© 2007 г. А. Г. Александров, д-р физ.-мат. наук
Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова,РАН

ЗАПАСЫ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО И МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Рассматриваются системы H_∞-субоптимального и модального управления и исследуются причины малых запасов устойчивости по фазе и модулю, которыми могут обладать эти системы.

1. Введение

В исследованиях по анализу устойчивости систем управления при параметрических возмущениях можно выделить два направления. В первом, эти возмущения описываются заданными интервалам возможных значений параметров [1],[2]. Во втором направлении, к которому относится эта работа, показателями чувствительности системы к параметрическим возмущениям служат запасы устойчивости по фазе (φ) и модулю (L), которые определяются, используя параметрически невозмущенную систему. Запасы устойчивости, которые могут быть определены экспериментально, являются обобщенными показателями и они не имеют явной связи с указанными выше интервалами. Однако, малые их значения, по сравнению с допустимыми ($\varphi \geqslant 45^o, L \geqslant 2$), является признаком того,что система может потерять устойчивость при параметрических возмущениях из заданных интервалов.

Запасы устойчивости как правило проверяются при проектировании и испытаниях систем управления и поэтому разработка новых методов синтеза регуляторов сопровождается исследованием обеспечиваемых ими запасов устойчивости. Так, после разработки методов синтеза оптимальных регуляторов (называемых АКОР либо LQ-оптимизацией) [3],[4] было показано,что оптимальные системы со скалярным управлением по состоянию обладают [5],[6] допустимыми запасами устойчивости ($\varphi \geqslant 60^o, L \geqslant 2$). Наряду с этим было выяснено [7]-[9], что, если вектор состояния оптимальной системы восстанавливается с помощью фильтра Калмана либо наблюдателя Люенбергера, то запасы устойчивости могут быть недопустимо малы. В случае векторного оптимального управления по состоянию система имеет запасы устойчивости, определенные на входах объекта: $\varphi \geqslant 60^o, L \geqslant 2$ [10],[11], однако, ее запасы, определенные на входах регуляторов, могут быть недопустимо малы [12].

При исследовании запасов устойчивости оптимальных систем с устройствами восстановления вектора состояния было замечено [7] , что передаточная функция этих систем в разомкнутом состоянии имеет специфическую структуру: ее числитель и знаменатель содержат,как слагаемое,один и тот же полином с различными знаками. Этот полином ниже назван аннулируемым, так как он аннулируется при построении характеристического полинома системы. Если этот полином содержит доминирующий коэффициент (который по абсолютной величине существенно превышает коэффициенты характеристического полинома системы), то это приводит, как показано в работе [13], к малым запасам устойчивости.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №05-08-01177 и грант №05-01-00114).

В настоящей работе исследуются запасы устойчивости систем, регуляторы которых получены как результат построения H_∞-субоптимального управления либо определены из множества стабилизирующих регуляторов (модальное управление) . Показано, что передаточные функции таких систем содержат аннулируемый полином. Доказано, что, если этот полином содержит доминирующий коэффициент, то запасы устойчивости малы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями

$$y^{(n)} + \bar{d}_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + \bar{d}_0 y = \bar{k}_m u^{(m)} + \ldots + \bar{k}_0 u, \ \ m < n; \tag{1}$$

$$\bar{g}_{n_c}u^{(n_c)} + \ldots + \bar{g}_0 u = -(\bar{r}_{m_c}y^{(m_c)} + \ldots + \bar{r}_0 y), \ \ m_c \leqslant n_c, \tag{2}$$

где $y(t)$ – измеряемый выход объекта (1), $u(t)$ – измеряемый выход регулятора (2),

Коэффициенты системы имеют вид

$$\begin{gathered}\bar{d}_i = d_i + \Delta d_i, \bar{k}_j = k_j + \Delta k_j, \bar{g}_p = g_p + \Delta g_p, \bar{r}_q = r_q + \Delta r_q,\\ (i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, m}, p = \overline{0, n_c}, q = \overline{0, m_c}),\end{gathered} \tag{3}$$

где d_i ,k_j ,g_p , r_q-известные числа,являющиеся номинальными (расчетными)значениями коэффициентов системы, Δd_i, Δk_j, Δg_p, Δr_q –неизвестные числа, называемые параметрическими возмущениями.

Преобразуя уравнения (1), (2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем их в виде

$$\bar{d}(s)y = \bar{k}(s)u, \ \ \bar{g}(s)u = -\bar{r}(s)y, \tag{4}$$

где s-символ преобразования по Лапласу,

$\bar{d}(s) = d(s) + \Delta d(s)$, $\bar{k}(s) = k(s) + \Delta k(s)$, $\bar{g}(s) = g(s) + \Delta g(s)$, $\bar{r}(s) = r(s) + \Delta r(s)$, $d(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i s^i$, $k(s) = \sum_{i=1}^{m} k_i s^i$, $g(s) = \sum_{i=1}^{n_c} g_i s^i$, $r(s) = \sum_{i=1}^{m_c} r_i s^i$, $\Delta d(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta d_i s^i$, $\Delta k(s) = \sum_{i=1}^{m} \Delta k_i s^i$, $\Delta g(s) = \sum_{i=1}^{n_c} \Delta g_i s^i$, $\Delta r(s) = \sum_{i=1}^{m_c} \Delta r_i s^i$.

Введем передаточную функцию

$$\begin{gathered}\bar{w}(s) = \frac{\bar{k}(s)}{\bar{d}(s)}\frac{\bar{r}(s)}{\bar{g}(s)} = \frac{\bar{h}_\beta s^\beta + \cdots + \bar{h}_1 s + \bar{h}_0}{\ell_\alpha s^\alpha + \cdots + \ell_1 s + \ell_0} = \frac{\bar{h}(s)}{\bar{\ell}(s)} = \frac{h(s) + \Delta h(s)}{\ell(s) + \Delta\ell(s)},\\ h(s) = k(s)r(s), \ \ell(s) = d(s)g(s),\\ \alpha = n + n_c, \ \ \beta = m + m_c, \ \ \alpha > \beta.\end{gathered} \tag{5}$$

(Функция $\bar{w}(j\omega)$, $0 \leqslant \omega < \infty$, называемая частотной передаточной функцией разомкнутой системы, может быть определена экспериментально).

Характеристический полином системы

$$\bar{d}^s(s) = \bar{d}^s_\alpha s^\alpha + \cdots + \bar{d}^s_1 s + \bar{d}^s_0 = \\ \bar{\ell}_\alpha s^\alpha + \cdots + (\bar{\ell}_\beta + \bar{h}_\beta)s^\beta + \cdots + (\bar{\ell}_1 + \bar{h}_1)s + (\bar{\ell}_0 + \bar{h}_0). \tag{6}$$

Далее будем рассматривать случай, когда при номинальных значениях коэффициентов передаточная функция системы (1), (2) имеет следующую структуру

$$w(s) = \frac{h(s)}{l(s)} = \frac{h^{(1)}(s) + \rho(s)}{\ell^{(1)}(s) - \rho(s)}, \tag{7}$$

в которой коэффициенты полиномов $h^{(1)}(s)$, $\ell^{(1)}(s)$ и полинома $\rho(s)$, степени $\nu < \beta$, являются известными функциями номинальных коэффициентов объекта и регулятора. Полином $\rho(s)$ называется далее *аннулируемым*, так как он не влияет на характеристический полином системы (аннулируется при его построении).

При параметрических возмущениях эта передаточная функция принимает вид

$$\bar{w}(s) = \frac{h^{(1)}(s) + \Delta h^{(1)}(s) + [\rho(s) + \Delta\rho(s)^+]}{l^{(1)}(s) + \Delta l^{(1)}(s) - [\rho(s) + \Delta\rho(s)^-]}, \tag{8}$$

где $\Delta\rho(s)^+ = \Delta\rho^+_\nu s^\nu + \ldots + \Delta\rho^+_1 s + \Delta\rho^+_0$ и $\Delta\rho(s)^- = \Delta\rho^-_\nu s^\nu + \ldots + \Delta\rho^-_1 s + \Delta\rho^-_0$.

Определение 1 .Система (1),(2) называется системой D-структуры, если

$$\Delta\rho(s)^- \neq \Delta\rho(s)^+. \tag{9}$$

Далее будем рассматривать случай, когда аннулируемый полином содержит коэффициент ρ_q $(q \in \overline{0,\nu})$ такой, что выполняются неравенства

$$\tfrac{|l_i|}{|\rho_q|} \leqslant \eta, \quad \tfrac{|h_j|}{|\rho_q|} \leqslant \eta, \quad \tfrac{|l^{(1)}_q|}{|\rho_q|} \leqslant \eta, \quad \tfrac{|h^{(1)}_q|}{|\rho_q|} \leqslant \eta, \\ (i = 0, 1, ..., q-1, q+1, ..., \alpha, j = 0, 1, ..., q-1, q+1, ..., \beta, q \in \overline{0,\nu}), \tag{10}$$

где η- положительное число меньшее 1.

Коэффициент ρ_q $(q \in \overline{0,\nu})$, удовлетворяющий неравенствам (10), называется *доминирующим*, а соответствующая структура-*доминирующей D-структурой*

Система с доминирующей D-структурой может стать неустойчивой при малых параметрических возмущениях доминирующего коэффициента.

Поясним это на примере.

Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + d_1\dot{y} + d_0 y = u, \tag{11}$$

в котором $d_1 = 150, d_0 = 0.1$.

Требуется найти регулятор(который для краткости изложения полагается не реализуемым)

$$u = -(r_1\dot{y} + r_0 y) \tag{12}$$

такой, чтобы характеристический полином системы (11),(12) $d^s(s) = s^2 + (d_1 + r_1)s + d_0 + r_0$ совпадал с полиномом

$$\psi(s) = s^2 + \psi_1 s + \psi_0 = s^2 + 1.5s + 0.5 = (s+1)(s+0.5). \tag{13}$$

Содержательный смысл задачи состоит в том, чтобы построить систему, процессы в которой протекают на три порядка быстрее, чем в объекте управления (наибольшая постоянная времени объекта 1500сек, а требуемая наибольшая постоянная времени системы (11),(12)–2сек).

Из тождества $d^s(s) = \psi(s)$ следует, что искомые коэффициенты регулятора

$$r_1 = \psi_1 - d_1, r_0 = \psi_0 - d_0, \tag{14}$$

и соответствущий им регулятор имеет вид

$$u = -(-148.5\dot{y} + 0.4y) \tag{15}$$

Из структуры передаточной функции системы (11),(15)

$$w(s) = \tfrac{r_1 s + r_0}{s^2 + d_1 s + d_0} = \tfrac{\psi_1 s + \psi_0 + (-d_1 s - d_0)}{s^2 - (-d_1 s - d_0)} = \tfrac{1.5s + 0.5 + (-150s - 0.1)}{s^2 - (-150s - 0.1)} = \tfrac{-148.5s + 0.4}{s^2 + 150s + 0.1} \tag{16}$$

получим аннулируемый полином

$$\rho(s) = \rho_1 s + \rho_0 = -d_1 s - d_0 = -150s - 0.1. \tag{17}$$

Коэффициент аннулируемого полинома $\rho_1 = -150$ является доминирущим.

При параметрических возмущениях объекта

$$\Delta\rho(s)^+ = 0, \Delta\rho(s)^- = \Delta\rho_1^- s + \Delta\rho_0^-, \Delta\rho_1^- = -\Delta d_1, \Delta\rho_0^- = -\Delta d_0 \tag{18}$$

Коэффициент $\bar{d}_1^s$ характеристического полинома системы $\bar{d}^s(s) = s^2 + \psi_1 s + \psi_0 + \Delta\rho_1^- s + \Delta\rho_0^-$ имеет вид

$$\bar{d}_1^s = \psi_1 + \Delta\rho_1^-, \tag{19}$$

из которого следует, что изменение коэффициента ρ_1 (изменение коэффициента d_1 объекта) на 1.01 процента ($\Delta\rho_1^- = -1.515$) нарушает устойчивость системы.

Такая высокая чувствительность системы к параметрическим возмущениям отразилась на ее запасах устойчивости: $\varphi = 11^o$, а $L = 1.01$, хотя последние вычисляются с использованием передаточной функции (16) с номинальными коэффициентами.

Возвращаясь к общему случаю отметим, что численный анализ влияния параметрических возмущений на устойчивость систем с доминирующей D-структурой сводится к определению знака q-того коэффициента характеристического полинома

$$\bar{d}_q^s = h_q^{(1)} + \Delta h_q^{(1)} + l_q^{(1)} + \Delta l_q^{(1)} - \Delta\rho_q^- + \Delta\rho_q^+, \tag{20}$$

Однако, функции, связывающие это выражение с коэффициентами системы, могут быть сложны и вычисление (20) затруднено и поэтому необходимо исследовать запасы устойчивости систем с доминирующей D-структурой.

Задачи этой работы состоят в следующем.

Во-первых, показать, что системы, регуляторы которых получены как результат применения методов оптимального и модального управления являются системами D-структуры.

Во-вторых, исследовать запасы устойчивости по фазе и модулю систем с доминирующей D-структурой.

3. Системы с *D*- структурой

3.1. Множество всех стабилизирующих регуляторов

Множество всех регуляторов, стабилизирующих объект (1), описывается [1] передаточной функцией

$$w_c(s) = \frac{R^0(s) + D(s)Q(s)}{G^0(s) - K(s)Q(s)}, \tag{21}$$

где

(22)

$$R^0(s) = \frac{r^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}, \quad G^0(s) = \frac{g^0(s)}{\psi^{(2)}(s)}, \quad D(s) = \frac{d(s)}{\psi^{(1)}(s)}, \quad K(s) = \frac{k(s)}{\psi^{(1)}(s)}, \quad Q(s) = \frac{q(s)}{\psi^{(3)}(s)}.$$

Здесь $\psi^{(1)}(s)$,$\psi^{(2)}(s)$ и $\psi^{(3)}(s)$-заданные гурвицевы полиномы (модальные полиномы) степеней n,$n-1$,n_q соответственно.

Дробно-рациональные функции $R^0(s)$ и $G^0(s)$ находятся из модального тождества

$$D(s)G^0(s) + K(s)R^0(s) = 1. \tag{23}$$

Утверждение 1. Система (1), (2) с передаточной функцией регулятора (21), в которой полином $q(s) \neq 0$, имеет D- структуру с полиномами

$$\rho(s) = k(s)d(s)q(s)\psi^{(2)}(s), \tag{24}$$

$$\Delta\rho(s)^+ = \Delta k(s)d(s)q(s)\psi^{(2)}(s), \quad \Delta\rho(s)^- = \Delta d(s)k(s)q(s)\psi^{(2)}(s). \tag{25}$$

Доказательство этого и последующих утверждений дается в приложении.

Заметим,что соотношения (25)означают, что увеличение коэффициентов полинома $q(s)\psi^{(2)}(s)$ "усиливает"влияние параметрических возмущений объекта (1) на устойчивость системы.

3.2. H_∞ субоптимальные системы

H_∞ субоптимальная система описывается [14] уравнениями

$$\dot{x} = Ax + b^{(1)}f + bu, \quad z = \begin{bmatrix} c^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad y = cx + \eta, \tag{26}$$

$$\dot{x}_c = Ax_c + b^{(1)}k_w x_c + bu + k_f(y - cx_c), \quad u = kx_c, \tag{27}$$

где $f(t)$ и $\eta(t)$ – внешнее возмущение и помеха измерения соответственно, $c^{(1)}$ и c – вектора – строки, $b^{(1)}$ и b – вектора – столбцы.

Вектора k, k_f и k_w определяются выражениями

$$k = -b^T X, \quad k_f = \left(E - \gamma^{-2} YX\right)^{-1} Y, \quad k_w = \gamma^{-2} b^{(1)T} X, \tag{28}$$

в которых E-единичная матрица, а неотрицательно определенные матрицы X, Y удовлетворяют уравнениям Риккати

$$A^T X + XA - Xbb^T X + \gamma^{-2} X b^{(1)} b^{(1)T} X = -c^{(1)T} Q_0 c^{(1)}, \tag{29}$$

$$AY + YA^T - Yc^T cY + \gamma^{-2} Y c^{(1)T} c^{(1)} Y = -b^{(1)} b^{(1)T}, \tag{30}$$

а число γ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\max}(XY) < \gamma^2,$$

где $\lambda_{\max}(M)$ – максимальное собственное значение матрицы M. Q_0– заданная неотрицательно определенная матрица.

Утверждение 2. H_∞ субоптимальная система (26), (27) имеет передаточную функцию D- структуры с полиномом

$$\rho(s) = k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,bd(s) \tag{31}$$

(фигурная скобка над матрицей означает присоединенную матрицу: $\overbrace{M} = M^{-1} det M$), в котором матрицы

$$L = b^{(1)} k_w, \quad N = k_f c. \tag{32}$$

Если возмущенный вектор объекта $\bar{b} = b + \Delta b$, а возмущение матрицы A: $\Delta A = 0$, то

$$\Delta\rho(s)^+ = k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,\Delta b d(s), \quad \Delta\rho(s)^- = 0. \tag{33}$$

4. Запасы устойчивости D–систем

Определение запасов устойчивости системы (1),(2) связано со следующими возмущенными передаточными функциями

$$\bar{w}_1(s) = kw(s), \quad \bar{w}_2(s) = e^{-j\theta}w(s), \tag{34}$$

в которых k и θ-положительные числа.

Запасом устойчивости по модулю называется[11] наибольшее положительное число L такое, что при $k \in [L, 1/L]$ возмущенная система устойчива, а запас устойчивости по фазе- это наибольшее положительное число φ такое, что при $\theta \in [0, \varphi]$ возмущенная система устойчива.

Запасы устойчивости по модулю и фазе определяются независимо и поэтому возможна ситуация показанная на рис.1, где годограф амплитудно -фазовой характеристики разомкнутой системы (годограф Найквиста) проходит сколь угодно близко к окружности единичного радиуса и к вещественной оси. Запасы устойчивости системы,имеющей такой годограф: $L = \infty$,а $\varphi = 45^o$. Если возмущенная система описывается передаточной функцией $\bar{w}_3(s) = ke^{-j\theta}w(s)$, то она теряет устойчивость при сколь угодно малых отклонениях числа k от единицы и θ-от нуля.

Чтобы избежать подобной ситуации будем использовать радиус запасов устойчивости.

Определение 2. Радиус запасов устойчивости (r) – это максимальный радиус круга с центром в точке $(-1; 0j)$, который не пересекается годографом амплитудно - фазовой характеристики разомкнутой системы.

Круг такого радиуса показан на рис.2

Радиус запасов устойчивости является обобщением понятий запасов устойчивости по фазе и модулю. Так, если $r = 0,75$, то запас по фазе $\varphi = 42°$, запас по модулю $L = 1,75$. При $r = 1$ $\varphi = 60°$, $L = 2$.

Он связан с передаточной функцией системы соотношением [15]

$$[1 + w(-j\omega)]\,[1 + w(j\omega)] \geqslant r^2, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \infty \tag{35}$$

Утверждение 3. Для любого заданного сколь угодно малого положительного числа ε_r всегда существует достаточно большой по модулю доминирующий коэффициент ρ_q ($q \in \overline{0, \gamma}$) анулируемого полинома $\rho(s)$, такой, что радиус запасов устойчивости системы D-системы будет меньше этого числа

$$r^2 < \varepsilon_\eta^2. \tag{36}$$

5. О построении систем с запасами устойчивости

При построении систем, обладающих запасами устойчивости ($r \geqslant 0.75$)можно выделить два существенно различных случая: в первом- объект (1) является минимально-фазовым (все корни полинома $k(s)$ имеют отрицательные вещественные части) и второй случай, когда этот объект- неминимально-фазовый.

Для первого случая метод синтеза систем с запасами устойчивости предложен в [16]. Он основан на процедуре АКОР (LQ-оптимизации) для объекта, записанного в форме вход-выход.Другой метод, называемый LTR[17], основан на построении специального фильтра Калмана. Более того, для таких объектов можно построить регулятор, обеспечивающий [18],[2] устойчивость системы при любых ограниченных параметрических возмущениях объекта.

В случае неминимально-фазового объекта можно выделить два их вида: (а) неминимально-фазовый устойчивый объект и (б)неминимально-фазовый неустойчивый объект (чьи полиномы $k(s)$ и $d(s)$ содержат корни с неотрицательными вещественными частями). Для объектов вида (а) доказано [19] существование регуляторов, обеспеспечивающих запасы устойчивости. Однако, для объектов вида (б) пока не удалось получить аналогичный результат. Возможно, что для вида (б) не существует таких регуляторов.

Методы построения систем с запасами устойчивости предложены в работах [21],[22].

Ниже приводятся примеры систем с малыми запасами устойчивости. В связи с этим отметим, что в работе [20] приведен ряд примеров, показывающих, что запасы устойчивости систем, построенных с использованием $LQ, H\infty, l_1, \mu$ методологий, могут быть недопустимо малы. Однако, в большинстве этих примеров объект управления является объектом вида (б) и поэтому остается не ясной причина малых запасов устойчивости: метод синтеза или вид объекта. В связи с этим ниже приводятся примеры систем с малыми запасами устойчивости, объекты управления которых не относятся к виду (б).

6. Примеры

6.1. Система со стабилизирующим(модальным) регулятором

Исследуем запасы устойчивости системы с регулятором из множества стабилизирующих регуляторов (21), построенной в книге [23]. Эта система описана также в пленарном докладе [24] как пример эффективного применения множества (21)

Объект управления (1) в этой системе имеет передаточную функцию

$$w_p(s) = \frac{k(s)}{d(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \tag{37}$$

Регулятор строится так,чтобы система удовлетворяла требованиям к точности ее работы при заданном гармоническом внешнем возмущении.

Вначале решается тождество (23), в котором
$\psi^{(1)}(s) = (s+1)^2, \quad \psi^{(2)}(s) = (s+1).$

Это дает полиномы одного из стабилизирующих регуляторов

$$r^0(s) = 19s - 11, \quad g^0(s) = s + 6. \tag{38}$$

Исходя из требований к точности регулирования находятся полиномы

$$q(s) = -79s^2 - 881s + 6, \quad \psi^{(3)}(s) = (s+1)^2 \tag{39}$$

После подстановки этих полиномов в выражение (21)находится передаточная функция регулятора

$$w_c(s) = \frac{-60s^4 - 598s^3 + 2515s^2 - 1794s + 1}{s(s^2+100)(s+9)}. \tag{40}$$

Радиус запасов устойчивости системы (37),(40) $r = 0.0029$ Эта система обладает высокой чувствительностью к возмущениям параметров объекта управления. Действительно, если коэффициент $\bar{k}_0 = 0.997$ (это означает,что $\bar{k}_0 = k_0 + \Delta k$,где $k_0 = 1, \Delta k = -0.003$), то система теряет устойчивость. Аналогичный результат имеет место, когда возмущаются параметры знаменателя передаточной функции объекта: если изменяется корень $s_1 = 2$ и $\bar{s}_1 = s_1 + \Delta s_1$, где $s_1 = 2, \Delta s_1 = 0.005$.

Покажем, что рассматриваемая система является D-системой. Для этого приведем полиномы структуры (8)

$$h^{(1)}(s) = k(s)r^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) = 19s^4 + 46s^3 + 24s^2 - 14s - 11, \tag{41}$$

$$l^{(1)}(s) = d(s)g^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) = s^6 + 6s^5 - 4s^4 - 26s^3 - 9s^2 + 20s + 12, \tag{42}$$

$$\rho(s) = k(s)d(s)q(s)\psi^{(2)}(s) = -79s^4 - 664s^3 + 2491s^2 - 1780s + 12. \tag{43}$$

Сравнивая эти полиномы замечаем, что анулируемый полином имеет доминирующий коэффициент $\rho_2 = 2491$.

6.2. H_∞ субоптимальная система

Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -0.25x_1 + x_2 - 10u + 7.7f, \quad \dot{x}_2 = -0.01x_1 + u + 20f, \\ y = x_1 + \eta, \quad z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = u. \end{gathered} \tag{44}$$

Передаточная функция объекта, связывающая переменные y и u,

$$w_p(s) = \frac{-10(s-0,1)}{(s+0,2)(s+0,05)}. \tag{45}$$

Вектора k_1, k_f, и k_w, уравнения регулятора (27) для объекта (44), полученные в результате решения уравнения Риккати (29), (30)при следующих значениях элементов диагональной матрицы Q_0: $q_{11} = q_{22} = 100$ и при наименьшем значении $\gamma = 4,800$, имеют вид

$$k = [-56,4 \ \ -667,1], \quad k_f = [13,88 \ 29,41]^T, \quad k_w = [-0,0134 \ \ -134]. \tag{46}$$

Передаточная функция регулятора

$$w_c(s) = \frac{-2,04 \cdot 10^4 s - 6403}{s^2 + 120,1s + 2,06 \cdot 10^5}. \tag{47}$$

Передаточная функция системы

$$w(s) = -w_p(s)w_c(s) = \frac{-2,04\cdot 10^5 s^2 - 4,36\cdot 10^4 s + 6403}{s^4 + 120,3s^3 + 2,061\cdot 10^5 s^2 + 5,153\cdot 10^4 s + 2061} \tag{48}$$

Радиус ее запасов устойчивости $r = 0,0091$,

При относительном параметрическом возмущении коэффициента $\frac{|b_1 - \bar{b}_1|}{|b_1|} = 0,01$ ($\bar{b}_1 = -10,1$) система становится неустойчивой.

Аналируемый полином

$$\rho(s) = 10^2 s^3 + 2,06\cdot 10^5 s^2 + 0,515\cdot 10^5 s + 0.02061\cdot 10^5. \tag{49}$$

содержит доминирующий коэффициент $\rho_2 = 2,06\cdot 10^5$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1.

Передаточная функция системы (1), (2)имеет, с учетом (21), вид

$$w(s) = \frac{k(s)r^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) + k(s)d(s)q(s)\psi^{(2)}(s)}{d(s)g^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) - k(s)d(s)q(s)\psi^{(2)}(s)} \tag{П.1}$$

Из этого выражения следует полином (24).

Убедимся, что параметрические возмущения полиномов $\rho(s)$ в числителе и знаменателе передаточной функции (24) различны. Действительно, пусть

$$\bar{k}(s) = k(s) + \Delta k(s), \quad \bar{d}(s) = d(s) + \Delta d(s), \tag{П.2}$$

тогда передаточная функция (П.1) принимает вид

$$\bar{w}(s) = \frac{[k(s) + \Delta k(s)]\left[r^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) + d(s)q(s)\psi^{(2)}(s)\right]}{[d(s) + \Delta d(s)]\left[g^0(s)\psi^{(1)}(s)\psi^{(3)}(s) - k(s)q(s)\psi^{(2)}(s)\right]}, \tag{П.3}$$

где $r^0(s)$ и $g^0(s)$ – полиномы, полученные с помощью тождества Безу (23). Отсюда следуют полиномы (25).

Доказательство утверждения 2.

Опуская возмущение и помеху и запишем уравнение объекта (26) и регулятора (27) как

$$d(s)y = c\ \overbrace{(Es - A)}\ bu, \tag{П.4}$$

$$\left[d_h(s) - k\ \overbrace{(Es - A + N - L)}\ b\right]u = k\ \overbrace{(Es - A + N - L)}\ k_f y, \tag{П.5}$$

где матрицы L и N имеют вид (32), а

$$d_h(s) = \det(Es - A + N - L). \tag{П.6}$$

Передаточная функция системы (П.4), (П.5)

$$w(s) = -\frac{k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,k_f c\,\overbrace{(Es - A)}\,b}{d_h(s)d(s) - k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,bd(s)}. \tag{П.7}$$

Запишем тождество

$$(Es - A + P)^{-1}P(Es - A)^{-1} = (Es - A)^{-1} - (Es - A + P)^{-1}, \tag{П.8}$$

доказательство которого приведено ниже, при $P = N - L$ как

$$(Es-A+N-L)^{-1}N(Es-A)^{-1} = (Es-A)^{-1} - (Es-A+N-L)^{-1} + (Es-A+N-L)^{-1}L(Es-A)^{-1},$$

и тогда выражение (П.7) принимает вид

$$w(s) = \frac{-k\,\overbrace{(Es - A)}\,bd_h(s) - k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,L\,\overbrace{(Es - A)}\,b + \rho(s)}{d(s)d_h(s) - \rho(s)}, \tag{П.9}$$

где

$$\rho(s) = k\,\overbrace{(Es - A + N - L)}\,bd(s). \tag{П.10}$$

Соотношения (33) следуют непосредственно из этого выражения.

Докажем теперь тождество (П.8). Представим его левую часть как

(П.11)

$$(Es-A+P)^{-1}P(Es-A)^{-1} = -(Es-A+P)^{-1}(A-P)(Es-A)^{-1} + (Es-A+P)^{-1}A(Es-A)^{-1}.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$(Es - \Lambda)^{-1}\Lambda = s(Es - \Lambda)^{-1} - E, \quad \Lambda(Es - \Lambda)^{-1} = s(Es - \Lambda)^{-1} - E, \tag{П.12}$$

запишем первое слагаемое в правой части (П.11) как

(П.13)

$$\begin{aligned}
&-(Es - A + P)^{-1}(A - P)(Es - A)^{-1} = -\left[s(Es - A + P)^{-1} - E\right](Es - A)^{-1} = \\
&-(Es - A + P)^{-1}s(Es - A)^{-1} + (Es - A)^{-1} = \\
&-(Es - A + P)^{-1}\left[A(Es - A)^{-1} + E\right] + (Es - A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (П.11) получим тождество (П.8).

Доказательство утверждения 3.

Введем функцию

$$v(\omega^2) = [1 + w(-j\omega)]\,[1 + w(j\omega)] = \frac{d^s(-j\omega)d^s(j\omega)}{\ell(-j\omega)\ell(j\omega)}, \tag{П.14}$$

используя которую можно записать неравенство (36) в виде

$$r^2 = \inf_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} v(\omega^2). \tag{П.15}$$

Для доказательства утверждения достаточно показать, что всегда найдутся частота ω_1, не зависящая от ρ_q, и положительное число ρ_q^* такие , что , если $|\rho_q| > \rho_q^*$, то

$$v(\omega_1^2) = \frac{d^s(-j\omega_1)d^s(j\omega_1)}{\rho_q^2 \omega_1^{2q}[1+\varepsilon_2(\rho_q)][1+\varepsilon_1(\omega_1^2, \rho_q)]}, \tag{П.16}$$

где $|\varepsilon_2(\rho_q)| \leqslant \varepsilon,\ |\varepsilon_1(\omega_1^2, \rho_q)| \leqslant \varepsilon,\ \ \varepsilon$-заданное число.

Тогда, замечая, что числитель правой части выражения (П.16) не зависит от ρ_q, заключаем, что всегда найдется число ρ_q ($|\rho_q| > \rho_q^*$), при котором выполнится неравенство

$$v(\omega_1^2) < \varepsilon_\eta^2, \tag{П.17}$$

которое и доказывает утверждение.

Без потери общности далее будем полагать число q заданным, а ρ_q - положительным.

Чтобы найти указанные частоту ω_1 и число ρ_q^*, рассмотрим функцию четных степеней в знаменателе выражения (П.14)

$$a(\omega^2) = \ell(-j\omega)\ell(j\omega) = \sum_{p=0}^{\alpha} a_{2p}\omega^{2p}, \tag{П.18}$$

где

$$a_{2p} = \sum_{\sigma_p} (-1)^{i+p}\ell_i\ell_j, \quad \sigma_p = \left\{i, j: \ \ i+j = 2p, \ \ i,j = \overline{0,\alpha}\right\}. \tag{П.19}$$

Представим функцию (П.18) в виде

$$a(\omega^2) = a_{2q}\omega^{2q}\left[1 + \varepsilon_1(\omega^2, \rho_q)\right], \tag{П.20}$$

где
$\varepsilon_1(\omega^2, \rho_q) = \widetilde{\mu}(\omega^2, \rho_q) + \underline{\mu}(\omega^2, \rho_q),$

$$\widetilde{\mu}(\omega^2, \rho_q) = \sum_{p=q+1}^{\alpha} \frac{a_{2p}}{a_{2q}}\omega^{2(p-q)}, \quad \underline{\mu}(\omega^2, \rho_q) = \sum_{p=0}^{q-1} \frac{a_{2p}}{a_{2q}}\omega^{-2(p-q)}. \tag{П.21}$$

Коэффициент

$$a_{2q} = (\rho_q + \ell_q^{(1)})^2 + \textstyle\sum_{\sigma_{pq}} (-1)^{i+q} \ell_i \ell_j, \qquad (\text{П}.22)$$
$$\sigma_{pq} = \{i, j: \quad i + j = 2q, \quad i, j = 0, ..., q-1, q+1, ..., \alpha\}$$

зависит от квадрата ρ_q, а остальные коэффициенты функции $a(\omega^2)$ зависят от ρ_q линейно и поэтому коэффициенты функции $\varepsilon_1(\omega^2, \rho_q)$ могут быть сделаны , при соответсвующем выборе числа ρ_q, меньшими (по модулю) наперед заданного числа.

Запишем выражение (П.22) как

$$a_{2q} = \rho_q^2 [1 + \varepsilon_2(\rho_q)]. \qquad (\text{П}.23)$$

где

$$\varepsilon_2(\rho_q) = \frac{2\ell_q^{(1)}}{\rho_q} + \frac{2(\ell_q^{(1)})^2}{\rho_q^2} + \sum_{\sigma_p q} \frac{(-1)^{i+q} \ell_i \ell_j}{\rho_q^2} \qquad (\text{П}.24)$$

Не трудно видеть, что

$$|\varepsilon_2(\rho_q)| \leqslant \frac{2|\ell_q^{(1)}|}{\rho_q} + \frac{2(\ell_q^{(1)})^2}{\rho_q^2} + \sum_{\sigma_{pq}} \frac{|\ell_i||\ell_j|}{\rho_q^2} \leqslant 2\eta + p_1 \eta^2 \qquad (\text{П}.25)$$

где p_1-число слагаемых, содержащих η^2 и, таким образом, всегда найдется число $\overrightarrow{\rho_q}$ такое, что при $\rho_q > \overrightarrow{\rho_q}$ выполняется неравенство

$$|\varepsilon_2(\rho_q)| \leqslant 2\eta + p_1 \eta^2 \leqslant \varepsilon \qquad (\text{П}.26)$$

Рассмотрим теперь оценку

$$|\widetilde{\mu}(\omega^2)| \leqslant \sum_{p=q+1}^{\alpha} \frac{|a_{2p}|}{a_{2q}} \omega^{2(p-q)}, \qquad (\text{П}.27)$$

При $\omega_1 = 1$ она принимает вид

$$|\widetilde{\mu}(1, \rho_q)| \leqslant \sum_{p=q+1}^{\alpha} \frac{|a_{2p}|}{a_{2q}} \leqslant \frac{1}{[1 + \varepsilon_2(\rho_q)]} \sum_{p=q+1}^{\alpha} \sum_{\sigma_p} \frac{|\ell_i||\ell_j|}{\rho_q^2}, \qquad (\text{П}.28)$$

Из этого выражения следует,что всегда найдется число $\widetilde{\rho_q}$ такое, что при $\rho_q > \widetilde{\rho_q}$ выполняется неравенство

$$|\widetilde{\mu}(1, \rho_q)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{П}.29)$$

Аналогично получим, что всегда найдется число $\underline{\rho_q}$ такое, что при $\rho_q > \underline{\rho_q}$ выполняется неравенство

$$|\underline{\mu}(1, \rho_q)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{П.30}$$

и, следовательно, $|\varepsilon_1(\omega_1^2, \rho_q)| \leqslant \varepsilon$ при $\omega_1 = 1$.

Обозначим $\rho_q^* = \max[\overrightarrow{\rho_q},\ \widetilde{rho_q},\ \underline{\rho_q}]$ и тогда при $\omega_1 = 1$ и всех ρ_q , удовлетворяющих условию $\rho_q > \rho_q^*$, справедливо выражение (П.16), из которого следует утверждение 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и упрваление.М.:Наука, 2002.

2. *Bhattcharyya S.P.,H.Chapellat,L.H.Keel.*Robust Control.The Parametric Approach//Prentice Hall, 1995.

3. *Летов А.М.*Аналитическое конструирование регуляторов I-IV //Автоматика и телемеханика. 1960. 4. с. 436-441; 5. с.561-568; 6. с.661-665; 1961. 4. с.425-435.

4. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control //Bullet Soc. Mat. Mech. 1960. Vol. 5, No 1. p.102- 119.

5. *Anderson B.D.O.,Moor J.B.* Linear system optimisation with prescribed degree of stability.//Proc.Inst. Eng., 1969, 116, N2.

6. *Александров А.Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. А и Т, №9, 1969, стр. 176 - 181.

7. *Александров А.Г.* Степень грубости системы с устройствами восстановления фазовых переменных. Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов", вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, стр. 105 - 118.

8. *Doyle J.C.* Guaranteed margins for LQG-regulators. // IEEE Trans.Autom. Contr.,1978,vol.AC-23,No4,pp.756-757.

9. *Doyle J.C. ,Stein G.* Robustness with observes. IEEE Trans.Autom. Contr.,1979,v.24,No1,pp.607-611.

10. *Александров А.Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества, ч.1 , А и Т, №12, 1971, стр. 12 - 20

11. *Safonov M.G.,Athans M* Gain and phase margin for multi-loop LQG regulators.//IEEE Trans. Automat. Control,1977,vl. Ac-22,N2,pp.173-179.

12. *Честнов В.Н.* О возможной неустойчивости управляемых систем и синтез регуляторов с учетом параметрических возмущений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1984. С. 26-35.

13. *Александров А.Г.* Степень грубости и частотные показатели качества автоматического регулирования. Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов", вып. 1, Саратов, 1976, стр. 14 - 26.

14. *Doyle J.C.Glover K.,Khagonekar P.P.,B.A.Franis.* State -space solution to standart H_2 and H_∞ control problem. IEEE Trans. Autom. Control,1989,v.34,No 8,pp.831-846.

15. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования .// Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов", СПИ, Саратов, 1980, стр. 3 - 14

16. *Александров А.Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества, ч.2. ж. "Автом. и телемех."АН СССР, 2, 1972, стр. 17 - 29

17. *Lhentomaki N.A.,Sandell N.R.,Athans M.* Robastness results in linear-quadratic Gaussian based multivariable control design.// IEEE Trans.Autom. Contr.,1981,v.26,No1,pp.75-92.

18. *Александров А.Г., Хлебалин Н.А.* Аналитический синтез регуляторов при неполной информации о параметрах объекта управления.
Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов",СПИ, Саратов, 1981, стр. 138 - 147.

19. *A.G.Alexandrov.* Guaranteed stabilized plant. //European Control Conference ECC'03, Cambridge,UK,Final programm with abstracts,pp.59,ECC2003 Conference Papers on CD-ROM.

20. *Keel L.,Bhattacharyya S.P.* Robust, fragile, or optimal? // IEEE Trans. Automat. Control,1997,V. 42., No8 ,pp.1098-1105.

21. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H субоптимизации // Автоматика и телемеханика. 1999. ;7. С. 100-109

22. *Агафонов П.А., Честнов В.Н.* Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞ подхода // Автоматика и телемеханика. 2004. N 9. С.110–119.

23. *J.C.Doyle,B.A.Franis,A.R.Tannenbaum.* Feedback Control Theory//Macmillan Pub.Com.,1992.pp.227.

24. *Anderson B.D.O.* From Youla-Kucera to identification,adaptive and nonlinear control. 13th World Congress of IFAC,1996, Preprints,Plenary and Index Volume,San Francisco, USA,pp.39-59.