@2004г. **А.Г.АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат.наук**
(Институт проблем управления им.Трапезникова РАН,Москва)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Предложен метод построения адаптивного управления в системах с эталонной моделью,к объектам которых приложено неизвестное ограниченное внешнее возмущение в виде суммы неограниченного числа гармоник.Это адаптивное управление обеспечивает заданную точность слежения выхода объекта за выходом эталонной модели.

1 Введение

Теория адаптивного управления с эталонной моделью развивается уже несколько десятилетий ,начиная с работ [1,2],в которых был построен алгоритм адаптивного управления ,использующий как измеряемую переменную, так и ее производные.Развитие этого алгоритма(например, в [3])позволило построить управление без этих производных.Последующие работы были связаны с анализом грубости процесса адаптивного управления к внешнему возмущению [4] и неструктурированной неопределенности [5],а также развитию алгоритма для многомерных объектов [6].

Неизмеряемое внешнее возмущение,приложенное к объекту управления, может приводить к значительной ошибке слежения выхода объекта за выходом эталонной модели.Алгоритм управления, построенный и исследованный в указанных работах,основан на методе функций Ляпунова и этот алгоритм трудно модифицировать так,чтобы он обеспечивал ошибку слежения,не превышающую заданную.

Метод рекуррентных целевых неравенств [7] позволяет синтезировать алгоритмы адаптивного управления при ограниченных внешних возмущениях.Такой алгоритм,построенный в [8]для систем с эталонной моделью ,обеспечивает точность слежения,не превышающую определенной величины,зависящей от границ возмущения.

Построению адаптивного управления,при котором ошибка слежения не превышает любую заданную величину,посвящена настоящая работа.Подход к его построению основан на идентификации объекта и замкнутой системы с помощью метода конечно-частотной идентификации [9] и процедуры синтеза регулятора при внешнем возмущении,являющемся суммой неограниченного числа гармоник.

2 Постановка задачи

Рассматривается минимально-фазовый объект, описываемый дифференциальным уравнением

(1) $$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_0 y = k_p u^{(p)} + \cdots + k_0 u + f, \quad p < n, \quad t \geq t_0,$$

где $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$– измеряемый выход объекта,управление и внешнее возмущение соответственно, $y^{(i)}$, $u^{(j)}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p})$- производные выхода и управления,d_i, k_j $(i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0,p})$ -неизвестные числа,n и p -известны.Далее,для простоты,$p = n - 1$, возмущение $f(t)$ -ограниченная,неизмеряемая,полигармоническая функция

(2) $$f(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i sin(\omega_i^f t + \phi_i^f),$$

в которой ω_i^f, ϕ_i^f $(i = \overline{1,\infty})$ -неизвестные частоты и фазы,а амплитуды f_i $(i = \overline{1,\infty})$ - неизвестные числа,удовлетворяющие неравенству

(3) $$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \leq f^*,$$

где f^* - известное число.

Желаемый выход объекта -это измеряемый выход $y_m(t)$ эталонной модели, описываемой дифференциальным уравнением

(4) $$y_m^{(n_m)} + d_{m,(n_m-1)} y_m^{(n_m-1)} + \cdots + d_{m,0} y_m = k_{m,p_m} r^{(p_m)} + \cdots + k_{m,0} r, \quad n_m < p_m,$$

где $d_{m,i}$ и $k_{m,j}$ $(i = \overline{0, n_m - 1},\ j = \overline{0, p_m})$-известные числа, $r(t)$ -измеряемое задающее воздействие, которое также является ограниченной полигармонической функцией

(5) $$r(t)) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} r_i sin(\omega_i^r t + \phi_i^r),$$

в которой ω_i^r, ϕ_i^r $(i = \overline{1,\infty})$ -неизвестные частоты и фазы,а амплитуды r_i $(i = \overline{1,\infty})$ - неизвестные числа,удовлетворяющие неравенству

(6) $$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |r_i| \leq r^*,$$

где r^* - известное число.

Цель управления $u(t)$ состоит в том , чтобы разность $e(t) = y(t) - y_m(t)$ выходов объекта (1) и эталонной модели (4) удовлетворяла,начиная с некоторого момента времени $t_N > t_0$, требованию

$$|e(t)| \leq e^* + \epsilon(t_N), \qquad t \geq t_N, \tag{7}$$

где e^*-заданное число,$\epsilon(t_N)$-зависящее от t_N число,модуль которого меньше e^*.

Управление $u(t)$ формируется регулятором ,описываемым дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered} d_{c,n_c} u^{(n_c)} + d_{c,n_c-1} u^{(n_c-1)} + \cdots + d_{c,0} u = k_{c,p_c} e^{(p_c)} + \cdots + k_{c,0} e, \\ p_c \leq n_c, \quad t \geq t_N \end{gathered} \tag{8}$$

До момента времени t_N управление формируется адаптивным регулятором, описываемым дифференциальным уравнением с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} d^{[i]}_{c,n_c} u^{(n_c)} + d^{[i]}_{c,(n_c-1)} u^{(n_c-1)} + \cdots + d^{[i]}_{c,0} u = k^{[i]}_{c,p_c} e^{(p_c)} + \cdots + k^{[i]}_{c,0} e + v^{[i]}, \\ p_c \leq n_c, t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{9}$$

В этом уравнении i $(i = \overline{1, N})$ -номер интервала адаптации , t_i- момент окончания $i-$го интервала ,числа t_i , также как и число N, находятся в процессе адаптации, $v^{[i]}(t)$-известный испытательный сигнал.

После окончания адаптации в момент времени t_N коэффициенты регулятора (8): $d_{c,i} = d^{[N]}_{c,i}$, $k_{c,j} = k^{[N]}_{c,j}$, $(i = \overline{0, n_c}, j = \overline{0, p_c})$.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптации коэффициентов регулятора (9) такой ,что ,начиная с некоторого момента времени t_N, разность выходов $e(t)$ объекта и эталонной модели удовлетворяла требованию (7) к точности слежения.

3 Построение регулятора для известного объекта

Пусть коэффициенты уравнения объекта (1) известны. Построим регулятор (8),обеспечивающий выполнение требования к точности слежения (7).

Преобразуем уравнения (1),(4),(8) по Лапласу при нулевых начальных условиях. Тогда они примут вид

$$d(s)y = k(s)u + f, \quad d_m(s)y_m = k_m(s)r, \tag{10}$$

$$d_c(s)u = k_c(s)e, \tag{11}$$

где

$d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i$, $k(s) = \sum_{i=0}^{p} k_i s^i$, $d_m(s) = s^{n_m} + \sum_{i=0}^{n_m-1} d_{m,i} s^i$, $k_m(s) = \sum_{i=0}^{p_m} k_{m,i} s^i$, $d_c(s) = \sum_{i=0}^{n_c} d_{c,i} s^i$, $k_c(s) = \sum_{i=0}^{p_c} k_{c,i} s^i$.

Умножим первое из уравнений (10) на $d_m(s)$, а второе- на $d(s)$ и ,после их вычитания, получим уравнение *расширенного* объекта.Оно описывает разность движений двух физических устройств: объекта (1) и эталонной модели (4):

(12) $$\tilde{d}(s)e = \tilde{k}(s)u + h(s)r + d_m(s)f,$$

где

$\tilde{d}(s) = d(s)d_m(s), \quad \tilde{k}(s) = k(s)d_m(s), \quad h(s) = -d(s)k_m(s).$

Используя уравнение регулятора (11),исключим переменную $u(t)$ из этого уравнения и получим уравнение замкнутой системы

(13) $$d_z(s)e = h_z(s)r + m_z(s)f,$$

где

(14) $$d_z(s) = \tilde{d}(s)d_c(s) - \tilde{k}(s)k_c(s), \quad h_z(s) = d_c(s)h(s), \quad m_z(s) = d_c(s)d_m(s).$$

.

Запишем уравнение (13) как

(15) $$e = T_{er}(s)r + T_{ef}(s)f,$$

где передаточные функции,связывающие ошибку слежения с задающим и возмущающим воздействиями, имеют вид

(16) $$T_{er}(s) = \frac{h_z(s)}{d_z(s)} = \frac{d_c(s)k_m(s)d(s)}{d_m(s)[d(s)d_c(s) - k(s)k_c(s)]},$$

(17) $$T_{ef}(s) = \frac{m_z(s)}{d_z(s)} = \frac{d_c(s)d_m(s)}{d_m(s)[d(s)d_c(s) - k(s)k_c(s)]}.$$

Отношение числителей этих передаточных функций удовлетворяют одному из неравенств

(18) $$\frac{|k_m(j\omega)d(j\omega)|}{|d_m(j\omega)|} \geq \frac{f^*}{r^*}, \quad 0 \leq \omega < \infty$$

либо

$$max_{0\leq\omega<\infty}\frac{|k_m(j\omega)d(j\omega)|}{|d_m(j\omega)|}\leq\frac{f^*}{r^*}. \tag{19}$$

Пусть объект и эталонная модель таковы, что выполняется неравенство (18). Рассмотрим регулятор (11) с полиномами

$$d_c(s)=k(s)d_m(s), \qquad k_c(s)=d(s)d_m(s)-\delta_1(s), \tag{20}$$

где $\delta_1(s)$ -гурвицев полином ,который находится из тождества

$$\delta_1(-s)\delta_1(s)=d(-s)d(s)[d_m(-s)d_m(s)+q_{11}k_m(-s)k_m(s)], \tag{21}$$

где q_{11}- некоторое положительное число.

Утверждение 3.1 Если объект (1) и эталонная модель (4) обладают свойством (18), а коэффициент q_{11} в тождестве (21) удовлетворяет условию

$$q_{11}\geq\frac{4r^{*2}}{e^{*2}}, \tag{22}$$

то разность выходов объекта(замкнутого регулятором (11),(20))и эталонной модели удовлетворяет требованию (7).

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Пусть выполнено неравенство (19). Рассмотрим регулятор (11) с полиномами

$$d_c(s)=k(s), k_c(s)=d(s)-\delta_2(s), \tag{23}$$

где $\delta_2(s)$ -гурвицев полином,который находится из тождества

$$\delta_2(-s)\delta_2(s)=d(-s)d(s)+q_{22}, \tag{24}$$

в котором q_{22}- некоторое положительное число.

Утверждение 3.2 Если объект и эталонная модель обладают свойством (19), а коэффициент q_{22} в тождестве (24) удовлетворяет условию

$$q_{22}\geq\frac{4f^{*2}}{e^{*2}}, \tag{25}$$

то разность выходов объекта(замкнутого регулятором (11),(23)) и эталонной модели удовлетворяет требованию (7) к точности слежения.

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Полиномы $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$ называются далее *факторизованными* полиномами.

Заметим,что для полиномов (20)и(23)регулятора полиномы уравнения замкнутой системы(13) имеют структуру

$$d_z(s) = k(s)d_m(s)\delta_1(s), \quad h_z = k(s)d_m(s)k_m(s)d(s), \tag{26}$$

либо

$$d_z(s) = k(s)d_m(s)\delta_2(s), \quad h_z = k(s)k_m(s)d(s). \tag{27}$$

4 Первый интервал адаптации(идентификация объекта)

Существо подхода к решению задачи.

Утверждения 3.1 и 3.2 позволяют построить регулятор, решающий задачу, если коэффициенты объекта (1)известны.Когда они неизвестны,нужно их идентифицировать и построить полиномы (20) либо (23)искомого регулятора, используя оценки этих коэффициентов. В течение идентификации выход объекта не сравнивается с выходом эталонной модели и поэтому время идентификации должно быть минимальным.Для этой цели на первом интервале адаптации находятся грубые оценки коэффициентов объекта, достаточные лишь для построения стабилизирующего регуятора (регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы).На втором и последующих интервалах адаптации идентификация объекта продолжается, но с использованием разности выходов эталонной модели и объекта, замкнутого регулятором, построенным на предыдущем интервале адаптации.

Фильтр Фурье и частотные уравнения идентификации.

Алгоритмы адаптации, основанные на методе конечно -частотной идентификации, описаны в [9,10] .В этих работах цель адаптации – построение модального управления. Цель, выраженная неравенством (7), приводит к некоторым особенностям алгоритма,хотя сам алгоритм ,выбор его параметров и условия его сходимости сохраняются.Поэтому алгоритм адаптации излагается ниже кратко и отмечаются его особенности, вызванные целью (7).

Опишем фильтр Фурье и частотные уравнения идентификации,которые лежат в основе алгоритма.

Рассмотрим *обобщенный* объект,описываемый дифференциальным уравнением

$$\eta^{(\gamma)} + \theta_1 \eta^{(\gamma-1)} + \ldots + \theta_\gamma \eta = \theta_{\gamma+1} u^{(\nu)} + \ldots + \theta_{\gamma+\nu+1} u + f, \tag{28}$$

где $\theta = [\theta_1, ..., \theta_{\gamma+\nu+1}]$-вектор неизвестных коэффициентов ,$\eta(t)$- измеряемый выход.Эти уравнения совпадают с уравнением (1), когда $\gamma = n$, $\nu = p$,$\eta = y$, $\theta_i = d_{n-i}$ $(i = \overline{1,\gamma}, \gamma = n)$, $\theta_{\gamma+i+1} = k_{\nu-i}$ $(i = \overline{0,\nu}, \nu = p)$.

Фильтр Фурье имеет вид

$$\alpha_k^\eta(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} e^{\lambda(t-t_0)} \eta(t) \sin \omega_k (t-t_0) dt, \quad \alpha_{\gamma+k}^\eta(\tau) = \frac{2}{\rho_k \tau} \int\limits_{t_F}^{t_F+\tau} e^{\lambda(t-t_0)} \eta(t) \cos \omega_k (t-t_0) dt, \\ (k = \overline{1,\gamma}) \tag{29}$$

где ρ_k,ω_k $(k = \overline{1,\gamma})$,$\lambda$ -заданные положительные числа (амплитуды,частоты и показатель экспоненты испытательного сигнала),которые могут быть определены экспериментально[11]; τ и t_F числа ,принимающие значения $\tau = qT_b$, $t_F = \tilde{q}T_b$, $T_b = \frac{2*\pi}{\omega_b}$,
$\omega_b = min(\omega_1, ..., \omega_\gamma)$,$q = 1, 2...$, $\tilde{q}$ -заданное число, τ и t_F называются временем фильтрации и моментом начала фильтрации соответственно. Далее будем использовать вектор $\alpha^\eta(\tau) = [\alpha_1^\eta(\tau), ..., \alpha_{2\gamma}^\eta(\tau)]$.

Частотные уравнения идентификации имеют вид

$$-[\alpha_k^\eta(\tau) + j\alpha_{\gamma+k}^\eta(\tau)] \sum_{i=1}^{\gamma} s_k^{\gamma-i} \theta_i(\tau) + \sum_{i=0}^{\nu} s_k^{\nu-i} \theta_{\gamma+i+1}(\tau) = [\alpha_k^\eta(\tau) + j\alpha_{\gamma+k}^\eta(\tau)] s_k^\gamma, \\ s = \lambda + j\omega_k, k = \overline{1,\gamma}, \tag{30}$$

где $\theta_i(\tau)$ $i = \overline{1, \gamma+\nu+1}$ -оценки коэффициентов объекта (28).

Процесс идентификации заканчивается в момент времени $\bar{t} = \bar{q}T_b$, в который выполняются необходимые условия ее сходимости

$$\frac{|\theta_i(qT_b) - \theta_i[(q-1)T_b]|}{\theta_i[(q-1)T_b]|} \leq \epsilon_i^\theta, \quad \theta_i[(q-1)T_b]| \neq 0, \quad (i = \overline{1, \gamma+\nu+1}), \tag{31}$$

где ϵ_i^θ $(i = \overline{1, \gamma+\nu+1})$ - достаточно малые заданные числа.

Показатель экспоненты $\lambda \geq 0$ должен удовлетворять условию

$$\lambda \geq max(Re\bar{s}_1, ..., Re\bar{s}_\gamma), \tag{32}$$

где $\bar{s}_i$, $i \subset \overline{1,\gamma}$ -корни полинома $\theta(s) = s^{(\gamma)} + \sum_{i=1}^{\gamma-1} \theta_i s^i$ с положительной вещественной частью.Число λ может быть определено экспериментально.Если объект (28) асимптотически устойчив, то $\lambda = 0$.

Идентификация объекта. Цель первого интервала- идентифицировать объект (1) с некоторой точностью , позволяющей найти стабилизирующий регулятор (9) для второго интервала адаптации.

Этой цели служит **процедура 4.1**,состоящая из следующих операций:

а) объект (1) возбуждается испытательным сигналом

$$u(t) = exp^{\lambda(t-t_0)} \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin \omega_k (t - t_0) \tag{33}$$

с заданными амплитудами и частотами ρ_k и ω_k $(k = \overline{1, n})$ и показателем экспоненты λ,удовлетворяющим условию (32);

б)выход объекта (1) прикладывается к входам фильтра Фурье (29),где $\gamma = n$. Выходом фильтра являются вектора $\alpha^y(\tau)$ оценок частотных параметров объекта в моменты времени $\tau = qT_b, \quad q = 1, 2, ...;$

в) решая для каждого τ частотные уравнения (30), где $\gamma = n$,$\nu = p$,$\alpha^\eta(\tau) = \alpha^y(\tau)$ получим вектора $\theta^{[1]}(\tau) = [d_{n-1}^{[1]}(\tau), ..., d_0^{[1]}(\tau), k_p^{[1]}(\tau), ..., k_0^{[1]}(\tau)]$ оценок коэффициентов объекта (1),используя которые проверяем необходимые условия (31).Пусть в момент времени $\tau_1 = q_1 T_b$ эти условия выполнились.Тогда формируем полиномы идентифицированного объекта

$$d^{[1]}(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i^{[1]}(\tau_1) s^i, \; k^{[1]}(s) = \sum_{i=0}^{p} k_i^{[1]}(\tau_1) s^i. \tag{34}$$

г) проверяем условия (18) и (19) и, в зависимости от выполнения одного из них, формируем полиномы (20), либо (23) регулятора

$$d_c^{[2]}(s) u = k_c^{[2]}(s) e + v^{[2]}, \quad t \geq t_1, \quad t_1 = t_0 + \tau_1. \tag{35}$$

В этом уравнении

$$d_c^{[2]}(s) = k^{[1]}(s) d_m(s), \; k_c^{[2]}(s) = d^{[1]}(s) d_m(s) - \delta_1^{[1]}(s), \tag{36}$$

либо

$$d_c^{[2]}(s) = k^{[1]}(s), \; k_c^{[2]}(s) = d^{[1]}(s) - \delta_2^{[1]}(s), \tag{37}$$

$v^{[2]}(t) = \sum_{k=1}^{n_z} \rho_k^{[2]} \sin \omega_k (t - t_1)$, где $\rho_k^{[2]}$ $\omega_k^{[2]}$ $(k = \overline{1, n_z})$ -заданные числа.

Полиномы $\delta_1^{[1]}(s)$ и $\delta_2^{[1]}(s)$ вычисляются по формулам (21) и (24) при $d(s) = d^{[1]}(s)$ и $k^(s) = k^{[1]}(s)$.

д) формируем *предполагаемый характеристический полином* замкнутой системы

$$(38) \qquad \check{d}_z^{[2]}(s) = d^{[1]}(s) d_m(s) d_c^{[2]}(s) - k^{[1]}(s) d_m(s) k_c^{[2]}(s)$$

Аналогично (26) и (27) этот полином имеет структуру $\check{d}_z^{[2]}(s) = k^{[1]}(s) d_m(s) \delta_1^{[1]}(s)$ либо $\check{d}_z^{[2]}(s) = k^{[1]}(s) d_m(s) \delta_2^{[1]}(s)$.

5 Второй интервал адаптации

Идентификация замкнутой системы и условия окончания адаптации.

Цель второго интервала адаптации состоит в том , чтобы более точно идентифицировать объект (1) , в условиях , когда он замкнут стабилизирующим регулятором (35).Затем , используя полученные оценки , синтезировать новый регулятор , обеспечивающий выполнение требования к точности слежения (7) либо приближения к нему.

На этом интервале объект (1) замыкается регулятором (35). Система (1),(4),(35) описывается,после исключения переменной $u(t)$, уравнением вида (13)

$$(39) \qquad d_z^{[2]}(s) e = k(s) d_m(s) v^{[2]} + \tilde{f}^{[2]}, \quad t \geq t_1,$$

где $\tilde{f}^{[2]} = -d_c^{[2]}(s) d(s) k_m(s) r + d_c^{[2]}(s) d_m(s) f$,а полином

$$(40) \qquad d_z^{[2]}(s) = d(s) d_m(s) d_c^{[2]}(s) - k(s) d_m(s) k_c^{[2]}(s).$$

Полином (40) содержит коэффициенты объекта (1),а полином (38)- оценки этих коэффициентов.

Предполагается, что система (1),(4),(35) -асимптотически устойчива (случай, когда она неустойчива рассмотрен в следующем разделе),и поэтому в испытательном сигнале $v^{[2]}$ показатель экспоненты $\lambda = 0$.

Идентифицируем " объект" (39), используя процедуру 4.1.

Операция б)этой процедуры дает вектора $\alpha^{e[2]}(\tau)$, называемые оценками частотных параметров замкнутой системы , на основе которых легко вычисляются по формулам работы [10] новые вектора $\alpha^{y[2]}(\tau)$ оценок частотных параметров объекта (1).

Операция в) выполняется дважды: вначале для векторов $\alpha^{e[2]}(\tau)$,затем для векторов $\alpha^{y[2]}(\tau)$. В результате получим вектора

(41) $$\theta^{[2]}(\tau) = [d^{[2]}_{n-1}(\tau), \ldots, d^{[2]}_0(\tau), k^{[2]}_p(\tau), \ldots, k^{[2]}_0(\tau)],$$

(42) $$\theta^{[2]}_z(\tau) = [d^{[2]}_{z,n_z}(\tau), \ldots, d^{[2]}_{z,0}(\tau)].$$

Время окончания второго интервала адаптации определяется как момент $t_2 = t_1 + \tau_2$,в который выполняются:

i)необходимые условия (32) для векторов (41),(42);

ii)неравенство

(43) $$\tau_2 \geq \tau_1 + \tau^*,$$

где τ^* - заданное число;

iii) условие близости коэффициентов предполагаемого и идентифицированного характеристических полиномов системы

(44) $$\frac{|\check{d}^{[2]}_{z,i} - d^{[2]}_{z,i}(\tau_2)|}{|\check{d}^{[2]}_{z,i}|} \leq \epsilon_{z,i}, \quad (i = \overline{0, n_z - 1}), \quad \check{d}^{[2]}_{z,i} \neq 0,$$

где $\epsilon_{z,i} \quad (i = \overline{0, n_z - 1})$ -достаточно малые заданные числа;

iiii) целевое условие (7).

Если неравенства (44) и (7) выполняются , то процесс адаптации заканчивается: $N = 2$ и регулятор (35) (при $v^{[2]}(t) = 0, \quad t \geq t_2$) является искомым регулятором (8).

В противном случае операция г),в которой используется вектор $\theta^{[2]}(\tau_2)$, дает полиномы $d^{[3]}_c(s)$ и $k^{[3]}_c(s)$ регулятора для третьего интервала адаптации ,а операция д)-новый предполагаемый характеристический полином и т. д.

Заметим,что может случиться так, что цель(7)не достигается в течение достаточно большого числа интервалов адаптации.Причиной этого являются числа ϵ^θ_i $(i = \overline{1, \gamma + \nu + 1})$ и $\epsilon_{z,i} \quad (i = \overline{0, n_z - 1})$ в неравенствах (31) и (44) для определения длительности интервалов адаптации.Поэтому при возникновении указанной ситуации эти числа уменьшаются,а при ее повторении вновь уменьшаются и т.д.

Уточнение условий (44) близости полиномов системы.

Отметим одно важное обстоятельство, связанное с идентификацией " объекта" (39).Оно состоит в том ,что его передаточная функция,связывающая ошибку слежения с испытательным сигналом, содержит сокращаемые полиномы (хотя объект (1)таких полиномов не содержит), а метод конечно-частотной идентификации исходит из значений этой передаточной функции на испытательных частотах и поэтому сокращаемые полиномы не могут быть идентифицированы.

Рассмотрим три вида таких полиномов.

Во-первых, это полином $d_m(s)$,который ,как следует из (40) содержится в обеих частях уравнения "объекта"(39).Для исключения этого известного полинома из процесса идентификации полагаем в частотных уравнениях (30):$\nu = p$,а $\gamma = (n + n_m + p)$ (для регулятора с полиномами (36)), либо $\gamma = (n + p)$ (для регулятора с полиномами (37)).

Во-вторых,может случиться так,что объект (1)и эталонная модель (4) таковы,что полиномы $k(s)$ и $d_m(s)$ имеют общим сомножителем неизвестный полином $l(s)$,степень которого n_l-неизвестна.Тогда,как следует из (39)и (40), для регулятора с полиномами (36) этот полином является сокращаемым.В этом случае определитель частотных уравнений (30) равен нулю.Уменьшаем γ и ν в этих уравнениях на единицу и вычисляем их определитель и,если он отличен от нуля ,то искомое число $n_l = 1$.В противном случае вновь уменьшаем γ и ν на единицу и так до тех пор, пока не найдутся значения γ и ν ,при которых определитель отличен от нуля.При реальных вычислениях вместо величины этого определителя используется значение числа обусловленности матрицы частотных уравнений.

В-третьих,может случиться так,что идентифицированный и истинный полиномы $k^{[1]}(s)$ и $k(s)$имеют общим сомножителем неизвестный полином $q(s)$.В этом случае уменьшаем γ и ν как описано выше.

Чтобы избежать определения степеней полиномов $l(s)$ и $q(s)$, будем полагать в частотных уравнениях (30):$\nu = 0$,а $\gamma = n + n_m$ (либо $\gamma = n$).Результатом их решения являются факторизованные полиномы $\delta_1(s)$ (либо $\delta_2(s)$)и тогда условие близости (44)заменяется условием близости предполагаемого и идентифицированного факторизованных полиномов

$$\frac{|\delta_{1,j}^{[i]} - \delta_{1,j}^{[i]}(\tau_i)|}{|\delta_{1,j}^{[i]}|} \leq \epsilon_{1,j} \quad \text{, либо} \quad \frac{|\delta_{2,k}^{[i]} - \delta_{2,k}^{[i]}(\tau_i)|}{|\delta_{2,k}^{[i]}|} \leq \epsilon_{2,k}, \quad \delta_{1,j}^{[i]} \neq 0, \quad \delta_{2,k}^{[i]} \neq 0,$$
$$(i = \overline{2, N}, j = \overline{1, n + n_m}, \quad k = \overline{1, n}), \tag{45}$$

где $\epsilon_{1,j}$ и $\epsilon_{2,k}$ $(j = \overline{1, n + n_m}, \quad k = \overline{1, n})$ -достаточно малые заданные числа.

6 Сходимость процесса адаптации

Асимптотически устойчивая замкнутая система.

Для сходимости процесса адаптации (выполнения условий близости (44)и целевого условия (7)) асимптотически устойчивого объекта достаточно [10] расширяемости интервалов адаптации и строгой ФФ-фильтруемости возмущения $f(t)$,так как при этих условиях может быть достигнута любая точность идентификации объекта (1).

Первое условие означает , что длительности интервалов адаптации удовлетворяют неравенству

$$\tau_i \geq \tau_{i-1} + \tau^*, \quad (i = \overline{2, N}), \tag{46}$$

в котором τ^* -заданное число. Требование строгой ФФ-фильтруемости означает для рассматриваемого случая , что частоты, испытательного сигнала с одной стороны и внешнего возмущения и задающего сигнала -с другой, не совпадают

$$\omega_i \neq \omega_k^f, \;\; \omega_i \neq \omega_j^r, \;\; (i \neq k, \;\; i \neq j, \;\; k = \overline{1, \infty}, \;\; j = \overline{1, \infty}). \tag{47}$$

Эти неравенства могут быть проверены экспериментально [10].

Если предположение о том,что замкнутая система асимптотически устойчива на всех интервалах адаптации выполняется,то условий (46) и (47) достаточно для сходимости процесса адаптации.

Неустойчивая замкнутая система.

Пусть на втором интервале адаптации система (39)неустойчива . После того как это будет экспериментально установлено,регулятор (35) отключается и на третьем интервале повторяются операции первого интервала, однако, в соответствии с (46), он имеет большую длительность.На следующем интервале адаптации вновь проверяется устойчивость замкнутой системы и ,если она неустойчива,регулятор отключается и т. д. до тех пор, пока не будет определена такая длительность идентификации объекта (1),при которой достигается необходимая для нахождения стабилизирующего регулятора точность идентификации.

Реализация этого алгоритма затруднена ограничениями на допустимые значения входа и выхода объекта (1)

$$|y(t)| \leq y^* \quad |u(t)| \leq u^*, \quad t \geq t_0, \tag{48}$$

где y^* и u^*-заданные числа.

В этом случае строится **процедура 6.1**,которая состоит из следующих операций.

a1). Процедура 4.1, которая заканчивается в момент t_1 достижения предельных значений y^*, либо u^*: $|y(t_1)| = y^*$, либо $|u(t_1)| = u^*$.

б1).На втором интервале адаптации находится степень неустойчивости "объекта" (39) $\lambda^{[2]}$.Этот интервал состоит из нескольких подынтервалов, в течение которых находится $\lambda^{[2]}$, используя несложный алгоритм,который здесь опущен.

в1).Если $\lambda^{[2]} \neq 0$,то на третьем интервале адаптации осуществляются операции раздела 4 при $\lambda = \lambda^{[2]}$.При этом операция в) заканчивается,когда достигаются предельно допустимые значения y^*, либо u^*,а операция г) дает регулятор для следующего интервала адаптации ,на котором вновь определяется степень неустойчивости замкнутой системы и т. д. до тех пор, пока на некотором N_1-м интервале адаптации не будет найден стабилизирующий регулятор ($\lambda^{[N_1+1]} = 0$).

Окончание процесса адаптации.

Уточним теперь определение момента t_N окончания процесса адаптации.В начале отметим,что каждый интервал адаптации,на котором объект замкнут стабилизирующим регулятором,начинается с проверки целевого условия (7)в течение определенного времени.Так, на втором интервале эта проверка осуществляется на подынтервале $[t_1, t_1 + t_2^*]$, где t_2^*-заданное положительное число.Пусть на этом подынтервале $f(t) = r(t) = 0$,а в остальные моменты времени -это ограниченные функции времени.Тогда функции (2)и (5)являются разложениями в ряд Фурье так определенных на интервале $[t_0, t^*]$ (где t^*- момент окончания работы объекта)функций.Так как $f(t) = r(t) = 0$ ($[t_1 \leq t \leq t_1 + t_2^*]$), то цель (7)достигается при любом стабилизирующем регуляторе.Не исключено,что в некоторый момент $t_2 = t_1 + t_2^* + \tau_2$ выполнятся условия $i) - iiii)$ и тогда процесс адаптации прекращается.Однако целевое условие (7)может нарушиться в некоторый момент времени $t > t_2$,тогда выполняется операция г),которая дает полиномы регулятора для третьего интервала адаптации.Это означает,что интервалы адаптации могут иметь вид :$t_i - t_{i-1} = t_i^* + \tau_i + t_i^{**}$ $(i \geq 2)$, где $t_{i-1} + t_i^* + \tau_i$-момент,в который выполнились условия окончания адаптации,а t_i-момент,когда нарушилось целевое условие (7).Таким образом,t_N-это момент времени,начиная с которого целевое условие (7) не нарушается.

Таким образом,справедливо следующее

Утверждение 6.1Если выполняется условие (46)расширяемости интервалов адаптации ,испытательные частоты удовлетворяют неравенствам (47) и при ограничениях (48)существует интервал N_1 адаптации,дающий стабилизирующий регулятор, то процесс адаптации сходится .

7 Пример

Рассмотрим минимально-фазовый объект,описываемый уравнением

$$\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = k_1\dot{u} + k_0 u + f, \tag{49}$$

в котором d_1,d_0,k_1 и k_0 -неизвестные числа, $f(t)$ -полигармоническое возмущение вида (2), а его сумма амплитуд ограничена величиной $f^* = 5$.

Эталонная модель описывается уравнением

$$\ddot{y_m} + 5\dot{y_m} + 6y_m = \dot{r} + r, \tag{50}$$

где полигармонический сигнал вида (5) ограничен числом $r^* = 40$.

Требуется найти коэффициенты регулятора

$$(d_{c,3}s^3 + d_{c,2}s^2 + d_{c,1}s + d_{c,0})u = (k_{c,3}s^3 + k_{c,2}s^2 + k_{c,1}s + k_{c,0})e, \tag{51}$$

обеспечивающего,начиная с некоторого момента времени t_N, выполнение следующего требования к разности выходов объекта и эталонной модели

$$|y(t) - y_m(t)| \leq 1, \ t \geq t_N \tag{52}$$

Примечание 7.1.В приводимых ниже результатах численных экспериментов приняты значения коэффициентов объекта , внешнее возмущение и задающий сигнал из статьи [4]: $d_0 = -1$,$d_1 = 0$;$k_1 = 1$;$k_0 = 2$;$f(t) = 5\cos 4,6t$, $r(t) = 20\cos 2,5t + 20\cos 5t$.

Заметим также ,что из структур уравнений (49),(50) объекта и эталонной модели следует выполнение неравенства (18) и поэтому q_{11} находим по формуле (22) .

Приведем результаты ,полученные в процессе адаптации к искомому регулятору (51),указывая для удобства лишь обозначения (а,б и т.д.) операций процедуры 4.1.

Первый интервал адаптации.

а) объект (49) был возбужден испытательным сигналом $u(t) = 0,1exp(1,1t)(\sin 2t + sin4t)$;

б)-в) в момент времени $\tau_1 = 2T_b$ $(T_b = \frac{2\pi}{2})$ были получены оценки его коэффициентов

$$d_1^{[1]} = 0,566; \ d_0^{[1]} = -6, \ \ k_1^{[1]} = 3,06; \ k_0^{[1]} = -1,75. \tag{53}$$

г) регулятор для второго интервала адаптации, построенный при $q_{11} = 10$, имеет вид

$$(3,06s^3 + 13,5s^2 + 9,61s - 10,5)u = -(11s^3 + 72,4s^2 + 154s + 106)e + v^{[2]}. \tag{54}$$

д) предполагаемый факторизованный полином системы (49),(50),(54):

$$\delta_1^{[2]}(s) = (s^4 + 16,6s^3 + 72,5s^2 + 127s + 70). \tag{55}$$

Второй интервал адаптации.

а) система (49),(59) возбуждалась испытательным сигналом $v^{[2]}(t) = 10^3(\sin 2t + \sin 4t + \sin 5t + \sin 8t + \sin 10t)$;

б)-в) в момент времени τ_2 найдены следующие оценки коэффициентов факторизованного полинома и объекта

$$\delta_{1,4}^{[2]} = 1;\ \delta_{1,3}^{[2]} = 6,39;\ \delta_{1,2}^{[2]} = 21,1;\ \delta_{1,1}^{[2]} = 50,9;\ \delta_{1,0}^{[2]} = 35,5; \tag{56}$$

$$d_1^{[2]} = -0,126;\ d_0^{[2]} = -0,89;\ k_1^{[2]} = 1,01;\ k_0^{[2]} = 1,87. \tag{57}$$

Используя коэфициенты полинома (55) и идентифицированные коэффициенты (56), проверяем выполнение условий (45) их близости при $\epsilon_{1,j} = 0,5 \quad (j = \overline{1,4})$. Они нарушаются. Кроме того, моделирование системы (49),(50),(54) показывает ,что требование (52)к точности слежения также не выполняется и поэтому процесс адаптации должен продолжаться.

г) регулятор для третьего интервала адаптации, построенный с использованием оценок (56) при $q_{11} = 100$, имеет вид

$$(1,01s^3 + 6,95s^2 + 15,4s + 11,2)u = -(98s^3 + 287s^2 + 284s + 94,5)e + v^{[3]}; \tag{58}$$

д) предполагаемый факторизованный полином системы (49),(50),(58)

$$\delta_1^{[3]}(s) = (s^4 + 102s^3 + 292s^2 + 279s + 89,2). \tag{59}$$

Третий интервал адаптации.

а) система (49),(50),(58) возбуждалась испытательным сигналом $v^{[3]} = v^{[2]}$.

б)-в) в момент времени $\tau_3 = \tau_2$ были получены оценки коэффициентов факторизованного полинома

$$\delta_{1,4}^{[3]} = 1,\ \delta_{1,3}^{[3]} = 148,\ \delta_{1,2}^{[3]} = 418,\ \delta_{1,1}^{[3]} = 407,\ \delta_{1,0}^{[3]} = 121. \tag{60}$$

Сравнивая эти числа с коэффициентами полинома (59) нетрудно видеть ,что условия (45) их близости выполняются . Моделирование системы (49),(50),(58) показало ,что требование (52)к точности слежения также выполняется и следовательно искомый регулятор имеет вид (58),где $v^{[3]} = 0$.

8 Приложение

Доказательство утверждения 3.1

Выразим целевое условие (7) через параметры системы (10),(11). Для этого запишем соотношение (15) в виде

$e = e_r + e_f$, где $e_r = T_{er}(s)r$, $e_f = T_{ef}(s)f$.

Учитывая выражения (2)и (5)для функций $r(t)$ и $f(t)$ запишем при $t \to \infty$

$$e_r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_r(\omega_i^r)\sin(\omega_i^r t + \varphi_i^r),\ e_f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_f(\omega_i^f)\sin(\omega_i^f t + \varphi_i^f), \tag{61}$$

где $a_r(\omega_i^r) = |T_{er}(j\omega_i^r)|r_i, \quad a_f(\omega_i^f) = |T_{ef}(j\omega_i^f)|f_i \quad (i = \overline{1,\infty})$.

Очевидно , что

$$|e_r(t)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |T_{er}(j\omega_i^r)||r_i|,\ |e_f(t)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |T_{ef}(j\omega_i^f)||f_i|. \tag{62}$$

Теперь целевое условие (7)можно записать с учетом границ (3),(6) как:

$$|e(t)| \leq |e_r(t)| + |e_f(t)| \leq ||T_{er}||r^* + ||T_{ef}||f^* \leq e^*, \tag{63}$$

где $||T_{er}|| = \max_{0\leq\omega<\infty} |T_{er}(j\omega)|,\ ||T_{ef}|| = \max_{0\leq\omega<\infty} |T_{ef}(j\omega)|$. Числа $||T_{er}||$ и $||T_{ef}||$являются H_∞- нормами передаточных функций $T_{er}(s)$ и $T_{ef}(s)$.

Для выполнения целевого условия (7)достаточно , чтобы выполнялись следующие два неравенства

$$j)||T_{er}|| \leq \frac{e^*}{2r^*}, \qquad jj)||T_{ef}|| \leq \frac{e^*}{2f^*}. \tag{64}$$

Убедимся , что регулятор (11),(20) обеспечивает выполнение условия j).Для этого подставим полиномы (20) в выражение (16)для передаточной функции $T_{er}(s)$ и найдем

$$T_{er}(s) = \frac{k_m(s)d(s)}{\delta_1(s)} \tag{65}$$

и с учетом тождества (21) и неравенства $d_m(-j\omega)d_m(j\omega) \geq 0$ получим

$$T_{er}(-j\omega)T_{er}(j\omega) = \frac{k_m(-j\omega)k_m(j\omega)}{d_m(-j\omega)d_m(j\omega)+q_{11}k_m(-j\omega)k_m(j\omega)} \leq \frac{1}{q_{11}} \tag{66}$$

и тогда, принимая во внимание (22), имеем $||T_{er}|| \leq \frac{1}{\sqrt{q_{11}}} \leq \frac{e^*}{2r^*}$.

Теперь проверим, что регулятор (11),(20)обеспечивает выполнение условия jj) .Для этого подставим полиномы (20)в выражение (17) для передаточной функции $T_{ef}(s)$.Нетрудно видеть , что $T_{ef}(s) = \frac{d_m(s)}{\delta_1}$ и тогда, с учетом условия (18) и неравенства $d_m(-j\omega)d_m(j\omega) \geq 0$, получим

$$T_{ef}(-j\omega)T_{ef}(j\omega) = \frac{d_m(-j\omega)d_m(j\omega)}{q_{11}d(-j\omega)d(j\omega)k_m(-j\omega)k_m(j\omega)} \leq \frac{1}{q_{11}\frac{f^{*2}}{r^{*2}}}. \tag{67}$$

Отсюда с учетом (22) следует: $||T_{ef}|| \leq \frac{e^*}{2f^*}$

Доказательство утверждения 3.2

Убедимся , что регулятор (11),(23) обеспечивает выполнение условия jj).Для этого подставим полиномы (23) в выражение (17) для передаточной функции $T_{ef}(s)$ и найдем

$$T_{ef}(s) = \frac{1}{\delta_2(s)}. \tag{68}$$

Учитывая тождество (24) и неравенство $d(-j\omega)d(j\omega) \geq 0$, получим

$$T_{ef}(-j\omega)T_{ef}(j\omega) = \frac{1}{d(-j\omega)d(j\omega)+q_{22}} \leq \frac{1}{q_{22}} \tag{69}$$

и тогда, принимая во внимание (25), имеем $||T_{ef}|| \leq \frac{1}{\sqrt{q_{22}}} \leq \frac{e^*}{2f^*}$.

Теперь проверим, что регулятор (11),(23)обеспечивает выполнение условия j) .Для этого подставим полиномы (23)в выражение для передаточной функции $T_{er}(s)$.Нетрудно видеть , что $T_{er}(s) = \frac{k_m(s)d(s)}{d_m(s)\delta_2}$

и тогда, с учетом условия (19) и неравенства $d(-j\omega)d(j\omega) \geq 0$, получим

$$T_{er}(-j\omega)T_{er}(j\omega) = \frac{k_m(-j\omega)k_m(j\omega)d(-j\omega)d(j\omega)}{q_{22}d_m(-j\omega)d_m(j\omega)} \leq \frac{f^{*2}}{q_{22}r^{*2}}. \tag{70}$$

Отсюда с учетом (25) следует: $||T_{er}|| \leq \frac{e^*}{2r^*}$.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Parks P.C.* Lypunov Redesign of Model Reference Adaptive Control System//IEEE Automat.Control.1966.V. AC-11.No3.P.362-367.

2.*Земляков С.Д.,Рутковский В.Ю.*Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью//АиТ.1967.No6.С.88-94.

3.*Narendra K.C.,Valavani L.S.*Stable Adaptive Control Design-Direct Control//IEEE Automat.Control.1978.V. AC-23.No4.

4.*Narendra K.C.,Annaswamy F.M.*Robust Adaptive Control in the presence of Bounded Disturbance//IEEE Automat.Control.1986.V. AC-31.No4.

5.*Андерсон Б.,Битмид Р.,Джонсон К. и др.*Устойчивость адаптивных систем.М.:Мир,1989.

6.*Фрадков А.Л.*Адаптивное управление в сложных системах.М.:Наука,1990.

7.*Фомин В.Н.,Фрадков А.Л.,Якубович В.А.*Адаптивное управление динамическими объектами.М.:Наука,1981.

8.Справочник по теории автоматического управления.Под ред. А.А.Красовского. Гл.11. М.:Наука,1987.

9.*Александров А.Г.*Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик//Изв.РАН.Теория и системы управления.1995.№2 С.63-71.

10.*Александров А.Г.*Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении//АиТ.2000.№4.С.106-116.

11.*Александров А.Г.*Конечно-частотная идентификация:определение границ испытательных частот//АиТ.2001.№11.С.3-14.