

## К АНАЛИТИЧЕСКОМУ СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРОВ<sup>1</sup>

Предлагается метод синтеза регуляторов линейных объектов при ограниченных кусочно-непрерывных внешних возмущениях.

### 1. Введение

Проблема синтеза регуляторов является одной из центральных в теории автоматического управления. Первым методом синтеза по прямым показателям точности и качества (установившейся ошибке, времени регулирования, запасам устойчивости) был метод ЛАЧХ [1,2]. Это графо-аналитический метод проб и ошибок позволяет синтезировать регуляторы для устойчивых, минимально-фазовых одномерных объектов. Он обеспечивает грубость системы (запасы устойчивости по фазе и модулю). Появление в 1960г. аналитического конструирования регуляторов ( $LQ$ -оптимизации)[3,4] открыло возможность существенного расширения класса объектов, для которых может быть синтезирован регулятор. В связи с этим начал развиваться [5] аналитический синтез регуляторов, в рамках которого были исследованы частотные свойства  $LQ$ -оптимальных систем и даны способы выбора структуры и коэффициентов квадратичного функционала, при которых оптимальная система является грубой и обладает требуемыми прямыми показателями при ступенчатых и гармонических типовых воздействиях [6–10].

В [11] рассмотрен более общий случай, когда внешнее возмущение-ограниченная полигармоническая функция с конечным числом неизвестных гармоник. Процедура синтеза использует  $LQ$  и  $H\infty$ -оптимизацию.

Ниже аналитический синтез регуляторов развивается для случая, когда внешнее возмущение неизвестная ограниченная кусочно-непрерывная функция.

Заметим, что  $l_1$ -оптимальное управление [12,13] позволяет построить регулятор для дискретного объекта, который обеспечивает наименьшую ошибку регулирования при неизвестном ограниченном возмущении. Однако такой регулятор может не обеспечивать грубость и необходимое быстродействие системы.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$(2.1) \quad y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_0y = k_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + k_0u + m_\eta f^{(\eta)} + \dots + m_0f, \\ \gamma < n, \quad \eta < n, \quad m_0 \neq 0, \quad t \geq 0,$$

$$(2.2) \quad g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_0u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_0y,$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-08-01177).

в которых  $y(t)$  и  $u(t)$  – измеряемые выходы объекта (2.1) и регулятора (2.2),  $f(t)$  – внешнее возмущение, коэффициенты этих уравнений – числа.

Внешнее возмущение  $f(t)$  – ограниченная полигармоническая функция

$$(2.3) \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i^f t + \phi_i^f),$$

частоты  $\omega_i^f$  и фазы  $\phi_i^f$  которой неизвестны, а неизвестные амплитуды  $f_i$  удовлетворяют условию

$$(2.4) \quad \sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leq f^*,$$

где  $f^*$  – известное число.

Заметим, что при выполнении этого условия внешнее возмущение ограничено числом  $f^*$ :

$$(2.5) \quad |f(t)| \leq f^*.$$

Однако при условии (2.5) неравенство (2.4) может нарушаться.

Частным случаем функции возмущения (2.3) является кусочно-непрерывная функция, разложимая в ряд Фурье.

Наряду с уравнениями (2.1) и (2.2) будем использовать их преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях

$$(2.6) \quad d(s)y = k(s)u + m(s)f,$$

$$(2.7) \quad g(s)u = r(s)y,$$

где  $d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i$ ,  $k(s) = \sum_{i=0}^{\gamma} k_i s^i$ ,  $m(s) = \sum_{i=0}^{\eta} m_i s^i$ ,  $g(s) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i s^i$ ,  $r(s) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i$ .

Установившейся ошибкой будем называть число

$$(2.8) \quad y_{ss} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)|.$$

Время регулирования будем характеризовать числом

$$(2.9) \quad t_{tr} = \min_{1 \leq i \leq 2n-1} |Res_i^s|^{-1},$$

где  $s_i^s$  ( $i = \overline{1, 2n-1}$ ) – корни характеристического полинома системы (2.1), (2.2):

$$(2.10) \quad d^s(s) = d(s)g(s) - k(s)r(s).$$

Коэффициенты объекта могут незначительно отличаться от известных значений из-за их разброса в пределах технологических допусков на изготовление узлов объекта, из-за старения объекта и т.п. Чувствительность (грубость) системы к таким параметрическим возмущениям будем характеризовать радиусом запасов устойчивости [14] системы.

Радиус запасов устойчивости  $r$  определяется выражением

$$(2.11) \quad r^2 = \inf_{0 \leq \omega < \infty} [1 + w(-j\omega)][1 + w(j\omega)],$$

где  $w(s) = -\frac{k(s)r(s)}{d(s)g(s)}$  — передаточная функция разомкнутой системы (2.1),(2.2).

Геометрически число  $r$  — это радиус наибольшего круга с центром в точке  $(-1; 0)$ , в который не заходит годограф Найквиста. Он является обобщением понятий запасов устойчивости по фазе  $\varphi_3$  и модулю  $L$ . Так, если  $r = 0,75$ , то запас по фазе  $\varphi_3 \geq 45^\circ$ , запас по модулю  $L \geq 1,75$ . При  $r = 1$  выполняются неравенства  $\varphi_3 \geq 60^\circ$ ,  $L \geq 2$ .

Будем называть систему (2.1),(2.2) грубой, если  $r \geq r^*$ , где  $r^* = 0,75$

*Задача 1* (аналитического синтеза регуляторов) состоит в том, чтобы найти коэффициенты регулятора (2.2) такие, чтобы система (2.1), (2.2) удовлетворяла требованиям к точности

$$(2.12) \quad y_{ss} \leq y_{ss}^*,$$

времени регулирования

$$(2.13) \quad t_{tr} \leq t_{tr}^*$$

и грубости

$$(2.14) \quad r \geq r^*,$$

где  $y_{ss}^*$  и  $t_{tr}^*$  — заданные положительные числа.

### 3. Существо подхода

Искомый регулятор находится из тождества Безу

$$(3.1) \quad d(s)g(s) - k(s)r(s) = \delta_0(s),$$

в котором гурвицев полином (полином, все корни которого имеют отрицательные вещественные части)  $\delta_0(s)$  степени  $2n - 1$  находится из уравнения

$$(3.2) \quad \delta_0(-s)\delta_0(s) = k(-s)k(s)[d(-s)d(s) + qp(-s)p(s)],$$

где положительное число  $q$  и коэффициенты гурвицева полинома  $p(s) = s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} p_i s^i$  определяются из условий задачи 1. Здесь и далее полагаем, для простоты, что степень полинома  $k(s)$ :

$$(3.3) \quad \gamma = n - 1.$$

Из структуры полинома  $\delta_0(s)$ , которая следует из уравнения (3.2), заключаем, что корни  $s_i^k (i = \overline{1, n-1})$  полинома  $k(s)$  должны удовлетворять условию

$$(3.4) \quad \min_{1 \leq i \leq n-1} |Res_i^k| \geq t_{tr}^{*-1}$$

и поэтому далее будем рассматривать объекты, для которых это условие выполняется.

*Примечание 1.* Полином в правой части уравнения (3.2) является полиномом уравнения для экстремалей функционала

$$(3.5) \quad I = \int_0^\infty [q(\tau_0 y^2 + \tau_1 \dot{y}^2 + \dots + \tau_{n-1} y^{(n-1)2}) + \rho_0 u^2 + \rho_1 \dot{u}^2 + \rho_{n-1} u^{(n-1)2}] dt,$$

где коэффициенты являются коэффициентами полиномов

$$(3.6) \quad \rho(s^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i s^{2i} (-1)^i = k(-s)k(s), \tau(s^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i s^{2i} (-1)^i = p(-s)p(s).$$

Для исследования точности системы (2.1),(2.2) запишем ее передаточную функцию  $T_{yf}(s)$ , связывающую выход с внешним возмущением. Эта передаточная функция имеет вид

$$(3.7) \quad T_{yf}(s) = \frac{g(s)m(s)}{d(s)g(s) - k(s)r(s)}.$$

Ее  $H_\infty$  – норма определяется как

$$(3.8) \quad \|T_{yf}(s)\| = \sup_{0 \leq \omega < \infty} |T_{yf}(j\omega)|.$$

Символ  $\infty$  в обозначении этой нормы здесь и далее опущен.

Почти очевидно (ниже это показано строго), что для выполнения требования (2.12) к точности достаточно, чтобы

$$(3.9) \quad \|T_{yf}(s)\| \leq \frac{y_{ss}^*}{f^*}.$$

Для анализа грубости этой системы запишем функцию ее возвратной разности

$$(3.10) \quad v(s) = 1 + w(s) = \frac{d(s)g(s) - k(s)r(s)}{d(s)g(s)}.$$

Из выражения (2.11) следует, что для выполнения требования к грубости достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(3.11) \quad \inf_{0 \leq \omega < \infty} v(-j\omega)v(j\omega) \geq r^{*2}.$$

С учетом уравнения (3.1) запишем выражения (3.9) и (3.11) как

$$(3.12) \quad \left\| \frac{g(s)m(s)}{\delta_0(s)} \right\| \leq \frac{y_{ss}^*}{f^*}, \quad \inf_{0 \leq \omega < \infty} \frac{\delta_0(-j\omega)\delta_0(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)g(-j\omega)g(j\omega)} \geq r^{*2}.$$

Таким образом, решение задачи 1 сводится к определению параметра  $q$  и коэффициентов полинома  $p(s)$  из неравенств (3.12) и условия

$$(3.13) \quad \min_{1 \leq i \leq 2n-1} |Res_i^\delta| \geq t_{tr}^{*-1},$$

в котором  $s_i^\delta$ , ( $i = \overline{1, 2n-1}$ ) - корни полинома  $\delta_0(s)$ .

Ниже при решении задачи 1 будем рассматривать два вида объектов: минимально-фазовые, у которых  $k(s)$ -гурвицев полином, и неминимально-фазовые объекты с полиномом  $k(s)$ , содержащим корни с неотрицательной вещественной частью. Для неминимально-фазовых объектов решения задачи 1 может не существовать, и тогда необходимо найти минимальные числа  $y_{ss}$  и  $t_{tr}$ , при которых может быть построен регулятор, решающий эту задачу.

#### 4. Минимально-фазовые объекты

Если полином  $k(s)$  объекта (2.6) гурвицев, то решение уравнения (3.1) имеет вид

$$(4.1) \quad g(s) = k(s), \quad r(s) = d(s) - \delta(s),$$

где  $\delta(s)$  – гурвицев полином, который находится из тождества

$$(4.2) \quad \delta(-s)\delta(s) = d(-s)d(s) + qp(-s)p(s).$$

Характеристический полином системы (2.6),(2.7) с регулятором (4.1) записывается как

$$(4.3) \quad d^s(s) = \delta_0(s) = k(s)\delta(s).$$

В книге [15] показано, что всегда существует достаточно большое число  $q$  такое, что

$$(4.4) \quad \delta(s) = (s + \sqrt{q})p(s) + 0_1(s, q),$$

где  $0_1(s, q)$ -полином, чьи коэффициенты исчезают с ростом числа  $q$ .

Выберем коэффициенты гурвицева полинома  $p(s)$  так, чтобы его корни  $s_i^p$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) и параметр  $q$  удовлетворяли условиям

$$(4.5) \quad \min_{1 \leq i \leq n-1} |Res_i^p| \geq t_{tr}^{*-1}, \quad q^{1/2} \geq t_{tr}^{*-1},$$

тогда с учетом условия (3.4) требование (2.13) к времени регулирования выполняется.

Условия выполнения требования (2.12) к точности дает следующее

*Утверждение 1.* Регулятор (2.7) с полиномами (4.1) обеспечивает выполнение требования (2.12) к точности системы (2.6), (2.7) с минимально-фазовым объектом, если в уравнении (4.2) параметр  $q$  удовлетворяет неравенству

$$(4.6) \quad q \geq \frac{f^{*2}}{y_{ss}^{*2}} \|w_{mp}(s)\|^2,$$

в котором  $w_{mp}(s) = \frac{m(s)}{p(s)}$ .

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Для анализа грубости системы запишем на основе (3.10) и (4.3) выражение

$$(4.7) \quad v(-j\omega)v(j\omega) = \frac{k(-j\omega)k(j\omega)\delta(-j\omega)\delta(j\omega)}{k(-j\omega)k(j\omega)d(-j\omega)d(j\omega)} = 1 + \frac{p(-j\omega)p(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega)} \geq 1,$$

из которого следует, что построенная система грубая.

Решение задачи 1 носит итерационный характер: вначале, из условия (4.5) определяются коэффициенты полинома  $p(s)$ , а из неравенств (4.6) и (3.13)–параметр  $q$ , затем находятся корни полинома (4.2), и если они не удовлетворяют требованиям (3.13), то число  $q$  увеличивается, вновь вычисляются корни этого полинома и так до тех пор пока не выполняются неравенства (3.13).

Выделим два частных случая полиномов (4.1) регулятора.

*Первый случай* возникает, когда полином  $m(s)$  объекта гурвицев и его корни  $s_i^m$  ( $i = \overline{1, \eta}$ ) удовлетворяют условию

$$(4.8) \quad \min_{1 \leq i \leq \eta} |Res_i^m| \geq t_{tr}^{*-1}.$$

В этом случае сформируем полином  $p(s)$  уравнения (4.2) как

$$(4.9) \quad p(s) = m(s)p_1(s),$$

где  $p_1(s) = \sum_{i=0}^{n-1-\eta} p_i^{(1)} s^i$ –гурвицев полином. Тогда из выражений (3.7), (4.1) и (4.4) следует, что существует достаточно большое число  $q$ , при котором передаточная функция по внешнему возмущению имеет вид

$$(4.10) \quad T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{\delta(s)} = \frac{m(s)}{(s + \sqrt{q})m(s)p^{(1)}(s) + 0_1(s, q)}.$$

Требование (2.12) к точности выполняется, если при условии (4.4)

$$(4.11) \quad q \geq \frac{f^{*2}}{y_{ss}^{*2}} \|1/p_1(s)\|^2.$$

Кроме того, из выражения (4.10) следует, что при ступенчатом внешнем возмущении перерегулирование всегда может быть сделано малым при соответствующем выборе корней полинома  $p_1(s)$ .

*Второй случай* относится к следящей системе, описываемой уравнениями

$$(4.12) \quad d(s)y = k(s)u, \quad g(s)u = r(s)(y - c), \quad z = y - c,$$

где  $c(t)$ –задающее воздействие,  $z(t)$ –ошибка слежения.

Если полиномы регулятора в системе (4.12) имеют вид (4.1), то ее передаточная функция, связывающая выход объекта с задающим воздействием, записывается как

$$(4.13) \quad T_{yc}(s) = -\frac{r(s)}{\delta(s)}.$$

Теперь запишем с учетом (4.4) следующее выражение для полинома  $r(s)$ :

$$(4.14) \quad r(s) = d(s) - \delta(s) = (d_{n-1} - p_{n-2})s^{n-1} + \dots + (d_1 - p_0)s + d_0 - \sqrt{q}p(s) + 0_1(s, q).$$

Если число  $\sqrt{q}$  таково, что  $|d_{i-1} - p_{i-2}| \leq \sqrt{q} p_{i-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $p_{-1} = 0$ , то  $r(s) = -\sqrt{q}(p(s) + 0_2(s, q))$ ,

где  $0_2(s, q)$ -полином, чьи коэффициенты можно сделать (выбором достаточно большого числа  $q$ ) сколь угодно малыми. Тогда передаточная функция (4.13) принимает вид

$$(4.15) \quad T_{yc}(s) = \frac{\sqrt{q}(p(s) - 0_2(s, q))}{(s + \sqrt{q})p(s) + 0_1(s, q)}.$$

Пренебрегая полиномами  $0_1(s, q)$  и  $0_2(s, q)$ , получим

$$(4.16) \quad T_{yc}(s) \simeq \frac{\sqrt{q}}{(s + \sqrt{q})}.$$

Это означает, что время регулирования  $t_{tr} \simeq 1/\sqrt{q}$ , а ошибка слежения на частотах меньших  $\sqrt{q}$  может быть сделана выбором  $q$  сколь угодно малой.

## 5. Неминимально-фазовые объекты

Пусть полином  $k(s)$  объекта (2.6) имеет вид

$$(5.1) \quad k(s) = \bar{k}(s)(-Ts + 1),$$

где  $\bar{k}(s) = \sum_{i=0}^{n-2} \bar{k}_i s^i$  - гурвицев полином,  $T$ -положительное число,  $T < t_{tr}^*$ .

Очевидно, что решение уравнения (3.1) имеет вид

$$(5.2) \quad g(s) = \bar{k}(s)(Ts + g_0),$$

где число  $g_0$  и коэффициенты полинома  $r(s)$  находятся из тождества Безу:

$$(5.3) \quad d(s)(Ts + g_0) - (-Ts + 1)r(s) = (Ts + 1)\delta(s).$$

Учитывая это выражение, запишем передаточную функцию (3.7) и функцию обратной разности (3.10) как

$$(5.4) \quad T_{yf}(s) = \frac{(Ts + g_0)m(s)}{(Ts + 1)\delta(s)}, \quad v(s) = \frac{(Ts + 1)\delta(s)}{(Ts + g_0)d(s)}.$$

Из этих соотношений следует, что точность и грубость системы (2.1),(2.2) сложным образом зависит от параметра  $q$  и коэффициентов полинома  $p(s)$ . Это связано с коэффициентом  $g_0$ , который находится из тождества (5.3). Для минимально-фазового объекта  $g_0 = 1$  и поэтому точность и грубость системы явно зависят от коэффициентов, входящих в полином  $\delta(s)$ .

Чтобы найти коэффициент  $g_0$ , введем число  $s_T = 1/T$ , подставим в тождество (5.3)  $s = s_T$  и после несложных преобразований с учетом  $d_n = \delta_n = 1$  получим

$$(5.5) \quad g_0 = \frac{1 + \sum_{i=1}^n (2\delta_{n-i} - d_{n-i})T^i}{1 + \sum_{i=1}^n d_{n-i}T^i}.$$

Из этого выражения следует, что при заданных числах  $d_i$  и  $\delta_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  и любом сколь угодно малом положительном числе  $\varepsilon_g^*$  существует достаточно малое значение постоянной времени  $T$  такое, что  $g_0 = 1 + \varepsilon_g$ , где  $|\varepsilon_g| \leq \varepsilon_g^*$ .

Построим конструктивные достаточные условия (являющиеся следствием выражения (5.5)), связывающие коэффициент  $g_0$  с постоянной времени  $T$  и корнями  $-s_i$ ,  $-s_i^\delta$  полиномов

$$d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i = \prod_{i=1}^n (s + s_i), \quad \delta(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i = \prod_{i=1}^n (s + s_i^\delta).$$

При этих условиях задача 1 имеет (утверждение 2) либо не имеет (утверждение 3) решение.

Эти условия получены для объектов, корни полинома  $d(s)$  которых вещественны и связаны с величиной  $s_T = 1/T$  как

$$(5.6) \quad s_1^2 \leq s_2^2 \leq \dots \leq s_n^2 < s_T^2.$$

Корни  $s_i^\delta$ ,  $i = \overline{1, n}$  полинома  $\delta(s)$  также вещественные и выполняются неравенства

$$(5.7) \quad (s_1^\delta)^2 \leq (s_2^\delta)^2 \leq \dots \leq (s_n^\delta)^2 < s_T^2,$$

которые обеспечиваются выбором вещественных корней полинома  $p(s)$  и достаточно большим коэффициентом  $q$ .

Переходя к условиям, при которых задача 1 имеет решение, введем числа

$$(5.8) \quad \varepsilon_1 = |s_n|/s_T, \quad \varepsilon_2 = s_n^\delta/s_T, \quad 0 < \varepsilon_i < 1, \quad i = 1, 2.$$

*Утверждение 2.* Существуют положительные числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  такие, что число  $g_0 = 1 + \varepsilon_g$ , где величина  $\varepsilon_g$  удовлетворяет неравенству  $|\varepsilon_g| \leq \varepsilon_g^*$ , в котором  $\varepsilon_g^*$ -заданное сколь угодно малое число.

Доказательство утверждения носит конструктивный характер, и в Приложении получены формулы, позволяющие определить числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  по заданному числу  $\varepsilon_g^*$ .

Из выражений (3.7), (4.7), (5.4) следует, что всегда можно указать достаточно малое число  $\varepsilon_g^*$  такое, что регулятор (2.7) с полиномами, полученными из уравнений (5.2) и (5.3) (в которых полином  $\delta(s)$  удовлетворяет условиям (4.5) и (4.6)), дает решение задачи 1.

Рассмотрим теперь случай, когда последнее из неравенств (5.7) не выполняется и корни полинома  $\delta(s)$  удовлетворяют условиям

$$(5.9) \quad s_T^2 < (s_1^\delta)^2 \leq (s_2^\delta)^2 \leq \dots \leq (s_n^\delta)^2.$$



*Утверждение 3.* Существуют положительные числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3 = s_T/s_1^\delta$  такие, что радиус запасов устойчивости системы (2.6) и (2.7) с полиномами регулятора, полученными из уравнений (5.2) и (5.3), сколь угодно мал:

$$(5.10) \quad r^2 \leq (2\varepsilon_3^2)^{n-1} 0,5(1 + \varepsilon_3).$$

Оценим норму передаточной функции системы, имеющей запас устойчивости (5.10). Заметим, что из выражений (3.7) и (3.10) следует

$$(5.11) \quad T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{d(s)v(s)}.$$

При  $\omega = s_1^\delta$  получим оценку

$$(5.12) \quad T_{yf}(-js_1^\delta)T_{yf}(js_1^\delta) \geq \frac{m(-js_1^\delta)m(js_1^\delta)}{d(-js_1^\delta)d(js_1^\delta)(2\varepsilon_3^2)^{n-1}0,5(1 + \varepsilon_3)},$$

из которой следует, что установившаяся ошибка системы может быть сколь угодно велика при малых значениях  $\varepsilon_3$ .

Из неравенств (5.10) и (5.12) можно найти значение постоянной времени  $T$ , при котором задача 1 не имеет решения.

## 6. Многомерные объекты

### 6.1. Регулятор состояния

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$(6.1) \quad \dot{x} = Ax + B(u + \rho), \quad z = Cx,$$

$$(6.2) \quad u = Kx,$$

где  $x(t) \in R^n$  – измеряемый вектор состояния полностью управляемого объекта (6.1),  $u(t) \in R^m$  – управление (выход регулятора (6.2)),  $z(t) \in R^m$  – регулируемые переменные,  $\rho(t) \in R^m$  – внешнее возмущение, компоненты которого связаны с функцией  $f(t)$ , описываемой выражением (2.3), соотношениями

$$(6.3) \quad \rho_i(t) = \varkappa_i f(t) \quad (i = \overline{1, m}),$$

где  $\varkappa_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа, характеризующие интенсивность возмущения  $f(t)$ , приложенных в местах приложения управлений.

Установившиеся ошибки по регулируемым переменным определяются как

$$(6.4) \quad z_{ss,i} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z_i(t)| \quad (i = \overline{1, m}).$$

Время регулирования системы характеризуется выражением (2.9), в котором  $s_i^\delta$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни полинома  $\det(Es - A - BK)$ , а её радиус запасов устойчивости, определяемый как наибольшее число  $r$ , при котором

$$(6.5) \quad [E_m + W(-j\omega)][E_m + W(j\omega)] \geq E_m r^2, \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

где  $W(s) = -K(Es - A)^{-1}B$ , удовлетворяет условию  $r \geq r^*$ .

Найдем матрицу  $K$  регулятора (6.2) такую, чтобы выполнялись требования

$$(6.6) \quad z_{ss,i} \leq z_{ss,i}^* \quad (i = \overline{1, m})$$

(где  $z_{ss,i}^*$  ( $i = \overline{1, m}$ )- заданные числа) к точности, а также требования ко времени регулирования (2.13) и грубости (6.5).

Будем искать эту матрицу как

$$(6.7) \quad K = -B^T P,$$

где  $P$  – симметричная неотрицательно определенная матрица ( $P = P^T \geq 0$ ), удовлетворяющая уравнению Риккати

$$(6.8) \quad A^T P + PA - PBB^T P = -\eta C^T Q C,$$

в котором элементы  $q_{ii}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) диагональной матрицы  $Q$  и параметр  $\eta$  удовлетворяют условиям

$$(6.9) \quad q_{ii} \geq \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i^{*2} \right) \frac{f^{*2}}{z_{ss,i}^{*2}} \quad (i = \overline{1, m}), \quad \eta = 1.$$

*Утверждение 4.* Установившиеся ошибки системы (6.1), (6.2), матрица  $K$  которой определяется соотношениями (6.7) – (6.9), удовлетворяют требованиям (6.6).

В связи с требованием (2.13) к времени регулирования рассмотрим передаточную матрицу объекта (6.1)

$$W_0(s) = C (Es - A)^{-1} B,$$

определитель которой имеет вид [15]:

$$(6.10) \quad \det [W_0(s)] = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{\beta} (s - \nu_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}, \quad \alpha \neq 0.$$

Если для корней  $\nu_i$  ( $i = \overline{1, \beta}$ ) выполняется условие, аналогичное (3.4),

$$(6.11) \quad \min_{1 \leq i \leq \beta} |\operatorname{Re} \nu_i| \geq (t_{tr}^*)^{-1},$$

то в соответствии с [15], всегда найдется достаточно большое значение параметра  $\eta > 1$ , при котором система (6.1), (6.2), (6.7), (6.9) удовлетворяет требованию (2.13) к времени регулирования. Эта система удовлетворяет также требованию (2.14) к грубости с  $r^* = 1$ . Это следует из условия [16] оптимальности в частотной форме.

(6.12)

$$[E_m + W(-j\omega)] [E_m + W(j\omega)] = E_m + B^T (Es - A)^{-1T} C^T Q C (Es - A)^{-1} B, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

## 6.2. Динамический регулятор для минимально-фазового объекта

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$(6.13) \quad \dot{x} = Ax + Bu + \psi f, \quad y = Cx, \quad z = y,$$

где  $y(t) \in R^m$  – измеряемые переменные,  $\psi$  – заданный вектор, который может не совпадать с вектором  $B\alpha$  уравнения (6.1).

Объект (6.13) в форме "вход-выход" имеет вид

$$(6.14) \quad T_1(s)y = T_2(s)u + l(s)f,$$

где  $T_1(s)$  и  $T_2(s)$  – полиномиальные квадратные матрицы,  $l(s)$  – вектор полиномов.

Будем полагать, что объект (6.14) – минимально-фазовый ( $\operatorname{Re} \tilde{s}_i < 0$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ ), где  $\tilde{s}_i$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ ) – корни полинома  $\det T_2(s)$ ). Пусть корни полинома  $\det T_2(s)$  удовлетворяют неравенству  $\min_{1 \leq i \leq \gamma} |\operatorname{Re} \tilde{s}_i| \geq t_{tr}^{*-1}$ , а вектор  $\psi$  таков, что вектор полиномов  $l(s)$  является вектором чисел  $l_0$  ( $l(s) = l_0$ ). Без ограничения общности будем полагать также, что степени  $n_i = \deg t_{1ii}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ), ( $\sum_{i=1}^m n_i = n$ ) диагональных полиномов матрицы  $T_1(s)$  не превышают степени полиномов  $i$ -го столбца этой матрицы:

$$(6.15) \quad \deg t_{1ii}(s) > \deg t_{1ij}(s), \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Регулятор в форме "вход-выход" имеет вид

$$(6.16) \quad G(s)u = R(s)y,$$

где  $G(s)$  и  $R(s)$  – полиномиальные квадратные матрицы.

Грубость системы (6.14), (6.16) будем характеризовать следующим неравенством, введенным в [6]:

$$(6.17) \quad \det [E_m + W(-j\omega)] \det [E_m + W(j\omega)] \geq r^{*2},$$

где

$$(6.18) \quad W(s) = -G^{-1}(s)R(s)T_1^{-1}(s)T_2(s).$$

Матрицы регулятора (6.16) находятся следующим образом.

Введем векторы

$$(6.19) \quad \bar{u} = T_2(s)u, \quad \rho = \alpha f, \quad \alpha = l_0.$$

Тогда уравнение (6.14) примет вид

$$(6.20) \quad T_1(s)y = \bar{u} + \rho.$$

Повторяя преобразования из [6], используем переменные  $\hat{x}_1 = y$ ,  $\hat{x}_2 = \dot{y}$ , ...,  $\hat{x}_{n_1} = y^{n_1-1}$ ,  $\hat{x}_{n_1+1} = y_2$ , ... и запишем уравнение (6.20) как

$$(6.21) \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}(\bar{u} + \rho), \quad y = \hat{C}\hat{x},$$

где  $\hat{x}$  –  $n$ -мерный вектор, составленный из компонент вектора  $y$  и его производных:  $\hat{x} = \gamma(s)y$ . Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (6.1). Тогда в соответствии с утверждением 4 найдем регулятор

$$(6.22) \quad \bar{u} = K\hat{x},$$

обеспечивающий выполнение требования (6.6) к точности. Отсюда с учетом принятых обозначений получим матрицы регулятора (6.16)

$$(6.23) \quad G(s) = T_2(s) \quad , \quad R(s) = K\gamma(s).$$

Таким образом, следствием утверждения 4 является следующее

*Утверждение 5.* Если матрица  $K$  регулятора (6.16),(6.23) получена на основе выражений (6.7), (6.8), где  $A = \hat{A}$ ,  $B = \hat{B}$ , а матрица  $Q$  удовлетворяет неравенствам (6.9), то установившиеся ошибки системы (6.14), (6.16), (6.23) удовлетворяют требованиям к точности (6.6), грубости (6.17) и времени регулирования.

Для доказательства сравним свойства системы (6.13), (6.16), (6.23) и системы (6.21), (6.22), которая по построению удовлетворяет требованиям к точности, времени регулирования и грубости.

Система (6.21), (6.22) эквивалентна системе с объектом (6.20) и регулятором

$$(6.24) \quad \bar{u} = R(s)y,$$

и поэтому заключаем, что

$$(6.25) \quad \hat{T}_{yf}(s) = [T_1(s) - R(s)]^{-1}, \quad \hat{W}(s) = -R(s)T_1^{-1}(s),$$

где  $\hat{T}_{yf}(s)$ -передаточная матрица системы (6.21), (6.22), связывающая ее выход с внешним возмущением. Она получается из уравнения

$$(6.26) \quad (T_1(s) - R(s))y = \rho,$$

которое следует из системы (6.20),(6.24).

Из уравнения (6.26) получим характеристический полином системы

$$(6.27) \quad \hat{d}^s(s) = \det(T_1(s) - R(s)).$$

Теперь рассмотрим систему (6.13),(6.16),(6.23), эквивалентную системе (6.14),(6.16),(6.23). Нетрудно видеть, что ее передаточные матрицы равны

$$(6.28) \quad T_{yf}(s) = \hat{T}_{yf}(s), \quad W(s) = -T_2(s)^{-1}\hat{W}(s)T_2(s).$$

Используя правило построения четырехблочной матрицы, получим ее характеристический полином

$$(6.29) \quad d^s(s) = \det T_2(s) \det [R(s) - G(s)T_2^{-1}(s)T_1(s)] = \det T_2(s) \hat{d}^s(s).$$

Первое из выражений (6.28) означает, что система (6.14),(6.16),(6.23) удовлетворяет требованиям к точности, а второе означает, что  $\det[E_m + W(s)] = \det[E_m + \hat{W}(s)]$  и, следовательно, условие грубости (6.17) выполняется при  $r^* = 1$ . Из равенств (6.29) следует выполнение требования к времени регулирования при соответствующем выборе параметра  $\eta$  в уравнении (6.8).

*Доказательство утверждения 1*

При полигармоническом возмущении (2.3) выход системы (2.1), (2.2) в установившемся режиме  $t \rightarrow \infty$  описывается выражением

$$(П.1) \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a(\omega_k^f) \sin(\omega_k^f t + \varphi_k^f),$$

в котором

$$(П.2) \quad a(\omega_k^f) = |T_{yf}(j\omega_k^f)| f_k.$$

Учитывая это выражение и условие (2.4), запишем

$$(П.3) \quad |y(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a(\omega_k^f)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |T_{yf}(j\omega_k^f)| |f_k| \leq \|T_{yf}(s)\| \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \leq \|T_{yf}(s)\| f^*.$$

Для выполнения требования (2.12) к точности достаточно, чтобы

$$(П.4) \quad |y(t)| \leq \|T_{yf}(s)\| f^* \leq y_{ss}^*,$$

и, следовательно, справедливо неравенство

$$(П.5) \quad \|T_{yf}(s)\| \leq \frac{y_{ss}^*}{f^*}.$$

Учитывая, что при условии (4.1) передаточная функция (3.7) принимает вид

$$(П.6) \quad T_{yf}(s) = \frac{m(s)}{\delta(s)},$$

запишем

$$(П.7) \quad T_{yf}(-j\omega)T_{yf}(j\omega) = \frac{m(-j\omega)m(j\omega)}{d(-j\omega)d(j\omega) + qp(-j\omega)p(j\omega)} \leq \frac{1}{q} \frac{m(-j\omega)m(j\omega)}{p(-j\omega)p(j\omega)} \leq \frac{1}{q} \|w_{mp}(s)\|^2.$$

Отсюда с учетом неравенства (П.5) получим выражение

$$(П.8) \quad \frac{1}{q} \|w_{mp}(s)\|^2 \leq \frac{y_{ss}^{*2}}{f^{*2}},$$

из которого следует неравенство (4.6) утверждения.

*Доказательство утверждения 2*

Рассмотрим выражение (5.5) для функции  $g_0$ . Для анализа входящих в него слагаемых

$$(П.9) \quad a = \sum_{i=1}^n d_{n-i} T^i \quad b = 2 \sum_{i=1}^n \delta_{n-i} T^i$$

используем выражение их коэффициентов через корни соответствующих полиномов

$$(П.10) \quad d(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i = \prod_{i=1}^n (s + s_i), \quad \delta(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i s^i = \prod_{i=1}^n (s + s_i^\delta).$$

Обозначим

$$(П.11) \quad \bar{c}_i = \frac{s_i}{|s_n|}, \quad \bar{c}_i^\delta = \frac{s_i^\delta}{s_n^\delta} \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Из неравенств (5.6), (5.7) следует, что  $|\bar{c}_i| \leq 1$ ,  $0 < \bar{c}_i^\delta \leq 1$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ).

Используя (5.8), запишем

$$(П.12) \quad \frac{s_i}{s_T} = \bar{c}_i \varepsilon_1, \quad \frac{s_i^\delta}{s_n^\delta} = \bar{c}_i^\delta \varepsilon_2 \quad (i = \overline{1, n}), \quad \bar{c}_n = 1, \quad \bar{c}_n^\delta = 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$(П.13) \quad d_{n-i} T^i = c_i \varepsilon_1^i, \quad \delta_{n-i} T^i = c_i^\delta \varepsilon_2^i \quad (i = \overline{1, n}),$$

где  $c_i$  и  $c_i^\delta$  – числа, определяемые значениями чисел  $\bar{c}_i$  и  $\bar{c}_i^\delta$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Действительно, при

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad d_{n-1} T &= \left( \sum_{i=1}^n s_i \right) T = c_1 \varepsilon_1, \\ i = 2 : \quad d_{n-2} T^2 &= \left( \sum_{i,j=1}^n s_i s_j \right) T^2 = c_2 \varepsilon_1^2, \\ &\vdots \\ i = n : \quad d_0 T^n &= \left( \prod_{i=1}^n s_i \right) T^n = c_n \varepsilon_1^n. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно записать для каждого произведения  $\delta_{n-i} T^i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Таким образом,

$$(П.14) \quad a = \sum_{i=1}^n d_{n-i} T^i = \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_1^i = a_1(\varepsilon_1) \varepsilon_1, \quad b = 2 \sum_{i=1}^n \delta_{n-i} T^i = 2 \sum_{i=1}^n c_i^\delta \varepsilon_2^i = b_1(\varepsilon_2) \varepsilon_2,$$

где  $a_1(\varepsilon_1) = c_1 + \sum_{i=2}^n c_i \varepsilon_1^{i-1}$ ,  $b_1(\varepsilon_2) = 2c_1^\delta + 2 \sum_{i=2}^n c_i^\delta \varepsilon_2^{i-1}$ , и следовательно,

$$(П.15) \quad g_0 = \frac{1 + b_1(\varepsilon_2) \varepsilon_2 - a_1(\varepsilon_1) \varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1) \varepsilon_1}.$$

Пусть  $g_0 = 1 + \varepsilon_g$ , и тогда получим выражение

$$(П.16) \quad \varepsilon_g = \frac{b_1(\varepsilon_2) \varepsilon_2 - 2a_1(\varepsilon_1) \varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1) \varepsilon_1},$$

из которого следует, что при сколь угодно малом заданном  $\varepsilon_g^*$  всегда можно найти числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , что при любых  $b_1(\varepsilon_2)$ ,  $a_1(\varepsilon_1)$  выполняется неравенство

$$(П.17) \quad \left| \frac{b_1(\varepsilon_2)\varepsilon_2 - 2a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1} \right| \leq \varepsilon_g^*,$$

, что доказывает утверждение.

*Доказательство утверждения 3*

Для оценки величины  $g_0$  при условии (5.9) утверждения рассмотрим входящее в выражение (5.5) слагаемое

$$(П.18) \quad b = 2 \sum_{i=1}^n \delta_{n-i} T^i.$$

Обозначим

$$(П.19) \quad \mu_i = s_i^\delta / s_1^\delta \quad (i = \overline{1, n}).$$

Из неравенств (5.9) следует, что  $\mu_i \geq 1$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и, следовательно,  $s_i^\delta / s_T = \mu_i \varepsilon_3^{-1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Нетрудно видеть, что вследствие положительности чисел  $\delta_i$  ( $i = \overline{0, n}$ )

$$(П.20) \quad b \geq 2\delta_0 T^n = 2 \prod_{i=1}^n s_i^\delta T^n = 2 \prod_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_3^{-1} = 2\mu \varepsilon_3^{-n},$$

где  $\mu = \prod_{i=1}^n \mu_i$  - положительное число, не зависящее от  $\varepsilon_3$ .

С учетом (П.20) запишем (П.15) как

$$g_0 \geq \frac{1 + 2\mu \varepsilon_3^{-n} - a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 + a_1(\varepsilon_1)\varepsilon_1}.$$

Пренебрегая числами  $a_1(\varepsilon_1)$  и  $\varepsilon_1$ , которые могут быть сделаны сколь угодно малыми выбором малых чисел  $\varepsilon_1$ , а также числом 1 при достаточно малых  $\varepsilon_3$ , будем использовать выражение

$$(П.21) \quad \hat{g}_0 = 2\mu \varepsilon_3^{-n}.$$

Рассмотрим теперь функцию возвратной разности (5.4). Заменяя в ней  $g_0$  на  $\hat{g}_0$  запишем приближенное соотношение

$$\hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega) = \frac{(\omega^2 + s_T^2) \prod_{i=1}^n [\omega^2 + (s_i^\delta)^2]}{(\omega^2 + s_T^2 \hat{g}_0^2) \prod_{i=1}^n (\omega^2 + s_i^2)}.$$

При  $\omega = s_1^\delta$  получим

$$(П.22) \quad \hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega)|_{\omega=s_1^\delta} = \frac{[(s_1^\delta)^2 + s_T^2] \prod_{i=1}^n [(s_1^\delta)^2 + (s_i^\delta)^2]}{[(s_1^\delta)^2 + s_T^2 4\mu^2 \varepsilon_3^{-2n}] \prod_{i=1}^n [(s_1^\delta)^2 + s_i^2]}.$$

Из неравенств (5.9), (5.6) следует, что

$$\prod_{i=1}^n \left[ (s_1^\delta)^2 + (s_i^\delta)^2 \right] \leq 2^n \prod_{i=1}^n (s_i^\delta)^2, \quad (s_1^\delta)^2 + s_T^2 = (s_1^\delta)^2 (1 + \varepsilon_3^2),$$

$$\prod_{i=1}^n \left[ (s_1^\delta)^2 + (s_i^\delta)^2 \right] \geq \prod_{i=1}^n (s_1^\delta)^2.$$

Кроме того, заметим, что

$$\frac{\prod_{i=1}^n (s_i^\delta)^2}{\prod_{i=1}^n (s_1^\delta)^2} = \prod_{i=1}^n \frac{(s_i^\delta)^2}{(s_1^\delta)^2} = \mu^2.$$

Подставляя эти неравенства в (П.22), получим соотношения

$$(П.23) \quad \hat{v}(-j\omega)\hat{v}(j\omega)|_{\omega=s_1^\delta} \leq \frac{2^n \mu^2 (1 + \varepsilon_3^2)}{1 + 4\mu^2 \varepsilon_3^{-2(n-1)}} \leq \frac{2^{n-2} (1 + \varepsilon_3^2)}{\varepsilon_3^{-2(n-1)}} = (2\varepsilon_3^2)^{n-1} \frac{(1 + \varepsilon_3^2)}{2},$$

из которых следует неравенство (5.10) утверждения.

*Доказательство утверждения 4*

Передаточная матрица системы (6.1), (6.2), связывающая регулируемые переменные с внешним возмущением, имеет вид

$$(П.24) \quad T_{z\rho}(s) = C (Es - A - BK)^{-1} B.$$

В установившемся режиме

$$(П.25) \quad z_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_i(\omega_k^f) \sin(\omega_k^f t + \varphi_k^f) \quad (i = \overline{1, m}).$$

Амплитуды регулируемых переменных:

$$(П.26) \quad a_i(\omega_k^f) = \left| \left[ T_{z\rho}(j\omega_k^f) \rho \right]_i \right| \quad (i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, \infty}),$$

где  $\left[ T_{z\rho}(j\omega_k^f) \rho \right]_i$  –  $i$ -я компонента вектора  $\left[ T_{z\rho}(j\omega_k^f) \rho \right]$ .

С учетом (6.3) запишем

$$(П.27) \quad \left| a_i(\omega_k^f) \right| = \sqrt{\left[ T_{z\rho}(-j\omega_k^f) \rho \right]_i \left[ T_{z\rho}(j\omega_k^f) \rho \right]_i} =$$

$$= f_k \sqrt{\left[ T_{z\rho}(-j\omega_k^f) \varkappa \right]_i \left[ T_{z\rho}(j\omega_k^f) \varkappa \right]_i} \quad (i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, \infty}).$$

В [11] показано, что при условиях утверждения 4 передаточная матрица (П.24) удовлетворяет неравенству

$$(П.28) \quad T_{z\rho}^T(-j\omega) Q T_{z\rho}(j\omega) \leq E_m, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$



Полагая  $\omega = \omega_k^f$ , умножим это неравенство справа и слева на векторы

$$(П.29) \quad \rho_+^{(k)} = [\rho_{1k} e^{j\phi_k}, \dots, \rho_{mk} e^{j\phi_k}]^T, \quad \rho_-^{(k)} = [\rho_{1k} e^{-j\phi_k}, \dots, \rho_{mk} e^{-j\phi_k}]^T$$

и, используя (П.27), получим

$$(П.30) \quad \rho_-^{(k)T} T_{z\rho}^T(-j\omega_k^f) Q T_{z\rho}(j\omega_k^f) \rho_+^{(k)} = \sum_{i=1}^m q_{ii} a_i^2(j\omega_k^f) \leq \sum_{i=1}^m \rho_{ik}^2 = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \right) f_k^2 \quad (k = \overline{0, \infty}).$$

Отсюда

$$(П.31) \quad |a_i(\omega_k^f)| \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\alpha_i^2)}}{\sqrt{q_{ii}}} |f_k| \quad (i = \overline{1, m}), \quad (k = \overline{0, \infty}).$$

Из выражений (П.26), (П.31) и (2.4) следует, что

$$(П.32) \quad |z_i(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_i(\omega_k^f)| \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2}}{\sqrt{q_{ii}}} f^* \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда из этого выражения и требования (6.6) получим неравенство (6.9) утверждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы автоматического регулирования. (Под ред. В.В.Солодовникова) М.:Машгиз,1954.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Ч I. Линейные системы регулирования одной величины. М.-Л.:Энергия,1965.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I-IV //АиТ. 1960. №4. С. 436-441; №5. С.561-568; №6. С.661-665; 1961. №4. №.425-435.
4. Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control //Bullet Soc. Mat. Mech. 1960. V. 5. No 1. P.102- 119.
5. Александров А.Г. Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. //АиТ. 1969. №9.С. 176 - 181.
6. Александров А.Г. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч.2. // АиТ. 1972.№2.С 17 - 29.
7. Тимофеев Ю.К. Статические ошибки аналитически сконструированных систем //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратов. политехн. инс. 1976. С. 53-60.
8. Садомцев Ю.В. Аналитическое конструирование регуляторов по заданным показателям качества. Развитие проблемы //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратов. политехн. инс, 1980. С. 32-48.

9. Волков Е.Ф., Ершов Н.Н. Синтез асимптотически устойчивых многосвязных систем с заданной статической точностью //АиТ. 1981. No 7. С. 19-27.
10. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.272с.
11. Александров А.Г., Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности, I,II// АиТ. 1998,Т.59.No7, С. 83 - 95,No8,С.124-138.
12. Барабанов А.Е., Граничин О.Н. Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. Т. 45. No 5. С. 39-46.
13. Dahleh M.A., Pearson J.B.  $l_1$ -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32. P. 314-322.
14. Александров А.Г. Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования . Межвуз. научн. сб. "Аналитические методы синтеза регуляторов СПИ, Саратов. 1980. С. 3 - 14.
15. Квакуернаак Х.,Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.:Мир,1977.
16. Александров А.Г. Частотные свойства оптимальных линейных систем с несколькими управлениями.//АиТ. 1969. No 12. С. 12 - 17.