приведён на рис. 10.П.7. Откуда следуют остальные из соотношений (10.П.39).

Рассмотрим множество систем (10.1.8), (10.1.9), которое описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + b_{12}u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \qquad u_1 = -x_1, \quad u_2 = -x_2, \tag{10.П.41}$$

где b_{12} – произвольное число.

Нетрудно проверить, что передаточные функции $W_1^{(1)}(s)$, $W_2^{(1)}(s)$, $W_1^{(2)}(s)$, $W_2^{(2)}(s)$ и $w_{об}(s)$ этой системы не зависят от b_{12} и совпадают с (10.1.39) и (10.П.40) и, следовательно, независимо от b_{12} выполняются соотношения (10.П.39).

Пусть объект управления системы (10.П.41) подвержен структурным возмущением и ««возмущённая»» система имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + b_{12}u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{5}{b_{12}}u_1 + u_2, \qquad u_1 = -x_1, \quad u_2 = -x_2, \tag{10.П.42}$$

Структурная схема исходного объекта и возмущённого объекта (10.П.41), (10.П.42) приведена на рис. 10.П.8.

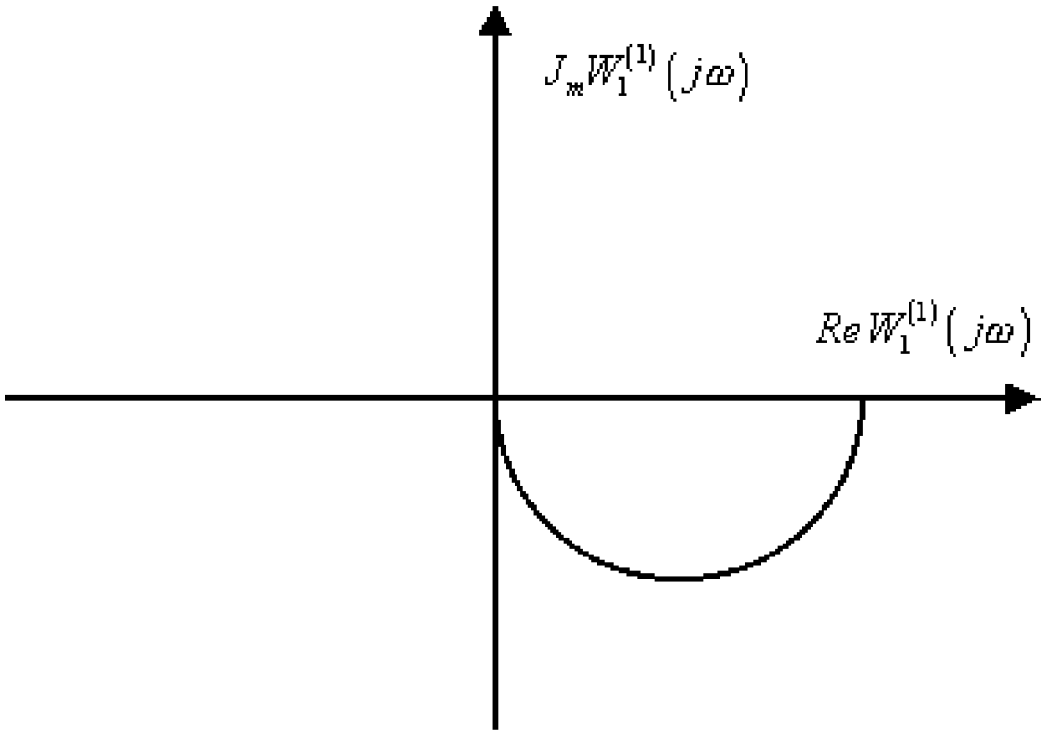

Рис. 10.П.7.

Характеристический полином системы (10.П.42)

$$d(s) = \det \begin{pmatrix} s+2 & -b_{12} \\ -\dfrac{5}{b_{12}} & s+2 \end{pmatrix} = s^2 + 4s + 4 - \frac{5}{b_{12}} \cdot b_{12} = s^2 + 4s - 1. \qquad (10.\text{П}.43)$$

Таким образом, если объект системы управления (10.П.41) подвержен структурным возмущениям, то при сколь угодно малых значениях числа $\dfrac{5}{b_{12}}$ он теряет устойчивость. Признаком такого свойства рассматриваемой системы является соотношение (10.П.38). ■

10.П.5. Сингулярные значения матриц возвратной разности

Естественно сократить число $m + r$ условий (10.П.31), (10.П.33) низкой чувствительности и для этого введём понятие о наименьших сингулярных значениях матриц возвратной разности.

Определение 10.П.4. Сингулярными числами – $\sigma_i[K]$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – некоторой комплексной матрицы K размеров $n \times n$ называются квадратные корни из собственных чисел неотрицательной матрицы $\bar{K}'K$, (где $\bar{K}$ – комплексно сопряженная матрица). Это означает, что

$$\sigma_i[K] = \sqrt{\lambda_i\left[\bar{K}'K\right]} \quad i = \overline{1,n}. \qquad (10.\text{П}.44)$$

■

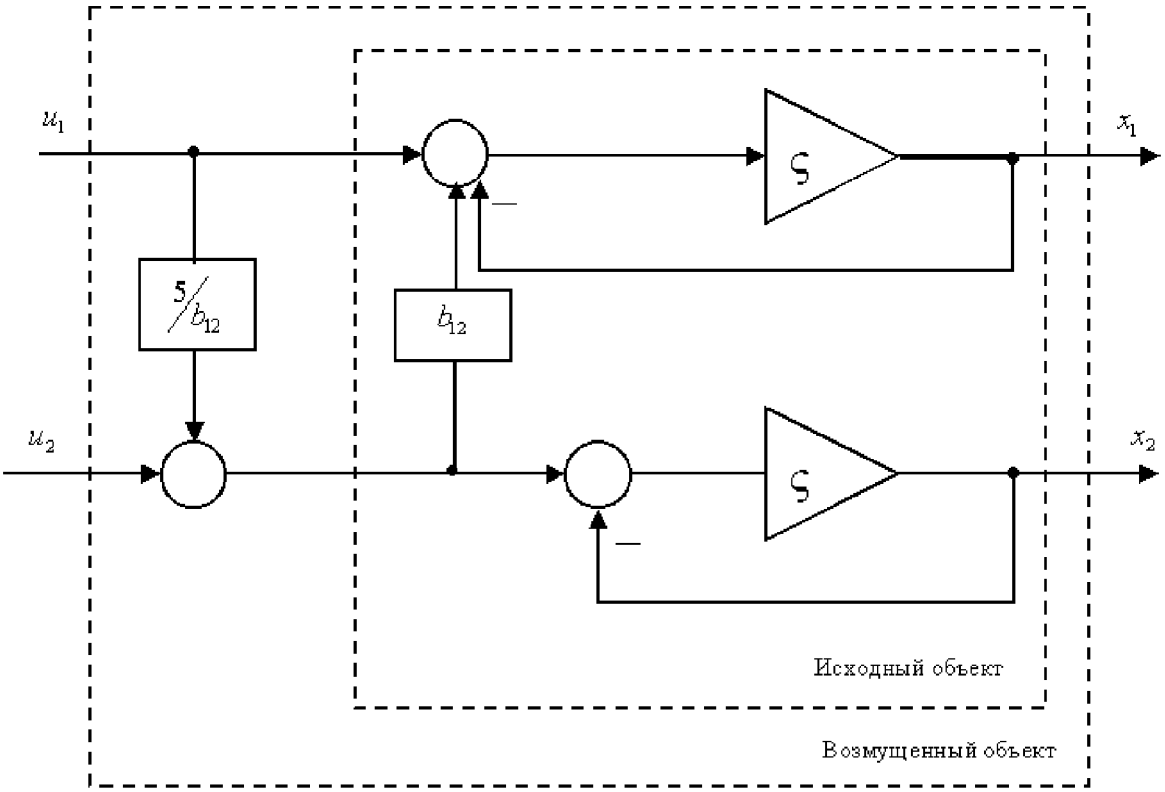

Рис. 10.П.8.

В соответствии с этим определением

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_i\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = \sqrt{\lambda_i^{(1)}(\omega)} \quad i = \overline{1,m}, \tag{10.П.45}$$

$$\sigma_i^{(2)} = \sigma_i\left[E_r + W^{(2)}(j\omega)\right] = \sqrt{\lambda_i^{(2)}(\omega)} \quad i = \overline{1,r}. \tag{10.П.46}$$

Определение 10.П.5. *Наименьшим сингулярным значением матрицы возвратной разности по управлению* называется функция

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) = \min\left\{\sigma_1^{(1)}(\omega),\ \sigma_2^{(1)}(\omega),\ \ldots,\ \sigma_m^{(1)}(\omega)\right\} \quad \forall\omega. \tag{10.П.47}$$

■

Определение 10.П.6. *Наименьшим сингулярным значением матрицы возвратной разности по регулируемым переменным* называется функция

$$\underline{\sigma}^{(2)}(\omega) = \min\left\{\sigma_1^{(2)}(\omega),\ \sigma_2^{(2)}(\omega),\ \ldots,\ \sigma_r^{(2)}(\omega)\right\} \quad \forall\omega. \tag{10.П.48}$$

■

На рис. 10.П.9. показано как определяется функция $\underline{\sigma}^{(1)}(\omega)$ (которая отмечена штриховкой) по известным функциям $\sigma_1^{(1)}(\omega)$, $\sigma_2^{(1)}(\omega)$ при $m = 2$.

При скалярном управлении $\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) = \sigma_1^{(1)}(\omega) = \left[1 + w^{(1)}(-j\omega)\right]\left[1 + w^{(1)}(j\omega)\right]$ и поэтому радиус запасов устойчивости

$$r^{(1)} = \min_{0\le\omega\le\infty} \underline{\sigma}^{(1)}(\omega). \tag{10.П.49}$$

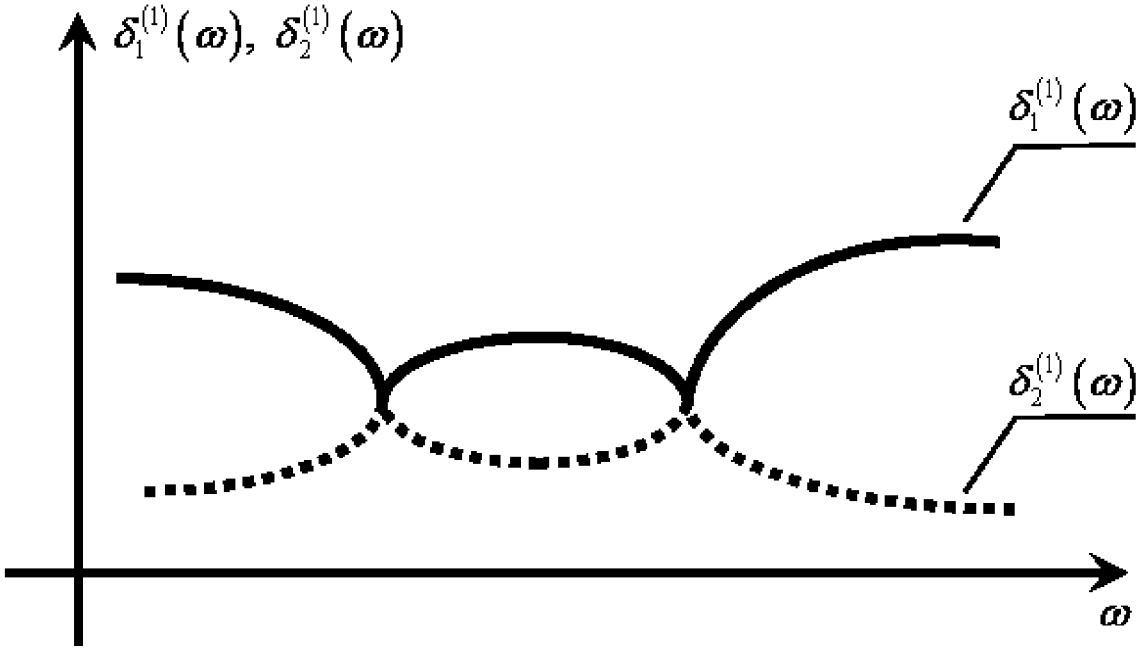

Рис. 10.П.9.

Аналогично, при скалярной измеряемой переменной

$$r^{(2)} = \min_{0 \le \omega \le \infty} \underline{\sigma}^{(2)}(\omega). \qquad (10.\text{П}.50)$$

Неравенства (10.П.22), (10.П.32) выполняются и, следовательно, система (10.1.1), (10.1.2) обладает низкой чувствительностью, если, соответственно

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \ge 1, \qquad (10.\text{П}.51)$$

$$\underline{\sigma}^{(2)}(\omega) \ge 1. \qquad (10.\text{П}.52)$$

10.П.6. Границы сингулярных значений матрицы возвратной разности по управлению

Утверждение 10.П.1. Система (10.3.1), (10.3.2), оптимальная в смысле функционала (10.3.3), обладает низкой чувствительностью по управлению. ■

Действительно, из тождества (9.3.16) при $s = j\omega$ следует, что

$$\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]' \left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] \ge E_m. \qquad (10.\text{П}.53)$$

Это в соответствии с 10.П.22 выражает низкую чувствительность оптимальной системы по управлению.

Утверждение 10.П.2. Наименьшее сингулярное значение матрицы возвратной разности по управлению оптимальной, в смысле функционала (10.3.3) системы (10.3.1), (10.3.2)

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \ge 1. \qquad (10.\text{П}.54)$$

■

Доказательство. Из тождества (9.3.16) при $s = j\omega$ и определения 10.П.5 следует, что

$$\sigma_i\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = \sqrt{\lambda_i\left[E_m + H'(-j\omega)H(j\omega)\right]} \quad i = \overline{1,m}. \tag{10.П.55}$$

Для суммы матриц $E_m + \Psi$, где Ψ – произвольная комплексная матрица размеров $m \times m$, справедливо равенство

$$\lambda_i[E_m + \Psi] = 1 + \lambda_i[\Psi]. \tag{10.П.56}$$

Действительно, собственные числа матрицы $E_m + \Psi$ находятся как корни уравнения

$$\det[E\lambda - E - \Psi] = \det[E(\lambda - 1) - \Psi] = 0.$$

Обозначая $\lambda - 1 = z$, найдём корни $z_i[\Psi]$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ полинома $\det[Ez - \Psi]$, которые являются собственными числами матрицы Ψ. Используя введённое обозначение, получим выражение (10.П.56), с учётом которого можно записать (10.П.55) в виде

$$\sigma_i\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = \sigma_i^{(1)}(\omega) = \sqrt{1 + \lambda_i\left[H'(-j\omega)H(j\omega)\right]} \quad i = \overline{1,m}. \tag{10.П.57}$$

Так как $\lambda_i[H'(-j\omega)H(j\omega)] \geq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, то $\sigma_i^{(1)}(\omega) \geq 1$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ и таким образом утверждение доказано.

10.П.7. Критерий обобщённой работы

Утверждение 10.П.3. Система (10.3.1), (10.3.2), построенная на основе АКОР по критерию обобщённой работы, обладает низкой чувствительностью по управлению. ■

Действительно, прибавим матрицу $E_m + W^{(1)\prime}(-j\omega)W^{(1)}(j\omega)$ к обеим частям тождества (9.3.44). Тогда получим

$$\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]'\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] = E_m + H'(-j\omega)H(j\omega) + W^{(1)\prime}(-j\omega)W^{(1)}(j\omega). \tag{10.П.58}$$

Отсюда следует неравенство

$$\left[E_m + W^{(1)}(-j\omega)\right]'\left[E_m + W^{(1)}(j\omega)\right] \geq E_m, \tag{10.П.59}$$

выражающее низкую чувствительность рассматриваемой системы.

Утверждение 10.П.4. Наименьшее сингулярное значение матрицы возвратной разности по управлению системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \geq 1. \tag{10.П.60}$$

■

Доказательство повторяет доказательство утверждения 10.П.2, если принять во внимание тождество (10.П.58).

Доказательства к главе 10

10.Д. Доказательство теорем и утверждений

10.Д.1. Доказательство утверждения 10.1.1

(Построение характеристического полинома многомерной системы).

Преобразуем (10.1.1), (10.1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях и запишем определитель матриц коэффициентов при векторах $\boldsymbol{x}(s)$, $\boldsymbol{u}(s)$, $\boldsymbol{x}_p(s)$, $\boldsymbol{y}(s)$

$$d^u(s) = \det \left(\begin{array}{cc|cc} E_n s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -D_p & -F_p \\ \hline 0 & 0 & E_{n_\text{p}} s - A_p & -B_p \\ -D & -F_o & 0 & E_r \end{array} \right).$$

Применим для вычисления определителя этой блочной матрицы известную формулу. Тогда

$$\begin{aligned}
d^u(s) &= \det \left(\begin{array}{c|c} E_n s - A & -B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right) \cdot \det \left[\left(\begin{array}{c|c} E_{n_\text{p}} s - A_p & -B_p \\ \hline 0 & E_r \end{array} \right) - \right. \\
&\left. - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D & -F_o \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} E_n s - A & -B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right)^{-1} \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p & -F_p \end{array} \right) \right] = \\
&= \det(E_n s - A) \cdot \det \left[E_{n_\text{p}+r} - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D & -F_o \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} (E_n s - A)^{-1} & (E_n s - A)^{-1} B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right) \times \right. \\
&\left. \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p & -F_p \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} \left(E_{n_\text{p}} s - A_p\right)^{-1} & \left(E_{n_\text{p}} s - A_p\right)^{-1} B \\ \hline 0 & E_r \end{array} \right) \right] \cdot \det \left(E_{n_\text{p}} s - A_p\right) = \\
&= d^c(s) \cdot \det \left[E_{n_\text{p}+r} - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D(E_n s - A)^{-1} & -D(E_n s - A)^{-1} B - F_o \end{array} \right) \times \right. \\
&\left. \times \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p \left(E_{n_\text{p}} s - A_p\right)^{-1} & -D_p \left(E_{n_\text{p}} s - A_p\right)^{-1} B_p - F_p \end{array} \right) \right] = \\
&= d^c(s) \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} E_{n_\text{p}} & 0 \\ \hline [D(E_n s - A)^{-1} B - F_o] \cdot & \boxed{D_p (E_{n_\text{p}} s - A_p)^{-1}} \quad \nwarrow \\ \hline E_r + [D(E_n s - A)^{-1} B + F_o] \cdot & \boxed{-D_p (E_{n_\text{p}} s - A_p)^{-1} B_p - F_p} \end{array} \right) = \\
&= d^c(s) \cdot \det \left[E_r - W_o(s) W_p(s) \right] = d^c(s) \cdot \det \left[E_r + W^{(2)}(s) \right],
\end{aligned}$$

и таким образом соотношение (10.1.31) доказано.

Для доказательства (10.1.30) запишем $d^u(s)$ после перестановки соответствующих строк и столбцов, в виде

$$d^u(s) = \det \left(\begin{array}{cc|cc} E_{n_p} s - A_p & -B_p & 0 & 0 \\ 0 & E_r & -D & -F_o \\ \hline 0 & 0 & E_n s - A & -B \\ -D_p & -F_p & 0 & E_m \end{array} \right).$$

Повторяя изложенное, получим (10.1.30).

10.Д.2. Доказательство теоремы 10.3.1

Для вывода неравенства 10.3.10 воспользуемся теоремой об определителе суммы двух матриц и формулой Бине-Коши.

Из указанной теоремы следует утверждение: определитель суммы двух матриц, одна из которых единичная, а другая – произвольная матрица S (размеров $m \times m$) является суммой единицы и всех главных миноров k-го порядка $\left(k = \overline{1, m}\right)$ матрицы S.

Проиллюстрируем это утверждение простым примером.

Пусть $m = 3$, тогда

$$\det[E_3 + S] = \det \begin{pmatrix} 1 + s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 1 + s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & 1 + s_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= (1+s_{11})[(1+s_{22})(1+s_{33}) - s_{23}s_{32}] - s_{21}[s_{12}(1+s_{33}) - s_{13}s_{32}] + s_{31}[s_{12}s_{23} - s_{13}(1+s_{22})] =$$

$$= 1 + s_{11} + s_{22} + s_{33} + (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) + (s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + (s_{33}s_{11} - s_{31}s_{13}) +$$

$$+ s_{11}(s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + s_{21}(s_{13}s_{32} - s_{12}s_{33}) + s_{31}(s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22}). \qquad (10.Д.1)$$

В этом выражении s_{11}, s_{22}, s_{33} – главные (диагональные) миноры первого порядка; в круглых скобках – главные миноры второго порядка (получаемые как определитель матрицы, стоящих на пересечениях первых двух строк и первых двух столбцов, затем первой и третьей строк и столбцов и т.д.); наконец, в квадратных скобках – минор третьего порядка.

Если матрица $S = T'T$, где T – матрица размеров $n \times m$, то любой из главных миноров k-го порядка $(k \le m)$ матрицы S можно представить в виде детерминанта

$$\det \left[T^{(k)\prime} T^{(k)} \right], \qquad (10.Д.2)$$

в котором $T^{(k)}$ – матрица размеров $n \times k$, составленная из k столбцов матрицы T, выбираемых в зависимости от того, какой именно из главных миноров k-го порядка рассматривается.

Например, если

$$S = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \\ t_{13} & t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 & t_{11}t_{21} + t_{12}t_{22} + t_{13}t_{23} \\ t_{21}t_{11} + t_{22}t_{12} + t_{23}t_{13} & t_{21}^2 + t_{22}^2 + t_{23}^2 \end{pmatrix},$$

то миноры первого порядка s_{11} и s_{22} (диагональные элементы матрицы S) являются скалярным произведением векторов

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{bmatrix}.$$

Переходя непосредственно к доказательству (10.3.10), отметим, что в рассматриваемом случае

$$S = H'(-j\omega)H(j\omega),$$

а $\psi_{об}(\omega)$ – это сумма всех главных миноров k-го порядка $(k \le m)$.

Рассмотрим конкретный минор и покажем, что

$$\det\left[H^{(k)\prime}(-j\omega)H^{(k)}(j\omega)\right] \ge 0. \tag{10.Д.3}$$

Действительно, в соответствии с формулой Бине-Коши определитель матрицы $H^{(k)\prime}(-j\omega)H^{(k)}(j\omega)$ равен сумме произведений миноров k-го порядка матрицы $H^{(k)}(-j\omega)$ на соответствующие миноры того же порядка матрицы $H^{(k)}(j\omega)$; каждое из этих произведений – неотрицательно, так как каждый минор k-го порядка матрицы $H^{(k)}(-j\omega)$ и соответствующий минор k-го порядка матрицы $H^{(k)}(j\omega)$ является комплексно-сопряжёнными. Из неравенств (10.Д.3) следует (10.3.10) и, таким образом, теорема доказана.

10.Д.3. Доказательство теоремы 10.3.2

Представим оптимальную систему (10.3.1), (10.3.2) в эквивалентной форме (10.1.43), (10.1.44)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu})\,\boldsymbol{x} + B_{[\nu]}u_\nu, \tag{10.Д.4}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu = C'_{[\nu]}\boldsymbol{x}. \tag{10.Д.5}$$

Из оптимальности управления (10.3.2) следует, что

$$C_{\neg\nu} = -PB_{\neg\nu}, \tag{10.Д.6}$$

$$C_{[\nu]} = -PB_{[\nu]}, \tag{10.Д.7}$$

где P – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения (9.3.5).

Система (10.Д.4), (10.Д.5) является системой со скалярным управлением u_ν и поэтому естественно ожидать, что её запасы устойчивости удовлетворяют неравенствам (4.2.15), (4.2.16). Для этого нужно показать, что система (10.Д.4), (10.Д.5) оптимальна в смысле функционала

$$J = \int\limits_0^\infty \left[\boldsymbol{x}' \left(Q + C_{\neg\nu} C'_{\neg\nu} \right) \boldsymbol{x} + u_\nu^2 \right] \, dt, \tag{10.Д.8}$$

который, если заменить в нём $C'_{\neg\nu}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_{\neg\nu}$, совпадает с (10.3.3), так как $\boldsymbol{x}' C_{\neg\nu} C'_{\neg\nu} \boldsymbol{x} + u_\nu^2 = \boldsymbol{u}'_{\neg\nu} \boldsymbol{u}_{\neg\nu} + u_\nu^2 = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$.

Для доказательства оптимальности сформулируем вспомогательную задачу АКОР.

Задача 10.Д.1. Пусть имеется объект, описываемый уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^* \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^* u^*, \tag{10.Д.9}$$

где $A^* = A + B_{\neg\nu} C'_{\neg\nu} = A - B_{\neg\nu} B'_{\neg\nu} P$, $\boldsymbol{b}^* = B_{[\nu]}$. (10.Д.10)

Требуется найти уравнение регулятора

$$u^* = \boldsymbol{c}^{*\prime} \boldsymbol{x}, \tag{10.Д.11}$$

такое, чтобы на движениях системы (10.Д.9), (10.Д.10) минимизировался функционал

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\boldsymbol{x}' Q^* \boldsymbol{x} + u^{*2} \right) \, dt, \tag{10.Д.12}$$

в котором

$$Q^* = Q + C_{\neg\nu} C'_{\neg\nu} = Q + P B_{\neg\nu} B'_{\neg\nu} P. \tag{10.Д.13}$$

■

Утверждение 10.Д.1. Единственный вектор $\boldsymbol{c}^*$, разрешающий задачу 10.Д.1 и вектор $C_{[\nu]}$, являющийся ν-тым столбцом оптимального, в смысле функционала (10.3.3), управления (10.3.2) связаны равенством

$$\boldsymbol{c}^* = C_{[\nu]}. \tag{10.Д.14}$$

Другими словами, система (10.Д.4), (10.Д.5) является оптимальной в смысле функционала (10.Д.8). ■

Доказательство. В соответствии с процедурой 4.1.1

$$\boldsymbol{c}^* = -P^* \boldsymbol{b}^*, \tag{10.Д.15}$$

где $P^* > 0$ является решением уравнения

$$P^* A^* + A^{*\prime} P^* - P^* \boldsymbol{b}^* \boldsymbol{b}^{*\prime} P^* + Q = 0. \tag{10.Д.16}$$

Подставляя сюда выражения (10.Д.10), (10.Д.13), получим

$$P^*\left(A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P\right) + \left(A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P\right)' P^* - P^*B_{[\nu]}B'_{[\nu]}P^* + P^*B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^* + Q = 0. \tag{10.Д.17}$$

Нетрудно заметить, если учесть $B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu} + B_{[\nu]}B'_{[\nu]} = BB'$, что одним из решений (10.Д.17) служит

$$P^* = P. \tag{10.Д.18}$$

Покажем, что это решение единственно. В соответствии с примечаниями 4.1.1, 4.1.2 $P^* > 0$ является единственным решением уравнения (10.Д.16), если объект (10.Д.9) полностью управляем или стабилизируем, а матрица Q^* – положительно-определена либо неотрицательна и обладает свойством (4.1.16).

Объект (10.Д.9) – стабилизируем, так как можно указать управление $u^* = C'_{[\nu]}\boldsymbol{x}$, при котором система, состоящая из объекта (10.Д.9), замкнутого этим регулятором, асимптотически устойчива (поскольку она совпадает с оптимальной системой (10.Д.4), (10.Д.5)).

Матрица $Q^* > 0$, так как $Q > 0$ и $C_{\neg\nu}C'_{\neg\nu} \geq 0$.

Подставляя в (10.Д.15) выражения (10.Д.18), (10.Д.10), получим

$$\boldsymbol{c}^* = -PB_{[\nu]} = C_{[\nu]},$$

что и требовалось доказать. ■

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы 10.3.2. Оно опирается на оптимальность системы (10.Д.4), (10.Д.5) в смысле функционала (10.Д.8).

Передаточная функция такой системы со скалярным управлением

$$w_\nu(s) = -C'_{[\nu]}\left(E_n s - A - B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}\right)^{-1} B_{[\nu]} \tag{10.Д.19}$$

удовлетворяет условию оптимальности в частотной форме

$$[1 + w_\nu(-j\omega)][1 + w_\nu(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left|h_i^{(\nu)}(j\omega)\right|^2, \tag{10.Д.20}$$

где $h_i^{(\nu)}(j\omega)$ – компоненты вектора

$$\boldsymbol{h}^{(\nu)}(j\omega) = H^{(\nu)}\left(E_n j\omega - A - B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}\right)^{-1} B_{[\nu]}, \tag{10.Д.21}$$

в котором $H^{(\nu)\prime}H^{(\nu)} = Q + C_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}$. (10.Д.22)

На основе (10.Д.20), повторяя доказательство теоремы 4.2.1, получим

$$\varphi_{\nu.з}^{(1)} \geq 60^\circ, \quad L_\nu^{(1)} \geq 2. \tag{10.Д.23}$$

Повторяя изложенное для различных значений ν от 1 до m заключаем, что $\varphi_{\nu.з}^{(1)} \geq 60^\circ$, $L_\nu^{(1)} \geq 2$ $\left(\nu = \overline{1,m}\right)$, откуда и следует (10.3.12).

10.Д.4. Доказательство теоремы 10.3.3

Пусть оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) подвержена параметрическим возмущениям, которые описываются с помощью передаточных функций – $\ell_i(s)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – блоков мультипликативных параметрических возмущений, показанных на рис. 10.2.1.

Модель такой параметрически возмущённой системы имеет вид

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{\rho}(\tilde{\boldsymbol{u}}), \quad \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)}, \tag{10.Д.24}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = C'\tilde{\boldsymbol{x}} = -B'P\tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{10.Д.25}$$

где $\boldsymbol{\rho}(\tilde{\boldsymbol{u}})$ – m-мерная вектор-функция, изображение которой по Лапласу

$$\Lambda\{\boldsymbol{\rho}(\tilde{\boldsymbol{u}})\} = W_{\text{в}}(s)\tilde{\boldsymbol{u}}(s). \tag{10.Д.26}$$

В частности, для схемы, приведённой на рис. ??

$$W_{\text{в}}(s) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} w_{\text{в}.1}(s) & w_{\text{в}.2}(s) & \cdots & w_{\text{в}.m}(s) \end{pmatrix}. \tag{10.Д.27}$$

В соответствии с утверждением 4.Д.1 заключаем, что система (10.Д.24),(10.Д.25) асимптотически устойчива, если

$$W_{\text{в}}(j\omega) + W'_{\text{в}}(-j\omega) > E_m. \tag{10.Д.28}$$

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 10.3.3, рассмотрим различные реализации матрицы $W_{\text{в}}(s)$ в этом неравенстве.

Пусть

$$W_{\text{в}}(j\omega) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_m \end{pmatrix}, \tag{10.Д.29}$$

где ℓ_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – некоторые числа, тогда (10.Д.28) означает, что асимптотическая устойчивость системы (10.Д.24), (10.Д.25) сохраняется при условии, что

$$2\ell_k > 1 \quad i = \overline{1,m}. \tag{10.Д.30}$$

Это свидетельствует, что многосвязный запас устойчивости системы (10.3.1), (10.3.2) на входе объекта по модулю удовлетворяет неравенству (10.3.13).

Допустим теперь, что

$$W_{\text{в}}(j\omega) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} & \cdots & e^{j\psi_m} \end{pmatrix}, \tag{10.Д.31}$$

тогда из (10.Д.27) получим, что

$$e^{j\psi_k} + e^{-j\psi_k} > 1 \quad k = \overline{1,m}.$$

Отсюда $\cos\psi_k > 0.5$ и следовательно

$$|\psi_k| < 60^\circ \quad k = \overline{1,m}, \tag{10.Д.32}$$

и таким образом теорема доказана.

10.Д.5. Доказательство теоремы 10.3.4

Рассмотрим эквивалентную (10.3.1), (10.3.2) систему со скалярным управлением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu})\,\boldsymbol{x} + B_{[\nu]}u_\nu, \tag{10.Д.33}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu = C'_{[\nu]}\boldsymbol{x}, \tag{10.Д.34}$$

и покажем (аналогично утверждению (10.Д.1) существование неотрицательной (удовлетворяющей условию наблюдаемости пары (H^*, A)) матрицы $Q^* = H^{*\prime}H^*$, такой, что уравнение

$$P^*\,(A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}) + (A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu})'\,P^* = -Q^* \tag{10.Д.35}$$

имеет решение

$$P^* = P^{(1)}, \tag{10.Д.36}$$

где $P^{(1)}$ – решение уравнения (10.3.55). Из этого равенства следует, что

$$-\,P^*B_{[\nu]} = -P^{(1)}B_{[\nu]} = C_{[\nu]}. \tag{10.Д.37}$$

Искомая матрица

$$Q^* = Q + 2C_{\neg\nu}C'_{\neg\nu} = Q + 2P^{(1)}B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}. \tag{10.Д.38}$$

Действительно, подставляя это выражение в (10.Д.35) получим, с учётом соотношения $C_{\neg\nu} = -P^{(1)}B_{\neg\nu}$,

$$P^*\left[A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}\right] + \left[A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}\right]'P^* = -Q - 2P^{(1)}B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}. \tag{10.Д.39}$$

При $P^* = P^{(1)}$ это уравнение совпадает с (10.3.55). Отсюда заключаем, что для ««объекта»» (10.Д.33) со скалярным управлением u_ν можно указать матрицу Q^*, при которой процедура АКОР по критерию обобщённой работы доставляет управление с матрицей (10.Д.37). Система со скалярным управлением имеет запасы устойчивости $\varphi^{(1)}_{\nu.з} \geq 90^\circ$, $L^{(1)}_\nu \to \infty$.

Повторяя изложенное для любых $\nu = \overline{1, m}$, получим (10.3.56), что и доказывает теорему.

10.Д.6. Доказательство теоремы 10.3.5

Оно основано на неравенстве, аналогичном (10.Д.28)

$$W_в(-j\omega) + W_в(j\omega) \geq 0, \tag{10.Д.40}$$

которое является достаточным условием асимптотической устойчивости параметрически возмущённой системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы.

Вывод этого неравенства приведён в 4.Д.7.

Полагая матрицу $W_{\text{в}}(j\omega) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_m \end{pmatrix}$, заключаем, что $\ell_k > 0$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$, отсюда следует $L^{(1)M} \to \infty$.

Если принять $W_{\text{в}}(j\omega) = \operatorname{diag}\begin{pmatrix} e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} & \cdots & e^{j\psi_m} \end{pmatrix}$, то $e^{j\psi_k} + e^{-j\psi_k} > 0$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$. Отсюда $\cos\psi_k > 0$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$ и следовательно $|\psi_k| \leq 90^\circ$ $\left(k = \overline{1,m}\right)$. Это доказывает теорему.

Заключение к главе 10

Подытожим изложенное в этой главе.

1. Введены понятия обобщённой передаточной функции (10.1.36) и передаточных функций многомерной системы, размыкаемой по различным входам объекта и регулятора – (10.1.75), (10.1.81).

2. На основе этих понятий сформированы частотные показатели грубости: обобщённые запасы устойчивости (10.2.1), (10.2.2), обобщённый радиус запасов устойчивости (10.2.9), запасы устойчивости на выходе объекта – (10.2.17), (10.2.19), запасы устойчивости на входе регулятора, радиусы запасов устойчивости на входе объекта и на входе регулятора – (10.2.22), (10.2.24), многосвязные запасы устойчивости – (10.2.35), (10.2.36). Эти показатели являются (кроме последних) развитием в различных направлениях частотных показателей одномерных систем.

3. Получены границы частотных показателей оптимальных систем, не зависящие от коэффициентов неотрицательного функционала оптимизации – теоремы 10.3.1-10.3.5.

4. (П) Введены критерии сравнительной низкой чувствительности по управлению – (10.П.11) и регулируемым переменным – (10.П.27). Получены условия низкой сравнительной чувствительности – (10.П.22) и (10.П.29).

5. (П) Сформированы понятия наименьших сингулярных значений матрицы возвратной разности многомерной системы по управлению – (10.П.47) и регулируемым переменным – (10.П.48).

6. (П) Получены границы значений критериев сравнительной низкой чувствительности и наименьших значений матриц возвратной разности оптимальных систем, не зависящие от параметров функционалов оптимизации – утверждения 10.П.1-10.П.4.

11. Метод частотных параметров

Метод частотных параметров, изложенный в третьей части книги для одномерных систем, развивается в этой главе на многомерный случай. Такое обобщение не вызывает особых затруднений, особенно если учесть, что содержание и форма изложения глав 5-8 указанной части строились так, чтобы обобщение на многомерный случай было почти очевидным.

Цель этой главы:

- определение частотных параметров многомерных объектов,
- частотная трансформация методов пространства состояний (формирование частотного модального и частотного оптимального управлений) и построение метода частотных параметров для многомерных систем регулирования и слежения,
- построение алгоритмов адаптивного управления несамотождественными объектами.

11.1. Стабилизация

11.1.1. Частотные параметры объектов первого вида

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{11.1.1}$$

с измеряемыми переменными $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, матрицы A и B которого неизвестны. Известна лишь степень C_0 его неустойчивости.

Приложим к первому входу объекта испытательное воздействие

$$u_{ucn.1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t, \quad \lambda \geq C_0. \tag{11.1.2}$$

На выходах объекта получим, после умножения на $e^{-\lambda t}$,

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[R^{\lambda}_{x[1]}(\omega_k) \sin \omega_k t + I^{\lambda}_{x[1]}(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \boldsymbol{æ}^{(1)}(t), \tag{11.1.3}$$

где $\boldsymbol{æ}^{(1)}(t)$ – исчезающая вектор-функция, которая имеет вид (5.2.5).

Снимем воздействие с первого входа и подадим на второй вход

$$u_{ucn.2}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t.$$

На выходах объекта, после умножения на $e^{-\lambda t}$, получим

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[R^{\lambda}_{x[2]}(\omega_k) \sin \omega_k t + I^{\lambda}_{x[2]}(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \boldsymbol{æ}^{(2)}(t).$$

Продолжая этот процесс, получим в m-ом эксперименте (когда возбуждается лишь m-тый вход)

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[R^{\lambda}_{x[m]}(\omega_k) \sin \omega_k t + I^{\lambda}_{x[m]}(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \boldsymbol{æ}^{(m)}(t).$$

Во всех экспериментах

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{æ}^{(i)} = \mathbf{0} \quad i = \overline{1, m}. \tag{11.1.4}$$

Определение 11.1.1. Частотными параметрами (ω-индексами) объекта (11.1.1) называются элементы $n \times m$ матриц

$$R^{\lambda}_{x}(\omega_k) = \left[\begin{array}{cccc} R^{\lambda}_{x[1]}(\omega_k) & R^{\lambda}_{x[2]}(\omega_k) & \cdots & R^{\lambda}_{x[m]}(\omega_k) \end{array} \right] \quad k = \overline{1, n}, \tag{11.1.5}$$

$$I^{\lambda}_{x}(\omega_k) = \left[\begin{array}{cccc} I^{\lambda}_{x[1]}(\omega_k) & I^{\lambda}_{x[2]}(\omega_k) & \cdots & I^{\lambda}_{x[m]}(\omega_k) \end{array} \right] \quad k = \overline{1, n}. \tag{11.1.6}$$

■

Численные значения частотных параметров нетрудно получить на выходах фильтра Фурье, если включить объект (11.1.1) в схему, аналогичную приведённой на рис. 5.3.1. и сформировать генератором испытательных воздействий описанное выше параллельно-последовательное испытательное воздействие

$$\boldsymbol{u}_{ucn}(t) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{u}^{(i)}_{ucn}(t), \tag{11.1.7}$$

где $\boldsymbol{u}^{(i)}_{ucn}(t)$ – m-мерный вектор испытательных воздействий в i-том эксперименте

$$\boldsymbol{u}^{(i)}_{ucn}(t) = \left\{ \begin{array}{l} u_{ucn.1}(t) = u_{ucn.2}(t) = \cdots = u_{ucn.i-1}(t) = 0, \\ u_{ucn.i}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t & \text{при} \quad t \in \left[t^u_{i-1}, t^u_i \right], \\ 0 & \text{при} \quad t \notin \left[t^u_{i-1}, t^u_i \right], \end{array} \right. \\ u_{ucn.i+1}(t) = u_{ucn.i+2}(t) = \cdots = u_{ucn.m}(t) = 0. \end{array} \right. \tag{11.1.8}$$

Очевидно, что матрицы частотных параметров $R^{\lambda}_{x}(\omega_k)$ и $I^{\lambda}_{x}(\omega_k)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ – это значения вещественной и мнимой частей частотной передаточной матрицы объекта на ω-тесте и λ-смещении

$$R^{\lambda}_{x}(\omega_k) = \mathrm{Re}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B \quad k = \overline{1, n}, \tag{11.1.9}$$

$$I^{\lambda}_{x}(\omega_k) = \mathrm{Jm}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B \quad k = \overline{1, n}. \tag{11.1.10}$$

Далее будем использовать обозначения

$$\mathcal{B}(s) = (Es - A)^{-1} B, \quad \mathcal{B}(\lambda + j\omega) = [E(\lambda + j\omega) - A]^{-1} B = \mathcal{B}^{\lambda}(j\omega), \tag{11.1.11}$$

и тогда

$$R_x^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re}\mathcal{B}^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n},$$
$$I_x^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Jm}\mathcal{B}^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.1.12}$$
$$R_{x[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re}\mathcal{B}_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Re}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B_{[i]} \quad i = \overline{1,m} \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.1.13}$$
$$I_{x[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Jm}\mathcal{B}_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Jm}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B_{[i]} \quad i = \overline{1,m} \quad k = \overline{1,n}. \tag{11.1.14}$$

Сформируем $n \times nm$ матрицы

$$M_{x.R}^\lambda = \left[\begin{array}{cccc} R_x^\lambda(\omega_1) & R_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & R_x^\lambda(\omega_n) \end{array}\right], \tag{11.1.15}$$
$$M_{x.I}^\lambda = \left[\begin{array}{cccc} I_x^\lambda(\omega_1) & I_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & I_x^\lambda(\omega_n) \end{array}\right]. \tag{11.1.16}$$

Здесь и далее при $\lambda = 0$ верхние индексы (11.1.11)-(11.1.16) опускаются.

Теорема 11.1.1. Если объект (11.1.1) полностью управляем, а степень его неустойчивости $C_0 < \lambda$, то

$$\operatorname{rank} M_{x.R}^\lambda = n, \tag{11.1.17}$$
$$\operatorname{rank} M_{x.I}^\lambda = n. \tag{11.1.18}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.1.

11.1.2. Частотные параметры объектов второго вида

Если не все переменные состояния объекта (11.1.1) доступны непосредственному измерению, то он описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \tag{11.1.19}$$

в которых A, B и D – неизвестные матрицы, и известно, что объект полностью управляем и наблюдаем, а его степень неустойчивости равна C_0.

Повторим эксперименты, описанные выше и получим, аналогично (11.1.3), в i-том эксперименте

$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \left[R_{[i]}^\lambda(\omega_k)\sin\omega_k t + I_{[i]}^\lambda(\omega_k)\cos\omega_k t\right] + D\boldsymbol{æ}^{(i)}(t) \quad i = \overline{1,m}. \tag{11.1.20}$$

Определение 11.1.2. Частотными параметрами (ω-индексами) объекта (11.1.19) называются элементы $r \times m$ матриц

$$R^\lambda(\omega_k) = \left[\begin{array}{cccc} R_{[1]}^\lambda(\omega_k) & R_{[2]}^\lambda(\omega_k) & \cdots & R_{[m]}^\lambda(\omega_k) \end{array}\right] \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.1.21}$$
$$I^\lambda(\omega_k) = \left[\begin{array}{cccc} I_{[1]}^\lambda(\omega_k) & I_{[2]}^\lambda(\omega_k) & \cdots & I_{[m]}^\lambda(\omega_k) \end{array}\right] \quad k = \overline{1,n}. \tag{11.1.22}$$

■

Численные значения векторов $R^{\lambda}_{[i]}(\omega_k)$ и $I^{\lambda}_{[i]}(\omega_k)$ $\left(i=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,n}\right)$ получаются на выходах фильтров Фурье в схеме, приведённой на рис. 5.3.2., если генератор испытательных воздействий вырабатывает последовательно-параллельное воздействие (11.1.7), (11.1.8).

Частотные параметры связаны с матрицами объекта (11.1.19) соотношениями

$$R^{\lambda}(\omega_k) = \mathrm{Re}\, D[E(\lambda+j\omega_k)-A]^{-1}B = \mathrm{Re}\, W(\lambda+j\omega_k) = \mathrm{Re}\, W^{\lambda}(j\omega_k)\ \ k=\overline{1,n}, \tag{11.1.23}$$

$$I^{\lambda}(\omega_k) = \mathrm{Jm}\, D[E(\lambda+j\omega_k)-A]^{-1}B = \mathrm{Jm}\, W(\lambda+j\omega_k) = \mathrm{Jm}\, W^{\lambda}(j\omega_k)\ \ k=\overline{1,n}. \tag{11.1.24}$$

Если использовать обозначения (11.1.11), то

$$R^{\lambda}_{[i]}(\omega_k) = \mathrm{Re}\, D\mathcal{B}^{\lambda}_{[i]}(j\omega_k) = \mathrm{Re}\, D[E(\lambda+j\omega_k)-A]^{-1}B_{[i]} \quad i=\overline{1,m} \quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.25}$$

$$I^{\lambda}_{[i]}(\omega_k) = \mathrm{Jm}\, D\mathcal{B}^{\lambda}_{[i]}(j\omega_k) = \mathrm{Jm}\, D[E(\lambda+j\omega_k)-A]^{-1}B_{[i]} \quad i=\overline{1,m} \quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.26}$$

Сформируем $r\times nm$ матрицы

$$M^{\lambda}_{R} = \left[\ R^{\lambda}(\omega_1)\quad R^{\lambda}(\omega_2)\quad \cdots\quad R^{\lambda}(\omega_n)\ \right], \tag{11.1.27}$$

$$M^{\lambda}_{I} = \left[\ I^{\lambda}(\omega_1)\quad I^{\lambda}(\omega_2)\quad \cdots\quad I^{\lambda}(\omega_n)\ \right]. \tag{11.1.28}$$

Теорема 11.1.2. Если объект (11.1.19) полностью управляем, а степень его неустойчивости $C_0<\lambda$, то

$$\mathrm{rank}\, M^{\lambda}_{R} = r, \quad \mathrm{rank}\, M^{\lambda}_{I} = r. \tag{11.1.29}$$

■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.2.

11.1.3. Частотное модальное управление

Запишем объект (11.1.19) в канонической форме Лагранжа (9.1.13)

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \tag{11.1.30}$$

где $\boldsymbol{q}(t)$ – m-мерный вектор и в соответствии с (9.1.14)

$$P(s) = P^{[\sigma]}s^{\sigma} + \cdots + P^{[1]}s + P^{[0]}, \quad N(s) = N^{[\nu]}s^{\nu} + \cdots + N^{[1]}s + N^{[0]}.$$

Введём матрицу

$$\Delta(s) = \Psi(s)N(s) = \left(\Psi^{[æ]}s^{æ} + \cdots + \Psi^{[1]}s + \Psi^{[0]}\right)N(s), \tag{11.1.31}$$

для которой выполняется условие (9.1.41)

$$\partial_{cj}\Delta(s) \le \nu_j + \breve{\mu} - 1 \quad j=\overline{1,m}, \tag{11.1.32}$$

где $\check{\mu}$ – индекс элиминантной матрицы, построенной для матриц $P(s)$ и $N(s)$, а ν_j – степень j-го столбца $\left(j=\overline{1,m}\right)$ матрицы $P(s)$.

Будем полагать также, что числа ν_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ и $\check{\mu}$ удовлетворяют условию

$$\nu_j+\check{\mu}\le 2n \quad j=\overline{1,m}. \tag{11.1.33}$$

Задача 11.1.1. **(Задача частотного модального управления)**

Для объекта (11.1.19), заданного ω-индексами (11.1.21), (11.1.22), найти параметры регулятора

$$\left(G^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1}+\cdots+G^{[1]}s+G^{[0]}\right)\boldsymbol{u}=\left(R^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1}+\cdots+R^{[1]}s+R^{[0]}\right)\boldsymbol{y}, \tag{11.1.34}$$

такие, чтобы характеристический полином системы (11.1.19), (11.1.34) совпадал с заданным полиномом $\det\Delta(s)$, в котором полиномиальная матрица $\Delta(s)$ вида (11.1.31) удовлетворяет условию (11.1.32). ■

При известных параметрах объекта эта задача – частный случай с задачи 9.1.1, решение которой сводится к процедуре 9.1.1 разрешения модального тождества (9.1.26). Это тождество принимает с учётом (11.1.31) вид

$$G(s)P(s)-R(s)N(s)=\Psi(s)N(s). \tag{11.1.35}$$

Умножим его справа на матрицу $P^{-1}(s)$ и получим

$$G(s)-R(s)W(s)=\Psi(s)W(s). \tag{11.1.36}$$

Положим $s=\lambda+j\omega$ и приходим к частотному модальному тождеству

$$G(\lambda+j\omega)-R(\lambda+j\omega)W(\lambda+j\omega)=\Psi(\lambda+j\omega)W(\lambda+j\omega) \quad 0\le\omega\le\infty, \tag{11.1.37}$$

которое на ω-тесте принимает вид

$$G(\lambda+j\omega_k)-R(\lambda+j\omega_k)W(\lambda+j\omega_k)=\Psi(\lambda+j\omega_k)W(\lambda+j\omega_k) \quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.38}$$

Используем частотные параметры и запишем эту систему уравнений как

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\check{\mu}-1}G^{[l]}(\lambda+j\omega_k)^l-\left[\sum_{l=0}^{\check{\mu}-1}R^{[l]}(\lambda+j\omega_k)^l\right]\cdot\left[R^{\lambda}(\omega_k)+jI^{\lambda}(\omega_k)\right]&=\\ =\left[\sum_{l=0}^{æ}\Psi^{[l]}(\lambda+j\omega_k)^l\right]\cdot\left[R^{\lambda}(\omega_k)+jI^{\lambda}(\omega_k)\right] \quad k=\overline{1,n}.&\end{aligned} \tag{11.1.39}$$

Учтём выражения (6.1.10)-(6.1.12)

$$(\lambda+j\omega_k)^l=\rho_l(\omega_k)+j\mu_l(\omega_k) \quad k=\overline{1,n} \quad l=\overline{0,æ}, \tag{11.1.40}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_l(\omega_k) &= \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]^*} \rho_{2\nu}^{(l)} \omega_k^{2\nu} \quad k=\overline{1,n}, \\
&\rho_{2\nu}^{(l)} = (-1)^\nu \lambda^{l-2\nu} \xi_{2\nu}^{(1)} \quad \nu = \overline{0, \left[\frac{l}{2}\right]^*}, \\
\mu_l(\omega_k) &= \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]^*} \mu_{2\nu+1}^{(l)} \omega_k^{2\nu+1} \quad k=\overline{1,n}, \\
&\mu_{2\nu+1}^{(l)} = (-1)^\nu \lambda^{l-2\nu-1} \xi_{2\nu+1}^{(2)} \quad \nu = \overline{0, \left[\frac{l-1}{2}\right]^*},
\end{aligned} \qquad l=\overline{0,æ}, \tag{11.1.41}$$

$\xi_{2\nu}^{(1)}$ и $\xi_{2\nu+1}^{(2)}$ – известные числа, и запишем (11.1.38) окончательно

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\breve{\mu}-1} \rho_l(\omega_k) G^{[l]\prime} - \sum_{l=0}^{\breve{\mu}-1} \left[\rho_l(\omega_k) R^{\lambda\prime}(\omega_k) - \mu_l(\omega_k) I^{\lambda\prime}(\omega_k)\right] R^{[l]\prime} = \\
= \sum_{l=0}^{æ} \left[\rho_l(\omega_k) R^{\lambda\prime}(\omega_k) - \mu_l(\omega_k) I^{\lambda\prime}(\omega_k)\right] \Psi^{[l]\prime} \quad k=\overline{1,n},
\end{aligned} \tag{11.1.42}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\breve{\mu}-1} \mu_l(\omega_k) G^{[l]\prime} - \sum_{l=0}^{\breve{\mu}-1} \left[\mu_l(\omega_k) R^{\lambda\prime}(\omega_k) + \rho_l(\omega_k) I^{\lambda\prime}(\omega_k)\right] R^{[l]\prime} = \\
= \sum_{l=0}^{æ} \left[\mu_l(\omega_k) R^{\lambda\prime}(\omega_k) + \rho_l(\omega_k) I^{\lambda\prime}(\omega_k)\right] \Psi^{[l]\prime} \quad k=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{11.1.43}$$

Это система $2m^2n$ уравнений для определения $(m^2 \times \breve{\mu}) + (mr \times \breve{\mu})$ неизвестных элементов матриц $G^{[l]}$, $R^{[l]}$ $\left(l=\overline{0,\breve{\mu}-1}\right)$.

Теорема 11.1.3. Если объект (11.1.19) полностью управляем, полностью наблюдаем и выполняется условие (11.1.33), то решения уравнений (11.1.42), (11.1.43) совпадают с решениями уравнения (9.1.44), разрешающего тождество (11.1.35). ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.3.

Таким образом, уравнения (11.1.42), (11.1.43) разрешают задачу 11.1.1.

11.1.4. Частотное оптимальное управление

Найдём регулятор для объекта (11.1.1), заданного частотными параметрами (11.1.5), (11.1.6). Если он неустойчив, будем полагать, что известно стабилизирующее управление

$$\boldsymbol{u} = C^{(0)\prime} \boldsymbol{x}. \tag{11.1.44}$$

В этом случае можно замкнуть объект (11.1.1) регулятором (11.1.44) и определить экспериментально при $\lambda = 0$ ω-индексы $R_x^o(\omega_k)$ и $I_x^o(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Затем можно вычислить стабилизированные частотные параметры объекта (11.1.1).

Утверждение 11.1.1. Стабилизированные ω-индексы неустойчивого объекта (11.1.1) связаны с частотными параметрами этого объекта, замкнутого регулятором

(11.1.44), соотношениями

$$R_x^c(\omega_k) = L_x(\omega_k)R_x^o(\omega_k) - M_x(\omega_k)I_x^o(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.1.45}$$

$$I_x^c(\omega_k) = L_x(\omega_k)I_x^o(\omega_k) + M_x(\omega_k)R_x^o(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.1.46}$$

где

$$L_x(\omega_k) = \left\{E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime} + I_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime}\left[E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime}\right]^{-1} I_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime}\right\}^{-1}, \tag{11.1.47}$$

$$M_x(\omega_k) = \left[E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime}\right]^{-1} I_x^o(\omega_k)C^{(0)\prime}L_x(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{11.1.48}$$

■

Доказательство утверждения приведено в 11.Д.4.

Задача 11.1.2. **(Задача АКОР по частотным параметрам)**

Пусть имеем полностью управляемый объект (11.1.1) с неизвестными параметрами, для которого заданы его ω-индексы (либо, если он неустойчив, известны стабилизированные ω-индексы). Требуется найти регулятор

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}, \tag{11.1.49}$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (11.1.1), (11.1.49), возбуждённой произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\,dt, \tag{11.1.50}$$

в котором Q – заданная положительно-определённая матрица. ■

11.1.5. АКОР по критерию обобщённой работы

Рассмотрим первый шаг итерационной процедуры 9.3.1. В результате этого шага находим

$$C = -P^{(1)}B, \tag{11.1.51}$$

где $P^{(1)}$ – решение уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)\prime}P^{(1)} = -Q - C^{(0)}C^{(0)\prime}. \tag{11.1.52}$$

Если объект (11.1.1) асимптотически устойчив, то $C^{(0)} = 0$ и уравнение (11.1.52) совпадает с уравнением (9.3.43) процедуры АКОР по критерию обобщённой работы.

Условие оптимальности по критерию обобщённой работы (9.3.44) можно записать как

$$-C'\mathcal{B}(j\omega) - \mathcal{B}'(-j\omega)C = \mathcal{B}'(-j\omega)Q\mathcal{B}(j\omega) \quad 0 \le \omega \le \infty. \tag{11.1.53}$$

На ω-тесте это тождество принимает вид

$$\begin{aligned} &-C'\left[R_x(\omega_k)+jI_x(\omega_k)\right]-\left[R_x(\omega_k)-jI_x(\omega_k)\right]'C = \\ &= \left[R_x(\omega_k)-jI_x(\omega_k)\right]'Q\left[R_x(\omega_k)+jI_x(\omega_k)\right] \quad k=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{11.1.54}$$

Матрица C – вещественная и поэтому можно записать эту систему в виде двух подсистем

$$-C'R_k - R_k'C = R_k'QR_k + I_k'QI_k \quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.55}$$

$$-C'I_k + I_k'C = R_k'QI_k - I_k'QR_k \quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.56}$$

где для сокращения обозначено

$$R_k = R_x(\omega_k), \quad I_k = I_x(\omega_k) \quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.57}$$

Эти уравнения имеют в развёрнутой форме вид

$$-R_{k[\psi]}'C_{[i]} - R_{k[i]}'C_{[\psi]} = h_{ki\psi} \quad i,\psi=\overline{1,m} \quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.58}$$

$$-I_{k[\psi]}'C_{[i]} + I_{k[i]}'C_{[\psi]} = l_{ki\psi} \quad i,\psi=\overline{1,m} \quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.59}$$

при этом $R_{k[i]}$, $I_{k[i]}$, $C_{[i]}$ – столбцы соответствующих матриц, $h_{ki\psi}$, $l_{ki\psi}$ $i,\psi=\overline{1,m}$ $k=\overline{1,n}$ – элементы матриц $R_k'QR_k + I_k'QI_k$ и $R_k'QI_k - I_k'QR_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ соответственно.

Сформируем вектор

$$\bar{\boldsymbol{c}}' = \begin{pmatrix} C_{[1]}' & C_{[2]}' & \cdots & C_{[m]}' \end{pmatrix} \tag{11.1.60}$$

Опустим в системе (11.1.58), (11.1.59) совпадающие уравнения и запишем эту систему окончательно

$$M\bar{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{h}, \tag{11.1.61}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} M_{[1]} \\ M_{[2]} \\ \vdots \\ M_{[n]} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_{[1]} \\ h_{[2]} \\ \vdots \\ h_{[m]} \end{bmatrix}; \quad M_{(k)} = \begin{pmatrix} M_{(k)R} \\ M_{(k)I} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h}_{(k)} = \begin{bmatrix} h_{(k)R} \\ h_{(k)I} \end{bmatrix}; \tag{11.1.62}$$

$$M_{(k)R} = \left(\begin{array}{ccccc} 2R_{k[1]}' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{k[2]}' & R_{k[1]}' & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k[m]}' & 0 & 0 & \cdots & R_{k[1]}' \\ \hline 0 & 2R_{k[2]}' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{k[3]}' & R_{k[2]}' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{k[m]}' & 0 & \cdots & R_{k[2]}' \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 2R_{k[m]}' \end{array}\right), \quad \boldsymbol{h}_{(k)R} = \left[\begin{array}{c} h_{k11} \\ h_{k12} \\ \vdots \\ h_{k1m} \\ \hline h_{k23} \\ h_{k24} \\ \vdots \\ h_{k2m} \\ \hline \vdots \\ \hline h_{kmm} \end{array}\right] \quad k=\overline{1,n}; \tag{11.1.63}$$

$$M_{(k)I} = \left(\begin{array}{ccccccc} -I'_{k[2]} & I'_{k[1]} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I'_{k[3]} & 0 & I'_{k[1]} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I'_{k[m]} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I'_{k[1]} \\ \hline 0 & -I'_{k[3]} & I'_{k[2]} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I'_{k[4]} & 0 & I'_{k[2]} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -I'_{k[m]} & 0 & 0 & \cdots & 0 & I'_{k[2]} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -I'_{k[m]} & I'_{k[m-1]} \end{array}\right), \quad \boldsymbol{h}_{(k)I} = \left[\begin{array}{c} l_{k12} \\ l_{k13} \\ \vdots \\ l_{k1m} \\ \hline l_{k23} \\ l_{k24} \\ \vdots \\ l_{k2m} \\ \hline \vdots \\ \hline l_{k(m-1)m} \end{array}\right]. \quad (11.1.64)$$

Нетрудно видеть, что матрица M в системе (11.1.61) – прямоугольная, размеров $m^2n \times mn$ и следовательно число уравнений в этой системе в m раз больше числа неизвестных компонент вектора $\bar{\boldsymbol{c}}$. В связи с этим возникает проблема существования и единственности решения.

Теорема 11.1.4. Если объект (11.1.1) полностью управляем и асимптотически устойчив, то существует единственный вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$, удовлетворяющий уравнению (11.1.61). Этот вектор не зависит от выбора испытательных частот и совпадает с вектором, получаемым из (9.3.42), (9.3.43). ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.5.

11.1.6. Аналитическое конструирование регуляторов

Для решения задачи 11.1.2 запишем условие оптимальности системы (11.1.1), (11.1.49) в частотной форме. На основе уравнений (9.3.6) итерационной процедуры 9.3.1 получим аналогично (11.1.53) тождество

$$\begin{gathered} -C^{(\alpha+1)\prime}\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) - \mathcal{B}^{(\alpha)\prime}(-j\omega)C^{(\alpha+1)} = \mathcal{B}^{(\alpha)\prime}(-j\omega)\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) \\ 0 \le \omega \le \infty \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \quad (11.1.65)$$

в котором

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) = \left(Ej\omega - A^{(\alpha)}\right)^{-1} B. \quad (11.1.66)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) = \left[Ej\omega - A^{(\alpha)}\right]^{-1} B = \left[Ej\omega - A - BC^{(\alpha)\prime}\right]^{-1} B = \mathcal{B}(j\omega)\left[E_m - C^{(\alpha)\prime}\mathcal{B}(j\omega)\right]^{-1}. \quad (11.1.67)$$

Действительно, из (9.3.19) следует при $L = E_n$, что вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{f}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{x}(s) = (Es - A - BC')^{-1}\boldsymbol{f}. \quad (11.1.68)$$

Эта же связь имеет вид (9.3.20).

Сравнивая (9.3.20) и (11.1.68) убеждаемся в справедливости выражения (11.1.67). Тождество (11.1.65) принимает на ω-тесте вид

$$-C^{(\alpha+1)\prime}R_k^{(\alpha)} - R_k^{(\alpha)\prime}C^{(\alpha+1)} = R_k^{(\alpha)\prime}\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]R_k^{(\alpha)} + I_k^{(\alpha)\prime}\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]I_k^{(\alpha)}$$
$$k = \overline{1,n} \quad \alpha = 0,1,\dots, \tag{11.1.69}$$
$$-C^{(\alpha+1)\prime}I_k^{(\alpha)} + I_k^{(\alpha)\prime}C^{(\alpha+1)} = R_k^{(\alpha)\prime}\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]I_k^{(\alpha)} - I_k^{(\alpha)\prime}\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]R_k^{(\alpha)}$$
$$k = \overline{1,n} \quad \alpha = 0,1,\dots, \tag{11.1.70}$$

где в соответствии с (11.1.67)

$$R_k^{(\alpha)} = R_x^{(\alpha)}(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad \alpha = 0,1,\dots,$$
$$I_k^{(\alpha)} = I_x^{(\alpha)}(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad \alpha = 0,1,\dots, \tag{11.1.71}$$
$$R_x^{(\alpha)}(\omega_k) = \mathrm{Re}\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) = \mathrm{Re}\,[R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\cdot\left\{E_m - C^{(\alpha)\prime}[R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\right\}^{-1}, \tag{11.1.72}$$
$$I_x^{(\alpha)}(\omega_k) = \mathrm{Jm}\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) = \mathrm{Jm}\,[R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\cdot\left\{E_m - C^{(\alpha)\prime}[R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\right\}^{-1}. \tag{11.1.73}$$

Если объект (11.1.1) неустойчив, то в последних двух выражениях нужно заменить ω-индексы этого объекта его стабилизированными частотными параметрами (11.1.45), (11.1.46), полагая

$$R_x(\omega_k) = R_x^c(\omega_k), \quad I_x(\omega_k) = I_x^c(\omega_k) \quad k = \overline{1,n}. \tag{11.1.74}$$

Сформируем, аналогично (11.1.60)-(11.1.64) вектора

$$\bar{\boldsymbol{c}}^{(\alpha)\prime} = \left[\begin{array}{cccc} C_{[1]}^{(\alpha)\prime} & C_{[2]}^{(\alpha)\prime} & \cdots & C_{[m]}^{(\alpha)\prime} \end{array}\right] \quad \alpha = 0,1,\dots, \tag{11.1.75}$$

и $\boldsymbol{h}^{(\alpha)}$, а также матрицы $M^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0,1,\dots)$ и составим из (11.1.69) и (11.1.70) уравнения

$$M^{(\alpha)}\bar{\boldsymbol{c}}^{(\alpha)} = \boldsymbol{h}^{(\alpha)} \quad \alpha = 0,1,\dots. \tag{11.1.76}$$

Теорема 11.1.5. Если объект (11.1.1), заданный частотными параметрами, полностью управляем и асимптотически устойчив (либо, если он неустойчив, известно стабилизирующее управление (11.1.44)), то уравнения (11.1.76) доставляют единственную последовательность векторов, которая сходится к вектору

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \lim_{\alpha\to\infty}\bar{\boldsymbol{c}}^{(\alpha)}, \tag{11.1.77}$$

разрешающему задачу 11.1.2. ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.6.

11.1.7. Анализ устойчивости

Исследуем устойчивость системы (11.1.19), (11.1.34) с известными матрицами $G^{(i)}$, $R^{(i)}$ $\left(i = \overline{0,\check{\mu}-1}\right)$ реализуемого регулятора и объектом, заданным расширенными ω-индексами (11.1.21), (11.1.22), в которых $\left(k = \overline{1,p}\right)$, а $p > n$.

Для этого используем второй частотно-алгебраический критерий устойчивости одномерных систем (критерий 6.2.2), заменив в нём ω-индексы разомкнутой системы – $r^{\lambda}_{раз}(\omega_k)$, $i^{\lambda}_{раз}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,p}\right)$ – обобщёнными ω-индексами – $r^{\lambda}_{об}(\omega_k)$, $i^{\lambda}_{об}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,p}\right)$.

Определение 11.1.3. Обобщёнными частотными параметрами (обобщёнными ω-индексами) системы (10.1.1), (10.1.2) называются числа $r^{\lambda}_{об}(\omega_k)$, $i^{\lambda}_{об}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, составляющие обобщённую передаточную функцию системы на ω-тесте и λ-смещении

$$w_{об}(\lambda+j\omega_k)=r^{\lambda}_{об}(\omega_k)+ji^{\lambda}_{об}(\omega_k)\quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.78}$$

■

Выразим обобщённые ω-индексы через частотные параметры многомерных объекта и регулятора. Для этого используем (10.1.6) и (10.1.37) и запишем

$$w_{об}(\lambda+j\omega_k)=\det\left[E_m-W_p(\lambda+j\omega_k)W(\lambda+j\omega_k)\right]-1\quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.79}$$

В рассматриваемом случае $W(\lambda+j\omega_k)=R^{\lambda}(\omega_k)+jI^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ – заданные матрицы, а $W_p(\lambda+j\omega_k)=R^{\lambda}_p(\omega_k)+jI^{\lambda}_p(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, где, аналогично (11.1.23), (11.1.24),

$$R^{\lambda}_p(\omega_k)=\operatorname{Re}D_p[E(\lambda+j\omega_k)-A_p]^{-1}B_p\quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.80}$$

$$I^{\lambda}_p(\omega_k)=\operatorname{Jm}D_p[E(\lambda+j\omega_k)-A_p]^{-1}B_p\quad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.81}$$

Матрицы A_p, B_p и D_p в этих выражениях определяются матрицами регулятора (11.1.34), который предполагается реализуемым, и следовательно его уравнения приводятся к форме Коши (10.1.2).

Таким образом,

$$\begin{aligned} r^{\lambda}_{об}(\omega_k) &= \operatorname{Re}\det\Big\{\left[E_m-R^{\lambda}_p(\omega_k)R^{\lambda}(\omega_k)+I^{\lambda}_p(\omega_k)I^{\lambda}(\omega_k)\right]-\\ &-j\left[I^{\lambda}_p(\omega_k)R^{\lambda}(\omega_k)+R^{\lambda}_p(\omega_k)I^{\lambda}(\omega_k)\right]\Big\}-1\quad k=\overline{1,n}, \end{aligned} \tag{11.1.82}$$

$$\begin{aligned} i^{\lambda}_{об}(\omega_k) &= \operatorname{Jm}\det\Big\{\left[E_m-R^{\lambda}_p(\omega_k)R^{\lambda}(\omega_k)+I^{\lambda}_p(\omega_k)I^{\lambda}(\omega_k)\right]-\\ &-j\left[I^{\lambda}_p(\omega_k)R^{\lambda}(\omega_k)+R^{\lambda}_p(\omega_k)I^{\lambda}(\omega_k)\right]\Big\}\qquad k=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{11.1.83}$$

Если все переменные состояния объекта (11.1.1) доступны измерению, а регулятор имеет вид (11.1.49), то эти соотношения принимают более простой вид

$$r^{\lambda}_{об}(\omega_k)=\operatorname{Re}\det\left[E_m-C'R^{\lambda}(\omega_k)-jC'I^{\lambda}(\omega_k)\right]-1\quad k=\overline{1,n}, \tag{11.1.84}$$

$$i^{\lambda}_{об}(\omega_k)=\operatorname{Jm}\det\left[E_m-C'R^{\lambda}(\omega_k)-jC'I^{\lambda}(\omega_k)\right]\qquad k=\overline{1,n}. \tag{11.1.85}$$

11.2. Регулирование и слежение

11.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим объекты управления (9.2.1), описываемые уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}, \tag{11.2.1}$$

с неизвестными параметрами.

Внешнее возмущение – $\boldsymbol{f}(t)$ – ступенчатое либо гармоническое с компонентами (9.2.3) либо (9.2.4).

Выделим из них объекты первого $(M = B\,,\ D = E_n)$ и второго $(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z})$ видов, которые заданы частотными параметрами.

Пусть известны оценки

$$\left|m_{ij}^{[0]}\right| \le m_{ij}^{*} \quad i,j = \overline{1,m}, \tag{11.2.2}$$

элементов матрицы $M^{[0]}$ при описании объектов второго вида в форме ««вход-выход»» (9.2.15), а полином $\det B(s)$ этой формы – гурвицев. Для объектов первого вида известно стабилизирующее управление (11.1.44).

Задача 11.2.1. Для объектов (11.2.1) первого и второго видов, заданных частотными параметрами, найти регулятор

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{11.2.3}$$

такой, чтобы система (11.2.1), (11.2.3) удовлетворяла требованиям к точности

$$z_{ycm.i} \le z_{ycm.i}^{*} \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.2.4}$$

где $z_{ycm.i}^{*}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Эта задача является развитием задачи 9.2.1 на случай неизвестных параметров. При этом в ней отсутствуют требования (9.2.14) к показателям качества, так как неизвестна матрица $M(s)$ (а известны лишь оценки (11.2.2) её матрицы свободных членов) и поэтому нельзя сформировать уравнение качества (9.2.18).

11.2.2. Применение частотного модального управления

Переходя к решению задачи 11.2.1 для объектов второго вида, (заданных ω-индексами (11.1.21), (11.1.22), уточним условия её разрешимости.

Будем полагать, что известны структурные показатели объекта: размерность векторов модели (11.2.1) – числа n, m, индексы ν_j, $\bar{\nu}_i$ $\left(i,j = \overline{1,m}\right)$ управляемости и наблюдаемости (при этом $\nu_j + \breve{\mu} \le 2n$) и индекс $\breve{\mu}$ элиминантной матрицы, составленной для матриц $P(s)$ и $N(s)$ объекта в канонической форме Лагранжа (11.1.30).

Кроме того, предполагаются известными степени строк матрицы $B(s)$ и столбцов матрицы $N(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] = \check{\alpha}_i, \quad \partial_{ci}[N(s)] = \check{\beta}_i \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.2.5}$$

а также свойство столбцовой правильности матрицы $D(s)$

$$\det \Gamma_c[D(s)] \neq 0, \tag{11.2.6}$$

с выполнением равенства (9.2.56).

При этих условиях нетрудно сформировать на основе процедуры 9.2.2 последовательность синтеза регуляторов.

Процедура 11.2.1. **(синтеза регуляторов объектов второго вида, заданных частотными параметрами)** состоит из операций:

Операция 1. Построить матрицу $\tilde{\Psi}(s)$ уравнения качества (9.2.18). Для этого найти матрицу $\tilde{\Psi}^{[0]}$ такую, чтобы компоненты вектора

$$y_{ycm} = \left(\tilde{\Psi}^{[0]}\right)^{-1} M^{[0]} \bar{\boldsymbol{f}} \leq \boldsymbol{z}^*_{ycm}, \tag{11.2.7}$$

удовлетворяли требованию (11.2.4) к точности при условии, что элементы матрицы $M^{[0]}$ определены неравенствами (11.2.2), а $|f_i| \leq \bar{f}_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Остальные матрицы $\tilde{\Psi}^{[i]}$ $\left(i = \overline{1,æ}\right)$ в уравнении качества произвольны, но при этом должно выполняться условие (9.2.37).

Операция 2. Построить диагональную матрицу $E^0(s)$ по формуле (9.2.42). Степени α_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ полиномов диагонали определяются неравенствами (9.2.55), (9.2.57). При противоречивости этих неравенств необходимо уточнить структуру матрицы $\tilde{\Psi}(s)$.

Операция 3. Решить систему уравнений (11.1.42), (11.1.43), в которой матрицы $\Psi^{[l]}$ $\left(l = \overline{0,æ}\right)$ составляют полиномиальную матрицу

$$\Psi(s) = E^0(s)\tilde{\Psi}(s). \tag{11.2.8}$$

Операция 4. Сформировать уравнение регулятора

$$\left(G^{[\mu-1]}s^{\mu-1} + \cdots + G^{[1]}s + G^{[0]}\right)\boldsymbol{u} = \left(R^{[\mu-1]}s^{\mu-1} + \cdots + R^{[1]}s + R^{[0]}\right)\boldsymbol{y}. \tag{11.2.9}$$

Операция 5. Преобразовать это уравнение к форме Коши (11.2.3).

■

11.2.3. Построение следящих систем

Усложним задачу 11.2.1 для объектов второго вида требованием (9.2.77) к точности слежения

$$|y_i(t) - y_{ж.i}(t)| \le \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.2.10}$$

где ε_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа, а желаемое движение $y_{ж.i}(t)$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ задаётся желаемой моделью (9.2.76)

$$\Psi_M(s)\boldsymbol{y}_{ж} = L_M(s)\boldsymbol{v}, \tag{11.2.11}$$

которая может принимать, в частности, вид

$$\boldsymbol{y}_{ж}(t) = \boldsymbol{v}(t). \tag{11.2.12}$$

Искомый регулятор записывается как

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y} + R^n(s)\boldsymbol{v}. \tag{11.2.13}$$

Приведём два способа определения его параметров, когда желаемая модель имеет вид (11.2.12).

1 способ. В этом способе (изложенном в п. 9.2.6) задача слежения сводится к стабилизации с расширенным вектором внешних возмущений $\tilde{\boldsymbol{f}}' = [\boldsymbol{f}', \boldsymbol{y}'_{ж}]$. Уравнения объекта (11.2.1) принимают в форме ««вход-выход»» вид (9.2.80).

Применяем процедуру 11.2.1 при известных оценках элементов матрицы $D^{[0]}$ полинома $D(s)$

$$\left|d_{ij}^{[0]}\right| \le d_{ij}^* \quad i,j = \overline{1,m}, \tag{11.2.14}$$

где d_{ij}^* $\left(i,j = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа, и находим операторы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора (11.2.13).

В соответствии с (9.2.79) полагаем оператор задающего воздействия

$$R^n(s) = -R(s). \tag{11.2.15}$$

2 способ. Он является развитием изложенного в п. 9.2.7 и сводится к процедуре 11.2.1, если в её операции 2 заменить соотношение (9.2.55) неравенством

$$\partial_{ri}\left[E^0(s)B(s)\right] \le \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.2.16}$$

которое используется как приближённая замена условия реализуемости (9.2.87).

Оператор задающего воздействия имеет в этом способе вид (9.2.84)

$$R^n(s) = \tilde{\Psi}(s). \tag{11.2.17}$$

Если желаемая модель следящей системы описывается уравнением (11.2.11), то, в соответствии с п. 9.2.8, строим матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора (11.2.13) с помощью процедуры 11.2.1, полагая в ней

$$\tilde{\Psi}(s) = \Psi_M(s), \tag{11.2.18}$$

а затем формируем

$$R^n(s) = L_M(s). \tag{11.2.19}$$

При этом может не выполняться неравенство (11.2.4), выражающее требование к точности стабилизации. В таком случае следует заменить выражения (11.2.18), (11.2.19) соотношениями (9.2.94).

11.2.4. Построение следящих систем при $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{m}$

Рассмотрим объект более общего вида. Пусть в (11.2.1) размерность r вектора измеряемых переменных $\boldsymbol{y}(t)$ не совпадает с размерностью m вектора регулируемых переменных, а уравнения объекта в канонической форме Лагранжа имеют при $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ вид (9.2.96)

$$P(s)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = N(s)\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{z} = L(s)\boldsymbol{y}. \tag{11.2.20}$$

Заметим, что последнее соотношение – частный случай выражения регулируемых переменных, которое в общем случае записывается как

$$\boldsymbol{z} = \tilde{L}(s)\boldsymbol{q}, \tag{11.2.21}$$

и лишь в случае, когда можно представить

$$\tilde{L}(s) = L(s)N(s), \tag{11.2.22}$$

получим вместо (11.2.21) выражение (11.2.20).

Пусть желаемая модель описывается уравнением (9.2.97)

$$\bar{\Psi}_M(s)\boldsymbol{z}_{ж} = L_M(s)\boldsymbol{v}, \tag{11.2.23}$$

где $\bar{\Psi}_M(s)$ и $L_M(s)$ – полиномиальные матрицы размеров $m \times m$.

Положим в уравнениях (11.1.42), (11.1.43)

$$\Psi(s) = \bar{\Psi}_M(s)L(s), \tag{11.2.24}$$

и проверим условия (11.1.32), (11.1.33).

Если они выполняются, то решим уравнения (11.1.42), (11.1.43) и получим матрицы $G(s)$ и $R(s)$ регулятора (11.2.13). Оператор задающего воздействия в этом регуляторе определим выражением (9.2.100)

$$R^n(s) = L_M(s). \tag{11.2.25}$$

Построенный регулятор может оказаться нереализуемым. В этом случае дополним $G(s)$ реализующей матрицей $E(s)$ вида (9.1.67) и выберем коэффициенты составляющих её полиномов достаточно малыми.

11.2.5. Компенсационная схема*

Она доставляет при $r \neq m$ реализуемый регулятор (9.1.72)

$$Q(s)\boldsymbol{u} = H^{(1)}(s)\boldsymbol{y} + H^{(2)}(s)\boldsymbol{u}, \tag{11.2.26}$$

в котором $r \times m$ и $m \times m$ полиномиальные матрицы $H^{(1)}(s)$ и $H^{(2)}(s)$ находятся из тождества (9.1.76)

$$H^{(2)}(s)P(s) + H^{(1)}(s)N(s) = Q(s)F(s). \tag{11.2.27}$$

В этом тождестве $F(s)$ – произвольная $m \times m$ матрица, удовлетворяющая лишь условию гурвицевости полинома $\det[P(s) - F(s)]$, а $Q(s)$ определяется выражением (9.1.81).

Пусть для матрицы $N(s)$ можно указать $m \times r$ матрицу $\tilde{F}(s)$ такую, что корни λ_i^N $\left(i = \overline{1,n}\right)$ полинома $\det[P(s) - \tilde{F}(s)N(s)]$, обладают свойством

$$\operatorname{Re}\lambda_i^N < 0 \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.2.28}$$

Тогда положим в (11.2.27)

$$F(s) = \tilde{F}(s)N(s), \tag{11.2.29}$$

и получим, после умножения слева на $P^{-1}(s)$, выражение

$$H^{(2)}(s) + H^{(1)}(s)W(s) = Q(s)\tilde{F}(s)W(s), \tag{11.2.30}$$

которое с точностью до обозначений совпадает с тождеством (11.1.36), из которого получены уравнения (11.1.42), (11.1.43).

Если матрица $Q(s)\tilde{F}(s)N(s)$ удовлетворяет условию (11.1.43)

$$\partial_{cj}\left[Q(s)\tilde{F}(s)N(s)\right] \leq \nu_j + \breve{\mu} - 1 \quad j = \overline{1,m}, \tag{11.2.31}$$

то решим уравнения (11.1.42), (11.1.43), заменив в них $\Psi^{[l]}$ на $\tilde{Q}^{[l]}$ $\left(l = \overline{1,æ}\right)$, где $\tilde{Q}^{[l]}$ матрицы полинома $Q(s)\tilde{F}(s)$, и получим операторы $H^{(1)}(s)$ и $H^{(2)}(s)$ регулятора (11.2.26), уравнения которого легко приводятся к форме Коши как показано в п. 9.1.8.

Этот регулятор разрешает задачу 11.1.1 непосредственно в классе реализуемых регуляторов и не требует дополнения левой части уравнения регулятора реализующей матрицей $E(s)$. Он обеспечивает асимптотическую устойчивость системы при условии (11.2.28), однако точность регулирования при внешних воздействиях остаётся неопределённой. Как и не определена точность слежения с оператором (9.1.104).

11.2.6. Использование АКОР по критерию обобщённой работы

Пусть в задаче 11.2.1 объектом управления служит объект первого вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}), \quad \boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}, \tag{11.2.32}$$

заданный ω-индексами (11.1.15), (11.1.16).

Если свободное движение этого объекта асимптотически устойчиво, то искомый регулятор

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x} \tag{11.2.33}$$

находится путём решения уравнений (11.1.55), (11.1.56) с матрицей

$$Q = L'Q^{[0]}L. \tag{11.2.34}$$

Элементы диагональной матрицы $Q^{[0]}$ определяются неравенствами (9.3.30)

$$q_{ii}^{[0]} \geq \frac{\bar{\boldsymbol{f}}'\bar{\boldsymbol{f}}}{z_{уст.i}^{*2}} \quad i = \overline{1, m}. \tag{11.2.35}$$

Если объект (11.2.32) неустойчив, но известно стабилизирующее управление (11.1.44), то регулятор (11.2.33), разрешающий задачу 11.2.1 определяется в результате решения рекуррентной системы (11.1.69), (11.1.70), в которой матрица Q находится из соотношений (11.2.34), (11.2.35).

При гармонических внешних возмущениях следует (в соответствии с (9.3.41)) заменить в неравенствах (11.2.35) границы $\bar{\boldsymbol{f}}$ ступенчатых воздействий на границы $\boldsymbol{f}_{гарм}$ гармонических возмущений.

11.3. Адаптивное управление

11.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим несамотождественный объект второго вида, устойчивый по управлению

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = D\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}, \tag{11.3.1}$$

с неизвестными параметрами. Известны оценки (11.1.21), (11.1.22) в описании этого объекта в форме ««вход-выход»», а $\boldsymbol{f}(t)$ – ступенчатое либо гармоническое возмущение.

Задача 11.3.1. Найти регулятор

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p\boldsymbol{x}_p + B_p\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p\boldsymbol{x}_p + F_p\boldsymbol{y}, \tag{11.3.2}$$

такой, чтобы, начиная с некоторого момента t^*, система (11.3.1), (11.3.2) удовлетворяла требованиям к точности

$$|z_k(t)| \leq z_k^* \quad k = \overline{1, m}, \quad t > t^*, \tag{11.3.3}$$

где y_i^* $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Для объектов первого вида (когда в (11.3.1) $D = E_n$, $M = B$, $\boldsymbol{z} = L\boldsymbol{x}$) искомый регулятор (11.3.2) записывается как

$$\boldsymbol{u} = C'\boldsymbol{x}. \tag{11.3.4}$$

Аналогичная задача возникает для многорежимного объекта, который описывается уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(i)}\boldsymbol{x} + B^{(i)}\boldsymbol{u} + M^{(i)}\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{y} = D^{(i)}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}, \tag{11.3.5}$$

на интервалах (t_{i-1}, t_i) $(i = 1, 2, \dots)$.

Пусть моменты t_i $(i = 0, 1, \dots)$ известны и объект полностью управляем и наблюдаем, а также устойчив к управлению) в каждом режиме (на каждом интервале (t_{i-1}, t_i) $(i = 1, 2, \dots)$. Будем полагать, что он частотно-квазистационарен и самотождественен в i-том режиме относительно регулятора $(i-1)$-го режима.

Задача 11.3.2. Найти многорежимный регулятор

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = A_p^{(i)}\boldsymbol{x}_p + B_p^{(i)}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} = D_p^{(i)}\boldsymbol{x}_p + F_p^{(i)}\boldsymbol{y}, \quad t_{i-1} \le t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \tag{11.3.6}$$

обеспечивающий в каждом режиме работы объекта (11.3.5) точность

$$|z_k(t)| \le z_k^* \quad k = \overline{1,m}, \qquad t^{*(i)} \le t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \tag{11.3.7}$$

где $t^{*(i)}$ – предельное время адаптации в i-том режиме, а z_k^* $\left(k = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. ■

Для объектов первого вида регулятор (11.3.6) записывается как

$$\boldsymbol{u} = C^{(i)\prime}\boldsymbol{x}. \tag{11.3.8}$$

Заметим, что свойство самотождественности объекта в i-том режиме относительно регулятора $(i-1)$-го режима означает асимптотическую устойчивость системы

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A^{(i)}\boldsymbol{x} + B^{(i)}\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y} &= D^{(i)}\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_p &= A_p^{(i-1)}\boldsymbol{x}_p + B_p^{(i-1)}\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{u} &= D_p^{(i-1)}\boldsymbol{x}_p + F_p^{(i-1)}\boldsymbol{y} \end{aligned} \qquad i = 2, 3, \dots, \tag{11.3.9}$$

состоящей из объекта в i-том режиме с регулятором, построенным в $(i-1)$-м режиме работы системы.

11.3.2. Декларативный регулятор

На На рис. 11.3.1. приведена схема декларативного регулятора, разрешающего задачу 11.3.1.

Генератор испытательных воздействий формирует параллельно-последовательное воздействие (11.1.7), (11.1.8).

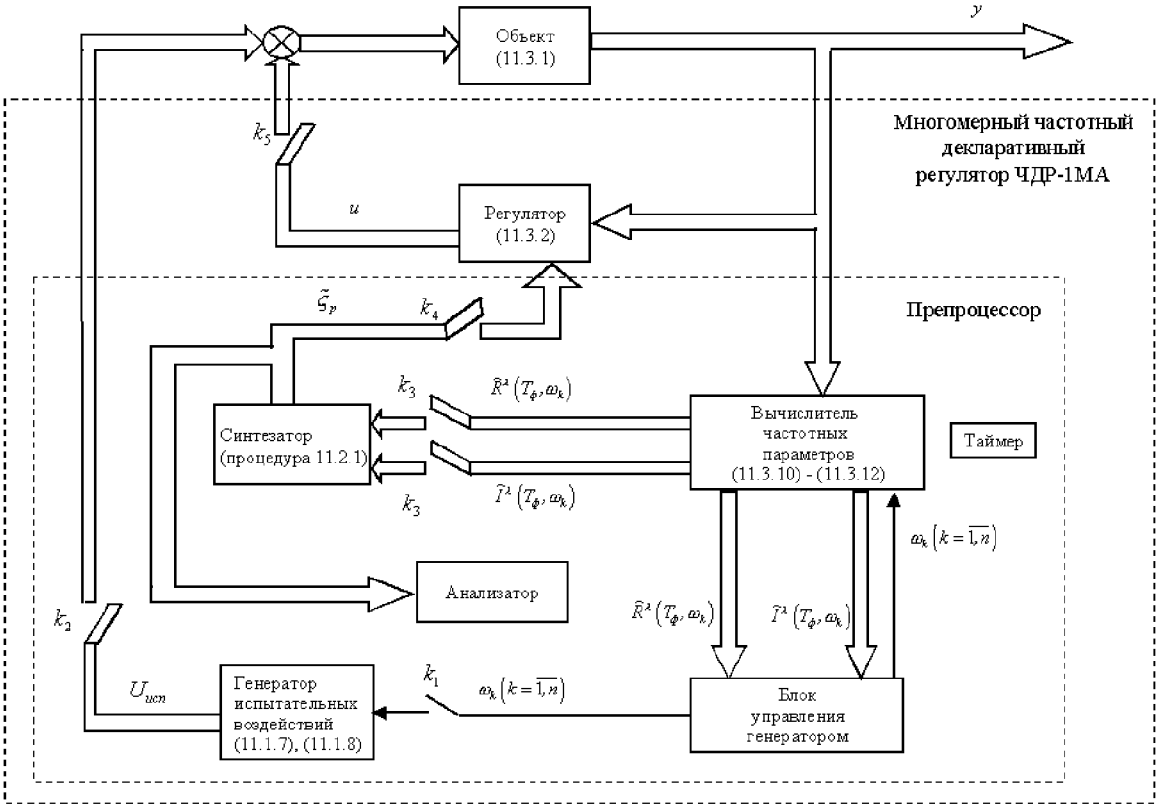

Рис. 11.3.1.

Выходом **вычислителя частотных параметров** служат оценки элементов матриц (11.1.27), (11.1.28) ω-индексов

$$\hat{r}^\lambda_{ji}(T_\phi, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_\phi} \int\limits_{t^u_{i-1}-T_{\text{п.г}}}^{t^u_i} \tilde{y}_j(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau \quad k=\overline{1,m} \quad j=\overline{1,r} \quad i=\overline{1,m} \quad r=m, \tag{11.3.10}$$

$$\hat{i}^\lambda_{ji}(T_\phi, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_\phi} \int\limits_{t^u_{i-1}-T_{\text{п.г}}}^{t^u_i} \tilde{y}_j(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \quad k=\overline{1,m} \quad j=\overline{1,r} \quad i=\overline{1,m} \quad r=m, \tag{11.3.11}$$

где

$$\tilde{y}_j(t) = y_j(t) e^{-\lambda t} \quad j = \overline{1,m}, \tag{11.3.12}$$

а T_ϕ – время фильтрации, которое полагается одинаковым во всех m экспериментах

$$T_\phi = t^u_i - t^u_{i-1} + T_{п.г} \quad i = \overline{1,m}, \tag{11.3.13}$$

и включает в себя время паузы генератора – $T_{п.г}$, в течение которого исследуется – не совпадают ли частоты испытательных воздействий с частотами внешних возмущений. Если имеется совпадение, то **блок управления генератором** изменяет испытательные частоты.

Синтезатор осуществляет процедуру 11.2.1. При выполнении операции 3 этой процедуры элементы матриц $R^{\lambda}(\omega_k)$ и $I^{\lambda}(\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ в уравнениях (11.1.42), (11.3.43) заменяются их оценками (11.3.10), (11.3.11).

Результатом работы синтезатора служит вектор ξ_p, составленный из параметров регулятора (11.3.2).

Таймер организует работу регулятора. Он последовательно включает блоки препроцессора (блок управления генератором, генератор, вычислитель частотных параметров и синтезатор) и отключает их по окончании работы. Ключ К5 затыкается когда препроцессор заканчивает работу.

Схема, приведённая на рис. 11.3.1., сохраняется и для объектов первого вида. Изменяются входы и выходы блоков. Так, на вход вычислителя частотных параметров поступают сигналы $x_j(t)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ $\left(\text{и поэтому в (11.3.10)-(11.3.12) заменяем } y_j \text{ на } x_j\text{, а } \tilde{y}_j \text{ на } \tilde{x}_j \ \left(j=\overline{1,n}\right)\right)$, синтезатор решает систему (11.1.69), (11.1.70) с матрицей Q, определяемой соотношениями (11.2.34), (11.2.35), а вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_p$ составлен из элементов матрицы C' регулятора (11.3.4).

11.3.3. Анализатор

Синтезатор осуществляет процедуру 11.2.1 при условии, что известны структурные параметры объекта (размерность пространства состояний, индексы управляемости, наблюдаемости и элиминантной матрицы и т.п.).

Если структурные параметры неизвестны, то в препроцессор добавляется ещё один блок-анализатор. Он осуществляет анализ устойчивости системы и лишь после этого вектор выхода синтезатора $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_p$ передаётся в регулятор. При этом таймер организует следующую последовательность операций, аналогичную процедуре 8.1.3.

Процедура 11.3.1.

Операция 1. Задаться индексом $\breve{\mu}$ элиминантной матрицы $\breve{\mu}=\bar{\breve{\mu}}^{(0)}$, определить $n=n^{(0)}=\breve{\mu}^{(0)}r$ $(r=m)$ и решить (после окончания работы вычислителя частотных параметров) систему уравнений (11.1.42), (11.1.43) при $æ=0$ и произвольной матрице $\Psi^{(0)}$. Если решение найдено, то перейти к операции 2, если оно не существует,то повторить операцию 1 при $\breve{\mu}_1^{(0)}=\breve{\mu}^{(0)}+1$ и $\breve{n}_1^{(0)}=\breve{\mu}_1^{(0)}r$ $(r=m)$ и т.д.

Операция 2. Положить $n=n^{(1)}=n^{(0)}+1$, определить (по окончании фильтрации) частотные параметры объекта, вычислить обобщённые ω-индексы системы (1.1.82), (1.1.83) и по ним проанализировать устойчивость с помощью критерия 6.2.2. Если система асимптотически устойчива, то перейти к операции 3, если неустойчива, то повторить операцию 1 при $\breve{\mu}=\breve{\mu}^{(1)}=\breve{\mu}^{(0)}+1$ и $n=n^{(1)}=\breve{\mu}^{(1)}m$ и принять в операции 2 $n=n^{(1)}+1$ и т.д. Результатом этих операций служат числа $\breve{\mu}=\bar{\mu}$ и $n=\bar{n}$.

Операция 3. Решить уравнения (11.1.42), (11.1.43) при $\check{\mu} = \bar{\mu}$ и $n = \bar{n}$ с матрицей $\Psi^{(0)}$, определённой из условия (11.2.7). Проверить выполнение условия (9.1.66) реализуемости регулятора. Если оно нарушается, то использовать реализующий оператор (9.1.67), в котором $\check{\mu} = \bar{\mu}$. Затем привести уравнения регулятора к форме Коши (11.2.3) и замкнуть ключ К4.

■

Эта процедура упрощается для объектов первого вида. Так, в операции 1 следует задаться размерностью вектора пространства состояний $n = n^{(0)}$, решить систему (11.1.69), (11.1.70) с матрицей Q, определяемой соотношениями (11.2.34), (11.2.35) и найти матрицу C' размеров $m \times n^{(0)}$. Затем, выполняя операцию 2, положить $n = n^{(1)}$, определить частотные параметры объекта, найти с помощью (11.1.84), (11.1.85) обобщённые ω-индексы системы и осуществить анализ устойчивости, используя критерий 6.2.2.

11.3.4. Управление многорежимными объектами

Задача 11.3.2 разрешается препроцессором, приведённым на на рис. 11.3.1. для каждого режима работы объекта. Ключ К5 замыкается после окончания первого режима и далее остаётся в замкнутом положении. Это приводит к тому, что во втором режиме объекта необходимо вычислить ω-индексы объекта по частотным параметрам объекта, замкнутого регулятором первого режима. Эта операция осуществляется и в последующих режимах. Она реализуется блоком-восстановителем ω-индексов объекта (входящим в вычислитель частотных параметров). Её результаты используются при выполнении операций 1 и 2 процедуры 11.2.1.

Введём расчётные соотношения, на основе которых работает блок-восстановитель. Рассматриваемая система описывается во втором режиме как

$$\boldsymbol{y} = \tilde{W}^{(2)}(s)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{исп}), \quad \boldsymbol{u} = W_p^{(1)}(s)\boldsymbol{y}, \tag{11.3.14}$$

где $\tilde{W}^{(2)}(s)$ – передаточная матрица объекта (11.3.5) во втором режиме, а $W_p^{(1)}(s)$ – передаточная матрица регулятора (11.3.6) в первом режиме.

Отсюда следует, что $\boldsymbol{y} = W_{зам}^{(2)}(s)\boldsymbol{u}_{исп}$, где передаточная матрица замкнутой системы

$$W_{зам}^{(2)}(s) = \left[E_r - \tilde{W}^{(2)}(s)W_p^{(1)}(s)\right]^{-1} \tilde{W}^{(2)}(s). \tag{11.3.15}$$

Из этого выражения находим передаточную матрицу объекта во втором режиме

$$\tilde{W}^{(2)}(s) = W_{зам}^{(2)}(s)\left[E_m + W_p^{(1)}(s)W_{зам}^{(2)}(s)\right]^{-1}. \tag{11.3.16}$$

Аналогично запишем для i-го режима

$$\tilde{W}^{(i)}(s) = W_{зам}^{(i)}(s)\left[E_m + W_p^{(i-1)}(s)W_{зам}^{(i)}(s)\right]^{-1} \quad i = 2, 3, \ldots . \tag{11.3.17}$$

Отсюда следуют искомые ω-индексы объекта в i-том режиме

$$R^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)=\mathrm{Re}\Big\{\Big[R_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)+jI_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big\langle E_m+W_p^{(i-1)}(j\omega_k)\Big[R_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)+jI_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)\Big]\Big\rangle^{-1}\Big\}\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots, \tag{11.3.18}$$
$$I^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)=\mathrm{Jm}\Big\{\Big[R_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)+jI_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big\langle E_m+W_p^{(i-1)}(j\omega_k)\Big[R_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)+jI_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)\Big]\Big\rangle^{-1}\Big\}\quad k=\overline{1,n}\quad i=2,3,\ldots, \tag{11.3.19}$$

где $T_{ф}^{(i)}$ – время фильтрации в i-том режиме, $R_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)$ и $I_{зам}^{(i)}\left(T_{ф}^{(i)},\omega_k\right)$ – сигналы на выходах вычислителя частотных параметров в i-том режиме.

Время фильтрации $T_{ф}^{(i)}$ в i-том режиме $(i=1,2,\ldots)$ работы объекта состоит из m отрезков $T_{ф.k}^{(i)}$ $\left(k=\overline{1,m}\right)$. На протяжении ν-того отрезка времени к ν-му входу объекта прикладывается параллельное испытательное воздействие (11.1.8).

Предполагаемая в задаче 11.3.2 частотная квазистационарность объекта означает, что суммарное предельное время фильтрации

$$T_{ф}^{(i)}=\sum_{k=1}^{m}T_{ф.k.предельн}^{(i)}$$

не превышает длительности $T^{(i)}$ i-го режима, где $T_{ф.k.предельн}^{(i)}$ определяется (8.3.11).

11.3.5. Следящая система с эталонной моделью

Усложним задачу 11.3.2 требованием слежения за сигналом $\boldsymbol{y}_{ж}(t)$ с заданной точностью

$$|y_j(t)-y_{ж.j}(t)|\le y_j^*\quad j=\overline{1,m},\qquad t^{*(i)}\le t<t_i\quad i=1,2,\ldots. \tag{11.3.20}$$

Сигнал $\boldsymbol{y}_{ж}(t)$ формируется эталонной моделью, описываемой уравнением (9.2.76)

$$\Psi_M(s)\boldsymbol{y}_{ж}=L_M(s)\boldsymbol{v}. \tag{11.3.21}$$

Уравнение искомого регулятора в форме ««вход-выход»» имеет вид

$$G^{(i)}(s)\boldsymbol{u}=R^{(i)}(s)\boldsymbol{y}+L_M(s)\boldsymbol{v}\quad i=0,1,\ldots. \tag{11.3.22}$$

Структурная схема адаптивного регулятора представлена на рис. 11.3.2.

Рассмотрим первый режим работы объекта. Выделим в этом режиме два интервала времени $\left[t_0,T^{*(1)}\right]$ и $\left[T^{*(1)},t_1\right]$. В течение первого интервала $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ и результатом работы адаптера служит регулятор

$$=\begin{Bmatrix}G^{(\check{\mu}-1)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}s^{\check{\mu}-1}+\cdots+G^{(1)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}s+G^{(0)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}\\ R^{(\check{\mu}-1)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}s^{\check{\mu}-1}+\cdots+R^{(1)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}s+R^{(0)}\begin{bmatrix}T^{*(1)}\end{bmatrix}\end{Bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{u}=\\ \boldsymbol{y}.\end{matrix} \tag{11.3.23}$$

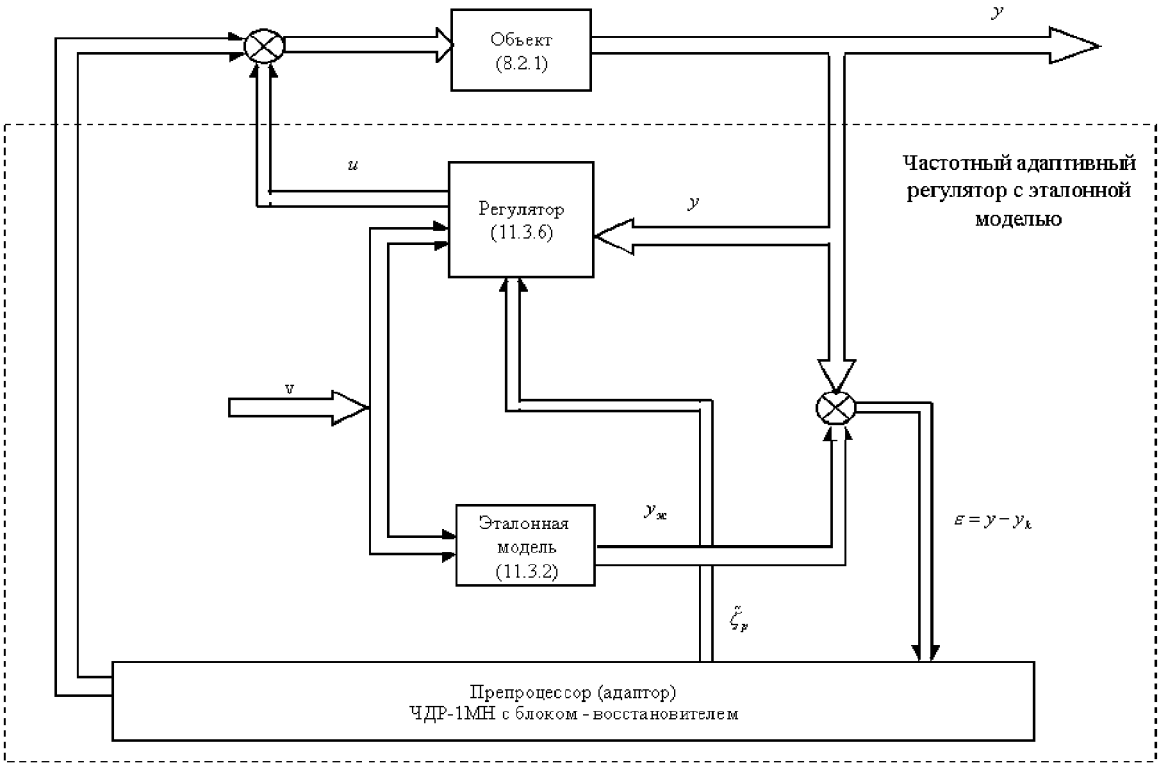

Рис. 11.3.2.

который, после его подключения к объекту, обеспечивает на интервале $\left[t^{*(1)}, T^{*(1)}\right]$ выполнение неравенства

$$|y_j(t)| \le y_j^* \quad j = \overline{1, m}, \qquad t^{*(1)} \le t < T^{*(1)}. \tag{11.3.24}$$

При этом в операции 1 процедуры 11.2.1 полагаем

$$\tilde{\Psi}(s) = \Psi_M(s) \tag{11.3.25}$$

(Если $\boldsymbol{y}_{уст}$, определяемое из (11.2.7), не удовлетворяет (11.3.23), то используем выражения (9.2.94)).

11.3.6. Слежение в первом режиме работы объекта

На втором интервале $\left[T^{*(1)}, t_1\right]$ приложим к эталонной модели и регулятору задающее воздействие $\boldsymbol{v}(t)$.

Найдём выражение для ошибки слежения. Для этого запишем уравнение объекта (11.3.5) в форме ««вход-выход»» и уравнение регулятора (11.3.23) с учётом задающего воздействия

$$D^{(1)}(s)\boldsymbol{y} = B^{(1)}(s)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{исп}) + M^{(1)}(s)\boldsymbol{f}, \quad G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{y} + L_M(s)\boldsymbol{v}. \tag{11.3.26}$$

Заменим в этих уравнениях $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{y}_{ж}$ и получим

$$D^{(1)}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = B^{(1)}(s)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{исп}) - D^{(1)}(s)\boldsymbol{y}_{ж} + M^{(1)}(s)\boldsymbol{f}, \tag{11.3.27}$$

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\boldsymbol{\varepsilon} + R(s)\boldsymbol{y}_{ж} + L_M(s)\boldsymbol{v}. \tag{11.3.28}$$

Запишем уравнение регулятора как

$$G(s)\boldsymbol{u} = R(s)\times$$
$$\times\left\{\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_{исп})-y_{ж}+\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}M^{(1)}(s)\boldsymbol{f}\right\} + R(s)\boldsymbol{y}_{ж} + L_M(s)\boldsymbol{v}.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = \left\{G(s) - R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1}\cdot\\ \cdot\left\{R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}M^{(1)}(s)\boldsymbol{f} + R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\boldsymbol{u}_{исп} + L_M(s)\boldsymbol{v}\right\}.\end{gathered} \tag{11.3.29}$$

Подставим это выражение в (11.3.27) и получим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon} = \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\left\{G(s) - R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1}\cdot\\ \cdot\left\{R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}M^{(1)}(s)\boldsymbol{f} + R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\boldsymbol{u}_{исп} + L_M(s)\boldsymbol{v}\right\} -\\ -\boldsymbol{y}_{ж} + \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}M^{(1)}(s)\boldsymbol{f} + \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\boldsymbol{u}_{исп}.\end{gathered} \tag{11.3.30}$$

Запишем его в более компактной форме. Для этого используем равенство

$$\begin{gathered}\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\left\{G(s)-R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1}R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)+\\ +\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)=\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\left\{G(s)-R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1}G(s),\end{gathered} \tag{11.3.31}$$

которое нетрудно доказать, применяя очевидное соотношение

$$(K - L)^{-1}L + E = (K - L)^{-1}K, \tag{11.3.32}$$

где K и L – произвольные квадратные матрицы.

Последнее выражение в (11.3.31) представим как

$$\begin{gathered}\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\left\{G(s) - R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1}G(s) =\\ = \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\left\{E_m - G^{-1}(s)R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s)\right\}^{-1} =\\ = \tilde{W}^{(1)}(s)\left[E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1},\end{gathered} \tag{11.3.33}$$

где

$$\tilde{W}^{(1)}(s) = \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1}B^{(1)}(s), \quad W_p(s) = G^{-1}(s)R(s). \tag{11.3.34}$$

Будем использовать также равенство

$$\begin{aligned}
&\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{G(s) - R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s)\right\}^{-1} \cdot \\
&\cdot R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} M^{(1)}(s) + \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} M^{(1)}(s) = \\
&= \left\langle \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{E_m - G^{-1}(s)R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s)\right\}^{-1} \cdot \right. \\
&\left. \cdot G^{-1}(s)R(s) + E_m \right\rangle \cdot \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} M^{(1)}(s) = \\
&= \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{E_m - G^{-1}(s)R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s)\right\}^{-1} \cdot \\
&\cdot \left\{\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s)\right\}^{-1} \cdot \left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} M^{(1)}(s),
\end{aligned} \tag{11.3.35}$$

которое можно доказать, если применить соотношение

$$K(E - LK)^{-1}L + E = K(E - LK)^{-1}K^{-1}, \tag{11.3.36}$$

где K и L – произвольные квадратные матрицы.

Используем выражения (11.3.33)-(11.3.35) и запишем (11.3.30) в окончательной форме

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \tilde{W}^{(1)}(s)\left[G(s) - R(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1} L_M(s)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}_{ж} + \\
&+ \tilde{W}^{(1)}(s)\left[E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1} \boldsymbol{u}_{исп} + \\
&+ \tilde{W}^{(1)}(s)\left[G(s) - R(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1} G(s)\left[B^{(1)}(s)\right]^{-1} M^{(1)}(s)\boldsymbol{f}.
\end{aligned} \tag{11.3.37}$$

Учтём теперь, что матрицы регулятора (11.3.23) удовлетворяют, в соответствии с процедурой 11.2.1, тождеству

$$G(s) - R(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s) = \Psi_M(s)\left[D^{(1)}(s)\right]^{-1} B^{(1)}(s) = \Psi_M(s)\tilde{W}^{(1)}(s), \tag{11.3.38}$$

(в котором для простоты полагаем $E^0(s) = E$) и поэтому

$$G(s) = B^{(1)}(s) \quad \text{и} \quad R(s) = D^{(1)}(s) - \Psi_M(s). \tag{11.3.39}$$

Подставим тождество (11.3.38) в выражение (11.3.37) для ошибки слежения и получим, с учётом первого из соотношений (11.3.39), связь

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \Psi_M^{-1}(s)L_M(s)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}_{ж} + \tilde{W}^{(1)}(s)\left[E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1} \boldsymbol{u}_{исп} + \Psi_M^{-1}(s)M^{(1)}(s)\boldsymbol{f} = \\
&= \tilde{W}^{(1)}(s)\left[E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(1)}(s)\right]^{-1} \boldsymbol{u}_{исп} + \Psi_M^{-1}(s)M^{(1)}(s)\boldsymbol{f},
\end{aligned} \tag{11.3.40}$$

которая означает, что использование эталонной модели даёт основание рассматривать следящую систему как систему регулирования. Эта связь означает также, что на втором интервале $\left[T^{*(1)}, t_1\right]$ можно оставить в регуляторе (11.3.28) параметры регулятора (11.3.23).

11.3.7. Слежение во втором режиме работы объекта

В момент времени t_1 начался второй режим и изменились параметры объекта. Выражение (11.3.37) для ошибки слежения принимает теперь вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{W}^{(2)}(s)\Big[G(s) - R(s)\tilde{W}^{(2)}(s)\Big]^{-1} L_M(s)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}_{ж} + \tilde{W}^{(2)}(s)\Big[E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(2)}(s)\Big]^{-1} \boldsymbol{u}_{исп} +$$
$$+ \tilde{W}^{(2)}(s)\Big[G(s) - R(s)\tilde{W}^{(2)}(s)\Big]^{-1} G(s)\left[B^{(2)}(s)\right]^{-1} M^{(2)}(s)\boldsymbol{f}, \qquad (11.3.41)$$

где $\tilde{W}^{(2)}(s) = \left[D^{(2)}(s)\right]^{-1} B^{(2)}(s)$ – передаточная матрица объекта во втором режиме его работы.

Тождество (11.3.38) теперь нарушается и в процессе фильтрации появляется дополнительная ««помеха»»

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \tilde{W}^{(2)}(s)\left[G(s) - R(s)\tilde{W}^{(2)}(s)\right]^{-1} L_M(s)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}_{ж}, \qquad (11.3.42)$$

которая увеличивает время фильтрации.

После окончания фильтрации синтезатор формирует параметры регулятора

$$G^{(2)}(s)\boldsymbol{u} = R^{(2)}(s)\boldsymbol{y} + L_M(s)\boldsymbol{v}. \qquad (11.3.43)$$

В последующих режимах работы объекта описанные ситуации повторяются, за исключением процесса на начальном интервале $\left[t_0, T^{*(1)}\right]$.

Доказательства к главе 11

11.Д. Доказательство теорем и утверждений

11.Д.1. Доказательство теоремы 11.1.1

Рассмотрим вначале равенство (11.1.18) при условии, что объект (11.1.1) – асимптотически устойчив, а $\lambda = 0$ и повторим изложенное в 6.Д.4 доказательство утверждения 6.3.1, которое при $m = 1$ совпадает с доказываемой теоремой.

Аналогично (6.Д.44)-(6.Д.47) запишем

$$I_x(\omega) = \mathrm{Jm}\,\mathcal{B}(j\omega) = \mathrm{Jm}\,\frac{(\widetilde{\overline{Ej\omega - A}})Bd(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2} = \frac{1}{|d(j\omega)|^2}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \Psi^{(2i+1)}\omega^{2i+1}, \quad (11.Д.1)$$

где $n \times m$ матрица

$$\Psi^{(\alpha)} = \sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^{\alpha-\gamma} d_{\alpha-\gamma} A_\gamma B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \qquad (11.Д.2)$$

Используем обозначения (6.Д.52), (6.Д.58) и получим, повторяя (6.Д.51)-(6.Д.62)

$$\begin{aligned}
M_{x.I} &= \left[\begin{array}{cccc} I_x(\omega_1) & I_x(\omega_2) & \cdots & I_x(\omega_n) \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{cccc} \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\omega_1^{2i+1}\Psi^{(2i+1)} & \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\omega_2^{2i+1}\Psi^{(2i+1)} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\omega_n^{2i+1}\Psi^{(2i+1)} \end{array}\right] \cdot \\
&\cdot\ \mathrm{diag}\left[\begin{array}{cccc} \dfrac{1}{|d(j\omega_1)|^2} & \dfrac{1}{|d(j\omega_2)|^2} & \cdots & \dfrac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \end{array}\right] = \\
&= \left[\begin{array}{cccc} \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} & \ldots & \Psi^{(2n-1)} \end{array}\right] \cdot [E_m \otimes S] \cdot T = \\
&= \left[\begin{array}{cccc} A_{n-1}B & A_{n-2}B & \cdots & A_0B \end{array}\right] \cdot [E_m \otimes \Gamma_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot T = \\
&= \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] \cdot [E_m \otimes \Gamma_3] \cdot [E_m \otimes \Gamma_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot T,
\end{aligned} \tag{11.Д.3}$$

где

$$T = \mathrm{diag}\left[\begin{array}{cccc} \dfrac{1}{|d(j\omega_1)|^2} & \dfrac{1}{|d(j\omega_2)|^2} & \cdots & \dfrac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \end{array}\right], \tag{11.Д.4}$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & d_1 \\ 0 & d_n & d_{n-1} & \cdots & d_2 \\ 0 & 0 & d_n & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}. \tag{11.Д.5}$$

Выражение

$$E_m \otimes L = \begin{pmatrix} E_m l_{11} & E_m l_{12} & \cdots & E_m l_{1n} \\ E_m l_{21} & E_m l_{22} & \cdots & E_m l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_m l_{n1} & E_m l_{n2} & \cdots & E_m l_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11.Д.6}$$

где l_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ – элементы матрицы L.

<u>Лемма 11.Д.1.</u> Если определитель некоторой матрицы L, равен Δ $(\det L = \Delta)$, то

$$\det[E_m \otimes L] = \Delta^m. \tag{11.Д.7}$$

■

Доказательство леммы приведено в конце 11.Д.1.

Определим ранг матрицы 11.Д.3. Из (11.Д.5) следует, что

$$\det \Gamma_2 = d_n^m \neq 0. \tag{11.Д.8}$$

В 6.Д.4 показано, что для асимптотически устойчивых объектов $\det \Gamma_1 \neq 0$, а $\det \check{S} \neq 0$ как определитель Вандермонда с несовпадающими элементами.

Используем лемму и получим

$$\det[E_m \otimes \Gamma_3] \neq 0, \quad \det[E_m \otimes \Gamma_1] \neq 0, \quad \det[E_m \otimes \check{S}] \neq 0. \tag{11.Д.9}$$

Учитывая, что от умножения некоторой матрицы A слева или справа на матрицы, определитель которых отличен от нуля, ранг A не меняется, заключаем из (11.Д.3), что

$$\operatorname{rank} M_{x.I} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}. \tag{11.Д.10}$$

Из этого равенства и полной управляемости объекта (11.1.1) следует при $\lambda = 0$ равенство (11.1.18) теоремы.

Пусть теперь объект неустойчив и $\lambda > C_0$. В этом случае (11.Д.1) примет вид

$$I_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Jm}\mathcal{B}^\lambda(j\omega) = \operatorname{Jm}\frac{\widetilde{\left(\overline{Ej\omega - \tilde{A}}\right)} B\tilde{d}(-j\omega)}{|\tilde{d}(j\omega)|^2} = \frac{1}{|\tilde{d}(j\omega)|^2}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\tilde{\Psi}^{(2i+1)}\omega^{2i+1}, \tag{11.Д.11}$$

где

$$\tilde{A} = A - E\lambda, \quad \tilde{d}(j\omega) = \det\left(Ej\omega - \tilde{A}\right). \tag{11.Д.12}$$

Повторяя (11.Д.2)-(11.Д.5), запишем

$$\begin{aligned} M_{x.I}^\lambda &= \begin{bmatrix} I_x^\lambda(\omega_1) & I_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & I_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}^{(1)} & \tilde{\Psi}^{(2)} & \ldots & \tilde{\Psi}^{(2n-1)} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot \tilde{T} = \\ &= \begin{bmatrix} B & \tilde{A}B & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \tilde{\Gamma}_2] \cdot [E_m \otimes \tilde{\Gamma}_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot \tilde{T}. \end{aligned} \tag{11.Д.13}$$

Покажем, что $\det \tilde{\Gamma}_1 \neq 0$. (11.Д.14)

По построению, собственные числа $\tilde{s}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ матрицы $\tilde{A}$ связаны соотношением

$$\tilde{s}_i = s_i - \lambda \quad i = \overline{1,n}, \tag{11.Д.15}$$

в котором s_i – собственные числа матрицы A.

Действительно, обозначим $s + \lambda = \delta$ и запишем полином

$$\det\left(Es - \tilde{A}\right) = \det[E(s+\lambda) - A] = \det[E\delta - A] = \delta^n + d_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + d_1\delta + d_0.$$

Его корни

$$\delta_i = s_i \quad i = \overline{1,n}.$$

С другой стороны, его корни как корни полинома

$$\det\left(Es - \tilde{A}\right) = s^n + \tilde{d}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{d}_1 s + \tilde{d}_0$$

равны $\tilde{s}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ и следовательно справедливо (11.Д.15).

Убедимся, что

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & \tilde{A}B & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B \end{bmatrix} = n. \tag{11.Д.16}$$

Для этого покажем, что

$$\begin{aligned} &\det\left(B_{[1]}\ AB_{[1]}\cdots A^{\nu_1-1}B_{[1]}\middle|B_{[2]}\ AB_{[2]}\cdots A^{\nu_2-1}B_{[2]}\middle|\cdots\middle|B_{[m]}\ AB_{[m]}\cdots A^{\nu_m-1}B_{[m]}\right) = \\ &= \det\left(B_{[1]}\ \tilde{A}B_{[1]}\cdots \tilde{A}^{\nu_1-1}B_{[1]}\middle|B_{[2]}\ \tilde{A}B_{[2]}\cdots \tilde{A}^{\nu_2-1}B_{[2]}\middle|\cdots\middle|B_{[m]}\ \tilde{A}B_{[m]}\cdots \tilde{A}^{\nu_m-1}B_{[m]}\right). \end{aligned} \tag{11.Д.17}$$

Учитывая, что

$$\tilde{A}^\gamma = (A - E\lambda)^\gamma = \sum_{i=0}^{\gamma} \alpha_i^{(\gamma)} A^i \quad \gamma = \overline{1, \rho}, \quad \rho = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m\} - 1, \qquad (11.Д.18)$$

где $\alpha_i^{(\gamma)}$ – вещественные числа, преобразуем правую часть (11.Д.17) так, чтобы она совпала с левой. Подобное преобразование описано в п. 6.3.2.

Из (11.Д.14) и (11.Д.16) следует второе из равенств теоремы.

Доказательство выражения (11.1.17) аналогично.

Доказательство леммы 11.Д.1.

Приведём вначале некоторые вспомогательные факты, на которые будет опираться доказательство.

Пусть K и L – произвольные матрицы размеров $n \times n$. Очевидно, что

а) если $K + L = M$, то

$$E_m \otimes K + E_m \otimes L = E_m \otimes M. \qquad (11.Д.19)$$

б) если $K \cdot L = D$, то

$$[E_m \otimes K] \cdot [E_m \otimes L] = E_m \otimes D. \qquad (11.Д.20)$$

Из последнего выражения следует, что для $L = K^{-1}$,

$$[E_m \otimes K] \cdot [E_m \otimes K^{-1}] = E_m \otimes E_n,$$

и поэтому

$$[E_m \otimes K]^{-1} = E_m \otimes K^{-1}. \qquad (11.Д.21)$$

Переходя непосредственно к доказательству леммы воспользуемся методом математической индукции.

Так, при $n = 1$ лемма очевидна и

$$\det E_m l_{11} = l_{11}^m.$$

При $n = 2$ воспользуемся формулой для определителя блочной матрицы и запишем

$$\det[E_m \otimes L] = \det \begin{pmatrix} E_m l_{11} & E_m l_{12} \\ E_m l_{21} & E_m l_{22} \end{pmatrix} = \det[E_m l_{11} \cdot \det \left[E_m l_{22} - E_m l_{21} \left(E_m l_{11}\right)^{-1} E_m l_{12}\right] =$$
$$= l_{11}^m \det \left[E_m \left(l_{22} - l_{21} l_{11}^{-1} l_{12}\right)\right] = (l_{11} l_{22} - l_{21} l_{12})^m. \qquad (11.Д.22)$$

Пусть равенство 11.Д.7 выполняется для $n - 1$. Убедимся, что оно справедливо и для n. Представим матрицу L в виде

$$L = \begin{pmatrix} \bar{L} & \bar{L}_{[n]} \\ \bar{L}^{[n]} & l_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (11.Д.23)$$

где $\bar{L}$ – матрица размеров $(n-1)\times(n-1)$, получаемая из матрицы L вычёркиванием n-ой строки и n-го столбца, $\bar{L}^{[n]}$ – n-я строка матрицы L без последнего элемента, $\bar{L}_{[n]}$ – n-й столбец матрицы L без последнего элемента.

Используем (11.Д.20)-(11.Д.22) и получим выражение

$$\begin{aligned}\det[E_m\otimes L] &= \det\left[E_m\otimes\bar{L}\right]\cdot\det\left\{E_m l_{nn} - E_m\otimes\bar{L}^{[n]}\left[E_m\otimes\bar{L}\right]^{-1}E_m\otimes\bar{L}_{[n]}\right\} = \\ &= \left(\det\bar{L}\right)^m\cdot\det\left\{E_m\left(l_{nn}-\bar{L}^{[n]}\bar{L}^{-1}\bar{L}_{[n]}\right)\right\} = \left(\det\bar{L}\right)^m\cdot\left(l_{nn}-\bar{L}^{[n]}\bar{L}^{-1}\bar{L}_{[n]}\right)^m = \\ &= \left[\det\bar{L}\left(l_{nn}-\bar{L}^{[n]}\bar{L}^{-1}\bar{L}_{[n]}\right)\right]^m = (\det L)^m,\end{aligned} \tag{11.Д.24}$$

которое и доказывает лемму.

11.Д.2. Доказательство теоремы 11.1.2

Используем выражение (11.1.24) и запишем на основе (11.Д.11)

$$I^\lambda(\omega) = \operatorname{Jm} D\frac{\left(\widetilde{\overline{Ej\omega-\tilde{A}}}\right)B\tilde{d}(-j\omega)}{\left|\tilde{d}(j\omega)\right|^2} = \frac{1}{\left|\tilde{d}(j\omega)\right|^2}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i D\tilde{\Psi}^{(2i+1)}\omega^{2i+1}. \tag{11.Д.25}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}M_I^\lambda &= \left[\begin{array}{cccc} I^\lambda(\omega_1) & I^\lambda(\omega_2) & \cdots & I^\lambda(\omega_n)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} DI_x^\lambda(\omega_1) & DI_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & DI_x^\lambda(\omega_n)\end{array}\right] = \\ &= D\left[\begin{array}{cccc} B & \tilde{A}B & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B\end{array}\right]\cdot[E_m\otimes\tilde{\Gamma}_2]\cdot[E_m\otimes\tilde{\Gamma}_1]\cdot[E_m\otimes\check{S}]\cdot\tilde{T}.\end{aligned} \tag{11.Д.26}$$

Покажем, что

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{cccc} DB & D\tilde{A}B & \cdots & D\tilde{A}^{n-1}B\end{array}\right] = r. \tag{11.Д.27}$$

Для этого представим

$$\left[\begin{array}{cccc} B & \tilde{A}B & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \tilde{L} & \tilde{K}\end{array}\right], \tag{11.Д.28}$$

где $\tilde{L}=\left(B_{[1]}\ \tilde{A}B_{[1]}\cdots\tilde{A}^{\nu_1-1}B_{[1]}\middle|B_{[2]}\ \tilde{A}B_{[2]}\cdots\tilde{A}^{\nu_2-1}B_{[2]}\middle|\cdots\middle|B_{[m]}\ \tilde{A}B_{[m]}\cdots\tilde{A}^{\nu_m-1}B_{[m]}\right)$, а матрица $\tilde{K}$ содержит остальные столбцы матрицы в левой части (11.Д.28).

Тогда

$$D\left[\begin{array}{cccc} B & \tilde{A}B & \cdots & \tilde{A}^{n-1}B\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} D\tilde{L} & D\tilde{K}\end{array}\right], \tag{11.Д.29}$$

Из (11.Д.17) следует, что $\det\tilde{L}\neq 0$ и поэтому

$$\operatorname{rank} D\tilde{L} = \operatorname{rank} D = r. \tag{11.Д.30}$$

Так как $\det\tilde{\Gamma}_2\neq 0$, $\det\tilde{\Gamma}_1\neq 0$ и $\det S\neq 0$, то из (11.Д.30) следует второе из равенств (11.1.29) теоремы.

Доказательство первого из них аналогично.

11.Д.3. Доказательство теоремы 11.1.3

Покажем вначале, что уравнения (11.1.42), (11.1.43) теоремы эквивалентны системе

$$G(\lambda + j\omega_k)P(\lambda + j\omega_k) - R(\lambda + j\omega_k)N(\lambda + j\omega_k) = \Psi(\lambda + j\omega_k)N(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.31}$$

которая следует из тождества (11.1.35) при $s = \lambda + j\omega_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

Эта система, после её умножения справа на $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ совпадает с системой (11.1.38), следствием которой служат рассматриваемые уравнения (11.1.42), (11.1.43).

Таким образом, если существуют матрицы $P^{-1}(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, то указанные уравнения и система (11.Д.31) эквивалентны.

Найдём условия существования $P^{-1}(\lambda+j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$. Представим $P(\lambda+j\omega) = P^{(1)} + jP^{(2)}$, где $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ – матрицы, зависящие от λ и ω, и найдём $m \times m$ матрицы $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ такие, что

$$\left[P^{(1)} + jP^{(2)}\right]^{-1} = L^{(1)} + jL^{(2)}.$$

По определению обратной матрицы

$$\left[P^{(1)} + jP^{(2)}\right] \cdot \left[L^{(1)} + jL^{(2)}\right] = \left[L^{(1)} + jL^{(2)}\right] \cdot \left[P^{(1)} + jP^{(2)}\right] = E_m.$$

Из первого произведения следует

$$P^{(1)}L^{(1)} - P^{(2)}L^{(2)} = E_m, \quad P^{(2)}L^{(1)} + P^{(1)}L^{(2)} = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$L^{(2)} = -\left[P^{(1)}\right]^{-1} P^{(2)}L^{(1)}. \tag{11.Д.32}$$

Подставим это выражение в первое из уравнений и получим

$$L^{(1)} = \left\{P^{(1)} + P^{(2)}\left[P^{(1)}\right]^{-1} P^{(2)}\right\}^{-1}. \tag{11.Д.32$'$}$$

Очевидно, что

$$L^{(2)} = \left\{P^{(2)} + P^{(1)}\left[P^{(2)}\right]^{-1} P^{(1)}\right\}^{-1}.$$

Таким образом, $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ существует, если

$$\det\left\{P^{(1)}(\omega_k) + P^{(2)}(\omega_k)\left[P^{(1)}(\omega_k)\right]^{-1} P^{(2)}(\omega_k)\right\} \neq 0 \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.33}$$

$$\det\left\{P^{(2)}(\omega_k) + P^{(1)}(\omega_k)\left[P^{(2)}(\omega_k)\right]^{-1} P^{(1)}(\omega_k)\right\} \neq 0 \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.34}$$

где $P^{(1)}(\omega_k) = \operatorname{Re} P(\lambda + \omega_k)$, $P^{(2)}(\omega_k) = \operatorname{Jm} P(\lambda + \omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$.

Условия (11.Д.33), (11.Д.34) – выполняются, так как в противном случае не существует частотных параметров.

Действительно, учитывая (11.1.23), (11.1.24) и (9.2.39) запишем

$$\begin{aligned} R^{\lambda}(\omega_k) &= \operatorname{Re} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Re}\left[N(\lambda + j\omega_k)P^{-1}(\lambda + \omega_k)\right], \\ I^{\lambda}(\omega_k) &= \operatorname{Jm} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Jm}\left[N(\lambda + j\omega_k)P^{-1}(\lambda + \omega_k)\right]. \end{aligned} \tag{11.Д.35}$$

Рассмотрим теперь систему (11.Д.31) и покажем что её решения совпадают с решениями уравнения (9.1.44).

Запишем эту систему с учётом (9.1.40), (9.1.42) в виде

$$G(s_k)P(s_k) - R(s_k)N(s_k) - \Delta(s_k) = [XM_{e\mu} - \Delta]S_{e\mu}(s_k) = 0, \tag{11.Д.36}$$

где $s_k = \lambda + j\omega_k \ \left(k = \overline{1,n}\right)$.

Обозначим

$$H = [XM_{e\mu} - \Delta]' \tag{11.Д.37}$$

и представим (11.Д.36)

$$S'_{e\mu}(s_k)H = 0 \quad k = \overline{1,n}. \tag{11.Д.38}$$

Здесь $S'_{e\mu}(s_k) \ \left(k = \overline{1,n}\right)$ – матрицы размеров $m \times (n + m\mu)$, а H – матрица размеров $(n + m\mu) \times m$.

Систему (11.Д.38) можно записать как m независимых подсистем

$$S'_{e\mu}(s_k)H_{[i]} = 0 \quad k = \overline{1,n} \quad i = \overline{1,m}. \tag{11.Д.39}$$

В развёрнутой форме, например, первая из этих подсистем имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_1+\breve{\mu}-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_2+\breve{\mu}-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_m+\breve{\mu}-1}
\end{array}\right) \times \left[\begin{array}{c} \eta_{11} \\ \eta_{21} \\ \vdots \\ \eta_{\nu_1+\breve{\mu},1} \\ \hline \vdots \\ \eta_{n+m\breve{\mu},1} \end{array}\right] = 0 \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.40}$$

где $\eta_{i1} \ \left(i = \overline{1, n + m\mu}\right)$ – компоненты вектора $H_{[i]}$.

Эта подсистема в свою очередь представляется как m независимых подсистем для определения векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(1)} &= \left[\ \eta_{11} \quad \eta_{21} \quad \cdots \quad \eta_{\nu_1+\breve{\mu},1}\ \right], \\ \boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \left[\ \eta_{\nu_1+\breve{\mu}+1,1} \quad \eta_{\nu_1+\breve{\mu}+2,1} \quad \cdots \quad \eta_{\nu_1+\nu_2+2\breve{\mu},1}\ \right], \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{(m)} &= \left[\ \eta_{n+(m-1)\breve{\mu}-\nu_m+1,1} \quad \eta_{n+(m-1)\breve{\mu}-\nu_m+2,1} \quad \cdots \quad \eta_{n+m\breve{\mu},1}\ \right]. \end{aligned}$$

Запишем первую из этих подсистем в виде

$$M^{(1,1)}\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \mathbf{0}, \tag{11.Д.41}$$

где

$$M^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + j\omega_1 & (\lambda + j\omega_1)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_1)^{\nu_1+\check{\mu}-2} & (\lambda + j\omega_1)^{\nu_1+\check{\mu}-1} \\ 1 & \lambda + j\omega_2 & (\lambda + j\omega_2)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_2)^{\nu_1+\check{\mu}-2} & (\lambda + j\omega_2)^{\nu_1+\check{\mu}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda + j\omega_q & (\lambda + j\omega_q)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_q)^{\nu_1+\check{\mu}-2} & (\lambda + j\omega_q)^{\nu_1+\check{\mu}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda + j\omega_n & (\lambda + j\omega_n)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_n)^{\nu_1+\check{\mu}-2} & (\lambda + j\omega_n)^{\nu_1+\check{\mu}-1} \end{pmatrix}, \tag{11.Д.42}$$

а $q = \dfrac{\nu_1 + \check{\mu}}{2} \leq n$ в силу условия (11.1.33) теоремы.

Выделим из (11.Д.41) подсистему

$$\sum_{\alpha=0}^{2q-1} (\lambda + j\omega_\alpha)^\alpha \eta_{\alpha,1} = 0 \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.43}$$

которая с точностью до обозначении совпадает с (6.Д.1). Повторяя доказательство теоремы 6.1.1 заключаем, что $\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \mathbf{0}$. Аналогично получим $\boldsymbol{\eta}^{(i)} = \mathbf{0}$ $\left(i = \overline{2,m}\right)$ и следовательно $H_{[1]} = \mathbf{0}$.

Повторяя изложенное, приходим к равенствам $H_{[1]} = \mathbf{0}$ $\left(i = \overline{2,m}\right)$, и тогда заключаем, что система (11.Д.38) имеет решение

$$H = [XM_{e\mu} - \Delta]' = 0, \tag{11.Д.44}$$

и следовательно матрица X, разрешающая это уравнение, служит решением системы (11.Д.31), эквивалентной – при условиях (11.Д.33), (11.Д.34) – уравнениям (11.1.42), (11.1.43).

11.Д.4. Доказательство утверждения 11.1.1

Покажем вначале, что

$$\begin{gathered} \mathcal{B}^{(0)}(s) = \left[Es - A - BC^{(0)\prime}\right]^{-1} B = \\ = (Es - A)^{-1}B\left[E_m - C^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}B\right]^{-1} = \mathcal{B}(s)\left[E_m - C^{(0)\prime}\mathcal{B}(s)\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{11.Д.45}$$

Запишем для этого очевидное тождество

$$B\left[E_m - C^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}B\right] = \left[E - BC^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}\right]B. \tag{11.Д.46}$$

Умножим его справа на матрицу $\left[E_m - C^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}B\right]^{-1}$, а слева на матрицу $\left[E - BC^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}\right]^{-1}$ и получим

$$\left[E - BC^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}\right]^{-1} B = B\left[E_m - C^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}B\right]^{-1}. \tag{11.Д.47}$$

Левую часть этого выражения представим в виде

$$\begin{aligned}\left[E - BC^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}\right]^{-1} &= \left\{\left[Es - A - BC^{(0)\prime}\right](Es - A)^{-1}\right\}^{-1} = \\ &= (Es - A)\left[Es - A - BC^{(0)\prime}\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{11.Д.48}$$

Тогда (11.Д.47) можно записать в форме

$$(Es - A)\left[Es - A - BC^{(0)\prime}\right]^{-1} B = B\left[E_m - C^{(0)\prime}(Es - A)^{-1}B\right]^{-1},$$

из которой следует (11.Д.45).

Выразим теперь передаточную матрицу $\mathcal{B}(s)$ через $\mathcal{B}^{(0)}(s)$. Для этого умножим (11.Д.45) справа на $\left[E_m - C^{(0)\prime}\mathcal{B}(s)\right]$ и получим соотношение

$$\mathcal{B}^{(0)}(s)\left[E_m - C^{(0)\prime}\mathcal{B}(s)\right] = \mathcal{B}(s), \tag{11.Д.49}$$

которое представим в виде

$$\mathcal{B}^{(0)}(s) - \mathcal{B}^{(0)}(s)C^{(0)\prime}\mathcal{B}(s) = \mathcal{B}(s).$$

Отсюда следует искомое выражение

$$\mathcal{B}(s) = \left[E + \mathcal{B}^{(0)}(s)C^{(0)\prime}\right]^{-1}\mathcal{B}^{(0)}(s). \tag{11.Д.50}$$

На ω-тесте это соотношение принимает вид

$$\mathcal{B}(j\omega_k) = \left[E + \mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k)C^{(0)\prime}\right]^{-1}\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \tag{11.Д.51}$$

Представим

$$\mathcal{B}(j\omega_k) = R^c(\omega_k) + jI^c(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \tag{11.Д.52}$$

и обозначим

$$\begin{aligned}L_x(\omega_k) &= \mathrm{Re}\left[E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime} + jI^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime}\right]^{-1}, \\ M_x(\omega_k) &= \mathrm{Jm}\left[E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime} + jI^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime}\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда из (11.Д.51) сразу следуют выражения (11.1.45), (11.1.46) утверждения, а его соотношения (11.1.47), (11.1.48) – на основе формул (11.Д.32), (11.Д.32'), если в них положить $P^{(1)} = E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime}$, $P^{(2)} = I^{(0)}(\omega_k)C^{(0)\prime}$.

11.Д.5. Доказательство теоремы 11.1.4

Докажем вначале *существование решения* уравнения (11.1.61). Для этого приведём две леммы

Лемма 11.Д.2. Необходимым и достаточным условием выполнения равенств (11.1.55), (11.1.56) является тождество (11.1.53). ■

Доказательство леммы. Достаточность тождества (11.1.53) следует из построения уравнений (11.1.55), (11.1.56). Докажем его необходимость. Для этого преобразуем тождество.

Аналогично (11.Д.1) запишем

$$\mathcal{B}(s) = (Es - A)^{-1}B = \frac{\widetilde{(\overline{Es - A})}Bd(-s)}{d(s)d(-s)} = \frac{1}{d(s)d(-s)}\left(\sum_{\alpha=0}^{2n-1} L_\alpha s^\alpha\right)B, \qquad (11.Д.53)$$

где

$$L_\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^{\alpha-\gamma}d_{\alpha-\gamma}A_\gamma \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \qquad (11.Д.54)$$

Заметим, что из (11.Д.2) следует

$$\Psi^{(\alpha)} = L_\alpha B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \qquad (11.Д.55)$$

Подставим выражение (11.Д.53) в тождество (11.1.53) и запишем (при $j\omega = s$) его в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1}\left[-C'L_\alpha B - (-1)^\alpha B'L'_\alpha C - Q_\alpha\right]s^\alpha = 0, \qquad (11.Д.56)$$

где

$$Q_\alpha = B'\left[\sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^\gamma A'_\gamma Q A_{\alpha-\gamma}\right]B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \qquad (11.Д.57)$$

Введём обозначение

$$K_\alpha = -C'L_\alpha B - (-1)^\alpha B'L'_\alpha C - Q_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1} \qquad (11.Д.58)$$

и получим окончательно тождество

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} K_\alpha s^\alpha = 0. \qquad (11.Д.59)$$

Уравнения (11.1.55), (11.1.56) выражают вещественную и мнимую части тождества (11.1.53) для n фиксированных частот и поэтому они совпадают с уравнениями, которые следуют из (11.Д.59)

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i K_{2i}\omega_k^{2i} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \qquad (11.Д.60)$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-1} K_{2i-1}\omega_k^{2i-1} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \qquad (11.Д.61)$$

Представим уравнения (11.Д.60), совпадающие с (11.1.55), в матричной форме

$$\left(E_m \otimes \tilde{S}\right)K = 0, \qquad (11.Д.62)$$

где

$$E_m \otimes \tilde{S} = \begin{pmatrix} E_m & -E_m\omega_1^2 & E_m\omega_1^4 & \cdots & (-1)^{n-1}E_m\omega_1^{2n-2} \\ E_m & -E_m\omega_2^2 & E_m\omega_2^4 & \cdots & (-1)^{n-1}E_m\omega_2^{2n-2} \\ E_m & -E_m\omega_3^2 & E_m\omega_3^4 & \cdots & (-1)^{n-1}E_m\omega_3^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_m & -E_m\omega_n^2 & E_m\omega_n^4 & \cdots & (-1)^{n-1}E_m\omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_2 \\ K_4 \\ \vdots \\ K_{2n-2} \end{pmatrix}. \tag{11.Д.63}$$

Очевидно, что $\det \tilde{S} \neq 0$ как определитель Вандермонда, поэтому, в силу леммы 11.Д.1, $\det\left(E_m \otimes \tilde{S}\right) \neq 0$. Это означает, что решение системы уравнений (11.Д.60)

$$K_{2i} = 0 \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{11.Д.64}$$

Аналогично доказывается, что решение (11.Д.61)

$$K_{2i-1} = 0 \quad i = \overline{1, n}. \tag{11.Д.65}$$

Пусть выполняются равенства (11.1.55) и (11.1.56), эквивалентные уравнениям (11.Д.60), (11.Д.61) соответственно. Покажем, что при этом выполняется тождество (11.Д.59), эквивалентное тождеству (11.1.53).

Действительно, из (11.Д.60), (11.Д.61) следует тривиальные решения (11.Д.64), (11.Д.65), подставляя которые в (11.Д.59) убеждаемся в справедливости этого тождества, и таким образом, лемма 11.Д.2 доказана. ■

Лемма 11.Д.3. При условиях теоремы 11.1.4 матрица C, удовлетворяющая (11.1.55), (11.1.56):

1° существует и имеет вид

$$C = -AB, \tag{11.Д.66}$$

где A – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$PA + A'P = -Q, \tag{11.Д.67}$$

2° не зависит от выбора испытательных частот,

3° обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (11.1.1), (11.1.49).

Доказательство леммы. Используем лемму 11.Д.2 и будем искать матрицу C, удовлетворяющую тождеству (11.1.53). Запишем его в виде

$$-C'(Es - A)^{-1}B - B'(-Es - A)^{-1\prime}C = B'(-Es - A)^{-1\prime}Q(Es - A)^{-1}B. \tag{11.Д.68}$$

Если матрица C определена выражением (11.Д.66), то (11.Д.68) можно представить следующим образом

$$B'(-Es - A)^{-1\prime}[(-Es - A)'P + P(Es - A) - Q](Es - A)^{-1}B = 0. \tag{11.Д.69}$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю при любых s, если матрица P – решение уравнения Ляпунова (11.Д.67), и таким образом, п. 1° и п. 2° леммы доказаны. Последняя часть леммы (п. 3°) следует из (11.Д.66), (11.Д.67), если вычислить полную производную функции Ляпунова $v = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ в силу уравнений (11.1.1), (11.1.49). ■

Из леммы 11.Д.3 и выражения (11.1.60) следует, что вектор $\bar{\boldsymbol{c}}$ – существует.

Докажем *единственность* вектора $\boldsymbol{c}$.

Для этого покажем, что уравнения (11.Д.64), (11.Д.65), которые в развёрнутой форме имеют, с учётом (11.Д.58), вид

$$-C'L_\alpha B - (-1)^\alpha B'L_\alpha C - Q_\alpha = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1} \tag{11.Д.70}$$

разрешаются единственной матрицей C.

Лемма 11.Д.4. Система (11.Д.70) эквивалентна следующим двум подсистемам

$$\begin{bmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'C & B'A'C & \cdots & B'A^{n-1\prime}C \end{bmatrix} = -Q_H, \tag{11.Д.71}$$

$$\begin{bmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B'C & B'A'C & \cdots & B'A^{n-1\prime}C \end{bmatrix} = -Q_P, \tag{11.Д.72}$$

в которых

$$Q_H = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_3 & \cdots & Q_{2n-3} & Q_{2n-1} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}, \tag{11.Д.73}$$

$$Q_P = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_2 & \cdots & Q_{2n-4} & Q_{2n-2} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}, \tag{11.Д.74}$$

а матрицы Γ_1, Γ_2 и Γ_3 определены выражениями (6.Д.58), (7.Д.11) и (6.Д.62) соответственно. ■

Доказательство леммы приведено в конце 11.Д.5.

Введём обозначение

$$A^k B = B_k \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{11.Д.75}$$

и представим подсистему (11.Д.71) в развёрнутой форме, аналогичной (11.1.58),

$$B'_{k[i]}C_{[\psi]} + B'_{k[\psi]}C_{[i]} = q^H_{ki\psi} \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i, m}, \tag{11.Д.76}$$

где $q^H_{ki\psi}$ – $i\psi$-тый элемент k-той подматрицы

$$Q_{Hk} = Q_{2k+1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1} \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{11.Д.77}$$

Подобным образом представим и систему (11.Д.72)

$$B'_{k[i]}C_{[\psi]} - B'_{k[\psi]}C_{[i]} = q^P_{ki\psi} \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i+1, m}, \tag{11.Д.78}$$

где $q^P_{ki\psi}$ – $i\psi$-тый элемент k-той подматрицы

$$Q_{Pk} = Q_{2k} \cdot [E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1} \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{11.Д.79}$$

Вычтем из (11.Д.76) уравнения (11.Д.78) и получим окончательно систему

$$B'_{k[i]}C_{[\psi]} + B'_{k[\psi]}C_{[i]} = q^H_{ki\psi} \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i, m}, \tag{11.Д.80}$$

$$B'_{k[\psi]}C_{[i]} = \frac{1}{2}\left[q^H_{ki\psi} - q^P_{ki\psi}\right] \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i+1, m}. \tag{11.Д.81}$$

Сформируем из неё рекуррентные подсистемы для последовательного вычисления векторов $C_{[1]}$, $C_{[2]}$, ..., $C_{[m]}$.

Подсистема для определения вектора $C_{[1]}$ *:*

$$\begin{aligned} B'_{k[1]}C_{[1]} &= \frac{1}{2}q^H_{k11} \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[\psi]}C_{[1]} &= \frac{1}{2}\left[q^H_{k1\psi} - q^P_{k1\psi}\right] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{2, m}. \end{aligned}$$

Подсистема для определения вектора $C_{[2]}$ *:*

$$\begin{aligned} B'_{k[1]}C_{[2]} &= -B'_{k[2]}C_{[1]} + q^H_{k12} \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[2]}C_{[2]} &= \frac{1}{2}q^H_{k22} \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[\psi]}C_{[2]} &= \frac{1}{2}\left[q^H_{k2\psi} - q^P_{k2\psi}\right] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{3, m}. \end{aligned}$$

Подсистема для определения вектора $C_{[\rho]}$ $\left(\rho = \overline{3, m}\right)$ *:*

$$\begin{aligned} B'_{k[i]}C_{[\psi]} &= -B'_{k[\psi]}C_{[i]} + q^H_{ki\psi} \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, \rho} \quad \psi = \rho, \\ B'_{k[\psi]}C_{[\rho]} &= \frac{1}{2}\left[q^H_{k\rho\psi} - q^P_{k\rho\psi}\right] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{\rho+1, m}. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов G подсистемы для определения вектора $C_{[1]}$ имеет вид

$$G' = \left(B_{0[1]} \;\; B_{1[1]} \;\cdots\; B_{n-1[1]} \,\middle|\, B_{0[2]} \;\; B_{1[2]} \;\cdots\; B_{n-1[2]} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, B_{0[m]} \;\; B_{1[m]} \;\cdots\; B_{n-1[m]}\right). \tag{11.Д.82}$$

Объект (11.1.1) – полностью управляем и поэтому

$$\operatorname{rank} G = n. \tag{11.Д.83}$$

Нетрудно заметить, что матрицы коэффициентов подсистем для определения векторов $C_{[2]}$, ..., $C_{[\rho]}$, ..., $C_{[m]}$ совпадают и имеют вид (11.Д.82).

Это означает, что ранг матрицы коэффициентов системы (11.Д.80), (11.Д.81) равен числу неизвестных nm компонент вектора $\bar{\boldsymbol{c}}$.

Известна теорема: для того, чтобы совместная система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен числу неизвестных.

Рассматриваемая система (11.Д.80), (11.Д.81) – совместна, так как по лемме 11.Д.3 можно указать решение (11.Д.66) этой системы, а матрица системы имеет ранг nm, равный числу неизвестных.

Это доказывает теорему 11.Д.4. ■

Доказательство леммы 11.Д.4.

Запишем уравнения (11.Д.70) в компактной форме

$$C'\left[\begin{array}{ccccc} L_1 & L_3 & \cdots & L_{2n-3} & L_{2n-1}\end{array}\right]B - B'\left[\begin{array}{ccccc} L'_1 & L'_3 & \cdots & L'_{2n-3} & L'_{2n-1}\end{array}\right]C = -\tilde{Q}_H, \quad (11.Д.84)$$

$$C'\left[\begin{array}{ccccc} L_0 & L_2 & \cdots & L_{2n-4} & L_{2n-2}\end{array}\right]B + B'\left[\begin{array}{ccccc} L'_0 & L'_2 & \cdots & L'_{2n-4} & L'_{2n-2}\end{array}\right]C = -\tilde{Q}_P, \quad (11.Д.85)$$

где

$$\tilde{Q}_H = \left[\begin{array}{ccccc} Q_1 & Q_3 & \cdots & Q_{2n-3} & Q_{2n-1}\end{array}\right], \quad \tilde{Q}_P = \left[\begin{array}{ccccc} Q_0 & Q_2 & \cdots & Q_{2n-4} & Q_{2n-2}\end{array}\right]. \quad (11.Д.86)$$

Представим выражение (11.Д.54) в виде

$$C'L_\alpha B = \sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^{\alpha-\gamma}d_{\alpha-\gamma}C'A_\gamma B =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc} C'A_{n-1}B & C'A_{n-2}B & \cdots & C'A_1B & C'A_0B\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c} E_m d_{\alpha-n+1}(-1)^{\alpha-n+1} \\ E_m d_{\alpha-n+2}(-1)^{\alpha-n+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\alpha-1}(-1)^{\alpha-1} \\ E_m d_\alpha(-1)^\alpha \end{array}\right) \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}.$$

Аналогично получим

$$B'L'_\alpha C = \sum_{\gamma=0}^{n-1}(-1)^{\alpha-\gamma}d_{\alpha-\gamma}B'A'_\gamma C =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc} B'A'_{n-1}C & B'A'_{n-2}C & \cdots & B'A'_1C & B'A'_0C\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c} E_m d_{\alpha-n+1}(-1)^{\alpha-n+1} \\ E_m d_{\alpha-n+2}(-1)^{\alpha-n+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\alpha-1}(-1)^{\alpha-1} \\ E_m d_\alpha(-1)^\alpha \end{array}\right) \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}.$$

На основе этих соотношений запишем (11.Д.84), (11.Д.85), с учётом (11.Д.70), в форме

$$\left[\begin{array}{cccc} C'A_{n-1}B & \cdots & C'A_1B & C'A_0B\end{array}\right][E_m \otimes \Gamma_1] -$$
$$-\left[\begin{array}{cccc} B'A'_{n-1}C & \cdots & B'A'_1C & B'A'_0C\end{array}\right][E_m \otimes \Gamma_1] = -\tilde{Q}_H, \quad (11.Д.87)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} C'A_{n-1}B & \cdots & C'A_1B & C'A_0B\end{array}\right][E_m \otimes \Gamma_2] +$$
$$+\left[\begin{array}{cccc} B'A'_{n-1}C & \cdots & B'A'_1C & B'A'_0C\end{array}\right][E_m \otimes \Gamma_2] = -\tilde{Q}_P. \quad (11.Д.88)$$

Используем теперь выражение (6.Д.46) для матриц

$$A_\gamma = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad \gamma = \overline{0, n-2}, \quad A_{n-1} = E,$$

и представим

$$C'A_\gamma B = \begin{pmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_m d_{\gamma+1} \\ E_m d_{\gamma+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\gamma+n} \end{pmatrix} \quad \gamma = \overline{0, n-2}.$$

(где $d_{\gamma+i+1} = 0$, при $\gamma + i + 1 > n$). Тогда

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C'A_{n-1}B & \cdots & C'A_1B & C'A_0B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3], \\ \begin{bmatrix} B'A'_{n-1}C & \cdots & B'A'_1C & B'A'_0C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B'C & B'A'C & \cdots & B'A^{n-1\prime}C \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]. \end{aligned} \tag{11.Д.89}$$

Подставим эти соотношения в (11.Д.87), (11.Д.88), умножим первое из них справа на $[E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}$, а второе на $[E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}$ и получим искомые выражения (11.Д.71), (11.Д.72).

Матрицы $[E_m \otimes \Gamma_i]^{-1}$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ – существуют, так как объект асимптотически устойчив и поэтому, как показано в п 6.Д.4 и п. 7.Д.1, $\det \Gamma_1 \neq 0$, $\det \Gamma_2 \neq 0$. Из выражений (6.Д.62) следует, что $\det \Gamma_3 = d_n^n \neq 0$, и таким образом лемма 11.Д.4 доказана.

11.Д.6. Доказательство теоремы 11.1.5

Запишем систему (11.1.69), (11.1.70), эквивалентную уравнениям (11.1.76), в её начальной форме: тождеством (11.1.65) на ω-тесте

$$\begin{gathered} -C^{(\alpha+1)\prime}\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) - \mathcal{B}^{(\alpha)\prime}(-j\omega_k)C^{(\alpha+1)} = \mathcal{B}^{(\alpha)\prime}(-j\omega_k)\left[Q + C^{(\alpha)}C^{(\alpha)\prime}\right]\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) \\ k = \overline{1,n} \quad \alpha = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{11.Д.90}$$

Рассмотрим эту рекуррентную систему на первых шагах α.

Пусть $\alpha = 0$. Уравнения (11.Д.90) принимают в этом случае вид

$$-C^{(1)\prime}\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) - \mathcal{B}^{(0)\prime}(-j\omega_k)C^{(1)} = \mathcal{B}^{(0)\prime}(-j\omega_k)\left[Q + C^{(0)}C^{(0)\prime}\right]\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \tag{11.Д.91}$$

где, в соответствии с (11.1.66), (11.1.67),

$$\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) = \left[Ej\omega_k - A - BC^{(0)\prime}\right]^{-1} B = \mathcal{B}(j\omega_k)\left[E - C^{(0)\prime}\mathcal{B}(j\omega_k)\right]^{-1}. \tag{11.Д.92}$$

<u>Утверждение 11.Д.1.</u> При условиях теоремы 11.1.5 матрица $C^{(1)}$ разрешающая уравнение (11.Д.92) существует и единственна. ■

Справедливость утверждения следует непосредственно из теоремы 11.1.4.

Действительно, уравнения (11.Д.91) дают решение $\boldsymbol{u} = C^{(1)\prime}\boldsymbol{x}$ задачи АКОР по критерию обобщённой работы для ««объекта»»

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(0)}\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad A^{(0)} = A + BC^{(0)\prime}. \tag{11.Д.93}$$

Он асимптотически устойчив по определению матрицы $C^{(0)}$ и полностью управляем.

Последнее следует из известной леммы об управляемости объекта с любой обратной связью по состоянию (если объект без обратной связи полностью управляем).

Утверждение 11.Д.2. Собственные числа матрицы $A^{(1)} = A + BC^{(1)\prime}$ имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[A^{(1)}\right] < 0 \quad i = \overline{1,n}. \tag{11.Д.94}$$

■

Доказательство утверждения опирается на лемму 11.Д.3 и неравенства (4.Д.14) в доказательстве теоремы 4.1.2. Из леммы 11.Д.3 следует, что для ««объекта»» (11.Д.93)

$$C^{(1)} = -P^{(1)}B,$$

где $P^{(1)}$ – удовлетворяет уравнению

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)\prime}P^{(1)} = -Q - C^{(0)}C^{(0)\prime}.$$

Повторяя вывод неравенств (4.Д.14), приходим к (11.Д.94).

Положим в (11.Д.90) $\alpha = 1$. Матрица $C^{(2)}$, разрешающая эти уравнения, существует и единственна, так как ««объект»» $\dot{\boldsymbol{x}} = A^{(1)}\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ – асимптотически устойчив и полностью управляем. Собственные числа матрицы $A^{(2)} = A + BC^{(1)\prime}$ имеют отрицательные вещественные части. Это следует из леммы 11.Д.3 и неравенств (4.Д.20).

Продолжая этот процесс, получим последовательность матриц $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ... Этим матрицам соответствует единственная последовательность матриц $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... , которая имеет предел.

Отсюда следует выражение (11.1.77) теоремы.

Заключение к главе 11

Эта завершающая глава концентрирует в компактной форме содержание всей книги, где построено частотное управление, обеспечивающее требующую точность при ограниченных внешних возмущениях в системах регулирования и слежения для:

а) самотождественных объектов первого и второго видов (объекты второго вида должны быть устойчивы по управлению), заданных частотными параметрами,

б) несамотождественных объектов (однорежимных и многорежимных) тех же видов; частотное управление такими объектами реализуется декларативными и адаптивными регуляторами, а в следящих системах содержат (дополнительно) эталонные модели.

В обеих случаях частотное управление строится на основе метода частотных параметров.

Он вместе с натурными критериями устойчивости из глав 6 и 7 образует упомянутую в предисловии натурную теорию автоматического управления непрерывными объектами.

Можно наметить направления развития натурной теории: метод частотных параметров и анализ устойчивости систем с различными объектами

- дискретными,
- нестационарными,
- нелинейными.

В приложениях к главам 5 и 6 положено начало метода частотных параметров для дискретных систем.

Частотные параметры нестационарных объектов являются функциями времени и поэтому для их экспериментального определения следует использовать локальный фильтр из главы 5.

Для нелинейных объектов, правые части которых (в форме Коши) разлагаются в ряд Тейлора, можно использовать в качестве испытательного воздействия совокупность экспонент $e^{\lambda_i t}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Это позволяет найти ««частотные ω-индексы»» для таких объектов с неизвестными параметрами.

Таким образом, открывается широкое поле дальнейших исследований.

Примечания и литературные указания

К части I

Введение. Построение управления при неопределённых параметрах объекта всегда являлось одной из центральных проблем теории автоматического управления. Если обратиться к истории, то можно заметить [91б], что уже критерий Найквиста, установленный в 1932 году [93], явился методом исследования устойчивости систем, параметры которых неизвестны, а известны лишь частотные характеристики разомкнутой системы (объекта управления), получаемые экспериментально. В последующие годы (1930-1965) были разработаны теории систем с большими коэффициентами усиления [43а], систем с переменной структурой [25], инвариантных систем [36], которые позволяют уменьшить влияние изменений параметров объектов и неконтролируемых внешних возмущений. Однако, поскольку эти системы основаны на повышении (в явной или неявной формах) коэффициента усиления разомкнутой цепи, то это требует учёта ««малых»» постоянных времени, нелинейных факторов, запаздывания. В противном случае нарушается устойчивость системы. Таким образом, как отмечено в [31а], без увеличения сведений об объекте не удаётся существенно повысить коэффициент усиления.

Это приводит к необходимости построения регуляторов, параметры которых изменяются (приспосабливаются, адаптируются) так, чтобы при изменяющихся параметрах объекта точность и качество системы оставалось неизменным. Системы с такими регуляторами были названы самонастраивающимися [56], адаптивными [72], самоорганизующимися [64].

За последние три десятилетия разработано большое число способов и методов синтеза адаптивных регуляторов. Им посвящено большое количество публикаций и, в частности, книги [74, 72, 64, 67], в которых подводятся итоги развития теории адаптивного управления.

В книге развивается новое направление в теории управления объектами с неопределёнными параметрами, называемое частотным управлением. Прилагательное ««частотный»» отражает тот факт, что управление находится по частотным параметрам объекта. При построении частотного управления можно различить два случая: а) частотные параметры получены до начала работы объекта в системе, б) частотные параметры получаются в процессе нормальной эксплуатации объекта в системе. В первом случае строится модальное либо оптимальное частотное управление (главы 6, 7 и 11), во втором – частотное адаптивное управление (главы 8 и 11).

Для того, чтобы определить место частотного адаптивного управления среди других методов адаптивного управления воспользуемся классификацией, предложенной в [1ф]. В соответствии с этой классификацией будем различать системы адаптивно-

го управления по следующим признакам: объём информации о параметрах объекта, внешних возмущениях и помехах (случайные, с известным законом распределения, неопределённые), цели управления (устойчивость, точность, качество), вида алгоритма адаптации (идентификационный, прямой). Комбинациям этих признаков поставим в соответствие направление в теории адаптивного управления и укажем работы, в которых приведена наиболее полная библиография по этому направлению.

Теория адаптивных систем при известных статистических характеристиках (закон распределения, априорная плотность вероятности) параметров объекта и известных статистических характеристиках (закон распределения, моменты первого и второго порядка и т.п.) внешних возмущений и помех излагаются в работах [74], [64]. Цель управления в этих системах выражается часто значением математического ожидания некоторого квадратичного функционала.

Широко известны [72] методы идентификационного адаптивного управления, когда параметры объекта управления неопределённые, но известны статистические характеристики внешних возмущений и помех. Для идентификации параметров используется рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов либо метод стохастической аппроксимации. Цель управления формулируется как требование ограниченности регулируемой переменной (если внешние воздействия и помехи ограничены) либо ограниченной дисперсии регулируемой переменной.

Если целью управления является слежение за некоторым сигналом, то используются системы с эталонной моделью [56]. В этих системах параметры объекта неопределённые, а внешние возмущения и помехи отсутствуют. Алгоритмы адаптивного управления в системах с эталонной моделью могут быть как идентификационными так и прямыми.

Сравнительно неравно В.А. Якубовичем разработаны прямые алгоритмы адаптивного управления, основанные на методе рекуррентных целевых неравенств [79a], [72]. Эти алгоритмы строятся для объектов с неопределёнными параметрами и неопределёнными внешними возмущениями и помехами. Цель управления формулируется как требование ограниченности регулируемых переменных некоторым наперёд заданным числом.

Излагаемые в книге алгоритмы частотного адаптивного управления также являются прямыми и строятся для объектов с неопределёнными параметрами при действии неопределённых внешних возмущений и помех. Эти алгоритмы обеспечивают достижение наперёд заданной точности регулирования. Заметим, что частотные характеристики объекта использовались ранее для построения адаптивного управления в системах с контролем частотных характеристик [31a] и в системах стабилизации частотных характеристик [37].

К главе 1

§ 1.1. п. 1.1.1. Типы объектов введены для удобства изложения.

п. 1.1.5. Выделение объектов первого и второго видов имеет принципиальное значение. Дело в том, что в [1ш, гл. 2] показано, что, вообще говоря, только для этих двух видов объектов существуют регуляторы вида (1.1.28), обеспечивающие наперёд заданную точность регулирования.

§ 1.2. Это элементарное изложение содержания глав 5, 6 и 2, примечание и литературные указания к которым приведены далее.

§ 1.3. Представляет собой краткое изложение гл. 8. Укажем лишь на неповторяющиеся в гл. 8 понятия и определения.

п. 1.3.1. Понятие ««варианта»» («вектора вариантов»») и пример 1.3.1 взяты из книги [72, гл. 1].

п. 1.3.4. Определение 1.3.3 – это интерпретация определения адаптивной системы данного В.А. Якубовичем [72, гл. 1]. Для того, чтобы исключить из последнего обычные системы регулирования введено понятие ««пуск-останов»» и основанные на нём понятия самотождественного и несамотождественного объектов.

§ 1.П. п. 1.П.1. Анализ динамики систем регулирования при сколь угодно малых (инфинитезимальных) параметрических возмущений составляет предмет [60] теории чувствительности, которой посвящена обширная литература [49]. Здесь и далее исследуется влияние малых, но не инфинитезимальных параметрических возмущений.

п. 1.П.2. Понятие полной и неполной параметрической (аддитивной) компенсации введены в работе [1с]. Понятие ««грубая система»» было введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [8] для обозначения моделей движения (описываемых дифференциальными уравнениями), поведение которых ««не изменяется в своих существенных чертах при малом изменении вида дифференциальных уравнений»» 7, с. 31).

На первый взгляд системы с нулевой степенью грубости являются негрубыми, однако, как подчёркнуто в [7, с 31], в понятие ««малых изменений вида дифференциальных уравнений»» не включается случай изменения порядка уравнений, что имеет место для систем с нулевой) степенью грубости.

п. 1.П.3. На возможность неявной параметрической компенсации обратил внимание В.Н. Честнов, который построил пример 1.П.1 [77].

п. 1.П.5. Приведённый пример построен в 1971 г. и содержался в моём заключении по полемике между В.Б. Лариным и В.Н. Сунцевым [39] с одной стороны и В.П. Надеждиным – с другой, составленным по просьбе журнала Автоматика и телемеханика.

п. 1.П.6. Результатом указанной полемики явилась работа П.В. Надеждина [47], из которой следует, что система (1.П.61), (1.П.62) оптимальная в смысле функционала (1.П.64) является негрубой.

п. 1.П.7. Построенный здесь пример приведён в работе [1к].

К главе 2

Введение. Началом частотной теории регулирования явилась работа Найквиста [93], в которой был получен критерий устойчивости системы по её амплитудно-фазовой характеристике в разомкнутом состоянии. Результаты этой работы были новыми в двух направлениях.

Во-первых, критерий позволял анализировать устойчивость по экспериментальным данным.

Во-вторых, при доказательстве критерия использовался аппарат теории функций комплексного переменного.

Это второе направление послужило толчком к широкому применению теории функций комплексного переменного и частотных характеристик для анализа устойчивости и синтеза регуляторов объектов с известными параметрами. История становления и развития частотной теории регулирования хорошо и подробно изложены в обзоре А. Дж. Дж. Макфарлейна [91а]. Большой вклад в распространение метода частотных характеристик в нашей стране внёс В.В. Солодовников [68].

Экспериментальная направленность работы Найквиста не получила значительного развития. Это связано, по-видимому, с тем, что для суждения об устойчивости необходимо в принципе бесконечное число экспериментов. Кроме того, для неустойчивых объектов необходимо знание числа его корней в правой полуплоскости, которое не следует из эксперимента.

Содержание § 2.1 – § 2.3 следует учебникам [15б], [26] и поэтому отметим лишь материал из других источников.

§ 2.1. п. 2.1.4. Определение 2.1.2 – это компактное описание минимально-фазовой передаточной функции, подробно изложенное в книге [19]. Заметим, что иногда минимально-фазовыми называют передаточные функции, которые имеют лишь нули с отрицательными вещественными частотами (знаки полюсов не оговариваются).

Объекты с такими передаточными функциями далее называются устойчивыми по управлению (см. определение 3.1.1).

§ **2.2. п. 2.2.1.** Рекомендация 2.2.1 объединяет правила расчёта 1 и 4, сформулированные в работе [51].

п. 2.2.2. Понятие запретной области имеется в книге [11, гл. 8].

п. 2.2.3. Понятие, сходное с радиусом устойчивости, по видимому можно найти в литературе. Определение 2.2.1 служит развитием понятия [1з] запретной зоны для АФЧХ оптимальных систем.

п. 2.2.4 – п. 2.2.5. – Это переложение понятий и результатов [1т] на стационарный случай.

Структурная грубость исследуется также в рамках теории сингулярных возмущений [45], [15а], где рассматриваются уравнения с малым параметром при первых производных в системе, записанной в форме Коши. В ней получены условия существования границ малого параметра, при которых не нарушается устойчивость, однако, неясно как находить оценки границ для конкретной системы. Подход п. 2.2.5 доставляет такие оценки.

§ **2.3. п. 2.3.1.** Обычно не различают понятий времени регулирования (и перерегулирования) при задающем и внешнем воздействии, введённые определениями 2.3.1 и 2.3.3 (2.3.2 и 2.3.4). Это создает впечатление, что метод ЛАЧХ, разрешающий лишь задачу 2.3.1, применим для синтеза регуляторов при ступенчатых внешних возмущениях, приложенных в любой точке структурной схемы системы. В действительности этот метод применим лишь для случая, когда ступенчатое внешнее (либо задающее воздействие) прикладывается ко входу регулятора вместе с измеряемой переменной.

Рекомендация 2.3.1 соответствует правилу расчёта 3 работы [51].

§ **2.П. п. 2.П.1.** Здесь более строго описываются понятия запасов устойчивости по фазе и модулю, введённые в § 2.2.

п. 2.П.2 – п. 2.П.3. Следуют работе [1и] и служат некоторым обоснованием эмпирической рекомендации 2.2.1.

К части II

Введение. Применение процедур АКОР для синтеза регуляторов при случайных внешних возмущениях н помехах описано, например, в книгах [30], [44]. При этом не выделяются объекты первого и второго вида. Это объясняется тем, что цель управления (минимизация математического ожидания квадратичного функционала) может принимать произвольные значения. Если на эти значения наложить ограничения

(аналогичные ограничению точности в задаче 1.1.1), то тогда решение такой задачи станет возможным, вообще говоря, для ограниченного класса объектов, в частности первого и второго видов.

Это относится к задаче слежения при случайных задающих воздействиях и помехах (винеровская задача фильтрации) [75].

К главе 3

Введение. Термин ««модальное управление»» введён в 1962 г. в работе [96], где предложен способ изменения характерных (модальных) частот системы управления дистилляционной колонной.

В настоящее время под модальным управлением понимают методы синтеза регуляторов, обеспечивающих желаемое расположение всех либо некоторых полюсов (корней характеристического полинома) замкнутой системы.

Развитию модального управления посвящено огромное число работ, обзор которых можно найти в [6б]. Современные тенденции в модальном управлении приведены в обзоре [65].

§ 3.1. п. 3.1.1 – п. 3.1.4. Изложение следует книге [72, гл 3], где приведено также определение 3.1.1.

п. 3.1.5. Термин ««структурное»» в понятии структурного модального управления отражает специфическую структуру (3.1.33) операторов регулятора (3.1.2). Эта структура была получена в работе [1э]. Там же доказано утверждение 3.1.1.

§ 3.2. п. 3.2.1. Задача 3.2.1 – это развитие задачи 2.3.1 на случай, когда к объекту регулирования приложено не задающее воздействие, а внешнее возмущение.

п. 3.2.4. Процедура 3.2.3 обобщает результаты работ [1к], [1м].

п. 3.2.5. ПИД-регуляторы широко используется в технике регулирования [11]. ««Расширенный объект»», аналогичный (3.2.40), описан например, в [95], [94].

§ 3.3. п. 3.3.4. Уравнения (3.3.28) двигателя постоянного тока с якорным управлением можно найти в книге [54].

Заметим, что при построении систем регулирования скорости приводов используются стандартные настройки контуров: настройка на оптимум по модулю и настройка на симметричный оптимум. Расчёты регуляторов, обеспечивающих эти настройки, являются простейшим вариантом процедуры 3.2.1.

п. 3.3.7. Эти результаты взяты из книги [100, § 7.3].

п. 3.3.8. Такая компенсационная схема является удобной интерпретацией схем работы [92], повторенных в [1ы, § 8.4].

§ 3.4. п. 3.4.1 – п. 3.4.3. Излагается традиционный материал по модальному управлению в системах со скалярным управлением [6а], [67].

Каноническая форма управляемости 3.4.3 более подробно рассмотрена в 9.П.1.

Доказательство теоремы 3.4.1 представляет собой стационарный вариант доказательства аналогичной теоремы для нестационарных систем [22, гл. 6].

§ 3.П.1. п. 3.П.1.1. Утверждение 3.П.1 и выражение (3.П.10) характеристического полинома системы с наблюдателем хорошо известны. Их можно найти, например, в [30, гл. 5].

п. 3.П.1.2. Связь (3.П.18) приведена в [100].

п. 3.П.1.3. Уравнения (3.П.19), (3.П.20) – наблюдатель Люенбергера [90а], [90б].

п. 3.П.1.4 – п. 3.П.1.5. Изложение работы [1л].

§ 3.П.2. п. 3.П.2.1. Утверждение 3.П.2 имеется в книге [18, гл. 4]. Задача о накоплении возмущений была сформулирована В.В. Булгаковым [9].

п. 3.П.2.2. Следует работе Н.Г. Чеботарёва [76].

п. 3.П.2.3. Изложение опирается на статью [5].

Конструктивная теория синтеза регуляторов при ограниченных по модулю неопределённых внешних возмущениях предложена в диссертации [66].

К главе 4

§ 4.1. п. 4.1.1. Задача АКОР (задача 4.1.1) была сформулирована и решена А.М. Лётовым [30а-30г]. Нестационарный её вариант был решён Р. Калманом Г87].

Уравнение (4.1.5), возникающее при решении задачи АКОР, называют алгебраическим уравнением Риккати по аналогии с дифференциальным уравнением (4.1.6), которое в скалярном случае называется именем итальянского математика прошлого века, который его исследовал. Уравнение (4.1.5) было получено ранее А.И. Лурье в теории абсолютной устойчивости [41] и поэтому его иногда называют уравнением Лурье.

Теорема 4.1.1 доказана в [59], а изложение теоремы 4.1.2 и её доказательство следуют книге [71]. Примечания 4.1.1, 4.1.2 опираются на книгу [33].

п. 4.1.2. Функционал обобщённой работы и процедура АКОР по такому критерию были предложены А.А. Красовским [31б].

§ **4.2. п. 4.2.1.** Условие (4.2.9) оптимальности в частотной форме получено Р. Калманом [27], а аналогичное тождество для критерия обобщённой работы содержится в [1з].

п. 4.2.2. Теорема 4.2.1 доказана в [1г], одновременно в [80] было получено соотношение (4.2.15) этой теоремы. Утверждение 4.2.2, являющееся геометрической интерпретацией условия (4.2.9) оптимальности в частотной форме приведено (при несколько иной терминологии) в [88].

Утверждение 4.2.3 доказано в [1з].

п. 4.2.3. Утверждение 4.2.4 можно найти в книге [1ш].

§ **4.3. п. 4.3.1.** Следует статье [1ц].

п. 4.3.2. Утверждение 4.3.1 имеется в книге [30], а рисунки 4.3.1 и 4.3.2 взяты из книги [34б].

п. 4.3.5. Неравенства (4.3.45) и (4.3.46) получены в работах [1г] и [1з] соответственно.

п. 4.3.6. Утверждение 4.3.3 доказано в работе [1г].

§ **4.4. п. 4.4.1.** Пример 4.4.1 взят из книги [30].

п. 4.4.2. Утверждение 4.4.1 и рекомендация 4.4.1 – это частный случай изложенного в [2].

п. 4.4.4. Следует книге [1ш, гл. 5] и является частным случаем предложенного в [2].

п. 4.4.6. ««Расширенный объект»» (4.4.87), (4.4.88) используется для построения ПИ-регулятора в работах [94], [95], [34б].

п. 4.4.8. Утверждение 4.4.5 доказано для многомерного случая в [97].

§ **4.5. п. 4.5.2** Возможность малых запасов устойчивости системы (4.5.1), (4.5.2), оптимальной в смысле функционала (4.5.3) следует непосредственно из статьи [27], где показано, что для любой асимптотически устойчивой системы можно построить функционал (4.5.3), а в качестве такой системы можно взять систему с малыми запасами устойчивости.

п. 4.5.3. Обратной задаче оптимального управления посвящено большое количество работ [3], [10], [18], [21]-[85], [98] и др.

п. 4.5.4. Теорема 4.5.1 – это теорема 7 статьи Калмана [27].

п. 4.5.5. Лемма 4.5.1 приведена в работе [27].

К части III

Введение. Эта часть служит началом натурной теории управления. Она содержит натурные критерии устойчивости и натурный метод синтеза – метод частотных параметров. Эти результаты развиваются на дискретный (п. 5.П.2, § 6.П) и многомерный (гл. 11) случаи. Можно указать пути их развития для нестационарных и нелинейных систем. Всё это составляет частотное направление натурной теории. Наряду с этим целесообразно развивать нечастотную натурную теорию, которая опирается на эксперименты с объектом, возбуждённым некоторой совокупностью сигналов, обладающих свойством ортогональности, но не являющихся гармоническими.

К главе 5

§ 5.1. п. 5.1.2. Смещённые частотные передаточные функции использовались Т.Н. Кузовковым [34а, гл. 8] для построения обобщённого частотного анализа. Термин ««смещённая»» взят из книги [61, гл. 7], где он используется в названии уравнения, описывающего реакцию на экспериментально взвешенное внешнее воздействие.

п. 5.1.5. Понятие стабилизирующего управления (стабилизируемого объекта) широко используется начиная с работы [16].

§ 5.2. п. 5.2.1. Понятие частотных параметров введено в работе [1э]. Там же доказано утверждение 5.2.1.

§ 5.3. п. 5.3.1. Методам экспериментального определения частотных характеристик устойчивых объектов посвящено большое число работ, обзор которых имеется, например, в книге [78а, гл. 10].

§ 5.4. п. 5.4.4. Методу наименьших квадратов посвящена обширная литература. Укажем учебные издания [78б], [1ы].

п. 5.4.5. Погрешность в определении параметра a равна нулю, если $f(t)$ – случайный процесс типа ««белый шум»» [78б]. Этот пример показывает преимущества частотного подхода, который (если положить в (5.4.15) $u = 1 \cdot \sin \omega t$ и использовать алгоритм с паузами либо последовательные пары испытаний), доставляет несмещённые оценки частотных параметров, а по частотным параметрам вычисляется (§ 6.3) параметр a.

§ 5.П. п. 5.П.1. Следует [33, гл. 2].

К главе 6

§ 6.1. п. 6.1.3. Теорема 6.1.1 доказана в [1э].

§ **6.3. п. 6.3.1.** Доказательство утверждения 6.3.1 приведено в [1ц].

п. 6.3.4. Утверждение 6.3.2 доказано в [1ц].

§ **6.П. п. 6.П.1.** – Подробное изложение части статьи [1э].

К главе 7

§ **7.1. п. 7.1.1.** Теорема 7.1.1 доказана в [1ц].

п. 7.1.4. Теорема 7.1.2 доказана в [1ч].

§ **7.2. п. 7.2.4.** Следует работе [69в].

§ **7.3. п. 7.3.1 – п. 7.3.4.** Утверждения 7.3.1 и 7.3.2, а также критерии устойчивости 7.3.1 и 7.3.2 доказаны в статье [1щ].

п. 7.3.5. Погрешности вычислений приводят к проблеме выбора испытательных частот. Постановка этой проблемы и подход к её решению содержатся в статье [69б].

Отметим, в заключение, что в этой главе, в отличие от предыдущей, не рассматриваются дискретное объекты. Это вызвано принципиальными трудностями. Дело в том, что условие оптимальности в частотной форме (на котором основано вычисление частотного оптимального управления) для дискретных систем содержат [1ж], [1ш] слагаемые, зависящие от значения функционала оптимизации при оптимальном движении системы. Это значение неизвестно и поэтому неясно как обобщить результаты этой главы на дискретный случай.

К главе 8

Введение. Поясним термин ««декларативный»» в названии регулятора. Этот термин широко используется в теории искусственного интеллекта [58], где различают два способа представления знаний – декларативный и процедуральный, отражающие различие между ««знать что (делать)»» и ««знать как (делать)»». Термин ««декларативный»» происходит от английского слова declare (объявлять, заявлять, провозглашать).

Системы, рассматриваемые в этой главе, относятся к системам с пробным (поисковым, испытательным) гармоническим воздействием. Такие системы активно исследовались в 60-х годах [78а], [31а]. Дополнительные движения в таких системах, вызванные пробным сигналом, привели к развитию беспоисковых самонастраивающихся (адаптивных) систем, и в частности, систем с эталонной моделью [56].

Однако затем было показано, что для сходимости процессов в беспоисковых адаптивных системах с эталонной моделью необходимо ««достаточно богатое»» внешнее

воздействие на систему. Такое внешнее воздействие должно, в частности, содержать n частот. Эти обстоятельства и вызвали возврат к пробным (испытательным) воздействиям.

§ **8.1. п. 8.1.6.** Параметры модели (8.1.39) и задающего воздействия (8.1.42) взяты из работы [101].

п. 8.1.7. Рассуждения о дуальном характере управления при неопределённых параметрах, приведённые вначале этого подраздела следуют [74].

§ **8.2. п. 8.2.1.** Идея частотного адаптивного регулятора ЧДР-2 была предложена в докладе [1у], более подробное изложение которого приведено в [1х]. В этих работах для определения частотных параметров использовался резонансный фильтр. П.А. Трефилов [69а] предложил заменить его фильтром Фурье и тогда алгоритм принял описываемый вид. Пример 8.2.1 имеется в диссертации [69в].

п. 8.2.3, п. 8.2.4. Описание экспериментальной установки и результаты экспериментальных исследований взяты из [69а], при этом название ЧАР-1 заменено на ЧДР-2.

§ **8.3. п. 8.3.2.** Гипотеза квазистационарности (хотя и в несколько ином смысле, чем в определении 8.3.2) широко используется [56] в теории адаптивного управления.

К части IV

К главе 9

§ **9.1. п. 9.1.4 – п. 9.1.6, п. 9.1.8.** Следуют книге [100]. Двухкомпонентный измеритель (датчик) угловой скорости, приведённый в примере 9.1.4, рассматривался как объект управления в работе [4].

§ **9.2. п. 9.2.1.** Введённое здесь понятие качества и точности многомерных систем являются обобщением этих понятий одномерных систем. Они, так же как и задачи п. 9.2.1, следуют книге [1ш, гл. 1].

§ **9.3. п. 9.3.1 – п. 9.3.5, п. 9.3.7, п. 9.3.8.** – Краткое изложение материалов книги [1ш]. Пример 9.3.1 построил Ю.К. Тимофеев.

§ **9.П. п. 9.П.1 – п. 9.П.3.** Следуют книге [100] за исключением п. 9.П.2.4, где приведена столбцово-правильная форма ««вход-выход»», полученная в [1е].

К главе 10

§ **10.1. п. 10.1.1.** Передаточные матрицы многомерных систем вводятся, например, в [29]. Объект (10.1.8), (10.1.9) взят из работы [89] при $b_{12} = 3$. Утверждение 10.1.1, выражающее характеристический полином через её передаточные матрицы, было впервые доказано [1д], [84]. Соотношение (10.1.30) было получено в [1д] для случая, когда регулятор описывается алгебраическим соотношением [в (10.1.2) отсутствует дифференциальное уравнение]. Соотношение (10.1.31) получено в [84].

п. 10.1.2. Понятие обобщённой передаточной функции введено в [1д]. По годографу АФЧХ, соответствующего обобщённой передаточной функции, можно судить об устойчивости многомерной системы, используя критерий Найквиста. Впервые это было сделано в работах [1д], [91а].

п. 10.1.3. Изложение следует [2]. Пример 10.1.5 построил В.Н. Честнов.

§ **10.2. п. 10.2.1.** Вводимые понятия запасов устойчивости [1д] и радиуса запасов устойчивости являются простым обобщением понятий одномерных систем. Уравнения (10.2.10), (10.2.11) примера 10.2.1, который построил В.Н. Честнов, взяты из [89].

п. 10.2.2. Определение 10.2.3 следует работе [1д]. Пример 10.2.2 построил В.Н. Честнов.

п. 10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости приведены в [97].

§ **10.3. п. 10.3.1.** Теорема 10.3.1 доказана в [1д]. Теорема об определителе суммы двух матриц, используемая в 10.Д.2, содержится в [14]. Теорема 10.3.2 доказана в [2], а теорема 10.3.3 – в [97].

п. 10.3.2. Пример 10.3.1 построил В.Н. Честнов.

п. 10.3.3. Утверждение 10.3.2 является простым развитием теоремы 10.3.1. О возможности малых запасов устойчивости в системах оптимальных в смысле функционала (10.3.30) говорится в работе [89] откуда и взят пример 10.3.2.

п. 10.3.4. Теорема 10.3.4 доказана в [1з], теорема 10.3.5 является очевидным развитием теоремы 10.3.3.

§ **10.П. п. 10.П.1 – п. 10.П.3.** Изложенное опирается на теорию чувствительности и сравнения, развитые в работах [81], [55]. Определения 10.П.1 и 10.П.2 следуют [1п]. Теорему Парсеваля можно найти в [75]. Определение 10.П.3 и теорема 10.П.2 приведены в [81] и [55].

п. 10.П.4 – п. 10.П.5. Сингулярные числа комплексных матриц хорошо известны в математике. Понятие наименьшего сингулярного значения матрицы возвратной разности по управляемым (регулируемым) переменным введено в [99].

К главе 11

§ 11.Д. п. 11.Д.5. Теорема об условиях единственности решения совместной системы алгебраических уравнений приведена в [14, п. 6.19].

п. 11.Д.6. Лемма об управляемости объекта с любой обратной связью по состоянию доказана в [71, гл. 2].

Литература

[1] Александров А.Г. а) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гирорамы. Автоматика и телемеханика, №11, 1967, 39-49 с.; б) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гирорамы, установленной на подвижном основании. Автоматика и телемеханика, №12, 1967, 16-25 с.; в) К обратной задаче синтеза оптимальных регуляторов. Известия АН СССР ««Техническая кибернетика»», №4, 1967, 115-122 с.; г) Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. Автоматика и телемеханика, №9, 1969, 176-181 с.; д) Частотные свойства оптимальных линейных систем с несколькими управлениями. Автоматика и телемеханика, №12, 1969, 12-17 с.; е) Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. II., Автоматика и телемеханика, №2, 1972, 17-29 с.; ж) Построение дискретных систем управления с заданными свойствами. Автоматика и телемеханика, №9, 1973, 57-66 с.; з) Свойства аналитически сконструированных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1975, 5-11 с.; и) Степень грубости и частотные показатели качества автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып.1, Саратов, СПИ, 1976, 14-26 с.; к) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Изв. ВУЗов ««Приборостроение»», №3, 1977, 37-41 с.; л) Степень грубости систем с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, 105-118 с.; м) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Неполная степень наблюдаемости. Изв. ВУЗов ««Приборостроение»», №11, 1978, 34-39 с.; н) Аналитический синтез регуляторов по заданным показателям качества переходных процессов. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 3, Саратов, СПИ, 1978, 21-38 с.; о) Построение функционала качества в задаче аналитического конструирования регуляторов. Изв. ВУЗов ««Приборостроение»», №4, 1980.; п) Свойства аналитически сконструированных систем нестационарных линейных систем. Автоматика и телемеханика, №3, 1980, 5-12 с.; р) Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1980, 3-14 с.; с) Аддитивная компенсация в многомерных системах с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1981, 68-81 с.; т) Аналитический синтез регуляторов нестационарных систем автоматического регулирования. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 1983, №3220.; у) Частотный алгоритм адаптивного управления. Всесоюзная конференция ««Теория адаптивных систем и её применение»». Тезисы докладов и сообщений. М.-Л. 1983.; ф) О принципах построения систем анализа динамики и синте-

за устройств управления (САПР САУ). В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, Саратов, СПИ, 1982, 123-136 с.; х) Частотный алгоритм адаптивного управления. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 8-13 с.; ц) Аналитический синтез регуляторов для объектов, задаваемых частотными характеристиками. Автоматика и телемеханика, №7, 1985, 45-55 с.; ч) Аналитическое конструирование регуляторов по частотным характеристикам объекта. Автоматика и телемеханика, №9, 1986, 163-167 с.; ш) Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986, 272 с.; щ) Конечно-частотные критерии устойчивости систем с неопределёнными параметрами. Автоматика и телемеханика, №7, 1988, 26-37 с.; ы) Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989, 263 с.; э) Метод частотных параметров. Автоматика и телемеханика, №12, 1989, 1-14 с.

[2] Александров А.Г., Небалуев Н.А. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. 1. Автоматика и телемеханика, №12, 1971, 12-20 с.

[3] Александров А.Г., Подчукаев В.А. К обратной задаче аналитического синтеза с переменными параметрами. Изв. ВУЗов ««Приборостроение»», №3, 1975, 25-29 с.

[4] Александров А.Г., Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Синтез регуляторов двухкомпонентного измерителя угловой скорости на основе трехстепенного гироскопа. Изв. АН СССР ««Механика твердого тела»», №4, 1975, 30-38 с.

[5] Александров А.Г., Солдунов В.А. Синтез регуляторов по заданной точности при действии ограниченных внешних возмущений. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 9.09.1983, №2227 пр Д83.

[6] Андреев Ю.Н. а) Управление конечномерными объектами. М.: Наука, 1976, 424 с.; б) Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Автоматика и телемеханика, №3, 1977.

[7] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

[8] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. ДАН СССР, 1937, 14, 247.

[9] Булгаков Б.Н. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, Докл. АН СССР, т. 51, №5, 1946, 339-342 с.

[10] Беллман Р., Калаба Р. Обратная задача в динамическом программировании и автоматическом управлении. Сб. перев. ««Механика»», №6, 1964.

[11] Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1976, 992 с.

[12] Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ИЛ, 1948.

[13] Вавилов А.А., Солодовников А.И. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. Л.: 1963.

[14] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.

[15] Воронов А.А. а) Устойчивость управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979, 336 с.; б) Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980, 309 с.

[16] Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 6, 1963.

[17] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1954.

[18] Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969, 512 с.

[19] Горовиц А.М. Синтез систем с обратной связью. М.: Советское радио, 1970, 600 с.

[20] Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. М.: Радио и связь, 1984.

[21] Дас П. К прямой и обратной задачам оптимизации квадратичных функционалов в линейных автономных системах. Автоматика и телемеханика, №9, 1966, 11-18 с.

[22] Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974, 288 с.

[23] Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981, 246 с.

[24] Деруссо П., Рой Р., Клодз У. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970, 620 с.

[25] Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967, 336 с.

[26] Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1973, 607 с.

[27] Калман Р.Е. Когда линейная система управления является оптимальной. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., серия Д, №1, Мир, 1964.

[28] Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., ««Техническая механика»», серия Д, т. 83, 1961, 95-107 с.

[29] Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления. М.: Наука, 1966, 416 с.

[30] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 650 с.

[31] Красовский А.А. а) Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Наука, 1963, 468 с.; б) Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1967.; в) Системы автоматического управления полётом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973, 558 с.

[32] Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977, 272 с.

[33] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[34] Кузовков Т.Н. а) Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М.: Оборонгиз, 1960, 446 с.; б) Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.

[35] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977, 392 с.

[36] Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике. Киев. Гос. изд-во технич. литературы. 1963.

[37] Кухтенко В.И. Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик. М.: Машиностроение, 1970.

[38] Ларин Б.В. Методы решения алгебраических уравнений Риккати. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, №2, 1983.

[39] Ларин В.Б., Сунцев В.Н. О задаче аналитического конструирования. Автоматика и телемеханика, №2, 1968.

[40] Лётов А.М. а) Аналитическое конструирование регуляторов, I. Автоматика и телемеханика, №4, 1960, 436-441 с.; б) Аналитическое конструирование регуляторов, II. Автоматика и телемеханика, №5, 1960, 561-568 с.; в) Аналитическое конструирование регуляторов, III. Автоматика и телемеханика, №6, 1960, 661-665 с.; г) Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, №4, 1961, 425-435 с.; д) Теория оптимального управления. Тр. II Конгресса ИФАК, т. Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, 7-38 с.; е) Динамика полёта и управления, М.: Наука, 1969, 360 с.

[41] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.

[42] Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. Изд. АН СССР, 1949.

[43] Мееров М.В. а) Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Физматгиз, 1959.; б) Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.

[44] Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973, 440 с.

[45] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного синтеза. М.: Наука, 1981, 488 с.

[46] Морозовский В.Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970.

[47] Надеждин П.В. О практической неустойчивости (негрубости) систем. Автоматика и телемеханика, №5, 1973.

[48] Нарендра К.С., Валавани Л.С. Устойчивые адаптивные наблюдения и управления. ТИИЭР, т. 64, №8, 1976. (перев. с англ.)

[49] Нгуен Тхыонг Нго. Чувствительность систем автоматического управления (обзор). Автоматика и телемеханика, №5, 1971, 53-81 с.

[50] Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчёта. М.: Физматгиз, 1961.

[51] Ольденбургер Р. Изображение частотных характеристик, стандарты и расчётные критерии. В кн. Частотные методы в автоматике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957, 21-62 с.

[52] Основы автоматического регулирования (под ред. В.В. Солодовникова). М.: Машгиз, 1954.

[53] Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987, 480 с.

[54] Палк К.И. Системы управления механической обработкой на станках. Л.: Машиностроение, 1984, 215 с.

[55] Перкинс В., Крус Д. Операторы чувствительности для линейных систем с переменными параметрами. В кн. Чувствительность автоматических систем. М.: Наука, 1968, 45-50 с.

[56] Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972, 260 с.

[57] Петров Ю.П. Синтез устойчивых систем управления по среднеквадратичным критериям качества (обзор). Автоматика и телемеханика, №7, 1983.

[58] Попов Э.В. Общение с ЭВМ на естественном языке. М.: Наука, 1982.

[59] Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих установках. Автоматика и телемеханика, №6, 1963.

[60] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. Л.: Энергия, 1969, 208 с.

[61] Розенвассер Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления, М.: Наука, 1977, 344 с.

[62] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971, 396 с.

[63] Садомцев Ю.В. Аналитический синтез регуляторов при случайных возмущениях. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, вып. 3, 1978, 39-57 с.

[64] Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980, 400 с.

[65] Смагина Е.М. Нули линейных многомерных систем. Определение, классификация, применение. Автоматика и телемеханика, №12, 1985, 5-33 с.

[66] Солдунов В.А. Аналитический синтез регуляторов при неопределённых внешних возмущениях, Диссерт. на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1985.

[67] Справочник по теории автоматического управления (под ред. Красовского А.А.). М.: Наука, 1987, 712 с.

[68] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования (под. ред. Солодовникова В.В.). М.: Машиностроение, 1967-1969, 2418 с.

[69] Трефилов П.А. а) Частотный адаптивный регулятор ЧАР-1. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 36-42 с.; б) О выборе испытательных воздействий в частотном адаптивном регуляторе. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1985, 60-69 с.; в) Разработка и исследование частотных алгоритмов адаптивного управления. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. 1987.

[70] Трефилов П.А., Шмыков И.Г. Исследование двух способов адаптивного управления. В сб. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1985.

[71] Уонем М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980, 376 с.

[72] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.

[73] Хлебалин Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта управления. Диссертация на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1984.

[74] Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах, М.: Наука, 1968, 460 с.

[75] Чанг Ш.С.Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964, 440 с.

[76] Чеботарёв Н.Г. Об одной математической задаче, возникшей в связи с оценкой отклонений регулируемой переменной, если возмущающая сила ограничена по модулю. Автоматика и телемеханика, №4, 1948, т. 9, 331-334 с.

[77] Честнов В.Н. О возможной неустойчивости управляющих систем и синтез регуляторов с учётом параметрических возмущений. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1984.

[78] Эйкхофф П. а) Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975, 684 с.; б) Современные методы идентификации систем (под ред. Эйкхоффа П.). М.: Мир, 1983, 400 с.

[79] Якубович В.А. а) Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. ДАН СССР, т. 6, 1966, 1308-1311 с.; б) К теории адаптивных систем. ДАН СССР, т. 1827, №3, 1968, 518-521 с.

[80] Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear systems optimisation with prescribed degree of stability. Proc. Inst. Eng., 1969, 116, №2.

[81] Cruz J.B., Perkins Jr.K.R. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design. IEEE Trans. on Autom. Control, 1964, Vol. AC-9, №3.

[82] Doyle J.C., Stein G. Robustness With Observers. IEEE Trans. Autom. Control, 1979, Vol. AC-24, №4, p.p. 607-611.

[83] Doyle J.C., Stein G. Nultivariable Feedback Design: Consepts for a Classical – Modern Synthesis. IEEE Trans. Autom. Control, 1981, Vol. AC-26, №1, p.p. 4-16.

[84] Hsu C.H., Chen C. A prof of the stability of multivariable feedback system. Proc. IEEE(Lett), Vol 56, p.p. 2061-2062, 1968.

[85] Jameson A., Kreindler E. Inverse problem of linear optimal control. SIAM. J. Control, Vol. AC-14, 1969, p.p. 1-19.

[86] Kleinman O.I. On aniterative technique for Riccati equation computations. IEEE Trans. Autom. Control, 1968, Vol. AC-13, №4, p. 114.

[87] Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control. Bullet. Soc., Mat. Mech, 1960, Vol. 5, №1, p.p. 102-119.

[88] Leake R.J. Return difference Bode diagram for optimal system design. IEEE Trans. Autom Control, 10., 3, p.p. 342-344, 1965.

[89] Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M. Robustness. Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Cortrol Design. IEEE Tran. Autom. Control, 1981, Vol AC-26, №1, p.p. 75-92.

[90] Luenberger D.G. Observing the state of linear system. IEEE Trans. Autom. Control, AC-11, №2, 1966, p.p. 190-197.

[91] MacFarlane A.G.I. а) Two necessary conditions in the frequency domain for the optimality of a multiple-unput linear control systems. Proc. IEEE, 117(2), 1970, p.p. 464-466.; б) The Development of Frequency-Response Methods in Automic Control. IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-24, №2, April, 1979.

[92] Narendra K.S., Valavani L.S. Stable Adaptive Controller Design-Direct Control. IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-23, №4, 1978.

[93] Nygist H. Regeneration theory Bell system. Tech. J., January, 1932.

[94] Park H., Sebory D.E. Eigenvalue Assignment using Proportional-Integral Feedback International Iowinal of Control, September, 1974. p.p. 517-523.

[95] Porter B., Grossely T.R. Modal Control. Theory and Applications, London, 1972, 233 p.

[96] Rosenbrock H.H. Distinctive problems of process control. Chem. Eng. Progr., Vol. 58, №9, 1962, p.p. 43-50.

[97] Safonov M.G., Athans M. Gain and phase marging for multi loop LQG regulators. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, Vol. AC-22, №2, p.p. 173-179.

[98] Silverman L.M. Inversion of Multivariable Linear System. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-14, 1969, p.p. 270-276.

[99] Stein G., Dayle I.C. Singular values and feedback: Design examples. Proc. 1978., Allorton Conf. Urbana., IL, 1978.

[100] Wolovich W.A. Linear Multivariable System. Springer-Verlag, 1974, 358 p.

Александров Альберт Георгиевич

Частотное управление

Монография