© 2006 г. А.Г. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)
Ю.Ф. ОРЛОВ, канд. физ.-мат. наук
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ЧАСТОТНОЕ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Предлагается метод адаптивного управления многомерным объектом с неизвестными постоянными коэффициентами при ограниченных полигармонических возмущениях с бесконечным числом гармоник с неизвестными амплитудами и частотами. Он использует достаточно малый испытательный сигнал. Целью управления является обеспечение заданных границ вынужденных колебаний выходов объекта и регулятора. Процесс адаптации базируется на методе конечно-частотной идентификации объекта и замкнутой системы. Приводится пример адаптивного управления реальным физическим объектом.

1. Введение

В теории адаптивного управления при неизвестных ограниченных внешних возмущениях можно выделить несколько направлений.

Первое из них связано с системами с эталонной моделью. Адаптивное управление в этих системах вначале строилось без учета внешних возмущений [1-3]. Затем в [4] было показано, что эти системы могут терять устойчивость при внешних возмущениях. Это привело к появлению большого числа работ по построению алгоритмов адаптивного управления, обеспечивающих стабилизацию в этих и других следящих системах при внешних возмущениях. Характерные результаты этого направления содержатся в [5, 6]. Существо подхода этого направления можно пояснить на примере [5], где решается задача LQ -оптимизации для объекта с неизвестными коэффициентами. Для решения задачи в уравнениях Риккати вместо истинных коэффициентов объекта используются их квазиоценки, получаемые по методу градиента. Они могут существенно отличаться от коэффициентов объекта, так как при неизвестных внешних возмущениях решения задачи идентификации не существует (если при этом не используются испытательные сигналы, рассматриваемые ниже) и поэтому квазиоценки являются одними из возможных значений коэффициентов объекта, согласованных с его входом и выходом. Показано, что процесс адаптации сходится к некоторой, заранее неизвестной, ошибке слежения. В [7] содержатся другие методы адаптации, не использующие квазиоценки.

Начало второго направления было положено методом рекуррентных целевых неравенств [8, 9]. Важной особенностью этого направления является содержательность цели адаптивного управления, выраженной в форме ограничений (допусков) на отклонения установившегося выхода объекта. Решение задачи l_1 -оптимизации [10, 11] было развито в [12, 13] на случай, когда коэффициенты объекта неизвестны. В этих работах квазиоценки находятся специальным методом градиентного типа, так чтобы в установившемся режиме получить наименьшее отклонение выхода системы. Численная реализация полученного алгоритма адаптивного управления затруднена. Это естественная цена за то, что он обеспечивает наилучшую точность регулирования при неизвестных коэффициентах объекта и произвольном ограниченном внешнем возмущении.

В связи с этим в ряде работ рассматривается более узкий класс внешних возмущений. Так, в [14] внешнее возмущение неизвестное, постоянное. Для этого случая получен простой в реализации алгоритм адаптивного управления. В [15] внешнее возмущение – кусочно-постоянная ограниченная функция с известным частотным диапазоном. Цель адаптации – заданный характеристический полином замкнутой системы (который используется также в [16, 17], где внешнее возмущение – произвольная, ограниченная функция). Оценки коэффициентов объекта находятся с помощью адаптивного наблюдателя, а закон управления, который формируется на основе этих оценок и оценки вектора состояний, содержит испытательный сигнал.

В частотном адаптивном управлении [18], как и во втором направлении, цель управления – величина установившегося выхода объекта. Внешнее возмущение – сумма бесконечного числа гармоник с неизвестными амплитудами и частотами и ограниченной известным числом суммой амплитуд. Для идентификации объекта и замкнутой системы используется метод конечно-частотной идентификации [19], в соответствии с которым объект или замкнутая система возбуждаются испытательным сигналом в виде суммы гармоник, число которых не превышает размерности пространства состояний объекта или замкнутой системы. Частоты испытательного сигнала не должны совпадать с частотами внешнего возмущения. Это несколько сужает класс внешних возмущений, однако это условие проверяется в процессе идентификации.

В описанных выше методах адаптации регулятор непрерывно перестраивается, а при частотном адаптивном управлении изменение параметров регулятора происходит через достаточно большие промежутки времени (интервалы адаптации). Это обеспечивает линейность модели системы на этих интервалах (тогда как в других методах модель системы нелинейна и трудно найти условия, при которых в процессе адаптации значения входа и выхода объекта не принимали бы недопустимо больших значений), и поэтому не возникает трудностей численной реализации алгоритма адаптации [20].

В настоящей статье[1] результаты работы [18] развиваются на случай многомерных объектов. При этом необходимо преодолеть две трудности. Первая заключается в установлении связи установившихся значений регулируемых переменных с весовыми коэффициентами H_∞ -нормы передаточной матрицы замкнутой сис-

[1]Эта статья является расширенным вариантом доклада [21], сделанного на 15-м конгрессе IFAC в Барселоне.

темы. Вторая трудность возникает при построении условия остановки процесса адаптации. Остановку естественно осуществлять по результатам сравнения матриц описания объекта на текущем и предшествующем интервалах адаптации, но для этого они должны иметь однозначное представление. Такое сравнение можно получить только в структуре конкретной канонической формы, в качестве которой в настоящей статье выбрана столбцовая наблюдаемая каноническая форма Люенбергера [22].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 формулируется задача построения адаптивного управления, а в разделе 3 приводится ее решение для случая, когда коэффициенты объекта известны. Разделы 4 и 5 посвящены идентификации объекта (автономно и в замкнутой системе соответственно). В разделе 6 исследуются условия сходимости процесса адаптации. В разделе 7 решается задача адаптивного управления гироплатформой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнениями

(1) $$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p(\mathbf{u}+\mathbf{f}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{z} = C_p\mathbf{x}_p, \quad t \geq t_0;$$

(2) $$\dot{\mathbf{x}}_c = A_c\mathbf{x}_c + B_c\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = C_c\mathbf{x}_c,$$

где $\mathbf{x}_p(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта (1), $\mathbf{x}_c(t) \in R^n$ – вектор состояния регулятора (2), $\mathbf{u}(t) \in R^m$ – вектор управления, $\mathbf{y}(t) \in R^r$ – вектор измеряемых переменных, $\mathbf{z}(t) \in R^r$ – вектор регулируемых переменных, $\mathbf{f}(t) \in R^m$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений – ограниченных полигармонических функций

(3) $$f_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}\sin(\omega_k^f t + \varphi_{jk}), \quad j = \overline{1,m},$$

частоты ω_k^f и фазы φ_{jk} $\left(j = \overline{1,m}, \ k = \overline{1,\infty}\right)$ которых – неизвестные числа, а амплитуды f_{jk} удовлетворяют условиям

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}^2 \leq f_j^{*2}, \quad j = \overline{1,m},$$

в которых f_j^* $\left(j = \overline{1,m}\right)$ – заданные числа. A_p, B_p, C_p, A_c, B_c и C_c – матрицы чисел. Пара (A_p, B_p) предполагается управляемой, а пара (A_p, C_p) – наблюдаемой.

Вынужденные колебания на выходах объекта и регулятора при $t \to \infty$ описываются выражениями

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_i(\omega_k^f)\sin[\omega_k^f t + \varphi_i^z(\omega_k^f)], \quad i = \overline{1,r},$$

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_j(\omega_k^f)\sin[\omega_k^f t + \varphi_j^u(\omega_k^f)], \quad j = \overline{1,m}.$$

Матрицы A_p, B_p и C_p объекта (1) таковы, что для них существуют такие матрицы A_c, B_c и C_c регулятора (2), что амплитуды вынужденных колебаний выходов объекта и регулятора удовлетворяют требованиям

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_i^2(\omega_k^f) \leq \bar{z}_i^{*2}, \quad i = \overline{1,r} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_j^2(\omega_k^f) \leq \bar{u}_j^{*2}, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\bar{z}_i^*$ и $\bar{u}_j^*$ $\left(i=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,m}\right)$ – заданные числа.

Пусть матрицы A_p, B_p и C_p объекта не известны. В этом случае для построения регулятора (2) применим адаптивное управление, которое описывается уравнениями с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}}_c^{(\kappa)} = A_c^{(\kappa)}\mathbf{x}_c^{(\kappa)} + B_c^{(\kappa)}\mathbf{y} + L\mathbf{v}^{(\kappa)}, \quad \mathbf{u} = C_c^{(\kappa)}\mathbf{x}_c^{(\kappa)}, \quad t_{\kappa-1} \le t < t_\kappa, \quad \kappa = \overline{1,N}. \tag{6}$$

В этих уравнениях κ – номер интервала адаптации $(\kappa=\overline{1,N})$, t_κ – момент окончания κ-го интервала, t_κ, также как число N и матрицы $A_c^{(\kappa)}$, $B_c^{(\kappa)}$ и $C_c^{(\kappa)}$, находятся в процессе адаптации, L – заданная матрица, $\mathbf{v}^{(\kappa)}(t) \in R^m$ – вектор испытательных воздействий, компоненты которого будут определены ниже.

По окончании процесса адаптации, в момент времени t_N, регулятор описывается уравнениями (2), в которых $A_c = A_c^{(N)}$, $B_c = B_c^{(N)}$ и $C_c = C_c^{(N)}$.

Задача 1. Найти алгоритм адаптации коэффициентов регулятора (6) *такой, чтобы система* (1), (2) *удовлетворяла требованиям* (5) *к установившимся амплитудам вынужденных колебаний.*

3. Управление для известного объекта

При известных матрицах A_p, B_p и C_p объекта (1) матрицы регулятора (2), обеспечивающего выполнение требований (5), будем определять из выражений [23]

$$\begin{gathered} A_c = A_p - B_p(R^{-1} - \gamma^{-2}Q_1)B_p^{\mathrm{T}}P - K_f C_p, \quad B_c = K_f, \\ C_c = -R^{-1}B_p^{\mathrm{T}}P, \quad K_f = (E_n - \gamma^{-2}YP)^{-1}YC_p^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{7}$$

в которых неотрицательные $n\times n$-матрицы P и Y являются решениями следующих уравнений Риккати

$$A_p^{\mathrm{T}}P + PA_p - PB_p(R^{-1} - \gamma^{-2}Q_1)B_p^{\mathrm{T}}P = -C_p^{\mathrm{T}}QC_p, \tag{8}$$

$$A_pY + YA_p^{\mathrm{T}} - YC_p^{\mathrm{T}}(E_r - \gamma^{-2}Q)C_pY = -B_pQ_1B_p^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

с числом γ, удовлетворяющим условию

$$\lambda_{\max}(PY) < \gamma^2, \tag{10}$$

где $\lambda_{\max}(M)$ – максимальное собственное значение неотрицательной матрицы M.

Примечание 1. При $Q=E_r$ и $R=Q_1=E_m$ (где E_n – единичная $n\times n$-матрица) уравнения (8) и (9) совпадают с уравнениями H_∞-субоптимального управления [24] (если принять в последних $B_1=B_2=B_p$ и $C_1=C_2=C_p$). ■

Пусть $Q=\mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_r)$, $R=\mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ и $Q_1=E_m$.

Утверждение 1. Если элементы матриц Q и R удовлетворяют неравенствам

$$q_i \ge \frac{1}{\bar{z}_i^{*2}}\sum_{k=1}^{m} f_k^{*2}, \quad i=\overline{1,r} \qquad и \qquad r_j \ge \frac{1}{\bar{u}_j^{*2}}\sum_{k=1}^{m} f_k^{*2}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{11}$$

то установившиеся амплитуды вынужденных колебаний системы (1), (2) *с матрицами* (7)-(9) *удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\bar{z}_i^{*2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_i^2(\omega_k^f) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\bar{u}_j^{*2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_j^2(\omega_k^f) \leq \gamma^{*2}, \tag{12}$$

в котором γ^* *– наименьшее значение* γ *, при котором* P *и* Y *– неотрицательные матрицы и выполняется условие* (10).

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Из неравенства (12), в свою очередь, следует, что если $\gamma^* \leq 1$, то регулятор (2) с коэффициентами (7) обеспечивает выполнение требований (5) к амплитудам вынужденных колебаний.

4. Первый интервал адаптации

4.1. Частотные параметры объекта

Для простоты далее будем полагать, что объект (1) асимптотически устойчив. Чтобы определить оценки матриц его описания, ко входу последнего приложим m векторов испытательных воздействий

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{e}_j \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk}^u \sin\omega_k(t-t_0), \quad t_0 + (j-1)\tau^{(1)} \leq t < t_0 + j\tau^{(1)}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{13}$$

где ρ_{jk}^u – амплитуда k -й гармоники испытательного воздействия j -го эксперимента и ω_k – частота k -й гармоники (такие, что $\rho_{jk}^u > 0$, $\omega_k \neq 0$ $\left(j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n}\right)$ и $|\omega_i| \neq |\omega_j|$ $(i \neq j)$), $\mathbf{e}_j = \mathrm{col}_j\, E_m$ – j -й столбец матрицы E_m , $\tau^{(1)}$ – длительность j -го эксперимента – заданное число такое, что $t_0 + m\tau^{(1)} = t_1$ (его можно определить экспериментально из необходимых условий [21] сходимости процесса идентификации).

Выходы $\mathbf{y}_j(t)$ $\left(j = \overline{1,m}\right)$ объекта подадим на входы фильтра Фурье, выходы которого дадут оценки

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ijk} &= \phi_{ijk}\left(\tau^{(1)}\right) = \frac{2}{\rho_{jk}^u \tau^{(1)}} \int\limits_{t_0+(j-1)\tau^{(1)}}^{t_0+j\tau^{(1)}} y_{ij}(t)\sin\,\omega_k(t-t_0)\,dt, \\ &\qquad\qquad i = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}, \\ \hat{\psi}_{ijk} &= \psi_{ijk}\left(\tau^{(1)}\right) = \frac{2}{\rho_{jk}^u \tau^{(1)}} \int\limits_{t_0+(j-1)\tau^{(1)}}^{t_0+j\tau^{(1)}} y_{ij}(t)\cos\omega_k(t-t_0)\,dt \end{aligned} \tag{14}$$

элементов ϕ_{ijk} и ψ_{ijk} матриц $\varPhi_k = \mathrm{Re}\, W(j\omega_k)$ и $\varPsi_k = \mathrm{Im}\, W(j\omega_k)$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ *частотных параметров* [25] *объекта* (1), где $W(s) = C_p(E_n s - A_p)^{-1}B_p$ – его передаточная матрица, а $y_{ij}(t)$ – i -я компонента вектора $\mathbf{y}_j(t)$ полученного в результате j -го эксперимента.

4.2. Идентификация объекта

Объект (1) будем идентифицировать в канонической форме Люенбергера [22]:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \mathbf{f}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{z} = C\mathbf{x}, \quad t \geq t_0, \tag{15}$$

блоки A_{ij} и $\mathbf{c}_{ij}$ $\left(i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,r}\right)$ матриц A и C которой имеют специальную структуру

$$
(16)\quad A_{ii}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{[0]} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{[1]} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{ii}^{[2]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{ii}^{[\nu_i-1]} \end{pmatrix},\qquad A_{i\neq j}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{[0]} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ij}^{[\nu_{ij}-1]} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\mathbf{c}_{ii}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_{i>j}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_{ij} \end{pmatrix},\qquad \mathbf{c}_{i<j}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},
$$

где $\nu_{ij}=\min(\nu_i,\nu_j)$, а ν_i $\left(i=\overline{1,r}\right)$ – *индексы наблюдаемости* [22] *объекта*, которые для простоты полагаем известными. Матрица B состоит из блоков $\mathbf{b}_{ij}=\operatorname{col}\left(b_{ij}^{[0]},\,b_{ij}^{[1]},\,\ldots,\,b_{ij}^{[\nu_i-1]}\right)$ $\left(i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,m}\right)$.

Коэффициенты матриц $A^{(1)}=\hat{A}$ и $C^{(1)}=\hat{C}$ находятся из равенств [26]:

$$
(17)\quad \begin{gathered} \hat{c}_{ij}-\sum_{k=j+1}^{i-1}\hat{c}_{ik}(\breve{\nu}_{kj}-\nu_{kj})\hat{g}_{kj}^{[\breve{\nu}_{kj}-1]}+(\breve{\nu}_{ij}-\nu_{ij})\hat{g}_{ij}^{[\breve{\nu}_{ij}-1]}=0,\quad i=\overline{j+1,r},\quad j=\overline{1,r-2}, \\ \hat{a}_{ij}^{[k]}=\hat{g}_{ij}^{[k]}-\sum_{l=j+1}^{r}\hat{g}_{il}^{[k]}\hat{c}_{lj},\quad k=\overline{0,\nu_{ij}-1},\quad i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,r}, \end{gathered}
$$

в которых $\breve{\nu}_{kk}=\nu_k$, $\breve{\nu}_{ki}=\min(\nu_k,\nu_i)$ при $k<i$ и $\breve{\nu}_{ki}=\min(\nu_k+1,\nu_i)$ при $k>i$, а $\hat{g}_{il}^{[k]}$ $\left(k=\overline{0,\nu_{ij}-1},\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,r}\right)$ и коэффициенты матрицы $B^{(1)}=\hat{B}$ определяются из решения системы частотных уравнений идентификации [26]:

$$
(18)\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\nu_k-1}\mathit{\Omega}^j\mathbf{i}_i\hat{b}_{ki}^{[j]}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\breve{\nu}_{ki}-1}\mathit{\Omega}^j\hat{\mathbf{h}}_i\hat{g}_{ki}^{[j]}=-\mathit{\Omega}^{\nu_k}\hat{\mathbf{h}}_k,\quad k=\overline{1,r},
$$

в которой $\mathit{\Omega}=\operatorname{diag}(\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\,)\otimes J\otimes E_m$, $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i}_i=\operatorname{col}_i I$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, $\hat{\mathbf{h}}_i=\operatorname{col}_i\hat{H}$ $\left(i=\overline{1,r}\right)$, $I=\begin{pmatrix} E_m & 0_m & E_m & 0_m & \cdots & E_m & 0_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\hat{H}=\begin{pmatrix} -\hat{\mathit{\Phi}}_1 & -\hat{\mathit{\Psi}}_1 & -\hat{\mathit{\Phi}}_2 & -\hat{\mathit{\Psi}}_2 & \cdots & -\hat{\mathit{\Phi}}_n & -\hat{\mathit{\Psi}}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ и 0_m – нулевой $m\times m$-блок.

Примечание 2. Решением системы (18) являются коэффициенты эквивалентного (1) описания объекта в форме «вход-выход» вида

$$
\hat{G}(s)\mathbf{y}=\hat{B}(s)(\mathbf{u}+\mathbf{f}),\quad t\geq t_0,
$$

полиномы матриц которого имеют специальную структуру [29]:

$$
\begin{aligned} \hat{g}_{ii}(s)&=\hat{g}_{ii}^{[0]}+\hat{g}_{ii}^{[1]}s+\cdots+\hat{g}_{ii}^{[\nu_i-1]}s^{\nu_i-1}+s^{\nu_i}, && i=\overline{1,r}, \\ \hat{g}_{i\neq j}(s)&=\hat{g}_{ij}^{[0]}+\hat{g}_{ij}^{[1]}s+\cdots+\hat{g}_{ij}^{[\breve{\nu}_{ij}-1]}s^{\breve{\nu}_{ij}-1}, && i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,r}, \\ \hat{b}_{ij}(s)&=\hat{b}_{ij}^{[0]}+\hat{b}_{ij}^{[1]}s+\cdots+\hat{b}_{ij}^{[\nu_i]}s^{\nu_i}, && i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,m}, \end{aligned}
$$

а преобразования (17) позволяют по коэффициентам полиномиальной матрицы $\hat{G}(s)$ найти оценки коэффициентов матриц (16). Очевидно, что при $\nu_1\leq\nu_2\leq\cdots\leq\nu_r$ коэффициенты $\hat{a}_{ij}^{[k]}=\hat{g}_{ij}^{[k]}$ $\left(k=\overline{0,\nu_{ij}-1},\ i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,r}\right)$, и в этом случае оценки коэффициентов матриц (16) канонической формы Люенбергера получаются непосредственно из решения системы (18) частотных уравнений идентификации.

Утверждение 2 [27]. *Решение предельной (при $\tau^{[1]} \to \infty$) системы* (18) *существует и единственно.*

Следствие 1. *В силу свойства* [28, с. 81] *непрерывной зависимости решения от матрицы системы* (18) *и ее векторов свободных коэффициентов, справедливы следующие предельные равенства*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau^{[1]}\to\infty} a_{ij}^{[k]}(\tau^{[1]}) = a_{ij}^{[k]}, && k=\overline{0,\nu_{ij}-1}, && i=\overline{1,r}, && j=\overline{1,r}\ ,\\
&\lim_{\tau^{[1]}\to\infty} b_{ij}^{[k]}(\tau^{[1]}) = b_{ij}^{[k]}, && k=\overline{0,\nu_{i}\ -1}, && i=\overline{1,r}, && j=\overline{1,m},\\
&\lim_{\tau^{[1]}\to\infty} c_{ij}\ (\tau^{[1]}) = c_{ij}\ , && && i=\overline{1,r}, && j=\overline{1,r}\ .
\end{aligned}$$

4.3. Синтез регулятора

По результатам идентификации сформируем уравнения Риккати (8) и (9), элементы матриц Q и R которых определим из неравенств (11), $Q_1 = E_m$, а матрицы A_p , B_p и C_p заменим их оценками: $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$. В результате многократного решения этих уравнений при различных γ найдем число γ^* и вычислим из выражений (7) матрицы $A_c^{(2)}$, $B_c^{(2)}$ и $C_c^{(2)}$ регулятора (6) для второго интервала, имеющего вид

$$\dot{\mathbf{x}}_c^{(2)} = A_c^{(2)}\mathbf{x}_c^{(2)} + B_c^{(2)}\mathbf{y} + L\mathbf{v}^{(2)}, \quad \mathbf{u} = C_c^{(2)}\mathbf{x}_c^{(2)}. \tag{19}$$

Легко показать, что матрицы $A_c^{(2)}$, $B_c^{(2)}$ и $C_c^{(2)}$ этого регулятора определяются по $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ и $C^{(1)}$ на основе соотношений (7) с точностью до преобразования подобия.

5. Второй интервал адаптации

5.1. Частотные параметры замкнутой системы

Возбудим систему (1), (19) m векторами испытательных воздействий

$$\mathbf{v}_j^{(2)}(t) = \mathbf{e}_j \sum_{k=1}^{n} \rho_{jk}^{v} \sin\omega_k(t-t_1), \quad t_1+(j-1)\tau^{(2)} \le t < t_1 + j\tau^{(2)}, \quad j=\overline{1,m},$$

где $\rho_{jk}^{v} > 0$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ – амплитуды испытательного воздействия замкнутой системы.

Длительность каждого эксперимента определим как

$$\tau^{(2)} = \tau^{(1)} + K, \tag{20}$$

где K – заданное положительное число, и, стало быть, $t_2 = t_1 + m\tau^{(2)}$.

Подавая выходы $\mathbf{y}_j(t)$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ объекта (1), замкнутого регулятором (19), на входы фильтра Фурье, получим оценки

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{ijk} &= \frac{2}{\rho_{jk}^{v}\tau^{(2)}} \int\limits_{t_1+(j-1)\tau^{(2)}}^{t_1+j\tau^{(2)}} y_{ij}(t)\sin\omega_k(t-t_1)\,dt,\\
\hat{\xi}_{ijk} &= \frac{2}{\rho_{jk}^{v}\tau^{(2)}} \int\limits_{t_1+(j-1)\tau^{(2)}}^{t_1+j\tau^{(2)}} y_{ij}(t)\cos\omega_k(t-t_1)\,dt
\end{aligned} \qquad i=\overline{1,r}, \quad j=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{21}$$

элементов θ_{ijk} и ξ_{ijk} матриц $\Theta_k = \mathrm{Re}\, W_s(j\omega_k)$ и $\Xi_k = \mathrm{Im}\, W_s(j\omega_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ *частотных параметров замкнутой системы*

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & BC_c^{(2)} \\ B_c^{(2)}C & A_c^{(2)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n,m} \\ L \end{pmatrix} \mathbf{v}^{(2)} + \begin{pmatrix} B \\ 0_{n,m} \end{pmatrix} \mathbf{f}, \\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} C & 0_{r,n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c^{(2)} \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{22}$$

передаточная матрица которой

$$W_s(s) = [E_r - W(s)W_c(s)]^{-1} W(s) W_v(s), \tag{23}$$

где $W_c(s) = C_c^{(2)} \left(E_n s - A_c^{(2)}\right)^{-1} B_c^{(2)}$ и $W_v(s) = C_c^{(2)} \left(E_n s - A_c^{(2)}\right)^{-1} L$.

Примечание 3. Замкнутая система (22) может оказаться неустойчивой. В этом случае нужно отключить регулятор (19) и на третьем интервале адаптации сформировать вход объекта (13), увеличивая время фильтрации

$$\tau^{(3)} = \tau^{(2)} + K \tag{24}$$

по сравнению с первым интервалом. Далее, решая систему частотных уравнений идентификации (18), найти матрицы $A^{(3)}$, $B^{(3)}$ и $C^{(3)}$, а затем, решая уравнения Риккати, матрицы $A_c^{(4)}$, $B_c^{(4)}$ и $C_c^{(4)}$ нового регулятора. Время фильтрации нужно увеличивать до тех пор, пока замкнутая система не станет асимптотически устойчивой.

5.2. Идентификация объекта

По матрицам $\widehat{\Theta}_k$ и $\widehat{\Xi}_k$ оценок частотных параметров замкнутой системы (22) найдем новые значения матриц $\hat{\Phi}_k = \Phi_k(\tau^{(2)})$ и $\hat{\Psi}_k = \Psi_k(\tau^{(2)})$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ оценок частотных параметров объекта. Для этой цели используем связь

$$\Phi_k + j\Psi_k = [\Theta_k + j\Xi_k] \left\{ W_c(j\omega_k)[\Theta_k + j\Xi_k] + W_v(j\omega_k) \right\}^{-1}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{25}$$

с очевидностью вытекающую из (23).

Заменяя в (25) матрицы Θ_k и Ξ_k их оценками, получим новые матрицы $\hat{\Phi}_k$ и $\hat{\Psi}_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ оценок частотных параметров объекта, на основе которых сформируем новую систему частотных уравнений идентификации (18). Решая ее, после несложных преобразований (17) находим матрицы $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ и $C^{(2)}$ идентифицированной (в канонической форме (15)) модели объекта (1).

Проверим выполнение условий

$$\begin{array}{llll} a_{ij}^{[k](1)} \div a_{ij}^{[k](2)} \le \varepsilon_a, & k=\overline{0,\nu_{ij}-1}, & i=\overline{1,r}, & j=\overline{1,r}\,, \\ b_{ij}^{[k](1)} \div b_{ij}^{[k](2)} \le \varepsilon_b, & k=\overline{0,\nu_i-1}, & i=\overline{1,r}, & j=\overline{1,m}, \\ c_{ij}^{(1)} \div c_{ij}^{(2)} \le \varepsilon_c, & & i=\overline{1,r}, & j=\overline{1,r}\,, \end{array} \tag{26}$$

(близости коэффициентов идентифицированного на первом и втором интервалах адаптации объекта), где «$\div$» – символ отношения: $a \div b = |a-b|/|b|$, если $b \neq 0$, либо $a \div b = |a|$, если $b = 0$, а ε_a , ε_b и ε_c – заданные числа.

Если они выполняются, то процесс адаптации заканчивается при $N = 2$, а искомые матрицы регулятора (2) имеют вид: $A_c = A_c^{(2)}$, $B_c = B_c^{(2)}$ и $C_c = C_c^{(2)}$. В противном случае (при недостаточной точности идентификации полученного на первом интервале адаптации объекта) синтезируем новый регулятор (для третьего интервала адаптации) и т.д..

6. Сходимость процесса адаптации

Введем получаемые экспериментально функции фильтруемости [30]

$$\begin{aligned} \ell^s_{ik}(\tau_0,\tau) &= \frac{2}{\tau}\int_{\tau_0}^{\tau} \bar y_i(t)\sin\omega_k(t-\tau_0)\,dt, \\ \ell^c_{ik}(\tau_0,\tau) &= \frac{2}{\tau}\int_{\tau_0}^{\tau} \bar y_i(t)\cos\omega_k(t-\tau_0)\,dt, \end{aligned} \qquad i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n}, \tag{27}$$

являющиеся выходами фильтра Фурье, на входы которого подается «естественный» (при $\mathbf{u}(t)=\mathbf{0}$) выход $\bar{\mathbf{y}}(t)=\mathrm{col}(\bar y_1(t),\bar y_2(t),\ldots,\bar y_r(t))$ объекта (1). Параметр τ_0 – начало эксперимента (проверки возмущения на ФФ-фильтруемость).

Возмущение $\mathbf{f}(t)$ называется строго ФФ-фильтруемым [30], если

$$\lim_{\tau\to\infty}\ell^s_{ik}(\tau_0,\tau)=\lim_{\tau\to\infty}\ell^c_{ik}(\tau_0,\tau)=0,\quad i=\overline{1,r},\quad k=\overline{1,n}. \tag{28}$$

Примечание 4. Условие (28) выполняется, если испытательные частоты не совпадают с частотами внешних возмущений ($|\omega_k|\neq|\omega^f_j|$ $\left(k=\overline{1,n},\ j=\overline{0,\infty}\right)$). Если оно нарушается, то необходимо выбрать другие испытательные частоты и выбор продолжать до тех пор, пока условие (28) не будет выполняться с достаточной точностью. ■

Утверждение 3. Если возмущение $\mathbf{f}(t)$ строго ФФ-фильтруемо, то оценки (14) *при $\tau\to\infty$ сходятся к частотным параметрам объекта (1):*

$$\lim_{\tau\to\infty}\phi_{ijk}(\tau)=\phi_{ijk}\quad \text{и}\quad \lim_{\tau\to\infty}\psi_{ijk}(\tau)=\psi_{ijk},\quad i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n}. \tag{29}$$

Доказательство утверждения 3 приведено в [31] для объектов с одним входом и одним выходом и затем обобщено для многомерных объектов в [32], где даны оценки скорости сходимости (29).

Утверждение 4. Если возмущение $\mathbf{f}(t)$ строго ФФ-фильтруемо, то процесс адаптации сходится и обеспечивает выполнение требований (5).

Доказательство. Процесс адаптации сходится (в силу утверждения 3, 2 и следствия 1), если на некотором его интервале достижимо достаточно большое время фильтрации $\bar\tau$. Достижимость величины $\bar\tau$ следует из требований (20) и (24), которые означают, что длительность каждого последующего интервала превышает длительность предыдущего интервала на заданную величину K:

$$\tau^{(\kappa)}=\tau^{(\kappa-1)}+K,\quad \kappa=\overline{1,N}.$$ ■

Отметим в заключение, что «естественные» выходы $\bar y_{ij}(t)$ $\left(i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,m}\right)$ объекта (1) и системы (1), (6) используются также для выбора амплитуд испытательных воздействий из условия «малости возбуждения»

$$\bar y_{ij}(t)\div y_{ij}(t)\le\bar\varepsilon,\quad i=\overline{1,r},\quad j=\overline{1,m},$$

где $\bar\varepsilon$ – заданное число, устанавливающее допустимое отклонение «естественных» выходов объекта и системы от их выходов при испытательных воздействиях.

7. Пример

7.1. Модель системы

Рассмотрим гироплатформу [33], описываемую уравнениями

$$
\begin{gathered}
\mathcal{P}\ddot{\boldsymbol\beta} + \mathcal{P}\mathcal{S}\dot{\boldsymbol\omega} + \mathcal{H}\mathcal{C}\boldsymbol\omega + \mathcal{N}\dot{\boldsymbol\beta} = \mathbf{0}, \\
\mathcal{J}\dot{\boldsymbol\omega} - \mathcal{C}^{\mathrm{T}}\mathcal{H}\mathcal{S}\boldsymbol\omega - \left(\mathcal{C}^{\mathrm{T}}\mathcal{H} + \mathcal{S}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}\right)\dot{\boldsymbol\beta} = \mathcal{Q}(\mathbf{u}+\mathbf{f}),
\end{gathered}
\tag{30}
$$

где β_1 и β_2 – углы (измеряемые) прецессии (поворота) гироскопов, ω_1 и ω_2 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси – переменные, определяющиеся из соотношений

$$
\dot\alpha_1 = \omega_1 \qquad \text{и} \qquad \dot\alpha_2 = \omega_2,
\tag{31}
$$

в которых α_1 и α_2 – углы стабилизации – регулируемые переменные, u_1 и u_2 – моменты двигателей стабилизации (управления), f_1 и f_2 – внешние возмущения.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{J} = \begin{pmatrix} j_x & 0 \\ 0 & j_y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \\ \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\cos\delta_1 & -\sin\delta_1 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.
\end{gathered}
$$

Параметры гироплатформы имеют следующие значения:

$$
\begin{gathered}
p_1 = p_2 = 10^{-5}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \quad q_1 = q_2 = 10^{-5}, \\
n_1 = n_2 = 4\cdot 10^{-3}\,\text{Нмс}, \quad h_1 = h_2 = 10^{-2}\,\text{Нмс}, \\
j_x = 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м/с}^2, \quad j_y = 2\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м/с}^2, \\
\delta_1 = -20^\circ, \quad \delta_2 = 30^\circ.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Типичными внешними воздействиями, которым подвергается гироплатформа, являются ступенчатые либо гармонические возмущения. Последние возьмем из [23, часть 1]:

$$
f_1(t) = \rho_1^f \sin\omega_1^f t + \rho_2^f \cos\omega_2^f t, \quad f_2(t) = \rho_2^f \sin\omega_1^f t + \rho_1^f \cos\omega_2^f t,
\tag{33}
$$

где $\rho_1^f = 410$, $\rho_2^f = 565$ – амплитуды и $\omega_1^f = 5$, $\omega_2^f = 7$ – частоты качки основания гироплатформы.

Регулятор гироплатформы имеет вид

$$
\dot{\mathbf{x}}_c = A_c^{(1)}\mathbf{x}_c + B_c^{(1)}\boldsymbol\beta, \quad \mathbf{u} = C_c^{(1)}\mathbf{x}_c.
\tag{34}
$$

Его коэффициенты получены в [23, часть 1] по значениям параметров (32), $\gamma = \infty$ и матрицам $Q = 8\cdot 10^{12}E_2$, $Q_1 = 10^{20}E_2$ и $R = E_2$ весовых коэффициентов уравнений (8) и (9). Для краткости значения коэффициентов матриц $A_c^{(1)}$, $B_c^{(1)}$ и $C_c^{(1)}$ здесь не приводятся.

Этот регулятор в установившемся режиме обеспечивает точность регулирования

$$
|\alpha_{1,\mathrm{st}}| \le 3\cdot 10^{-4}, \quad |\alpha_{2,\mathrm{st}}| \le 3\cdot 10^{-4}.
\tag{35}
$$

7.2. Постановка задачи

Пусть в некоторый (неизвестный) момент времени t_1 из-за сбоя питания одного из гиромоторов кинетический момент h_1 принял значение $h_1^{(2)} < h_1^{(1)}$. Будем называть возникшую ситуацию – вторым режимом работы гироплатформы (в отличие от первого режима, когда значения кинетических моментов равны: $h_1^{(1)} = h_2$).

Задача 2. *Определить момент времени t_1, идентифицировать объект (второго режима работы) и найти новые коэффициенты регулятора (адаптировать регулятор к новому значению $h_1^{(2)}$ кинетического момента h_1) при которых выполняется требование к точности* (35).

7.3. Подход к решению задачи

Существенной особенностью гироплатформы является то, что регулируемые переменные α_1 и α_2 не управляемы. Это означает, что объект (30) полностью управляем, а «объект» (30), (31) не вполне управляем. С другой стороны, используя первую подсистему уравнений (30), можно найти связь установившихся значений α_1 и α_2 с β_1 и β_2. Так, в частности, при ступенчатых возмущениях (когда в выражениях (33) $\omega_1 = \omega_2 = 0$) эта связь имеет вид [33]:

$$\alpha_{1,\mathrm{st}} = \frac{b_{11}}{h_1}\beta_{1,\mathrm{st}} + \frac{b_{12}}{h_2}\beta_{2,\mathrm{st}}, \qquad \alpha_{2,\mathrm{st}} = \frac{b_{21}}{h_1}\beta_{1,\mathrm{st}} + \frac{b_{22}}{h_2}\beta_{2,\mathrm{st}}, \tag{36}$$

где индекс «st» означает установившееся значение переменных, b_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – числа, определяемые параметрами (32) гироплатформы. Используя подобную связь для общего случая, можно переформулировать задачу 2, заменив в ней требования (35) на условия, накладываемые на переменные β_1 и β_2:

$$|\beta_{1,\mathrm{st}}| \le \beta^*_{1,\mathrm{st}}, \qquad |\beta_{2,\mathrm{st}}| \le \beta^*_{2,\mathrm{st}}, \tag{37}$$

где $\beta^*_{1,\mathrm{st}}$ и $\beta^*_{2,\mathrm{st}}$ – числа, которые определяются с использованием связей (36) и аналогичных им и границ установившихся ошибок в неравенствах (35). Замена целевого условия (35) на условие (37) позволяет использовать для построения регулятора только уравнения (30).

Заметим также, что изменение кинетического момента h_1 практически не влияет на установившиеся ошибки по переменным β_1 и β_2, так как регулятор гироплатформы имеет достаточно большие коэффициенты усиления. С другой стороны, из выражения (36) следует, что регулируемые переменные α_1 и α_2 существенно зависят от значений кинетических моментов.

Для описания существа подхода к решению задачи 2 рассмотрим первое из соотношений (36), полагая для простоты $b_{12} = 0$ (что соответствует параметру гироплатформы $\delta_1 = 0$). Тогда из равенства $\alpha_{1,\mathrm{st}} = (b_{11}/h_1)\beta_{1,\mathrm{st}}$ следует, что при уменьшении кинетического момента h_1, например в два раза, необходимо уменьшить ошибку $\beta_{1,\mathrm{st}}$ в два раза. Чтобы достичь этого, нужно увеличить значения коэффициентов усиления регулятора, а для этой цели необходим новый регулятор, который синтезируется после момента t_1 (когда станет известной новая величина кинетического момента $h_1 = h_1^{(2)}$).

Вторая особенность гироплатформы состоит в том, что она не является асимптотически устойчивой (ее характеристический полином имеет два нулевых корня) и поэтому идентификация незамкнутого регулятором объекта (30) не осуществима с использованием испытательного сигнала (13). В связи с этим оценку ее параметров будем производить по результатам идентификации замкнутой системы.

7.4. Решение задачи

Задачу будем решать в системе MATLAB с использованием пакета ADAPLAB-M [20] – MATLAB-расширения, содержащего программное обеспечение конечно-частотной идентификации и частотного адаптивного управления.

Решение задачи состоит из следующих этапов.

1. В результате фильтрации (21) замкнутой системы (30), (32), (34), получены матрицы $\widehat{\Theta}_k$ и $\widehat{\Xi}_k$ оценок ее частотных параметров.

2. По формулам (25) (в которых $\widehat{W}_c(j\omega_k)$ и $\widehat{W}_v(j\omega_k)$ вычислены по коэффициентам матриц $A_c^{(1)}$, $B_c^{(1)}$ и $C_c^{(1)}$ регулятора (34)) найдены значения матриц $\hat{\Phi}_k$ и $\hat{\Psi}_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ оценок частотных параметров объекта.

3. Из решения системы частотных уравнений идентификации (18) получены оценки коэффициентов модели гироплатформы
$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{A}^{(1)}\mathbf{x} + \hat{B}^{(1)}(\mathbf{u}+\mathbf{f}), \quad \boldsymbol{\beta} = \hat{C}^{(1)}\mathbf{x}, \quad t \geq t_1,$$
в первом режиме (с $h_1^{(1)} = 10^{-2}$ Нмс).

4. После изменения кинетического момента $h_1 := h_1^{(2)} = 5 \cdot 10^{-3}$ Нмс получены (из решения системы (18) частотных уравнений идентификации и равенств (17)) матрицы $\hat{A}^{(2)}$, $\hat{B}^{(2)}$ и $\hat{C}^{(2)}$ модели гироплатформы во втором режиме.

5. Сравнение матриц моделей первого и второго режимов показало, что изменение кинетического момента слабо сказывается на изменении их коэффициентов (коэффициенты усиления у регулятора столь велики по сравнению с коэффициентами модели гироплатформы, что трудно «уловить сбой питания»). Наряду с этим численно было установлено, что изменение кинетического момента h_1 (на интервале $[0{,}001; 0{,}01]$) существенно сказывается на двух ненулевых, минимальных (по абсолютному значению) корнях (s_3 и s_4) характеристического полинома объекта (образующих комплексно-сопряженную пару по результату идентификации). Поэтому момент времени t_1 будем определять по произведению $\hat{s}_3\hat{s}_4$ корней идентифицированного объекта (существенное изменение которого будет служить *критерием начала второго режима*). Приведем график зависимости произведения $s_3(h_1)s_4(h_1)$ от значений h_1 из диапазона $[0{,}001; 0{,}01]$.

Рисунок

Примечание 5. Для сравнения приведем значения корней матрицы $A^{(1)}$, построенной по параметрам (32): $s_3^{(1)} = -12{,}41$ и $s_4^{(1)} = -29{,}08$, а их произведение $s_3^{(1)} s_4^{(1)} = 361$. Во втором режиме (с $h_1 = h_1^{(2)}$) корни матрицы $A^{(2)}$ имеют следующие значения: $s_3^{(2)} = -10{,}95 + j5{,}56$ и $s_4^{(2)} = -10{,}95 - j5{,}56$ с их произведением $s_3^{(2)} s_4^{(2)} = 150{,}8$. ■

Матрица $\hat{A}^{(1)}$ имеет следующие оценки значений корней

$$\hat{s}_3^{(1)} = -12{,}48 \quad \text{и} \quad \hat{s}_4^{(1)} = -31{,}74, \quad \text{а их произведение} \quad \hat{s}_3^{(1)} \hat{s}_4^{(1)} = 396. \tag{38}$$

Во втором режиме (с $h_1^{(2)} = 5 \cdot 10^{-3}$ Нмс) оценки этих корней приняли значения

$$\begin{gathered} \hat{s}_3^{(2)} = -11{,}96 + j5{,}51 \quad \text{и} \quad \hat{s}_4^{(2)} = -11{,}96 - j5{,}51, \\ \text{а их произведение} \quad \hat{s}_3^{(2)} \hat{s}_4^{(2)} = 173{,}3, \end{gathered} \tag{39}$$

на основании чего было принято решение о синтезе нового регулятора.

6. Регулятор

$$\dot{\mathbf{x}}_c = A_c^{(2)} \mathbf{x}_c + B_c^{(2)} \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{u} = C_c^{(2)} \mathbf{x}_c \tag{40}$$

построен с использованием LQ-процедуры [23, часть 1] (при $\gamma \to \infty$ совпадающей с процедурой H_∞-субоптимального управления [23, часть 2]). Коэффициенты матрицы Q_2 при этом были увеличены на величину

$$\left(\frac{\hat{h}_1^{(1)}}{\hat{h}_1^{(2)}} \right)^2 = \left(\frac{1{,}06 \cdot 10^{-2}}{5{,}71 \cdot 10^{-3}} \right)^2 = 3{,}45,$$

где значения $\hat{h}_1^{(1)}$, соответствующее (38), и $\hat{h}_1^{(2)}$, соответствующее (39), были установлены по графику рисунка.

Матрицы регулятора (40) приняли следующие значения:

$$A_c^{(2)} = \begin{pmatrix} -430{,}17 & -47\,575 & -4{,}1849 \cdot 10^{10} & -0{,}74481 & -20\,417 & 2{,}1756 \cdot 10^{10} \\ 1{,}5563 & 57{,}352 & -5{,}6250 \cdot 10^{7} & -0{,}39838 & -46{,}155 & -2{,}9828 \cdot 10^{7} \\ 0 & 1 & -1{,}0197 \cdot 10^{4} & 0 & 0 & -2{,}9460 \cdot 10^{3} \\ -311{,}89 & -37\,170 & -6{,}5962 \cdot 10^{10} & -256{,}45 & -61\,301 & -3{,}1553 \cdot 10^{9} \\ 0{,}98091 & 105{,}28 & -3{,}7611 \cdot 10^{7} & 0{,}69522 & -9{,}1289 & -8{,}4052 \cdot 10^{7} \\ 0 & 0 & -2{,}9646 \cdot 10^{3} & 0 & 1 & -1{,}2628 \cdot 10^{4} \end{pmatrix},$$

$$B_c^{(2)} = \begin{pmatrix} 4{,}1849 \cdot 10^{10} & -2{,}1757 \cdot 10^{10} \\ 5{,}6242 \cdot 10^{7} & 2{,}9827 \cdot 10^{7} \\ 9{,}7865 \cdot 10^{3} & 2{,}9452 \cdot 10^{3} \\ 6{,}5963 \cdot 10^{10} & 3{,}1527 \cdot 10^{9} \\ 3{,}7596 \cdot 10^{7} & 8{,}4050 \cdot 10^{7} \\ 2{,}9452 \cdot 10^{3} & 1{,}2236 \cdot 10^{4} \end{pmatrix},$$

$$C_c^{(2)} = \begin{pmatrix} -101{,}75 & -11\,095 & 43\,933 & 14{,}942 & -2\,082{,}6 & -49\,042 \\ -43{,}670 & -4\,039{,}7 & -79\,937 & 75{,}451 & 11\,650 & 524\,800 \end{pmatrix}.$$

7. Моделирование замкнутой системы (30), (32), (40) показало, что этот новый регулятор удовлетворяет требованию к точности (35).

8. Заключение

Предложен новый метод адаптивного управления многомерным объектом при ограниченных полигармонических возмущениях (3). Это управление обеспечивает выполнение требований (5) к точности регулирования. Метод основан на экспериментальном определении частотных параметров объекта и замкнутой системы, возбужденных «достаточно малым» испытательным сигналом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Справедлива следующая теорема [23] о свойствах передаточных матриц $W_{zf}(s)$ и $W_{uf}(s)$, связывающих векторы выходов $\mathbf{z}$ объекта и $\mathbf{u}$ регулятора с возмущением $\mathbf{f}$.

Теорема 1. Для выполнения частотного матричного неравенства[2]

$$(\text{П.1})\quad W_{zf}^{\mathrm{T}}(-j\omega^f)QW_{zf}(j\omega^f)+W_{uf}^{\mathrm{T}}(-j\omega^f)RW_{uf}(j\omega^f)\le\gamma^2E_m,\quad \omega^f\in[0,\infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы матрицы регулятора (2) *формировались на основе соотношений* (7)-(9) *и было выполнено условие* (10).

Положим в (П.1) $\omega=\omega_k^f$ и умножим его слева на $\mathbf{f}_-^{[k]\mathrm{T}}=\mathrm{row}(f_{1k}e^{-j\varphi_{1k}},\ f_{2k}e^{-j\varphi_{2k}},\ \dots,\ f_{mk}e^{-j\varphi_{mk}})$, а справа на $\mathbf{f}_+^{[k]}=\mathrm{col}(f_{1k}e^{j\varphi_{1k}},\ f_{2k}e^{j\varphi_{2k}},\ \dots,\ f_{mk}e^{j\varphi_{mk}})$:

$$(\text{П.2})\quad \mathbf{f}_-^{[k]\mathrm{T}}W_{zf}^{\mathrm{T}}(-j\omega_k^f)QW_{zf}(j\omega_k^f)\mathbf{f}_+^{[k]}+\mathbf{f}_-^{[k]\mathrm{T}}W_{uf}^{\mathrm{T}}(-j\omega_k^f)RW_{uf}(j\omega_k^f)\mathbf{f}_+^{[k]}\le\gamma^2\mathbf{f}_-^{[k]\mathrm{T}}\mathbf{f}_+^{[k]}.$$

Нетрудно убедиться [23], что амплитуды $\bar z_i(\omega_k^f)$ и $\bar u_j(\omega_k^f)$ установившихся вынужденных колебаний по каждой из координат векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{u}$ являются модулями элементов комплексно-сопряженных векторов

$$W_{zf}(j\omega_k^f)\mathbf{f}_+^{[k]}\quad\text{и}\quad W_{zf}(-j\omega_k^f)\mathbf{f}_-^{[k]},\quad\text{а также}\quad W_{uf}(j\omega_k^f)\mathbf{f}_+^{[k]}\quad\text{и}\quad W_{uf}(-j\omega_k^f)\mathbf{f}_-^{[k]},$$

замена которых позволяет привести (П.2) к виду

$$(\text{П.3})\qquad \sum_{i=1}^{r}q_i\bar z_i^2(\omega_k^f)+\sum_{j=1}^{m}r_j\bar u_j^2(\omega_k^f)\le\gamma^2\sum_{j=1}^{m}f_{jk}^2.$$

Суммируя неравенства (П.3) для всех частот, с учетом (4) получим

$$\sum_{i=1}^{r}q_i\sum_{k=1}^{\infty}\bar z_i^2(\omega_k^f)+\sum_{j=1}^{m}r_j\sum_{k=1}^{\infty}\bar u_j^2(\omega_k^f)\le\gamma^2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}f_{jk}^2\le\gamma^2\sum_{j=1}^{m}f_j^{*2}.$$

Из этого выражения следует неравенство (12), если коэффициенты диагональных матриц Q и R удовлетворяют условиям (11).

---

[2]Здесь $\le$ понимается в смысле знакоопределенности матриц: $A\le B\sim \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}\le\mathbf{x}^{\mathrm{T}}B\mathbf{x}$ $\forall\,\mathbf{x}\ne0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Parks P.C.* Lyapunov redesign of model reference adaptive control system // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. V. AC-11. No. 3. P. 362-367.

2. *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью // АиТ. 1967. Т. 28. №6. С. 88-94.

3. *Narendra K.C., Valavani L.S.* Stable adaptive control design-direct control // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. AC-23. No. 4.

4. *Narendra K.C., Annaswamy F.M.* Robust adaptive control in the presence of bounded disturbance // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. AC-31. No. 4.

5. *Sun J., Ioannou P.* Robust adaptive LQ control schemes // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. AC-37. No. 1. P. 100-106.

6. *Radenkovic M.S., Michel A.N.* Robust adaptive systems and self stabilization // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. AC-37. No. 9. P. 1355-1369.

7. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.

8. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166. №6. С. 1308-1311.

9. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.

10. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // АиТ. 1984. Т. 45. №5. С. 39-46.

11. *Dahleh M.A., Pearson J.B.* l_1-optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32. P. 314-322.

12. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // АиТ. 1994. Т. 55. №2. С. 121-131.

13. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в l_1-постановке // АиТ. 1998. Т. 59. №3. С. 107-131.

14. *Fan J.C., Kobayachi T.* Simple adaptive PI controller for linear system with constant disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. AC-43. No. 5.

15. *Lilly J.H.* Adaptive state regulation in the presence of disturbances of known frequency range // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. V. AC-43. No. 7.

16. *Якубович В.А.* Адаптивная стабилизация линейных процессов // АиТ. 1988. Т. 49. №4. С. 97-107.

17. *Zhao X., Lozano R.* Adaptive pole placement for continuous-time system in the presence of bounded disturbance // Preprints 12 World Congr. IFAC. Sydney, Australia, 1993. V. 1. P. 205-210.

18. *Alexandrov A.G.* Accurate adaptive control // Proc. IASTED Int. Conf. "Automation Control and Information Technology". Novosibirsk: ACTA Press, 2002. ISNB: 0-88986-342-3. P. 212-217.

19. *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик // Изв. РАН: «Теория и системы управления». 1995. №2. С. 63-71.

20. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф., Михайлова Л.С.* Программное обеспечение конечно-частотной идентификации и адаптивного управления многомерными объектами // Тр. II Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления». SICPRO'03. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. CD-ROM №ISBN 5-201-14948-0. С. 2531-2556.

21. *Alexandrov A.G., Orlov Yu.F.* Frequency adaptive control of multivariable plants // Preprints 15 Trienial World Congr. IFAC. Barcelona, Spain, 2002, CD-ROM T-Th-M03-3.

22. *Kailath T.* Linear systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

23. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности // АиТ. 1998. Т. 59. Ч. I: применение процедур LQ-оптимизации. №7. С. 83-95. Ч. II: применение процедур H_∞-оптимизации. №8. С. 124-138.

24. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. No. 8. P. 831-846.

25. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация многомерных объектов // Тр. 2-й Рос.-швед. конф. по автоматическому управлению. RSCC'95. СПб., 1995. С. 65-69.

26. *Орлов Ю.Ф.* Идентификация по частотным параметрам // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. №3. С. 425-429.

27. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: многомерный объект // Международная конференция по проблемам управления. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 1999. Изб. тр. Т. 1. С. 15-28.

28. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

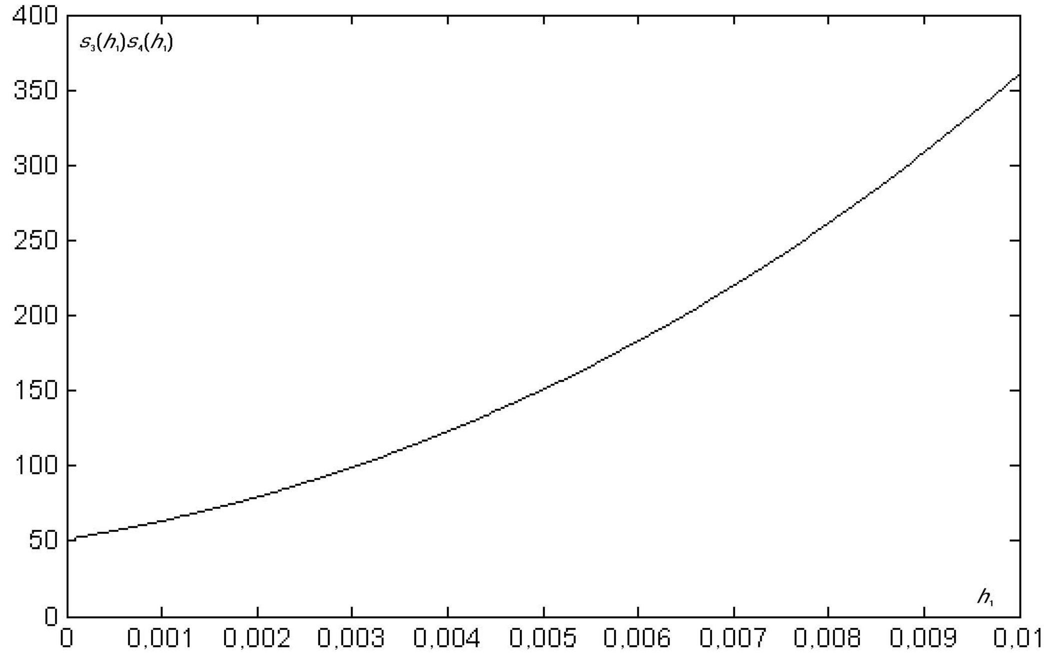
29. *Wolovich W.A.* Linear multivariable systems. Springer-Verlag, 1974.

30. *Александров А.Г.* Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении // АиТ. 2000. Т. 61. №4. С. 106-116.

31. *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* Сравнение двух методов идентификации при неизвестных ограниченных возмущениях // АиТ. 2005. Т. 66. №10. С. 128-147.

32. *Орлов Ю.Ф.* Конечно-частотная идентификация многомерных объектов при почти произвольных ограниченных возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. №2. С. 280-281.

33. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.



$s_3(h_1)s_4(h_1)$
400
350
300
250
200
150
100
50
0
h_1
0
0,001
0,002
0,003
0,004
0,005
0,006
0,007
0,008
0,009
0,01