© 2018 г. $\boxed{\text{А.Г. АЛЕКСАНДРОВ}}$, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ТОЧНОСТИ И БЫСТРОДЕЙСТВИЯ. III. МНОГОМЕРНЫЕ ОБЪЕКТЫ, УСТОЙЧИВЫЕ ПО УПРАВЛЕНИЮ[1]

Предлагается метод синтеза регуляторов, обеспечивающих заданные требования к точности и быстродействию по каждой регулируемой переменной. Помимо этого, указывается путь получения заданного радиуса запасов устойчивости одновременно по физическому входу и выходу объекта управления при размыкании замкнутой системы по отдельным контурам. Решение задачи опирается на свойство диагональной доминантности передаточной матрицы замкнутой системы (от внешнего возмущения к регулируемым переменным), которую обеспечивает регулятор.

Ключевые слова: синтез регуляторов, многомерные системы, минимально-фазовые объекты, точность регулирования, запасы устойчивости.

1. Введение

Синтез регуляторов, обеспечивающих заданные требования к точности и быстродействию по каждой регулируемой переменной, является одной из центральных задач теории автоматического управления. Исторически, первым направлением этой теории исследования явилось построение автономных (развязанных) систем [1–4], передаточные матрицы которых, связывающие их выходы с задающим воздействием либо внешним возмущением, являются диагональными. Это позволяет использовать методы синтеза одномерных систем для построения многомерных. Эта идея активно развивалась и на западе [5], в частности, книга Розенброка [6] фактически целиком

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-01555).

посвящена этой задаче. Обзор [7] дает представление о состоянии этой проблемы к середине 80-х г. XX в. Вместе с тем рассматриваемые в [7] методы касаются диагональной доминантности исключительно передаточных матриц от задающего воздействия к регулируемым переменным. Более современное представление идей доминантности по отношению к внешним возмущениям дает монография [8], где рассматриваются слабо связанные системы, в которых из-за неточной реализации автономной системы появляются связи между одномерными подсистемами.

Другое направление развивается в теории аналитического синтеза регуляторов [9, 10]. Оно основано на исследовании точности и запасов устойчивости LQ- и H_∞-оптимальных систем. Это позволило установить связь точности и запасов устойчивости со структурой и значениями весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимизации, что дало возможность сформулировать строгие правила их выбора в зависимости от заданных ошибок регулирования и известной границы внешнего возмущения, заданного абсолютно сходящимся рядом с бесконечным числом гармоник (с неизвестными амплитудами и частотами) [10]. Кроме того, в настоящей статье в отличие от [11] (где требования к точности и быстродействию не учитываются, что приводит к значительной ошибке регулирования) указывается путь получения заданного радиуса запасов устойчивости одновременно по физическому входу и выходу объекта управления при размыкании замкнутой системы по отдельным контурам. С другой стороны в отличие от работы [12], где все регулируемые переменные имеют время регулирования не больше заданного числа (а часто требования к времени регулирования могут существенно отличаться для различных регулируемых переменных), в настоящей статье учитываются индивидуальные требования к времени регулирования для каждой регулируемой переменной. Заметим, что подход, использующий сведение рассматриваемой задачи к задаче H_∞-оптимизации, как в [13, 14], который привлекает для численного решения задачи синтеза технику линейных матричных неравенств, не позволяет даже для малоразмерных объектов использовать ручной счет. В таких задачах может использоваться предлагаемый подход (см. пример раздела 6). Подход к синтезу основан на построении слабо связанной системы, у которой диагональные элементы ее передаточной матрицы существенно превышают модули коэффициентов недиагональных элементов. Это позволяет обеспечить показатели каждой регулируемой переменной, близкие к показателям соответствующей одномерной системы, которая строится на основе метода [15, 16].

2. Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую уравнениями:

$$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 u, \quad y = z = Cx, \quad t \geqslant t_0 \,, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y, \quad u = C_c x_c + D_c y, \tag{2.2}$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$ — состояние объекта (2.1), $u(t) \in \mathrm{R}^m$ — управления, формируемые регулятором (2.2), $f(t) \in \mathrm{R}^1$ — неизвестное внешнее возмущение, $y(t) \in \mathrm{R}^m$ — измеряемые переменные, $z(t) \in \mathrm{R}^m$ — регулируемые переменные, $x_c \in \mathrm{R}^{n_c}$ — состояние регулятора,A, B_1, B_2, C — известные матрицы чисел,A_c, B_c, C_c, D_c — матрицы чисел.

Внешнее возмущение — ограниченная полигармоническая функция

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \tag{2.3}$$

в которой частоты ω_i и фазы ϕ_i $(i = \overline{0, \infty})$ неизвестны, а неизвестные амплитуды f_i удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| \leqslant f^*, \tag{2.4}$$

где f^* — известное число. Выход системы по каждой регулируемой переменной $(y_k(t), k = \overline{1, m})$ состоит из двух процессов: рабочего $(y_{b,k}(t))$ и переходного $(y_{tr,k}(t))$

$$y_k(t) = y_{b,k}(t) + y_{tr,k}(t), \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.5}$$

Рабочий процесс имеет вид

$$y_{b,k}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_k(\omega_i) \sin(\omega_i t + \varphi_{k,i}), \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.6}$$

Используя эти функции, точность и время регулирования по каждой регулируемой переменной определяются так же, как и в одномерном случае [15].

Запасы устойчивости по фазе и *модулю* определяются так: приложим к объекту (2.1) вместо ν-й компоненты вектора u ($\nu = \overline{1,m}$) воздействие $r_\nu = -\sin\omega t$ и получим на ν-м выходе регулятора $u_\nu = a^u_\nu(\omega)\sin(\omega t + \varphi^u_\nu)$. Повторяя это же для остальных компонент вектора u, а затем для вектора y, находим запасы по фазе $\varphi^u_{з,i}$, $\varphi^y_{з,i}$ и модулю L^u_i, L^y_i, которые должны находиться в известных границах.

При таком определении запасов устойчивости система может терять устойчивость при ее размыкании, поэтому для определения запасов устойчивости используют радиусы запасов устойчивости [17]:

$$r^u_{a,i} = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} |\mathrm{v}^u_i(j\omega)|\,, \quad r^y_{a,i} = \inf_{0\leqslant\omega<\infty} |\mathrm{v}^y_i(j\omega)|\,, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.7}$$

где $\mathrm{v}^u_i(s)$, $\mathrm{v}^y_i(s)$ $(i=\overline{1,m})$ — функции возвратной разности, которые находятся без размыкания системы. В частности, $\mathrm{v}^u_i(j\omega) = 1 + a^u_i(\omega)e^{j\varphi^u_{з,i}(\omega)}$, $i=\overline{1,m}$.

Показателем запасов устойчивости будем называть число

$$r_a = \min[r^u_{a,1},...,r^u_{a,m},r^y_{a,1},...,r^y_{a,m}]. \tag{2.8}$$

З а д а ч а состоит в нахождении для заданного объекта (2.1) регулятора (2.2), обеспечивающего выполнение требований к:

- точности

$$|y_{b,i}(t)| \leqslant y^*_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.9}$$

- времени регулирования (быстродействию)

$$t_{\text{рег},i} \leqslant t^*_{\text{рег},i}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.10}$$

- запасам устойчивости

$$r_a \geqslant r^*_a, \tag{2.11}$$

где y^*_i, $t^*_{\text{рег},i}$, σ^*_i, $i=\overline{1,m}$, r^*_a — заданные положительные числа.

Далее объект и регулятор описываются в форме “вход–выход”:

$$D(s)y = K(s)u + cf\ , \tag{2.12}$$

$$G(s)u = R(s)y\ , \tag{2.13}$$

где

$$D(s) = \sum_{i=0}^{n_o} D^{(i)} s^i,\ K(s) = \sum_{i=0}^{m_o} K^{(i)} s^i, \tag{2.14}$$

$$G(s) = \sum_{i=0}^{n_c} G^{(i)} s^i,\ R(s) = \sum_{i=0}^{m_c} R^{(i)} s^i \tag{2.15}$$

— полиномиальные матрицы и c — m-мерный вектор известных чисел.

Предполагается, что объект и регулятор системы (2.1), (2.2) полностью управляемы и полностью наблюдаемы, тогда полиномиальные матрицы этих уравнений находятся [5, 17] с точностью до некоторых унимодулярных матриц по матрицам чисел исходной системы.

Замечание 2.1. Далее предполагается, что преобразование уравнений объекта к форме "вход–выход" осуществляется [17] дифференцированием ν_1 раз выхода y_1, затем ν_2 раза выхода $y_2, \ldots,$ ν_m раз выхода y_m ($\sum_{i=1}^{m} \nu_i = n$) с учетом вектора состояний. В этом случае степени n_{ij} полиномов $d_{ij}(s)$ $(i, j = \overline{1, m},\ i \neq j)$, составляющих матрицу $D(s)$, меньше степени n_{jj} диагонального полинома, расположенного в j-м столбце

$$n_{jj} > n_{ij} \quad (i, j = \overline{1, m}, \quad i \neq j). \tag{2.16}$$

Объект системы (2.12) называется устойчивым по управлению (минимально-фазовым в одномерном случае), если корни уравнения

$$\det\ K(s) = 0 \tag{2.17}$$

имеют отрицательные вещественные части.

3. Существо подхода

Рассмотрим объект

$$D(s)y = \check{K}(s)u + cf, \tag{3.1}$$

матрица $\check{K}(s)$ которого является диагональной

$$\check{K}(s) = \mathrm{diag}\,[k_1(s), ..., k_m(s)]. \tag{3.2}$$

Здесь и далее символ "$\check{}$" над обозначением матрицы означает диагональную матрицу (матрицу, все элементы которой равны нулю, кроме стоящих на диагонали).

Замечание 3.1. Уравнение объекта (2.12) можно преобразовать к виду (3.1), если ввести расширенное управление

$$\overline{u} = K(s)u\,, \tag{3.3}$$

тогда уравнение (2.12) принимает вид

$$D(s)y = \overline{u} + cf\,. \tag{3.4}$$

Другой способ преобразования основан на существовании [18] унимодулярных матриц $\mathrm{V}_L(s)$ и $\mathrm{V}_R(s)$ таких, что

$$\mathrm{V}_L(s)K(s)\mathrm{V}_R(s) = \check{K}(s)\,. \tag{3.5}$$

Записывая уравнение (2.12) как

$$\mathrm{V}_L(s)D(s)y = \mathrm{V}_L(s)K(s)\mathrm{V}_R(s)\mathrm{V}_R(s)u = \check{K}(s)\mathrm{V}_R(s)u \tag{3.6}$$

и вводя управление $\bar{u} = \mathrm{V}_R(s)u$, приходим к форме вида (3.1).

При таком преобразовании матрицы $D(s)$ может нарушаться условие (2.16), которое необходимо для построения искомого управления. ▲

Введя матрицу $D^d(s)$, которая совпадает с матрицей $D(s)$, кроме диагональных элементов, равных нулю, представим

$$D(s) = \check{D}(s) + D^d(s) \tag{3.7}$$

и сформируем развязанный объект

$$\check{D}(s)y = \check{K}(s)u + cf, \tag{3.8}$$

i-й ($i = \overline{1,m}$) вход и выход которого не зависят (развязаны) от остальных $m-1$ входов и выходов.

Аналогично описываются развязанные регуляторы

$$\check{G}(s)u = \check{R}(s)y. \tag{3.9}$$

Пусть регуляторы развязанной системы (3.8), (3.9) находятся из тождества Безу

$$\check{D}(s)\check{G}(s) - \check{K}(s)\check{R}(s) = \check{\Psi}(s), \tag{3.10}$$

в котором диагональная матрица $\check{\Psi}(s)$ определена в соответствии с процедурой [15] так, что выполняются требования к точности, быстродействию и запасам устойчивости каждой из m подсистем.

Замкнем объект (3.1) регуляторами (3.9).

З а д а ч а состоит в том, чтобы доопределить модальную матрицу $\check{\Psi}(s)$ так, чтобы система (3.1), (3.9) удовлетворяла требованиям (2.9), (2.10) и (2.11).

Исключим в системе (3.1), (3.9) вектор u. Для этого умножим уравнение (3.1) слева на матрицу $\check{G}$ и, учитывая коммутативность диагональных матриц $\left(\check{A}\check{B} = \check{B}\check{A}\right)$, запишем с учетом (3.9) $\left(\check{G}(s)D(s) - \check{K}(s)\check{R}(s)\right) y = \check{G}(s)cf$.

Учитывая представление (3.7) и тождество Безу (3.10), получим

$$\left[\check{\Psi}(s) + \check{G}(s)D^d(s)\right] y = \check{G}(s)cf. \tag{3.11}$$

По построению развязанной системы

$$\check{\Psi}(s) = \check{E}(s)\check{K}(s)\check{\Delta}(s), \tag{3.12}$$

где

$$\check{\Delta}(s) = \operatorname{diag}\left[\delta_1(s), \ldots, \delta_m(s)\right], \tag{3.13}$$

$\delta_i(s),\ i = \overline{1, m}$, – заданные полиномы,

$$\check{E}(s) = I_m\left(\varepsilon_\rho s^\rho + \varepsilon_{\rho-1}s^{\rho-1} + \ldots + \varepsilon_1 s + 1\right), \tag{3.14}$$

где полином $\varepsilon(s)$ определяется, как и в одномерном случае [15], выражением

$$\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^{\rho}\left(\frac{\mu_i}{s_\delta}s + 1\right), \tag{3.15}$$

где s_δ – наибольший по модулю корень уравнения $\det\,\Delta(s)=0$, μ_i $(i=\overline{1,\rho})$ – достаточно малые положительные числа. При этом решение $\check{G}(s)=G_\varepsilon\check{K}(s)$ тождества (3.10) сколь угодно близко к $\check{E}(s)\check{K}(s)$. Учитывая последнее, запишем (3.11) как

$$M(s)y=cf\,, \tag{3.16}$$

где

$$M(s)=\check{\Delta}(s)+D^d(s)\,. \tag{3.17}$$

В развернутой форме эта матрица имеет вид

$$M(s)=\begin{bmatrix} \delta_1(s), & d_{12}(s), & \ldots, & d_{1m}(s) \\ d_{21}(s), & \delta_2(s), & \ldots, & d_{2m}(s) \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1}(s), & d_{m2}(s), & \ldots, & \delta_{2m}(s) \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Найдем передаточную функцию $t_\nu(s)$, $\nu=\overline{1,m}$, связывающую ν-й выход объекта с внешним возмущением

$$y_\nu=t_\nu(s)f,\quad \nu=\overline{1,m}. \tag{3.19}$$

Эта передаточная функция имеет вид

$$t_\nu(s)=\frac{\det\,M_\nu(s)}{\det\,M(s)},\quad \nu=\overline{1,m}, \tag{3.20}$$

где $M_\nu(s)$ – полиномиальная матрица, составленная из столбцов матрицы $M(s)$, кроме ν-го, который заменен вектором c.

Нетрудно видеть, что аналогичная передаточная функция развязанной системы (3.8), (3.9) имеет вид

$$\check{t}_\nu(s)=\frac{c_\nu\prod\limits_{i=1}^{\nu-1}\delta_i(s)\prod\limits_{i=\nu+1}^{m}\delta_i(s)}{\delta_\nu(s)\prod\limits_{i=1}^{\nu-1}\delta_i(s)\prod\limits_{i=\nu+1}^{m}\delta_i(s)},\quad \nu=\overline{1,m}. \tag{3.21}$$

Почти очевидно, что если коэффициенты диагональных полиномов матрицы $M(s)$ существенно превышают значения модулей коэффициентов полиномов в столбцах, где расположены эти диагональные полиномы, то передаточные функции $t_\nu(s)$ и $\check{t}_\nu(s)$, $\nu=\overline{1,m}$, близки. Доказательство этой близости приведено в разделе 4.

Рассмотрим теперь запасы устойчивости системы (3.1), (3.9). Разомкнем ее по μ-му входу объекта (μ-му выходу регулятора) и приложим к этому входу воздействие φ_μ. Такая система описывается при $c = 0$ уравнениями:

$$\underline{M}^{[\mu]}(s)y = 0, \quad D^{[\mu]}(s)y = -k_\mu(s)\varphi_\mu, \quad \bar{M}^{[\mu]}(s)y = 0, \quad g_\mu(s)u_\mu = r_\mu(s)y_\mu, \tag{3.22}$$

где $\underline{M}^{[\mu]}(s)$ – полиномиальная матрица, составленная из первых $\mu - 1$ строк матрицы $M(s)$, $\bar{M}^{[\mu]}(s)$ – полиномиальная матрица, составленная из последних $m - \mu$ строк матрицы $M(s)$, $D^{[\mu]}(s)$ – μ-я строка матрицы $D(s)$, φ_μ – воздействие, прикладываемое к μ-му входу объекта вместо управления u_μ.

Найдём передаточную функцию $\mathrm{w}_\mu(s)$, связывающую выход y_μ с воздействием $(-k_\mu(s)\varphi_\mu)$,

$$y_\mu = -\mathrm{w}_\mu(s)k_\mu(s)\varphi_\mu. \tag{3.23}$$

Из первых трех уравнений системы (3.22) следует, что

$$\mathrm{w}_\mu(s) = \frac{\det\ M^d_{\mu\mu}(s)}{\det\ M^d_\mu(s)}, \tag{3.24}$$

где $M^d_\mu(s) = \begin{bmatrix} \underline{M}^{[\mu]}(s) \\ D^{[\mu]}(s) \\ \bar{M}^{[\mu]}(s) \end{bmatrix}$, $M^d_{\mu\mu}(s)$ – полиномиальная матрица, составленная из столбцов матрицы $M^d_\mu(s)$, кроме μ-го столбца, все элементы которого, кроме единичной μ-й компоненты, равны нулю.

Подставляя выражение (3.23) в последнее уравнение системы (3.22), получим связь

$$u_\mu = \mathrm{w}^{(u)}_\mu(s)\varphi_\mu, \tag{3.25}$$

где

$$\mathrm{w}^{(u)}_\mu(s) = -\frac{r_\mu(s)k_\mu(s)}{g_\mu(s)}\mathrm{w}_\mu(s),\ \mu = \overline{1,m}. \tag{3.26}$$

Теперь разомкнем систему (3.1), (3.9) по μ-му входу регулятора (μ-му выходу объекта). Такая система описывается уравнениями:

$$\underline{M}^{[\mu]}(s)y = 0, \quad D^{[\mu]}(s)y = k_\mu(s)u_\mu, \quad \bar{M}^{[\mu]}(s)y = 0, \quad g_\mu(s)u_\mu = -r_\mu(s)\varphi_\mu. \tag{3.27}$$

Нетрудно видеть, что μ-й выход объекта связан с его входом $k_\mu(s)u_\mu$ соотношением (3.23)

$$y_\mu = \mathrm{w}_\mu(s)k_\mu(s)u_\mu. \tag{3.28}$$

Используя последнее уравнение системы (3.27), получим связь

$$y_\mu = \mathrm{w}_\mu^{(y)}(s)\varphi_\mu, \tag{3.29}$$

где

$$\mathrm{w}_\mu^{(y)}(s) = \mathrm{w}_\mu^{(u)}(s),\ \mu = \overline{1,m}. \tag{3.30}$$

4. Точность и быстродействие

Утверждение 4.1. *Существуют достаточно большие по модулю вещественные корни полиномов матрицы $\check{\Delta}(s)$, при которых коэффициенты передаточных функций $t_\nu(s)$, $\nu = \overline{1,m}$, сколь угодно близки к коэффициентам передаточных функций $\check{t}_\nu(s)$ развязанной системы, поэтому требования* (2.9), (2.10) *и* (2.11) *к точности и качеству системы* (3.1), (3.9) *выполняются.*

Доказательство утверждения 4.1. Рассмотрим два полинома

$$a(s) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i s^i, \quad b(s) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i s^i, \quad n_a \geqslant n_b,\ a_{n_a} \neq 0. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. *Полином $a(s)$ с положительными коэффициентами доминирует над полиномом $b(s)$ с показателем доминирования θ, если*

$$|b_i| < a_i\theta, \quad i = \overline{0, n_b}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{4.2}$$

Доминирование будем обозначать как

$$b(s) < a(s)\theta. \tag{4.3}$$

Здесь и далее $n_a = n_b = n$, полагая в полиноме $b(s)$ недостающие коэффициенты при старших степенях, если $n_a < n_b$, равными нулю.

Приведем, опуская доказательство, почти очевидные три свойства.

Свойство 4.1. Если полиномы $a_1(s)$ и $a_2(s)$ доминируют над полиномами $b_1(s)$ и $b_2(s)$ соответственно,

$$b_1(s) < a_1(s)\theta, \quad b_2(s) < a_2(s)\theta, \tag{4.4}$$

то

$$b_1(s) + b_2(s) < [a_1(s) + a_2(s)]\,\theta. \tag{4.5}$$

Свойство 4.2. Если выполняются условия доминирования (4.4), *то*

$$b_1(s)b_2(s) < a_1(s)a_2(s)\theta^2. \tag{4.6}$$

Свойство 4.3. Если

$$b_i(s) < a(s)\theta_i, \quad i = \overline{1,\rho}, \tag{4.7}$$

то полином $a(s)$ доминирует над полиномом

$$b(s) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i b_i(s) \tag{4.8}$$

(в котором c_i – заданные числа, $i = \overline{1,\rho}$, а числа θ_i таковы, что $\sum_{i=1}^{\rho} |c_i|\theta_i < 1$) с показателем $\theta_\sigma = \sum_{i=1}^{\rho} |c_i|\theta_i$:

$$b(s) < a(s)\theta_\sigma. \tag{4.9}$$

Рассмотрим квадратную полиномиальную матрицу размеров $m \times m$

$$M(s) = \|m_{ij}(s)\|_1^m\,, \tag{4.10}$$

диагональные полиномы которой

$$m_{jj}(s) = \sum_{k=0}^{n_j} m_{jj,k} s^k, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4.11}$$

имеют только положительные коэффициенты

$$m_{jj,k} > 0, \quad k = \overline{0,n_j}, \quad j = \overline{1,m}\,. \tag{4.12}$$

Определитель матрицы (4.10) записывается [19] как

$$\det\ M(s) = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_m)} (-1)^{N(i_1,\dots,i_m)}\, m_{i_1,1}(s), \dots, m_{i_m,m}(s), \tag{4.13}$$

где $(i_1, \dots, i_m)$ – перестановки чисел от 1 до m, $N(m_1, \dots, i_m)$ – число инверсий в перестановках.

Представим этот определитель как

$$\det\ M(s) = \alpha(s) + \beta(s), \tag{4.14}$$

где

$$\alpha(s) = \prod_{j=1}^{m} m_{jj}(s), \quad \beta(s) \text{ – сумма остальных слагаемых в определителе.} \tag{4.15}$$

Очевидно, что коэффициенты полинома $\alpha(s)$ – положительны.

Определение 4.2. Матрица $M(s)$ называется диагонально доминирующей, если произведение диагональных полиномов доминирует над суммой остальных слагаемых ее определителя

$$\beta(s) < \alpha(s)\theta\,. \tag{4.16}$$

Свойство 4.4. При достаточно малом показателе доминирования θ диагональных полиномов матрицы $M(s)$ над полиномами столбцов, в которые они входят,

$$m_{ij}(s) < m_{jj}(s)\theta, \quad i,j = \overline{1,m}, \quad i \neq j, \tag{4.17}$$

матрица $M(s)$ является диагонально доминирующей:

$$\beta(s) < \alpha(s)\theta_\sigma, \quad 0 < \theta_\sigma < 1\,. \tag{4.18}$$

Доказательство свойства 4.4 приведено в Приложении.

Пусть $q_{i\nu}(s)$ – алгебраическое дополнение полинома $m_{i\nu}(s)$ $(i, \nu = \overline{1,m})$ матрицы $M(s)$. Обозначим произведение диагональных полиномов, кроме ν-го, как

$$\alpha_\nu(s) = \prod_{j=1}^{\nu-1} m_{jj}(s) \prod_{j=\nu+1}^{m} m_{jj}(s), \quad \nu = \overline{1,m}.$$

Свойство 4.5. При условии (4.17) с достаточно малым числом θ произведение диагональных полиномов, кроме ν-го, доминирует над алгебраическими дополнениями полиномов ν-го столбца матрицы $M(s)$:

$$q_{i\nu}(s) < \alpha_\nu(s)\theta_{i\nu}, \quad 0 < \theta_{i\nu} < 1, \quad i, \nu = \overline{1, m}, \quad i \neq \nu. \tag{4.19}$$

Замечание 4.1. Свойство 4.5 сохраняется, когда условие доминирования (4.17) нарушается при $j = \nu$.

Доказательство свойства 4.5 приводится в Приложении.

Используя свойства 4.1–4.5, *докажем утверждение 4.1.*

Рассмотрим выражение (3.20). Полиномы матрицы $M(s)$ имеют вид:

$$m_{jj}(s) = \delta_j(s), \quad j = \overline{1, m}, \quad m_{ij}(s) = d_{ij}(s), \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq j. \tag{4.20}$$

Коэффициенты полиномов $\delta_j(s)$, $j = \overline{1, m}$, – положительны. Степени этих полиномов $n_j = n_{jj}$, $j = \overline{1, m}$, превышают по построению матрицы $D(s)$ объекта, описанному в замечании 2.1, степени полиномов в столбце, где они расположены,

$$\deg d_{ij}(s) < \deg \delta_j(s), \quad i, j = \overline{1, m}\,. \tag{4.21}$$

При достаточно больших абсолютных значениях величин корней полиномов $\delta_j(s)$, $j = \overline{1, m}$, обеспечиваются условия доминирования:

$$d_{ij}(s) < \delta_j(s)\theta, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \tag{4.22}$$

где θ – достаточно малое число.

Определитель в числителе передаточных функций (3.20) представим, разлагая его по элементам ν-го столбца, как

$$\det\ M_\nu(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i q_{i\,\nu}(s) = c_\nu \left[q_{\nu\nu}(s) + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{c_i}{c_\nu}\, q_{i\,\nu}(s) + \sum_{i=\nu+1}^{m} \frac{c_i}{c_\nu}\, q_{i\,\nu}(s) \right], \quad \nu \in \overline{1, m}, \tag{4.23}$$

где $q_{\nu\nu}(s)$ – определитель матрицы размеров $(m-1) \times (m-1)$.

Этот определитель запишем аналогично (4.12) как

$$q_{\nu\nu}(s) = \alpha_\nu(s) + \beta_\nu(s), \quad \nu \in \overline{1, m}, \tag{4.24}$$

где $\alpha_\nu(s) = \prod_{i=1}^{\nu-1} \delta_i(s) \ \prod_{i=\nu+1}^{m} \delta_i(s),\ \beta_\nu(s)$ – остальные слагаемые полинома $q_{\nu\nu}(s)$.

Используя свойство 4.4, получим

$$\beta_\nu(s) < \alpha_\nu(s)\overline{\theta_\nu} \tag{4.25}$$

и на основе свойств 4.3 и 4.5 заключаем, что

$$\beta_\nu(s) + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{c_i}{c_\nu}\, q_{i\nu}(s) + \sum_{i=\nu+1}^{m} \frac{c_i}{c_\nu}\, q_{i\nu}(s) < \alpha_\nu(s)\theta_\nu, \quad \nu \in \overline{1,m}, \tag{4.26}$$

где

$$\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu + \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{|c_i|}{|c_\nu|}\theta_{i\nu} + \sum_{i=\nu+1}^{m} \frac{|c_i|}{|c_\nu|}\theta_{i\nu}, \quad \nu \in \overline{1,m}\,. \tag{4.27}$$

При достаточно малых значениях показателя θ в (4.22) передаточные функции (3.20) приближаются к передаточной функции развязанной системы

$$t_\nu(s) \simeq \frac{c_\nu \alpha_\nu(s)}{\alpha(s)} = \frac{c_\nu \prod\limits_{i=1}^{\nu-1} \delta_i(s) \prod\limits_{i=\nu+1}^{m} \delta_i(s)}{\prod\limits_{i=1}^{m} \delta_i(s)} = \frac{c_\nu}{\delta_\nu(s)} = \check{t}_\nu(s), \quad \nu = \overline{1,m}. \tag{4.28}$$

Утверждение 4.1 доказано.

5. Запасы устойчивости

Утверждение 5.1. Если коэффициенты матричного полинома $\check{D}(s)$ – положительны, всегда существует достаточно большие по модулю вещественные корни полиномов матрицы $\check{\Delta}(s)$, при которых коэффициенты передаточных функций $\mathrm{w}_\mu^{(u)}(s) = \mathrm{w}_\mu^{(y)}(s)$, $\mu = \overline{1,m}$, сколь угодно близки к передаточным функциям $\mathrm{w}_\mu(s) = -\dfrac{r_\mu(s)k_\mu(s)}{g_\mu(s)d_\mu(s)}, \mu = \overline{1,m}$, развязанной системы, поэтому система (3.1), (3.9) *является грубой.*

Доказательство утверждения 5.1. Приведем еще одно свойство доминирующих полиномов, которое используется далее.

Пусть полином $a_1(s)$ доминирует над полиномом $b_1(s)$,

$$b_1(s) < a_1(s)\theta, \tag{5.1}$$

и пусть даны два полинома $a_2(s)$ и $b_2(s)$ с свойствами

$$\deg a_2(s) > \deg b_2(s). \tag{5.2}$$

Коэффициенты полинома $a_2(s)$ – положительны:

$$a_{2,i} > 0, \quad i = \overline{0, n_2}. \tag{5.3}$$

Сформируем произведения

$$b(s) = b_1(s)b_2(s), \quad a(s) = a_1(s)a_2(s) \tag{5.4}$$

и будем искать условия доминирования полинома $a(s)$ над полиномом $b(s)$. Здесь в отличие от условия (4.4) свойства 4.1 полином $a_2(s)$ не доминирует над полиномом $b_2(s)$.

Обозначим:

$$a_2 = \min\{a_{2,1}, \ldots, a_{2,n_2}\}, \quad b_2 = \max\{|b_{2,1}|, \ldots, |b_{2,n_2}|\}. \tag{5.5}$$

Свойство 5.1. Если выполняется условие доминирования (5.1) и полиномы $a_2(s)$ и $b_2(s)$ удовлетворяют неравенствам (5.2), (5.3), то полином $a(s) = a_1(s)a_2(s)$ доминирует над полиномом $b(s) = b_1(s)b_2(s)$, $a(s) < b(s)$, если

$$\theta_\sigma = \frac{b_2}{a_2}\theta < 1. \tag{5.6}$$

Доказательство свойства 5.1 приведено в Приложении.

Переходя к доказательству утверждения 5.1, заметим, что матрица $M^d_\mu(s)$ отличается от матрицы $M(s)$ утверждения 4.1 одним полиномом: место полинома $\delta_\mu(s)$ занимает полином $d_{\mu\mu}(s)$ объекта, для которого не выполняется одно из условий доминирования (4.22), соответствующее $j = \mu$.

Аналогично (4.23) разложим определитель det $M^d_\mu(s)$ по элементам μ-го столбца

$$\det\ M^d_\mu(s) = d_{\mu\mu}(s)q_{\mu\mu}(s) + \sum_{i=1}^{\mu-1} d_{i\mu}(s)q_{i\mu}(s) + \sum_{i=\mu+1}^{m} d_{i\mu}(s)q_{i\mu}(s), \quad \mu = \overline{1, m}. \tag{5.7}$$

В соответствии со свойством 4.5

$$q_{i\mu}(s) < \alpha_\mu(s)\theta_{i\mu}, \quad 0 < \theta_{i\mu} < 1, \quad i, \mu = \overline{1, m}, \quad i \neq \mu, \tag{5.8}$$

где

$$\alpha_\mu(s) = \prod_{j\simeq 1}^{\mu-1} \delta_j(s) \prod_{j=\mu+1}^{m} \delta_j(s). \tag{5.9}$$

Обозначим, учитывая, что коэффициенты полиномов $d_{\mu\mu}(s)$ положительны:

$$d_{\mu\mu} = \min\left\{d_{\mu\mu,1}, \ldots, d_{\mu\mu,n_{\mu\mu}}\right\}, \quad \mu = \overline{1,m}\,, \tag{5.10}$$

$$d_{i\mu} = \max\left\{|d_{i\mu,1}|, \ldots, |d_{i\mu,n_{i\mu}}|\right\}, \quad i,\mu = \overline{1,m}, \quad i \neq \mu\,. \tag{5.11}$$

Используя свойство 5.1, получим условия доминирования первого слагаемого в (5.7) над остальными слагаемыми

$$d_{i\mu}(s) q_{i\mu}(s) < d_{\mu\mu}(s) \alpha_\mu(s) \theta^d_{i,\mu}, \quad i,\mu = \overline{1,m}, \quad i \neq \mu, \tag{5.12}$$

если

$$\theta^d_{i\mu} = \frac{d_{i\mu}\theta_{i\mu}}{d_{\mu\mu}} < 1, \quad i,\mu = \overline{1,m}, \quad i \neq \mu. \tag{5.13}$$

На основе свойства 4.3 заключаем (представляя $q_{\mu\mu}(s) = \alpha_\mu(s) + \beta_\mu$, где $\theta_\mu \alpha_\mu(s) > \beta_\mu$), что для выражения (5.7) выполняется условие доминирования

$$\left[\beta_\mu(s) + \sum_{i=1}^{\mu-1} d_{i\mu}(s) q_{i\mu}(s) + \sum_{i=\mu+1}^{m} d_{i\mu}(s) q_{i\mu}(s)\right] < d_{\mu\mu}(s) \alpha_\mu(s) \theta^d_\mu\,, \tag{5.14}$$

если

$$\theta^d_\mu = \theta_\mu + \sum_{i=1}^{\mu-1} \theta^d_{i\mu} + \sum_{i=\mu+1}^{m} \theta^d_{i\mu} < 1, \quad i,\mu = \overline{1,m}, \quad i \neq \mu. \tag{5.15}$$

Теперь рассмотрим определитель в числителе передаточной функции (3.24). Разлагая его по элементам μ-го столбца, получим

$$\det\, M^d_{\mu\mu}(s) = \alpha_\mu(s) + \beta_\mu(s), \quad \mu = \overline{1,m}\,. \tag{5.16}$$

По свойству 4.4 находим, что

$$\beta_\mu(s) < \alpha_\mu(s) \theta_\mu\,. \tag{5.17}$$

При достаточно малых значениях показателя θ диагонально доминирующей матрицы $M(s)$ получим на основе выражений (5.14) и (5.15), что

$$w_\mu(s) = \frac{\det\, M^d_{\mu\mu}(s)}{\det\, M^d_\mu(s)} \simeq \frac{\alpha_\mu(s)}{d_{\mu\mu}(s)\, \alpha_\mu(s)} = \frac{1}{d_{\mu\mu}(s)}, \quad \mu = \overline{1,m}\,. \tag{5.18}$$

Утверждение 5.1 доказано.

6. Пример. Регулятор датчика угловой скорости

Датчик угловой скорости описывается уравнениями (см. [20]):

$$\ddot{y}_1 + d_{12}\dot{y}_2 = k_1 u_1 + c_1 f \ , \tag{6.1}$$

$$\ddot{y}_2 + d_{21}\dot{y}_1 = k_2 u_2 + c_2 f \ . \tag{6.2}$$

Численные значения его параметров:

$$d_{12} = 2 \cdot 10^3, \quad d_{21} = 10^3, \quad k_1 = 8, \quad k_2 = 5, \quad c_1 = 8, \quad c_2 = 5 \ , \tag{6.3}$$

$f(t)$ – полигармоническое внешнее возмущение вида (2.3), ограниченное числом $f^* = 10$.

З а д а ч а 6.1. *Найти регулятор, обеспечивающий требования к точности с границами*

$$y_1^* = y_2^* = 10^{-3}, \tag{6.4}$$

допуска на время регулирования

$$t^*_{\text{рег},i} = 0,01 \text{ с} \tag{6.5}$$

и запасы устойчивости.

Искомый регулятор, описывается уравнениями:

$$\left(g_1^{(1)} s + g_1^{(0)}\right) u_1 = \left(r_1^{(1)} s + r_1^{(0)}\right) y_1 \ , \tag{6.6}$$

$$\left(g_2^{(1)} s + g_2^{(0)}\right) u_2 = \left(r_2^{(1)} s + r_2^{(0)}\right) y_2 \ , \tag{6.7}$$

коэффициенты этих уравнений находятся из тождества (3.10)

$$s^2 \left(g_i^{(1)} s + g_i^{(0)}\right) - k_i \left(r_i^{(1)} s + r_i^{(0)}\right) = \left(\varepsilon_i s + 1\right) \left(s^2 + \delta_{i,1} s + \delta_{i,0}\right), \quad i = 1, 2 \ . \tag{6.8}$$

Решение этого тождества имеет вид:

$$g_i^{(1)} = \varepsilon_i, \quad g_i^{(0)} = 1 + \varepsilon_i \delta_{i,1}, \quad i = 1, 2, \tag{6.9}$$

$$r_i^{(1)} = -k_i^{-1} \left(\delta_{i,1} + \delta_{i,0}\varepsilon_i\right), \quad r_i^{(0)} = -k_i^{-1}\delta_{i,0}, \quad i = 1, 2 \ . \tag{6.10}$$

Найдем коэффициенты модальных полиномов $\delta_i(s) = s^2 + \delta_{i,1}s + \delta_{i,0},\ i = 1, 2$, при которых выходы объекта приближаются к выходам, описываемым соотношениями

$$\bar{y}_1 = \frac{c_1}{\delta_1(s)} \text{ и } \bar{y}_2 = \frac{c_2}{\delta_2(s)}. \tag{6.11}$$

Для этого рассмотрим объект (6.1), (6.2) с регулятором (6.6), (6.7). Умножим эти уравнения на полиномы $g_1(s)$ и $g_2(s)$ соответственно:

$$g_1(s)s^2y_1 + g_1(s)d_{12}sy_2 = k_1g_1(s)u_1 + g_1(s)c_1f\ , \tag{6.12}$$

$$g_2(s)s^2y_2 + g_2(s)d_{21}sy_1 = k_2g_2(s)u_1 + g_2(s)c_2f\ . \tag{6.13}$$

Учитывая тождество (6.8) и близость полиномов $g_1(s)$ к $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, 2$, при малых значениях ε_i $(i = 1, 2)$ получим уравнения системы в виде:

$$\delta_1(s)y_1 + d_{12}sy_2 = c_1f, \quad d_{21}sy_1 + \delta_2(s)y_2 = c_2f\ . \tag{6.14}$$

Из этих уравнений получим

$$y_1 = \frac{c_1\delta_2(s) - c_2d_{12}s}{\delta_1(s)\delta_2(s) - d_{12}d_{12}s^2}\,f, \quad y_2 = \frac{c_2\delta_1(s) - c_1d_{21}s}{\delta_1(s)\delta_2(s) - d_{12}d_{12}s^2}\,f\ . \tag{6.15}$$

Положим

$$\delta_1(s) = \delta_2(s) = s^2 + \delta_1s + \delta_0\ . \tag{6.16}$$

Тогда из (6.15) получим условия:

$$c_1d_{12} < c_1\delta_1\theta, \quad c_1d_{21} < c_2\delta_1\theta, \quad d_{12}d_{21} < \left(\delta_1^2 + 2\delta_0\right)\theta\ , \tag{6.17}$$

где θ – достаточно малое положительное число ($\theta < 1$), при котором выходы системы приближаются к выходам (6.11). Так, в частности, если принять корни модального полинома (6.16)

$$s_{\delta,1} = -10^4 \text{ и } s_{\delta,2} = -10^4\ , \tag{6.18}$$

то можно пренебречь вторыми слагаемыми в числителях и знаменателях передаточных функций (6.15). Тогда получим выражение (6.11).

Определим запасы устойчивости системы (6.1), (6.2), (6.16), (6.7) с параметрами регулятора (6.9), (6.10). Разомкнем ее по первому входу объекта. При $f(t) = 0$ система описывается уравнениями:

$$(6.19)\quad s^2 y_1 + d_{12} s y_2 = -k_1 \varphi, \quad \left(g_1^{(1)} s + g_1^{(0)}\right) u_1 = \left(r_1^{(1)} + r_1^{(0)} y_1\right), \quad d_{21} s y_1 + \delta_2(s) y_2 = 0.$$

Передаточная функция, связывающая выход y_1 с воздействием φ, имеет вид

$$(6.20)\qquad \mathrm{w}_1(s) = -\frac{k_1 \delta_2(s)}{\delta_2(s) s^2 - d_{12} d_{21} s^2}\,.$$

При корнях (6.18) модального полинома вторым слагаемым в знаменателе (6.20) можно пренебречь. Получим

$$(6.21)\qquad \bar{\mathrm{w}}_1(s) = -\frac{k_1}{s^2}\,.$$

Тогда передаточная функция, связывающая выход первого регулятора u_1 с воздействием φ, имеет вид

$$(6.22)\qquad \bar{\mathrm{w}}_1^{(1)}(s) = -\frac{r_1^{(1)} s + r_1^{(0)}}{g_1^{(1)} s + g_1^{(0)}}\,\frac{k_1}{s^2}\,.$$

Она совпадает с передаточной функцией развязанной системы, которая по построению обладает требуемыми запасами устойчивости.

Разомкнем систему по второму входу объекта. Аналогично получим

$$(6.23)\qquad \bar{\mathrm{w}}_2(s) = -\frac{k_2}{s^2}\,.$$

Передаточная функция, связывающая выход второго регулятора u_2 с воздействием φ, принимает вид

$$(6.24)\qquad \bar{\mathrm{w}}_2^{(1)}(s) = -\frac{r_2^{(1)} s + r_2^{(0)}}{g_2^{(1)} s + g_2^{(0)}}\,\frac{k_2}{s^2}$$

и совпадает с передаточной функцией развязанной системы.

Таким образом, построенная система обладает требуемыми запасами устойчивости.

Доказательство свойства 4.4.

Обозначим через $i^{(\rho)}$ $(\rho = \overline{2,m})$ перестановки в определителе (4.13), отличающиеся от натурального ряда $1, 2, \ldots, m$ расположением ρ символов. (Например, для $m = 3$, $i^{(2)}$: $132, 321, 213,$; $i^{(3)}$: $231, 312$.) (Перестановка $i^{(1)}$ недопустима из-за появления в перестановке повторяющихся символов.)

Представим полином $\beta(s)$ в выражении (4.14) как

$$\beta(s) = \sum_{\rho=2}^{m} \beta^{(\rho)}(s), \tag{П.1}$$

где слагаемые имеют вид

$$\beta^{(\rho)}(s) = \sum_{i_1,\ldots,i_m \in i^{(\rho)}} m_{i_1,1}(s), \ldots, m_{i_m,m}(s), \quad \rho = \overline{2,m}\,. \tag{П.2}$$

Слагаемые суммы (П.2) содержат ρ недиагональных полиномов. Действительно, номера столбцов (вторые индексы), где расположены полиномы, образуют натуральный ряд и отличие номеров строк (i_k, $k = \overline{1,m}$) от номеров столбцов соответствует недиагональному полиному. Обозначим через $\gamma^{(\rho)}$ $(\rho = \overline{2,m})$ число слагаемых в суммах (П.2). Например, для

$$\beta^{(2)}(s) = -m_{11}(s)m_{22}(s)m_{23}(s) + m_{31}(s)m_{22}(s)m_{13}(s) - m_{21}(s)m_{12}(s)m_{33}(s),$$
$$\beta^{(3)}(s) = -m_{21}(s)m_{32}(s)m_{13}(s) + m_{31}(s)m_{12}(s)m_{23}(s), \quad \gamma^{(2)} = 3, \quad \gamma^{(3)} = 2.$$

Учитывая свойство 4.2, запишем для каждого слагаемого суммы (П.2), используя условия (4.17) доминирования диагональных полиномов над недиагональными,

$$m_{i_1,1}(s), \ldots, m_{i_m,m}(s) < \theta^{\rho}\alpha(s), \quad i_1, \ldots, i_m \in i^{(\rho)}, \quad \rho = \overline{2,m}\,. \tag{П.3}$$

На основе свойства 4.3 получим, что

$$\beta^{(\rho)}(s) < \gamma^{(\rho)}\theta^{\rho}\alpha(s), \quad \rho = \overline{2,m}\,; \tag{П.4}$$

$$\beta(s) < \alpha(s)\theta_{\sigma}\,, \tag{П.5}$$

где

$$\theta_{\sigma} = \sum_{\rho=2}^{m} \gamma^{(\rho)}\theta^{\rho}\,. \tag{П.6}$$

Если $0 < \theta_\sigma < 1$, то матрица $M(s)$ – диагонально доминирующая. Из выражения (П.6) нетрудно найти степень θ_σ доминирования диагональных полиномов над полиномами соответствующего столбца матрицы $M(s)$.

Свойство 4.4 доказано.

Доказательство свойства 4.5.

Рассмотрим алгебраическое дополнение $q_{\nu\nu}(s)$ полинома $m_{\nu\nu}(s)$, $\nu = \overline{1,m}$. Пусть для простоты $\nu = m$. Если $\nu < m$, то перестановкой столбцов матрицы $M(s)$ (что не изменяет ее определителя с точностью до знака) можно получить матрицу, у которой ν-й столбец будет m-м. Полином $q_{mm}(s)$ – это определитель матрицы размеров $(m-1) \times (m-1)$.

Из свойства 4.4 следует с учетом обозначений (4.24), что

$$\beta_m(s) < \alpha_m(s)\theta_m \,, \tag{П.7}$$

где θ_m определяется по (П.6), где m заменено на $m-1$, а

$$\alpha_m(s) = \prod_{i=1}^{m-1} m_{ii}(s) \,. \tag{П.8}$$

Алгебраическое дополнение $q_{\mu m}(s)$ полинома $m_{\mu m}(s)$, $\mu \in \overline{1,m-1}$, имеет аналогично (4.13) вид

$$q_{\mu m}(s) = \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1},\; i_k \neq \mu,\; k=\overline{1,m-1}} m_{i_1,1}(s),\ldots,m_{i_{m-1},m-1}(s), \quad \mu = \overline{1,m-1}\,. \tag{П.9}$$

Числа $i_1,\ldots,i_{m-1}$ могут принимать значения $1,\ldots,\mu-1,\mu+1,\ldots,m$, (так как вычеркнута μ-я строка в матрице $M(s)$), поэтому в произведениях под знаком суммы не содержится полинома $m_{\mu\mu}(s)$, $\mu = \overline{1,m-1}$.

Представим алгебраическое дополнение аналогично (П.1) как

$$q_{\mu m}(s) = \sum_{\rho=1}^{m-1} \beta_{\mu m}^{(\rho)}(s), \tag{П.10}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{\mu m}^{(\rho)}(s) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}\in i^{(\rho)},\; i_k\neq\mu,\; k=\overline{1,m-1}} m_{i_1,1}(s),\ldots,m_{i_{m-1},m-1}(s), \\ \mu &= \overline{1,m-1}, \quad \rho = \overline{1,m-1}. \end{aligned} \tag{П.11}$$

Каждое слагаемое этой суммы оценим аналогично (П.3) как

$$m_{i_1,1}(s), \dots, m_{i_{m-1},m-1}(s) < \theta^{(\rho-1)}\alpha_m(s), \quad i_1, \dots, i_{m-1} \in i^{(\rho)}, \quad \rho = \overline{1, m-1}\,. \tag{П.12}$$

Тогда по свойству 4.3 получим:

$$\beta_{\mu m}^{(\rho)}(s) < \gamma_{\mu m}^{(\rho)}\theta^{\rho}\alpha_m(s), \quad \rho = \overline{1, m-1}\,; \tag{П.13}$$

$$q_{\mu m}(s) < \alpha_m(s)\theta_{\mu m}(s), \quad \mu = \overline{1, m-1}\,, \tag{П.14}$$

где

$$\theta_{\mu m} = \sum_{\rho=1}^{m-1} \gamma_{\mu m}^{(\rho)}\theta^{\rho}\,. \tag{П.15}$$

В общем случае, если $\nu < m$, то очевидно, что

$$q_{\mu\nu}(s) < \alpha_\nu(s)\theta_{\mu\nu}(s), \quad \mu = \overline{1, m-1}, \quad \nu = \overline{1, m-1}\,, \tag{П.16}$$

где

$$\theta_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{m-1} \gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}\theta^{\rho}\,. \tag{П.17}$$

Свойство 4.5 доказано.

Доказательство свойства 5.1.

Сформируем полином

(П.18)

$$b(s) = b_1(s)b_2(s) = \left(\sum_{i=0}^{n_1} b_{1,i}s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_2} b_{2,i}s^i\right) = \sum_{\gamma=0}^{n_1+n_2}\left(\sum_{i=0}^{n_1} b_{1,i}b_{2,\gamma-i}\right)s^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{n_1+n_2} b_\gamma s^\gamma,$$

$b_{2,\gamma-1} = 0,$ если $\gamma - i < 0, \quad \gamma - i > n_2.$

Таким образом,

$$b_\gamma = \sum_{i=0}^{n_1} b_{1,i}b_{2,\gamma-i}, \quad 0 \leqslant \gamma - i \leqslant n_2,\ \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ i = \overline{0, n_1}. \tag{П.19}$$

Аналогично запишем

$$a(s) = a_1(s)a_2(s) = \sum_{\gamma=0}^{n_1+n_2}\left(\sum_{i=0}^{n_1} a_{1,i}a_{2,\gamma-i}\right)s^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{n_1+n_2} a_\gamma s^\gamma\,, \tag{П.20}$$

где $a_\gamma = \sum_{i=0}^{n_1} a_{1,i}a_{2,\gamma-i},\ 0 < \gamma - i < n_2,\ \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ i = \overline{0, n_1}$.

Из (П.19) и (П.20) следует, что

$$\text{(П.21)}\quad |b_\gamma| \leqslant \sum_{i=0}^{n_2} |b_{2,i}||b_{1,\gamma-i}| \leqslant b_2 \sum_{i=0}^{n_2} |b_{1,\gamma-i}|, \quad \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ 0 \leqslant \gamma - i \leqslant n_2,\ i = \overline{0, n_1},$$

$$\text{(П.22)}\quad a_\gamma = \sum_{i=0}^{n_2} a_{2,i}a_{1,\gamma-i} \geqslant a_2 \sum_{i=0}^{n_2} a_{1,\gamma-i}, \quad \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ 0 \leqslant \gamma - i \leqslant n_2,\ i = \overline{0, n_1}.$$

Из условия (5.1) доминирования получим

$$\text{(П.23)}\quad \sum_{i=0}^{n_2} |b_{1,\gamma-i}| \leqslant \theta \sum_{i=0}^{n_2} a_{1,\gamma-i}, \quad \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ 0 \leqslant \gamma - i \leqslant n_2,\ i = \overline{0, n_1},$$

поэтому, учитывая (П.22), находим, что

$$\text{(П.24)}\quad |b_\gamma| \leqslant \theta b_2 \sum_{i=0}^{n_2} a_{1,\gamma-i} \leqslant \frac{\theta b_2}{a_2,} a_\gamma, \quad \gamma = \overline{0, n_1+n_2},\ 0 \leqslant \gamma - i \leqslant n_2,\ i = \overline{0, n_1}.$$

Это означает, что

$$\text{(П.25)}\qquad b(s) < a(s)\theta_\sigma.$$

Свойство 5.1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вознесенский И.Н.* О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров // АиТ. 1938. № 4–5. С. 65–78.

2. *Boksenbam A.S., Hood R.* General Algebraic Method applied to Control Analysis of Complex engine Types. NACA. Tesh. Rept., 1950.

3. *Мееров М.В.* Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.

4. *Морозовский В.Т.* Многосвязные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970.

5. *Wolovich W.A.* Linear Multivariable System. N. Y.: Springer-Verlag, 1974.

6. *Rosenbrock H.H.* Computed-Aided Control System Design. London: Acad. Press, Inc., 1974.

7. *Bennet W.H., Baras J.S.* Decomposition and Decentralized System Design: A Review of Frequency Domain Methods // 24th IEEE Decision and Control Conf. 1985. P. 1828–1835.

8. *Wang Q-G.* Decoupling Control. Berlin; Heidelberg; N. Y.; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2003.

9. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2008.

10. *Александров А.Г.* К аналитическому синтезу регуляторов // АиТ. 2010. № 6. С. 3–19.

    Aleksandrov A.G. On Analytical Design of Controllers // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 977–992.

11. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞-подхода // АиТ. 2004. № 9. С. 110–119.

    Agafonov P.A., Chestnov V.N. H_∞-Control for Guaranteed Simultaneous Input and Output Stability Margins for a Multivariate System // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1452–1460.

12. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞-регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // АиТ. 2011. № 10. С. 170–185.

    Chestnov V.N. Synthesizing H_∞-controllers for multidimensional systems with given accuracy and degree of stability // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.

13. *Честнов В.Н., Зацепилова Ж.В.* Синтез регуляторов многомерных систем по инженерным показателям точности, времени регулирования и запасов устойчивости // Сб. тр. Межд. конф. “Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ-ТКИ-50)”. 2009. Саратов: СГТУ. С. 41–45.

14. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности, времени регулирования и радиуса запасов устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1138–1142.

15. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты // АиТ. 2015. № 5. С. 27–42.

Aleksandrov A.G. Controller design in precision and speed. I. Minimal phase onedimensional plants // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 749–761.

16. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействия. II. Неминимально-фазовые одномерные объекты // АиТ. 2017. № 6. С. 3–17.

Aleksandrov A.G. Design of controllers by indices of precision and speed. II. Nonminimal-phase plants // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 961–973.

17. *Александров А.Г.* Частотная теория автоматического управления (частотное управление). Электросталь: Изд. ЭПИ МИСиС. 2010. Кн. 1. Кн. 2.

18. *Гантмахер Ф.Г.* Теория матриц. М.: Гостехиздат, 1954.

19. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

20. *Александров А.Г., Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Синтез регуляторов двухкомпонентного измерителя угловой скорости на основе трехстепенного гироскопа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1974. № 4. С. 30–38.