

Федеральное агентство по образованию

---



ЭЛЕКТРОСТАЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(филиал)  
Федерального государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский технологический  
университет МИСиС»

Александров А.Г.

**Частотная теория  
автоматического управления  
(частотное управление)**

*Учебное пособие*

*Книга 2*

---

ЭЛЕКТРОСТАЛЬ 2010 г.

УДК 681.51  
ББК 32.965

А-46 Александров А.Г. Частотная теория автоматического управления (частотное управление): Учебное пособие. В 2 кн. – Кн.2 – Электросталь: ЭПИ МИСиС, 2010. – 312 с.

### Аннотация

Учебное пособие посвящено новому направлению в автоматическом управлении объектами с неопределёнными параметрами. Оно исходит из частотных параметров объекта, получаемых экспериментально.

Построен метод частотных параметров для синтеза обычных и адаптивных регуляторов, обеспечивающих требуемую точность регулирования и слежения при ограниченных внешних возмущениях.

Изложение теории носит конструктивный характер и завершается процедурами проектирования регуляторов.

Учебное пособие предназначено для изучения курса «Идентификация динамических систем» студентами специальности «Автоматизация технологических процессов и производств», а также для выполнения КНИР и дипломного проектирования.

© Электростальский политехнический институт (филиал)  
Федерального государственного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский технологический  
университет МИСиС», 2010

## Содержание

<b>Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы</b>	
(продолжение) .....	10
<b>Глава 6. Частотное модальное управление .....</b>	<b>11</b>
6.1. Прямое управление .....	12
6.1.1. Постановка задачи и подход к её решению .....	12
6.1.2. Алгоритм построения управления .....	13
6.1.3. Существование и единственность* .....	14
6.1.4. Объекты, заданные $\omega$ -индексами при $\lambda = 0$ .....	15
6.1.5. Аналитический синтез регуляторов .....	16
6.1.6. Следящие системы .....	18
6.1.7. ПИД-регулятор* .....	19
6.2. Натурные критерии устойчивости .....	19
6.2.1. Анализ устойчивости как решение обратной задачи синтеза ....	19
6.2.2. Уравнение обратной задачи .....	20
6.2.3. Уравнения частотной обратной задачи .....	21
6.2.4. Первый критерий устойчивости .....	22
6.2.5. Анализ устойчивости по стабилизированным $\omega$ -индексам .....	25
6.2.6. Второй критерий устойчивости .....	26
6.3. Идентификационное управление .....	28
6.3.1. Постановка задачи идентификации и её решение .....	28
6.3.2. Неустойчивые объекты .....	30
6.3.3. Объекты второго вида (частный случай) .....	31
6.3.4. Объекты второго вида (общий случай) .....	32
6.3.5. Идентификационное управление .....	34
<b>Приложения к главе 6 .....</b>	<b>35</b>
<b>6.П. Прямое управление дискретными объектами .....</b>	<b>35</b>
6.П.1. Постановка задачи и её решение .....	35
6.П.2. Объекты с запаздыванием .....	37
6.П.3. Синтез регуляторов .....	38
<b>Доказательства к главе 6 .....</b>	<b>39</b>
<b>6.Д. Доказательство теорем и утверждений .....</b>	<b>39</b>
6.Д.1. Доказательство теоремы 6.1.1 .....	39
6.Д.2. Доказательство утверждения 6.2.1 .....	42
6.Д.3. Доказательство утверждения 6.2.2 .....	44
6.Д.4. Доказательство утверждения 6.3.1 .....	46
6.Д.5. Доказательство утверждения 6.3.2 .....	50
<b>Заключение к главе 6 .....</b>	<b>51</b>

<b>Глава 7. Частотное оптимальное управление</b> .....	<b>52</b>
7.1. АКОР по частотным параметрам .....	52
7.1.1. Постановка задачи .....	52
7.1.2. Критерий обобщённой работы .....	53
7.1.3. Процедура АКОР .....	56
7.1.4. Существование и единственность решения .....	57
7.1.5. Системы с эталонной моделью* .....	59
7.2. Аналитический синтез регуляторов .....	60
7.2.1. Синтез по критерию точности .....	60
7.2.2. Учёт требований к показателям качества .....	61
7.2.3. Следящие системы и системы с эталонной моделью* .....	62
7.2.4. ПИД-регулятор* .....	63
7.3. Анализ устойчивости .....	65
7.3.1. Первый критерий устойчивости (необходимое условие) .....	65
7.3.2. Первый критерий (достаточное условие) .....	67
7.3.3. Второй критерий устойчивости .....	69
7.3.4. Объекты второго вида* .....	72
7.3.5. Погрешности вычислений (инструментальные погрешности) и анализ устойчивости* .....	73
<b>Доказательства к главе 7</b> .....	<b>75</b>
<b>7.Д Доказательство теорем и утверждений</b> .....	<b>75</b>
7.Д.1 Доказательство теоремы 7.1.1 .....	75
7.Д.2 Доказательство теоремы 7.1.2 .....	77
7.Д.3 Доказательство утверждения 7.1.1 .....	80
7.Д.3.1. Преобразование уравнений .....	80
7.Д.3.2. Преобразование уравнений Ляпунова .....	83
7.Д.3.3. Доказательство совпадения систем уравнений .....	84
7.Д.4 Доказательство утверждения 7.3.1 .....	88
7.Д.5 Доказательство утверждения 7.3.2 .....	88
<b>Заключение к главе 7</b> .....	<b>89</b>
<b>Глава 8. Частотные адаптивные регуляторы</b> .....	<b>90</b>
8.1. Декларативный регулятор ЧДР-1 .....	90
8.1.1. Управление несамостоятельными объектами .....	90
8.1.2. Структурная схема .....	92
8.1.3. Алгоритм препроцессора .....	93
8.1.4. Неопределённые структурные показатели .....	95
8.1.5. Свойства .....	98
8.1.5.1. Время достижения цели управления .....	98
8.1.5.2. Групповой регулятор. ТЭИ-регулятор .....	98

8.1.5.3.	Процедуральные и декларативные регуляторы	99
8.1.6.	Следящие системы	100
8.1.7.	Проблема настройки времени фильтрации	101
8.1.8.	Алгоритмы сокращения времени фильтрации	102
8.2.	Декларативный регулятор ЧДР-2 и его экспериментальное исследование	103
8.2.1.	Алгоритм регулятора	103
8.2.2.	Анализатор	107
8.2.3.	Описание экспериментальной установки	108
8.2.4.	Экспериментальное исследование	109
8.3.	Управление многорежимными объектами	112
8.3.1.	Объекты с известными моментами изменения режима	112
8.3.2.	Частотно-квазистационарные объекты*	113
8.3.3.	Частотный адаптивный регулятор ЧАР-3	114
8.3.4.	Объекты с неизвестными моментами изменения режима	116
8.3.5.	Объекты первого вида с регулятором ЧАР-4	117
8.4.	Система с эталонной моделью (следящие системы)	117
8.4.1.	Структурная схема	117
8.4.2.	Первый режим работы объекта	119
8.4.3.	Второй режим работы объекта	121
<b>Заключение к главе 8</b>		<b>122</b>
<b>Часть 4. Многомерные системы</b>		<b>123</b>
<b>Глава 9. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта</b>		<b>124</b>
9.1.	Модальное управление	124
9.1.1.	Постановка задачи	124
9.1.2.	Подход к решению	126
9.1.3.	Матричное модальное тождество	128
9.1.4.	Свойства полиномиальных матриц системы	129
9.1.5.	Элиминантная матрица	130
9.1.6.	Решение модального тождества	133
9.1.7.	Условия реализуемости регулятора	138
9.1.8.	Компенсационная схема*	139
9.2.	Синтез регуляторов и следящих систем на основе модального тождества	141
9.2.1.	Показатели точности и качества	141
9.2.2.	Постановка задачи синтеза и уравнение качества	143
9.2.3.	Структурное модальное управление	145
9.2.4.	Процедура синтеза регулятора	147
9.2.5.	Альтернативная процедура синтеза	150

9.2.6.	Задача слежения . . . . .	153
9.2.7.	Построение следящих систем при $v(t) = y_{ж}(t)$ . . . . .	155
9.2.8.	Слежение при $v(t) \neq y_{ж}(t)$ . . . . .	156
9.2.9.	Построение следящих систем при $f(t) = 0$ . . . . .	157
9.2.10.	Компенсационная схема* . . . . .	158
9.3.	Синтез на базе процедур АКОР . . . . .	158
9.3.1.	Процедура АКОР и условие оптимальности в частотной форме . . . . .	158
9.3.2.	Точность при ступенчатых внешних возмущениях . . . . .	160
9.3.3.	Точность при гармонических воздействиях . . . . .	162
9.3.4.	Синтез на основе АКОР по критерию обобщённой работы . . . . .	163
9.3.5.	Учёт требований к качеству . . . . .	164
9.3.6.	Следящие системы . . . . .	168
9.3.7.	Объект второго вида . . . . .	170
9.3.8.	Реализуемый регулятор . . . . .	173
9.3.9.	Следящие системы с объектами второго вида при $v(t) = y_{ж}(t)$ . . . . .	174
	<b>Приложения к главе 9 . . . . .</b>	<b>176</b>
<b>9.П.</b>	<b>Приложения . . . . .</b>	<b>176</b>
9.П.1.	Приведение уравнений объекта к канонической форме Лагранжа . . . . .	176
9.П.1.1.	Каноническая форма управляемости . . . . .	176
9.П.1.2.	Построение матриц канонической формы . . . . .	178
9.П.1.3.	Структурная теорема . . . . .	180
9.П.1.4.	Процедура приведения . . . . .	182
9.П.1.5.	Свойства матриц канонической формы . . . . .	183
9.П.2.	Приведение уравнений объекта к форме «вход-выход» . . . . .	184
9.П.2.1.	Каноническая форма наблюдаемости . . . . .	184
9.П.2.2.	Дуальные системы и построение матриц канонической формы . . . . .	185
9.П.2.3.	Процедура приведения . . . . .	186
9.П.2.4.	Столбцово-правильная форма «вход-выход» . . . . .	189
9.П.3.	Преобразование уравнений к форме Коши . . . . .	191
9.П.3.1.	Существо подхода . . . . .	191
9.П.3.2.	Преобразование приводимых уравнений . . . . .	192
9.П.3.3.	Преобразование уравнений к приводимой форме . . . . .	194
9.П.3.4.	Построение матрицы $U_L(s)$ . . . . .	196
9.П.4.	Построение уравнения качества . . . . .	198
9.П.4.1.	Постановка задачи . . . . .	198
	<b>Доказательства к главе 9 . . . . .</b>	<b>200</b>
<b>9.Д.</b>	<b>Доказательство теорем и утверждений . . . . .</b>	<b>200</b>
9.Д.1.	Доказательство теоремы 9.1.1 . . . . .	200
9.Д.2.	Доказательство утверждения 9.2.1 . . . . .	203

9.Д.3. Обоснование утверждения 9.3.1 .....	204
<b>Заключение к главе 9 .....</b>	<b>206</b>
<b>Глава 10. Анализ грубости* .....</b>	<b>207</b>
10.1. Передаточные функции и матрицы многомерных систем .....	207
10.1.1. Частотные передаточные матрицы .....	207
10.1.2. Обобщённая передаточная функция .....	211
10.1.3. Передаточная функция многомерной системы, разомкнутой по $\nu$ -му входу объекта .....	213
10.1.4. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по $\nu$ -му входу объекта (общий случай) .....	217
10.1.5. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по $\mu$ -му входу регулятора .....	220
10.2. Запасы устойчивости многомерных систем .....	221
10.2.1. Обобщённые запасы устойчивости .....	221
10.2.2. Запасы устойчивости на входе объекта и регулятора .....	224
10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости .....	226
10.3. Показатели грубости оптимальных систем .....	228
10.3.1. Границы обобщённых показателей грубости .....	228
10.3.2. Возможность малых запасов устойчивости на входе регулятора .....	229
10.3.3. Возможность малых запасов устойчивости на входе объекта в системах оптимальных в смысле функционалов, содержащих недиагональную матрицу при управлениях .....	231
10.3.4. Границы запасов устойчивости систем, оптимальных по критерию обобщённой работы .....	234
<b>Приложения к главе 10 .....</b>	<b>235</b>
<b>10.П. Матрицы возвратной разности и их сингулярные значения .....</b>	<b>235</b>
10.П.1. Аддитивные параметрические возмущения .....	235
10.П.2. Условие низкой чувствительности .....	237
10.П.3. Чувствительность по регулируемым переменным .....	239
10.П.4. Анализ грубости на основе матриц возвратной разности .....	241
10.П.5. Сингулярные значения матриц возвратной разности .....	244
10.П.6. Границы сингулярных значений матрицы возвратной разности по управлению .....	246
10.П.7. Критерий обобщённой работы .....	247
<b>Доказательства к главе 10 .....</b>	<b>248</b>
<b>10.Д. Доказательство теорем и утверждений .....</b>	<b>248</b>
10.Д.1. Доказательство утверждения 10.1.1 .....	248
10.Д.2. Доказательство теоремы 10.3.1 .....	249
10.Д.3. Доказательство теоремы 10.3.2 .....	250

10.Д.4. Доказательство теоремы 10.3.3.....	253
10.Д.5. Доказательство теоремы 10.3.4.....	254
10.Д.6. Доказательство теоремы 10.3.5.....	254
<b>Заключение к главе 10.....</b>	<b>255</b>
<b>Глава 11.Метод частотных параметров.....</b>	<b>256</b>
11.1. Стабилизация.....	256
11.1.1. Частотные параметры объектов первого вида.....	256
11.1.2. Частотные параметры объектов второго вида.....	258
11.1.3. Частотное модальное управление.....	259
11.1.4. Частотное оптимальное управление.....	261
11.1.5. АКОР по критерию обобщённой работы.....	262
11.1.6. Аналитическое конструирование регуляторов.....	264
11.1.7. Анализ устойчивости.....	265
11.2. Регулирование и слежение.....	267
11.2.1. Постановка задачи.....	267
11.2.2. Применение частотного модального управления.....	267
11.2.3. Построение следящих систем.....	269
11.2.4. Построение следящих систем при $f = 0$ и $r \neq m$ .....	270
11.2.5. Компенсационная схема*.....	271
11.2.6. Использование АКОР по критерию обобщённой работы.....	272
11.3. Адаптивное управление.....	272
11.3.1. Постановка задачи.....	272
11.3.2. Декларативный регулятор.....	273
11.3.3. Анализатор.....	275
11.3.4. Управление многорежимными объектами.....	276
11.3.5. Следящая система с эталонной моделью.....	277
11.3.6. Слежение в первом режиме работы объекта.....	278
11.3.7. Слежение во втором режиме работы объекта.....	281
<b>Доказательства к главе 11.....</b>	<b>281</b>
<b>11.Д. Доказательство теорем и утверждений.....</b>	<b>281</b>
11.Д.1. Доказательство теоремы 11.1.1.....	281
11.Д.2. Доказательство теоремы 11.1.2.....	285
11.Д.3. Доказательство теоремы 11.1.3.....	286
11.Д.4. Доказательство утверждения 11.1.1.....	288
11.Д.5. Доказательство теоремы 11.1.4.....	289
11.Д.6. Доказательство теоремы 11.1.5.....	295
<b>Заключение к главе 11.....</b>	<b>296</b>
<b>Примечания и литературные указания.....</b>	<b>298</b>
К части III.....	298



К главе 6.....	298
К главе 7.....	298
К главе 8.....	299
К части IV.....	299
К главе 9.....	299
К главе 10.....	300
К главе 11.....	301
<b>Литература.....</b>	<b>302</b>

---

## Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы (продолжение)

При управлении объектами с неопределёнными параметрами возможны две ситуации.

Во-первых, когда объект самотождественный и его частотные параметры могут быть получены экспериментально до начала работы объекта в системе управления.

Во-вторых, случай несамотождественного объекта, когда частотные параметры определяются и используются в процессе нормальной эксплуатации объекта в системе.

Пусть имеет место первая ситуация и экспериментально получены частотные параметры объекта. Для построения регулятора необходимо трансформировать аналитический синтез, изложенный в предыдущей части, в частотную область так, чтобы коэффициенты уравнений объекта трансформировались в частотные параметры. Полученный таким образом метод (метод частотных параметров) позволит разрешить задачи синтеза по частотным параметрам объекта.

Для несамотождественных объектов этот метод естественно становится основой прямых алгоритмов адаптивного управления.

Цель настоящей части:

- способ экспериментального определения частотных параметров и исследование сходимости процессов фильтрации при внешних возмущениях и помехах измерения,
- частотное представление методов пространства состояний (частотное модальное и частотное оптимальное управление) и построение на их основе метода частотных параметров,
- разработка критериев устойчивости систем, объекты которых заданы частотными параметрами,
- формирование алгоритмов частотного адаптивного управления.

## Глава 6. Частотное модальное управление

Частотное модальное управление – это управление (регулятор), которое строится по известным частотным параметрам объекта и корням характеристического полинома системы. Способ построения такого управления служит основой метода частотных параметров, который решает задачу синтеза регуляторов по требуемой точности регулирования или слежения. Существо этого метода было рассмотрено в п. 1.2.5.

Наряду с методом синтеза необходимо получить критерии анализа устойчивости по частотным параметрам разомкнутой системы. Истоком таких критериев явился критерий Найквиста. Однако он предполагает, вообще говоря, бесконечное число экспериментов для получения частотных характеристик во всём диапазоне частот от нуля до бесконечности. Кроме того, необходимо знать число полюсов передаточной функции разомкнутой системы, имеющих положительную вещественную часть. Последнее не следует из этих экспериментов.

Число экспериментов можно сократить, если определить (идентифицировать) коэффициенты передаточной функции по её частотным параметрам, рассчитать частотные характеристики для всего диапазона частот и затем использовать критерий Найквиста. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти прямой (неидентифицированный) критерий устойчивости?

Заметим, что прямые методы синтеза и анализа, являющиеся предметом этой главы, необходимо сравнить с идентификационными. Это связано с тем, что можно (идентифицировать) вычислить по частотным параметрам объекта коэффициенты его дифференциального уравнения и затем использовать аналитические методы синтеза, изложенные в главах 3 и 4.

Цель этой главы:

- построение метода частотных параметров (на основе метода частотного модального управления), который является прямым методом,
- формирование критерия устойчивости по частотным параметрам,
- сравнение метода частотных параметров с идентификационным подходом к построению регуляторов.

## 6.1. Прямое управление

### 6.1.1. Постановка задачи и подход к её решению

Рассмотрим полностью управляемый и устойчивый по управлению объект

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad \gamma < n. \quad (6.1.1)$$

Параметры  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) объекта неизвестны, а известны  $\omega$ -индексы  $r^\lambda(\omega_k)$ ,  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

**Задача 6.1.1. (Задача частотного модального управления)** Для объекта (6.1.1) с заданными  $\omega$ -индексами найти параметры регулятора

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y \quad (6.1.2)$$

такие, чтобы характеристический полином  $d^u(s)$  системы (6.1.1), (6.1.2) совпадал с полиномом

$$\delta(s) = b(s)\psi(s), \quad (6.1.3)$$

где

$$\psi(s) = \psi_{2n-\gamma-1}s^{2n-\gamma-1} + \dots + \psi_1s + \psi_0 \quad (6.1.4)$$

– заданный полином. ■

Для решения этой задачи рассмотрим структурное модальное тождество (3.1.32)

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi(s). \quad (6.1.5)$$

Разделим его на  $d(s)$ . Тогда

$$g(s) - w(s)r(s) = w(s)\psi(s). \quad (6.1.6)$$

Положим  $s = \lambda + j\omega$  и получим модальное частотное тождество

$$g(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)r(\lambda + j\omega) = w(\lambda + j\omega)\psi(\lambda + j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (6.1.7)$$

Зафиксируем  $n$  значений  $\omega$ , при которых заданы  $\omega$ -индексы, и запишем систему уравнений

$$g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k) = w(\lambda + j\omega_k)\psi(\lambda + j\omega_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.1.8)$$

описывающих тождество (6.1.7) на  $\omega$ -тесте.

Заменим  $w(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) на известные числа  $r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и получим систему из  $2n$  линейных алгебраических уравнений для определения искомым параметров регулятора (6.1.2).

## 6.1.2. Алгоритм построения управления

Запишем систему (6.1.8) в более подробной форме

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} g_l [\lambda + j\omega_k]^l - [r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)] \sum_{l=0}^{n-1} r_l [\lambda + j\omega_k]^l = \\ = [r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)] \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \psi_l [\lambda + j\omega_k]^l \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Представим

$$[\lambda + j\omega_k]^l = \rho_l(\omega_k) + j\mu_l(\omega_k) \quad l = \overline{0, 2n-\gamma}, \quad (6.1.10)$$

где

$$\rho_l(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]^*} \rho_{2\nu}^{(l)} \omega_k^{2\nu}, \quad \mu_l(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]^*} \mu_{2\nu+1}^{(l)} \omega_k^{2\nu+1} \quad l = \overline{0, 2n-\gamma}, \quad (6.1.11)$$

а  $\left[\frac{l}{2}\right]^*$  – целая (меньшая) часть числа  $\frac{l}{2}$ .

Коэффициенты полиномов (6.1.11) являются функциями  $\lambda$

$$\rho_{2\nu}^{(l)} = \lambda^{l-2\nu} (-1)^\nu \xi_{2\nu}^{(1)} \quad \nu = 0, \left[\frac{l}{2}\right]^*, \quad \mu_{2\nu+1}^{(l)} = \lambda^{l-2\nu-1} (-1)^\nu \xi_{2\nu+1}^{(2)} \quad \nu = 0, \left[\frac{l-1}{2}\right]^*, \quad (6.1.12)$$

в которых  $\xi_{2\nu}^{(1)}$  и  $\xi_{2\nu+1}^{(2)}$  – известные числа.

Подставим (6.1.10) в (6.1.9)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \rho_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} [r^\lambda(\omega_k) \rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \mu_l(\omega_k)] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} [r^\lambda(\omega_k) \rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \mu_l(\omega_k)] \psi_l \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \mu_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} [r^\lambda(\omega_k) \mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_l(\omega_k)] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} [r^\lambda(\omega_k) \mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_l(\omega_k)] \psi_l \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Запишем эту систему в более компактной форме

$$\begin{pmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (6.1.15)$$

где

$$\mathbf{g}' = [g_0 \ g_1 \ \cdots \ g_{n-1}], \quad \mathbf{r}' = [r_0 \ r_1 \ \cdots \ r_{n-1}], \quad \boldsymbol{\psi}' = [\psi_0 \ \psi_1 \ \cdots \ \psi_{2n-\gamma-1}], \quad (6.1.16)$$

$M^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) – блочные матрицы размеров  $n \times n$ , элементы которых

$$m_{kl}^{(1)} = \rho_l(\omega_k), \quad m_{kl}^{(2)} = r^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad l = \overline{0,n-1}, \quad (6.1.17)$$

$$m_{kl}^{(3)} = \mu_l(\omega_k), \quad m_{kl}^{(4)} = r^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad l = \overline{0,n-1}, \quad (6.1.18)$$

$N^{(i)}$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – блочные матрицы размеров  $n \times (2n - \gamma)$ , элементы которых

$$n_{kl}^{(1)} = r^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad l = \overline{0,2n-\gamma-1}, \quad (6.1.19)$$

$$n_{kl}^{(2)} = r^\lambda(\omega_k)\mu_l(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k)\rho_l(\omega_k) \quad k = \overline{1,n} \quad l = \overline{0,2n-\gamma-1}. \quad (6.1.20)$$

Таким образом, алгоритм построения прямого частотного модального управления сводится к решению системы  $2n$  линейных алгебраических уравнений (6.1.15).

### 6.1.3. Существование и единственность\*

Исследуем систему (6.1.15). Она эквивалентна системе (6.1.9), которая следует из (6.1.8). Умножим каждое из уравнений (6.1.8) на  $d(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1,n}$ ). Тогда получим систему

$$d(\lambda + j\omega_k)g(\lambda + j\omega_k) - b(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k) = b(\lambda + j\omega_k)\psi(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1,n}, \quad (6.1.21)$$

которая следует из тождества (6.1.5) при  $s = \lambda + j\omega_k$  ( $k = \overline{1,n}$ ). Это тождество приводит к системе (3.1.9). Она, как утверждает следствие 3.1.2, имеет единственное решение. Таким образом, достаточно доказать, что тождество (6.1.5) и система (6.1.21) доставляют одну и ту же пару полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ .

Заметим, что система (6.1.21) получена умножением уравнений (6.1.8) на комплексные числа  $d(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1,n}$ ). Поэтому, для эквивалентности (6.1.21) и (6.1.8) необходимо и достаточно неравенства

$$d(\lambda + j\omega_k) \neq 0 \quad k = \overline{1,n}. \quad (6.1.22)$$

Если известны  $\omega$ -индексы, то это неравенство выполняется. Действительно, пусть для некоторого числа  $\nu \leq n$ ,  $d(\lambda + j\omega_\nu) = 0$ . Тогда не существует частотных параметров

$$r^\lambda(\omega_\nu) = \operatorname{Re} w(\lambda + j\omega_\nu) = \operatorname{Re} \frac{b(\lambda + j\omega_\nu)}{d(\lambda + j\omega_\nu)} \quad \text{и} \quad i^\lambda(\omega_\nu) = \operatorname{Im} w(\lambda + j\omega_\nu) = \operatorname{Im} \frac{b(\lambda + j\omega_\nu)}{d(\lambda + j\omega_\nu)}.$$

Это противоречит предположению о том, что  $\omega$ -индексы – заданные числа.

**Теорема 6.1.1.** Если объект (6.1.1) полностью управляем, то система (6.1.15) имеет единственное решение, которое совпадает с решением системы (3.1.9). ■

Доказательство теоремы приведено в 6.Д.1.

Заметим, что матрицы  $M^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) системы (6.1.15) зависят от выбора испытательных частот  $\omega_k$  ( $k = \overline{1,n}$ ). С другой стороны, теорема 6.1.1 утверждает, что

решение системы (6.1.15) совпадает с решением системы (3.1.9), которая не содержит этих частот. Это приводит к следующему заключению.

**Следствие 6.1.1.** Система (6.1.15), разрешающая задачу частотного модального управления (задачу 6.1.1), имеет решение, не зависящее от выбора испытательных частот (не зависит от  $\omega$ -теста). ■

Доказательство следствия содержится в доказательстве теоремы 6.1.1.

#### 6.1.4. Объекты, заданные $\omega$ -индексами при $\lambda = 0$

Неустойчивые объекты (6.1.1) могут описываться стабилизированными  $\omega$ -индексами  $r^c(\omega_k)$  и  $i^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Устойчивые объекты также могут задаваться  $\omega$ -индексами с нулевым  $\lambda$ -смещением. Опишем решение задачи 6.1.1 для этих случаев.

Уравнения (6.1.8) принимают теперь вид

$$g(j\omega_k) - w^c(j\omega_k)r(j\omega_k) = w^c(j\omega_k)\psi(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.1.23)$$

В развёрнутой форме эта система записывается аналогично (6.1.13), (6.1.14)

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \omega_k^{2q}(-1)^q g_{2q} - \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]^*} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q \right] r_{2q} = \\ & = \sum_{q=0}^{\left[\frac{2n-\gamma-1}{2}\right]^*} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q \right] \psi_{2q} \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.1.24) \\ & \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \omega_k^{2q+1}(-1)^q g_{2q+1} - \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q \right] r_{2q+1} = \\ & = \sum_{q=0}^{\left[\frac{2n-\gamma-2}{2}\right]^*} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q \right] \psi_{2q+1} \quad k = \overline{1, n} \quad (6.1.25) \end{aligned}$$

Эти уравнения получаются из (6.1.13), (6.1.14), если в них положить

$$\rho_{2q}(\omega) = \omega^{2q}(-1)^q \quad q = 0, \overline{\left[\frac{l}{2}\right]^*}, \quad (6.1.26)$$

$$\mu_{2q}(\omega) = \omega^{2q+1}(-1)^q \quad q = 0, \overline{\left[\frac{l-1}{2}\right]^*}. \quad (6.1.27)$$

Решение системы (6.1.24), (6.1.25) единственно и совпадает с решением уравнений (3.1.9). Это следует из теоремы 6.1.1, поскольку она сформулирована вне зависимости от величины  $\lambda$  и поэтому справедлива при  $\lambda = 0$ .

Для асимптотически устойчивых объектов система (6.1.24), (6.1.25) сохраняется. Нужно лишь заменить в ней

$$r^c(\omega_k) = r(\omega_k), \quad i^c(\omega_k) = i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}.$$

### 6.1.5. Аналитический синтез регуляторов

Пусть к объекту (6.1.1) приложено внешнее возмущение. Тогда он описывается уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u + m_\alpha f^{(\alpha)} + \dots + m_1\dot{f} + m_0f, \quad (6.1.28)$$

где  $f(t)$  – ступенчатая функция вида (3.2.2) и известна оценка

$$|m_0| \leq m_0^*. \quad (6.1.29)$$

**Задача 6.1.2.** Пусть для объекта (6.1.28) известны  $\omega$ -индексы, а также числа  $m_0^*$  и  $\bar{f}$ . Найти регулятор (6.1.2) такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени  $t_{рег}$ , выполнялось условие

$$|y(t)| \leq y^*, \quad (6.1.30)$$

где  $y^*$  – заданное число, характеризующее точность регулирования. ■

В этой задаче в отличие от задачи 3.2.1 отсутствуют требования к времени регулирования и регулированию. Это естественно, поскольку неизвестны коэффициенты  $m_i$  ( $i = \overline{1, \alpha}$ ) при производных внешнего воздействия в уравнении (6.1.23), которые существенно влияют на показатели качества.

Найдём свободный член полинома (6.1.4)

$$\psi_0 \geq \frac{m_0^* \bar{f}}{y^*}. \quad (6.1.31)$$

Остальные коэффициенты этого полинома должны удовлетворять лишь требованию гурвицевости.

Можно принять, например,

$$\psi(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma-1} (s + s^*)^n, \quad (6.1.32)$$

где  $\varepsilon^0$  – некоторое положительное число, а

$$s^* = \frac{(m_0^* \bar{f})^{1/n}}{(y^*)^{1/n}}. \quad (6.1.33)$$

Построим полином  $\psi(s)$  и решим систему (6.1.15). Если  $f(t)$  – гармоническое возмущение (3.2.3) и известна оценка

$$|m(j\omega^f)| \leq m^f, \quad \omega_*^f \leq \omega^f \leq \omega^{f*}$$

(где  $m^f$ ,  $\omega_*^f$ ,  $\omega^{f*}$  – заданные числа), то постоянную времени  $\varepsilon^0$  и число  $\psi_0$  определяем из неравенства, аналогично (3.2.17)

$$\psi_0 \left[ \sqrt{(\varepsilon^0 \omega^f)^2 + 1} \right]^{2n-\gamma-1} \geq \frac{m^f f_{з.арм.}}{y^*}. \quad (6.1.34)$$



Пример 6.1.1. Рассмотрим велосипед (1.3.6) при внешнем возмущении

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u + f \quad (6.1.35)$$

с известными параметрами  $d_0$ ,  $b_1$ ,  $b_0$ .

Здесь  $f(t)$  – ступенчатое возмущение с границей

$$\bar{f} = 10. \quad (6.1.36)$$

Известно, что объект полностью управляем,  $b_1 > 0$ ,  $b_0 > 0$  (это означает устойчивость по управлению), а его степень неустойчивости оценивается числом 6.

Известны  $\omega$ -индексы велосипеда, полученные экспериментально при

$$\lambda = 6; \quad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6; \quad (6.1.37)$$

$$r^\lambda(\omega_1) = 0.85, \quad r^\lambda(\omega_2) = 0.22; \quad (6.1.38)$$

$$i^\lambda(\omega_1) = -1.4, \quad i^\lambda(\omega_2) = -0.88. \quad (6.1.39)$$

Требуется найти параметры регулятора (робота-велосипедиста)

$$g_1 \dot{u} + g_0 u = r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad (6.1.40)$$

такие, чтобы установившаяся ошибка регулирования движения велосипеда

$$|y_{уст}| \leq 0.204. \quad (6.1.41)$$

Для решения этой задачи найдём, используя (6.1.31),

$$\psi_0 = \frac{\bar{f}}{y^*} = 49. \quad (6.1.42)$$

и примем

$$\psi(s) = s^2 + 14s + 49 = (s + 7)^2. \quad (6.1.43)$$

Запишем уравнения (6.1.13), (6.1.14) для определения искомых параметров регулятора (6.1.40).

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \rho_0(\omega) &= 1, & \mu_0(\omega) &= 0, \\ \rho_1(\omega) &= \lambda, & \mu_1(\omega) &= \omega, \\ \rho_2(\omega) &= \lambda^2 - \omega^2, & \mu_2(\omega) &= 2\lambda\omega, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & g_0 + \lambda g_1 - r^\lambda(\omega_k) r_0 - [r^\lambda(\omega_k) \lambda - i^\lambda(\omega_k) \omega_k] r_1 = \\ & = r^\lambda(\omega_k) \psi_0 + [r^\lambda(\omega_k) \lambda - i^\lambda(\omega_k) \omega_k] \psi_1 + [r^\lambda(\omega_k) (\lambda^2 - \omega_k^2) - i^\lambda(\omega_k) 2\lambda \omega_k] \quad k = \overline{1, 2}, \quad (6.1.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda g_1 - i^\lambda(\omega_k) r_0 - [r^\lambda(\omega_k) \omega_k + i^\lambda(\omega_k) \lambda] r_1 = \\ & = i^\lambda(\omega_k) \psi_0 + [r^\lambda(\omega_k) \omega_k + i^\lambda(\omega_k) \lambda] \psi_1 + [r^\lambda(\omega_k) 2\lambda \omega_k + i^\lambda(\omega_k) (\lambda^2 - \omega_k^2)] \quad k = \overline{1, 2}. \quad (6.1.45) \end{aligned}$$

Подставляя в (6.1.44), (6.1.45) параметры (6.1.37)-(6.1.38) и коэффициенты полинома (6.1.43), получим систему из 4-х линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему, найдём

$$g_1 = 5, \quad g_0 = 30; \quad r_1 = -14, \quad r_0 = -65. \quad (6.1.46)$$

■

### 6.1.6. Следящие системы

Пусть для объекта (6.1.28), для которого известна оценка (6.1.29) и  $\omega$ -индексы, требуется найти параметры регулятора (3.3.11)

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v, \quad (6.1.47)$$

такие, чтобы выход системы (6.1.28), (6.1.47) и желаемая функция  $y_{жс}(t)$  отличались не более чем на  $y^*$

$$|y(t) - y_{жс}(t)| \leq y^*, \quad (6.1.48)$$

где изображение

$$y_{жс}(s) = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)}v, \quad (6.1.49)$$

а  $l_m(s)$  и  $\psi_m(s)$  – заданные полиномы.

Для решения этой задачи используем принцип разделения: решим задачу 6.1.2 и найдём полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$ , полагая при этом вместо (6.1.32)

$$\psi(s) = \psi_m(s) \quad (6.1.50)$$

при условии, что

$$\psi_0^m > \psi_0, \quad (6.1.51)$$

где  $\psi_0$  определяется из (6.1.31), затем положим

$$r^n(s) = l_m(s). \quad (6.1.52)$$

Если условие ( $\psi_0^m > \psi_0$ ) согласования параметров желаемой модели системы с требуемой точностью регулирования не выполняется и  $\psi_0^m < \psi_0$ , то следует принять

$$\psi(s) = \psi_m(s) \left( s + \frac{\psi_0}{\psi_0^m} \right). \quad (6.1.53)$$

При этом, как и ранее, ограничим желаемую модель условиями

$$\deg \psi_m(s) = 2n - \gamma - 2, \quad \deg l_m(s) \leq n - 1. \quad (6.1.54)$$

Решив систему (6.1.15) и найдя полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$ , полагаем в уравнении (6.1.47)

$$r^n(s) = l_m(s) \left( s + \frac{\psi_0}{\psi_0^m} \right). \quad (6.1.55)$$

### 6.1.7. ПИД-регулятор\*

Решение задачи 6.1.2 можно искать в классе ПИД-регуляторов, описываемых уравнением

$$\bar{g}_n u^{(n)} + \dots + \bar{g}_1 \dot{u} + \bar{g}_0 u = \bar{r}_n y^{(n-1)} + \dots + \bar{r}_2 \dot{y} + \bar{r}_1 y + \bar{r}_0 \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau. \quad (6.1.56)$$

В этом случае требование (6.1.30) к точности выполняется автоматически. Кроме того, не требуются оценки чисел  $m_0$  и  $f$  функции  $f(t)$ . При этом  $\omega$ -индексы объекта (6.1.28) должны быть расширенными:  $r^\lambda(\omega_k)$  и  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n+1}$ ).

В процедуре её решения, изложенной в п. 3.2.5 для известных параметров объекта, используется «расширенный объект» (3.2.40) с передаточной функцией

$$\bar{w}(s) = \frac{1}{s} w(s), \quad (6.1.57)$$

связывающей  $\bar{y}$  и  $u$ :  $\bar{y} = \bar{w}(s)u$ .

Частотные параметры «расширенного объекта» определяются по известным  $\omega$ -индексам объекта (6.1.2). Действительно,

$$\bar{w}^\lambda(j\omega_k) = \frac{1}{j\omega_k} \left[ r^\lambda(\omega_k) + j i^\lambda(\omega_k) \right] = \frac{i^\lambda(\omega_k)}{\omega_k} + j \left[ -\frac{r^\lambda(\omega_k)}{\omega_k} \right], \quad (6.1.58)$$

и, следовательно,

$$\bar{r}^\lambda(\omega_k) = \frac{i^\lambda(\omega_k)}{\omega_k}, \quad \bar{i}^\lambda(\omega_k) = -\frac{r^\lambda(\omega_k)}{\omega_k} \quad k = \overline{1, n+1}. \quad (6.1.59)$$

Заменяем в (6.1.9)  $n$  на  $n+1$ , подставим в эту систему значения (6.1.59) и получим  $2n+2$  уравнений (6.1.15) для определения параметров регулятора (6.1.56).

## 6.2. Натурные критерии устойчивости

### 6.2.1. Анализ устойчивости как решение обратной задачи синтеза

Пусть имеется система регулирования

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1 \dot{y} + d_0 y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u, \quad \gamma < n, \quad (6.2.1)$$

$$u^{(n-1)} + g_{n-2}u^{(n-2)} + \dots + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1 \dot{y} + r_0 y. \quad (6.2.2)$$

Параметры  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) объекта неизвестны. Известны его расширенные  $\omega$ -индексы

$$r^\lambda(\omega_k), \quad i^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*}, \quad \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^* = \begin{cases} \gamma/2 & \text{при } \gamma - \text{чётном,} \\ (\gamma+1)/2 & \text{при } \gamma - \text{нечётном.} \end{cases}$$

Далее будем обозначать  $p = n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*$ .

Параметры  $g_i, r_j$  ( $i = \overline{0, n-2}, j = \overline{0, n-1}$ ) регулятора известны. Уравнение (6.2.2) совпадает с (6.1.2), если последнее разделить на  $g_{n-1}$ .

Объект и регулятор предполагаются полностью управляемыми, кроме того, в отличие от (6.1.1) объект может быть неустойчив по управлению (полином  $b(s)$  не обязательно гурвицев).

Исследуем асимптотическую устойчивость системы (6.2.1), (6.2.2) при произвольных начальных условиях  $y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{n-1}(t_0); u(t_0), \dot{u}(t_0), \dots, u^{n-2}(t_0)$ .

Задачу исследования устойчивости будем трактовать как *обратную задачу модального управления*: для объекта (6.2.1) и регулятора (6.2.2) найти характеристический полином и его корни (моды)  $s_i^*$  ( $i = \overline{1, 2n-1}$ ).

Рассмотрим вначале случай, когда параметры объекта (6.2.1) известны. В этом случае исследование устойчивости сводится к анализу гурвицевости характеристического полинома

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \quad (6.2.3)$$

Построение этого полинома и анализ его гурвицевости составляют решение обратной задачи при известных параметрах объекта.

### 6.2.2. Уравнение обратной задачи

Запишем (6.2.3) в форме

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)] - \delta(s) = 0, \quad (6.2.4)$$

где полином  $d^u(s)$  степени  $2n - 1$  заменён неизвестным полиномом  $\delta(s)$  неопределённой степени.

Погрузим уравнение (6.2.4) в некоторое множество уравнений

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]l(s) - \gamma(s)\delta(s) = 0, \quad (6.2.5)$$

где  $\gamma(s)$  – заданный полином

$$\deg \gamma(s) < 2n - 1, \quad (6.2.6)$$

$l(s)$  – некоторый полином.

При  $\gamma(s) = 1$  из (6.2.5) следует

$$\delta(s) = d^u(s)l(s).$$

Пусть

$$\gamma(s) = b(s). \quad (6.2.7)$$

Тогда (6.2.5) примет вид

$$d^u(s)l(s) - b(s)\delta(s) = 0. \quad (6.2.8)$$

Утверждение 6.2.1. Если полиномы  $d^u(s)$  и  $b(s)$  не имеют общего делителя ( $\nu(s) = 1$ ) и если принять

$$\deg l(s) = \deg b(s), \quad \deg \delta(s) = \deg d^u(s), \quad \delta_{2n-1} = 1, \quad (6.2.9)$$

то уравнение (6.2.8) имеет единственное решение

$$l(s) = b(s), \quad \delta(s) = d^u(s). \quad (6.2.10)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.2. Таким образом, уравнение (6.2.5) имеет решение  $d^u(s)$ , совпадающее с выражением (6.2.3), и поэтому (6.2.8) можно назвать *уравнением обратной задачи*.

### 6.2.3. Уравнения частотной обратной задачи

Разделим (6.2.8) на полином  $d(s)$  и найдём

$$[g(s) - w(s)r(s)]l(s) - w(s)\delta(s) = 0. \quad (6.2.11)$$

Положим  $s = \lambda + j\omega$ . Тогда

$$[g(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)r(\lambda + j\omega)]l(\lambda + j\omega) - w(\lambda + j\omega)\delta(\lambda + j\omega) = 0. \quad (6.2.12)$$

Зафиксируем значения  $\omega$  и  $\lambda$ , при которых заданы  $\omega$ -индексы объекта, и запишем систему уравнений

$$[g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k)]l(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)\delta(\lambda + j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1, p}, \quad (6.2.13)$$

которую будем называть *уравнениями обратной задачи частотного модального управления* (или *уравнениями частотной обратной задачи*).

В развёрнутой форме эта система принимает вид

$$[\tilde{r}(\omega_k) + j\tilde{i}(\omega_k)] \sum_{i=0}^{\gamma} l_i[\lambda + j\omega_k]^i - [r^\lambda(\omega_k) + j i^\lambda(\omega_k)] \sum_{i=0}^{2n-1} \delta_i[\lambda + j\omega_k]^i = 0 \quad k = \overline{1, p}, \quad (6.2.14)$$

где

$$\tilde{r}(\omega_k) = \operatorname{Re}[g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k)], \quad (6.2.15)$$

$$\tilde{i}(\omega_k) = \operatorname{Im}[g(\lambda + j\omega_k) - w(\lambda + j\omega_k)r(\lambda + j\omega_k)]. \quad (6.2.16)$$

Используя (6.1.13), (6.1.14), получим

$$\tilde{r}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ r^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] r_i, \quad (6.2.17)$$

$$\tilde{i}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ r^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] r_i. \quad (6.2.18)$$

Запишем систему (6.2.14), аналогично (6.1.13), (6.1.14), в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\gamma} \left[ \tilde{r}(\omega_k) \rho_i(\omega_k) - \tilde{i}(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[ r^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*}, \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\gamma} \left[ \tilde{r}(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + \tilde{i}(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[ r^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left[ \frac{\gamma}{2} \right]^*}. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Дополним эти уравнения равенством

$$\delta_{2n-1} = 1. \quad (6.2.21)$$

из соотношений (6.2.9).

**Утверждение 6.2.2.** Если характеристический полином  $d^u(s)$  системы (6.2.1), (6.2.2) и полином  $b(s)$  объекта не имеют общего делителя, то решение системы (6.2.19)-(6.2.21) существует и единственно. Это решение имеет вид (6.2.10). ■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.3.

Заметим, что если регулятор (6.2.2) получен с использованием структурного модального управления, то полином  $d^u(s)$  делится на  $b(s)$ . В этом случае определитель матрицы коэффициентов системы (6.2.19)-(6.2.21) равен нулю.

#### 6.2.4. Первый критерий устойчивости

Если система (6.2.19)-(6.2.21) – не вырождена (её определитель отличен от нуля), то решив её, находим коэффициенты  $\delta_i$  ( $i = \overline{0, 2n-2}$ ) характеристического полинома

$$d^u(s) = \sum_{i=0}^{2n-1} \delta_i s^i \quad (6.2.22)$$

системы (6.2.1), (6.2.2).

Составим из этих коэффициентов определители Гурвица (2.1.14)

$$\Delta_1 = \delta_{2n-2}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} \\ 1 & \delta_{2n-3} \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \delta_{2n-6} \\ 1 & \delta_{2n-3} & \delta_{2n-5} \\ 0 & \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} \end{pmatrix},$$

$$\dots, \quad \Delta_{2n-1} = \det \begin{pmatrix} \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \delta_{2n-6} & \dots & 0 \\ 1 & \delta_{2n-3} & \delta_{2n-5} & \dots & 0 \\ 0 & \delta_{2n-2} & \delta_{2n-4} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \delta_{2n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.23)$$

Если эти определители положительны, то система (6.2.1), (6.2.2) асимптотически устойчива. Отсюда следует критерий устойчивости.

**Критерий 6.2.1. (Первый частотно-алгебраический критерий устойчивости).**

Пусть дана система (6.2.1), (6.2.2) с известным регулятором и объектом управления (6.2.1), заданным расширенными  $\omega$ -индексами  $r^\lambda(\omega_k)$  и  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ).

Для асимптотической устойчивости системы (6.2.1), (6.2.2) необходимо и достаточно, чтобы решения  $\delta_i$  ( $i = \overline{0, 2n-2}$ ) уравнений (6.2.19)-(6.2.21) удовлетворяли неравенствам Гурвица

$$\Delta_i > 0 \quad i = \overline{1, 2n-1}. \quad (6.2.24)$$

■

**Пример 6.2.1.** Исследуем устойчивость велосипеда (1.3.6)

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (6.2.25)$$

с роботом-велосипедистом (регулятором)

$$\dot{u} + 8u = -3\dot{y} - 13y. \quad (6.2.26)$$

Параметры велосипеда (6.2.25) неизвестны. Известно, что он полностью управляем, а его расширенные  $\omega$ -индексы, полученные экспериментально при

$$\lambda = 6; \quad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \quad \omega_3 = 9, \quad (6.2.27)$$

имеют значения (6.2.28)

$$\begin{aligned} r^\lambda(\omega_1) &= 0.85, & i^\lambda(\omega_1) &= -1.4; \\ r^\lambda(\omega_2) &= 0.22, & i^\lambda(\omega_2) &= -0.88; \\ r^\lambda(\omega_3) &= 0.078, & i^\lambda(\omega_3) &= -0.6. \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Запишем уравнения (6.2.19), (6.2.20) для рассматриваемого случая.

Для этого используем уравнения (6.2.13)

$$\begin{aligned} & \left\{ g_0 + g_1(\lambda + j\omega_k) - [r_0 + r_1(\lambda + j\omega_k)] [r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)] \right\} [l_0 + l_1(\lambda + j\omega_k)] - \\ & - [r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)] [(\lambda + j\omega_k)^3 + \delta_2(\lambda + j\omega_k)^2 + \delta_1(\lambda + j\omega_k) + \delta_0] = 0 \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Представим эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} & [\tilde{r}(\omega_k) + j\tilde{i}(\omega_k)] [(l_0 + l_1\lambda) + jl_1\omega_k] - [r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)] \cdot \\ & \cdot \{[(\lambda^3 - 3\lambda\omega_k^2) + (\lambda^2 - \omega_k^2)\delta_2 + \lambda\delta_1 + \delta_0] + j[(-\omega_k^3 + 3\lambda^2\omega_k) + 2\lambda\omega_k\delta_2 + \omega_k\delta_1]\} \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

где

$$\tilde{r}(\omega_k) = g_0 + g_1\lambda - r_0 [r^\lambda(\omega_k)] - r_1 [\lambda r^\lambda(\omega_k) - \omega_k i^\lambda(\omega_k)] \quad k = \overline{1, 3}, \quad (6.2.32)$$

$$\tilde{i}(\omega_k) = g_1\omega_k - r_0 [i^\lambda(\omega_k)] - r_1 [\omega_k r^\lambda(\omega_k) + \lambda i^\lambda(\omega_k)] \quad k = \overline{1, 3}. \quad (6.2.33)$$

Отсюда следуют уравнения вида (6.2.19), (6.2.20)

$$\begin{aligned} & [\tilde{r}(\omega_k)\lambda - \tilde{i}(\omega_k)\omega_k] l_1 + \tilde{r}(\omega_k)l_0 - \\ & - [r^\lambda(\omega_k)(\lambda^2 - \omega_k^2) - i^\lambda(\omega_k)2\lambda\omega_k] \delta_2 - [r^\lambda(\omega_k)\lambda - i^\lambda(\omega_k)\omega_k] \delta_1 - r^\lambda(\omega_k)\delta_0 = \\ & = r^\lambda(\omega_k)(\lambda^3 - 3\lambda\omega_k^2) - i^\lambda(\omega_k)(-\omega_k^3 + 3\lambda^2\omega_k) \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

$$\begin{aligned} & [\tilde{i}(\omega_k)\lambda + \tilde{r}(\omega_k)\omega_k] l_1 + \tilde{i}(\omega_k)l_0 - \\ & - [i^\lambda(\omega_k)(\lambda^2 - \omega_k^2) + r^\lambda(\omega_k)2\lambda\omega_k] \delta_2 - [i^\lambda(\omega_k)\lambda + r^\lambda(\omega_k)\omega_k] \delta_1 - i^\lambda(\omega_k)\delta_0 = \\ & = i^\lambda(\omega_k)(\lambda^3 - 3\lambda\omega_k^2) + r^\lambda(\omega_k)(-\omega_k^3 + 3\lambda^2\omega_k) \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

На основе формул (6.2.33), (6.2.34) вычислим (6.2.36)

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\omega_1) &= 52.9, & \tilde{i}(\omega_1) &= -33; \\ \tilde{r}(\omega_2) &= 36.7, & \tilde{i}(\omega_2) &= -17.4; \\ \tilde{r}(\omega_3) &= 32.6, & \tilde{i}(\omega_3) &= -7.5. \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

Подставляя эти значения в (6.2.35), (6.2.36), получим систему (6.2.38)

$$\begin{aligned} 53l_0 + 416l_1 - 0.85d_0 - 9.3d_1 - 73.6d_2 - 464d_3 &= 0 \\ 36.7l_0 + 324l_1 - 0.22d_0 - 6.6d_1 - 63.5d_2 - 285d_3 &= 0 \\ 32.6l_0 + 263l_1 - 0.08d_0 - 5.9d_1 - 62.3d_2 - 48.8d_3 &= 0 \\ -33l_0 - 39.3l_1 + 1.4d_0 + 5.9d_1 + 7.5d_2 - 175d_3 &= 0 \\ -17.4l_0 + 116l_1 + 0.88d_0 + 3.97d_1 - 15.9d_2 - 476d_3 &= 0 \\ & d_3 = 1 \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

Решим её и получим

$$l_1 = 5, \quad l_0 = 30; \quad \delta_2 = 23, \quad \delta_1 = 139, \quad \delta_0 = 262. \quad (6.2.40)$$



Используем критерий Гурвица и заключаем об асимптотической устойчивости велосипеда (6.2.26) с роботом (6.2.27).

Для проверки (6.2.41) заметим, что  $\omega$ -индексы (6.2.29), (6.2.30) получены для велосипеда с параметрами (5.2.20):  $d_0 = -16$ ,  $b_0 = 30$ ,  $b_1 = 5$ . Характеристический полином системы

$$(s^2 - 16)y = (5s + 30)u, \quad (s + 8)u = -(3s + 13)y \quad (6.2.41)$$

имеет вид

$$d^u(s) = s^3 + 23s^2 + 139s + 262. \quad \blacksquare$$

### 6.2.5. Анализ устойчивости по стабилизированным $\omega$ -индексам

Пусть объект 6.2.1 задан стабилизированными  $\omega$ -индексами  $r^c(\omega_k)$ ,  $i^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ), если он неустойчив, либо  $\omega$ -индексами  $r(\omega_k)$ ,  $i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ) с нулевым  $\lambda$ -смещением, если он асимптотически устойчив.

В этом случае уравнения (6.2.13) частотной обратной задачи принимают вид

$$[g(j\omega_k) - r(j\omega_k)w^c(j\omega_k)]l(j\omega_k) - w^c(j\omega_k)\delta(j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1, p}. \quad (6.2.42)$$

Используем выражения (6.1.26), (6.1.27) и запишем уравнения (6.2.19), (6.2.20) как

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor^*} \left[ \tilde{r}(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - \tilde{i}(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q \right] l_{2q} - \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q \right] \delta_{2q} = 0 \quad k = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{\gamma-1}{2} \rfloor^*} \left[ \tilde{r}(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + \tilde{i}(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q \right] l_{2q+1} - \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q + i^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q \right] \delta_{2q+1} = 0 \quad k = \overline{1, p-1}. \end{aligned} \quad (6.2.44)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\omega_k) &= \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor^*} \omega_k^{2q}(-1)^q g_{2q} - \\ & - \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor^*} \left[ r^c(\omega_k)\omega_k^{2q}(-1)^q - i^c(\omega_k)\omega_k^{2q+1}(-1)^q \right] r_{2q} \quad k = \overline{1, p}, \\ \tilde{i}(\omega_k) &= \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor^*} \omega_k^{2q+1}(-1)^q g_{2q+1} - \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

$$- \sum_{q=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]^*} \left[ r^c(\omega_k) \omega_k^{2q+1} (-1)^q + i^c(\omega_k) \omega_k^{2q} (-1)^q \right] r_{2q+1} \quad k = \overline{1, p}. \quad (6.2.46)$$

Дополним эти уравнения (6.2.43), (6.2.44) равенством

$$\delta_{2n-1} = 1. \quad (6.2.47)$$

Используя утверждение 6.2.2, которое справедливо и при  $\lambda = 0$ , заключаем, что для асимптотической устойчивости системы (6.2.1), (6.2.2), объект, который задан стабилизированными  $\omega$ -индексами, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (6.2.43), (6.2.44) имели своим решением числа  $\delta_i$  ( $i = \overline{0, 2n-2}$ ), удовлетворяющие условиям Гурвица (6.2.24).

### 6.2.6. Второй критерий устойчивости

Пусть в системе регулирования (6.2.1), (6.2.2) неизвестны параметры  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) объекта и параметры  $g_i$ ,  $r_j$  ( $i, j = \overline{0, n-1}$ ) регулятора. Известны лишь расширенные  $\omega$ -индексы разомкнутой системы

$$r_{paz}^\lambda(\omega_k) \quad \text{и} \quad i_{paz}^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, \tilde{p}}, \quad \text{где} \quad \tilde{p} = n + \left\{ \frac{n + \gamma - 1}{2} \right\}^*.$$

Для анализа устойчивости такой системы сформулируем уравнение обратной задачи, аналогичное (6.2.8)

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]l(s) - b(s)r(s)\delta(s) = 0. \quad (6.2.48)$$

Оно отличается от (6.2.8) лишь сомножителем  $r(s)$  во втором слагаемом.

Утверждение 6.2.3. Если полиномы  $d^u(s)$  и  $b(s)r(s)$  не имеют общего делителя и если

$$\deg l(s) = \deg b(s)r(s), \quad \deg \delta(s) = \deg d^u(s), \quad \delta_{2n-1} = 1, \quad (6.2.49)$$

то уравнение (6.2.48) имеет единственное решение

$$l(s) = b(s)r(s), \quad \delta(s) = d^u(s). \quad (6.2.50)$$

■

Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство утверждения 6.2.1, если заменить степень  $\gamma$  полинома  $l(s)$  на  $\gamma + n - 1$ .

Поделим (6.2.48) на  $d(s)g(s)$ . Тогда

$$[1 + w_{paz}(s)]l(s) + w_{paz}(s)\delta(s) = 0. \quad (6.2.51)$$

Положим  $s_k = \lambda + j\omega_k$  ( $k = \overline{1, \tilde{p}}$ ) и получим уравнения частотной обратной задачи

$$[1 + r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k)] l(\lambda + j\omega_k) [r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k)] \delta(\lambda + j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1, \tilde{p}}. \quad (6.2.52)$$

Запишем эту систему аналогично (6.2.19), (6.2.20)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+\gamma-1} \left\{ \left[ 1 + r_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \rho_i(\omega_k) - i_{paz}^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right\} l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left\{ r_{paz}^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) - i_{paz}^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right\} \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left\lfloor \frac{n + \gamma - 1}{2} \right\rfloor^*}, \end{aligned} \quad (6.2.53)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+\gamma-1} \left\{ \left[ 1 + r_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \mu_i(\omega_k) + i_{paz}^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right\} l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left\{ r_{paz}^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + i_{paz}^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right\} \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, n + \left\lfloor \frac{n + \gamma - 1}{2} \right\rfloor^*}. \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

Дополним эти уравнения равенством (6.2.21). Решение системы (6.2.53), (6.2.54), (6.2.21) существует и единственно. Это следует из утверждения 6.2.2.

Таким образом, получен ещё один критерий.

**Критерий 6.2.2. (Второй частотно-алгебраический критерий устойчивости).**

Если система (6.2.1), (6.2.2) задана расширенными  $\omega$ -индексами разомкнутой системы, то для асимптотической устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы уравнения (6.2.53), (6.2.54), (6.2.21) имели своим решением числа  $\delta_i$  ( $i = \overline{0, 2n - 2}$ ), удовлетворяющие неравенствам Гурвица (6.2.24). ■

**Пример 6.2.2.** Исследуем устойчивость объекта (6.2.25) с роботом-велосипедистом (регулятором)

$$\dot{u} + g_0 u = r_1 \dot{y} + r_0 y. \quad (6.2.55)$$

Параметры велосипеда и робота неизвестны, а известны расширенные  $\omega$ -индексы разомкнутой системы велосипед-робот, полученные экспериментально при  $\omega$ -тесте и  $\lambda$ -смещении (6.2.27)

$$\begin{aligned} r_{paz}^\lambda(\omega_1) &= -2.13, & i_{paz}^\lambda(\omega_1) &= 3.03; \\ r_{paz}^\lambda(\omega_2) &= -0.76, & i_{paz}^\lambda(\omega_2) &= 2; \\ r_{paz}^\lambda(\omega_3) &= -0.4, & i_{paz}^\lambda(\omega_3) &= 1.44. \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

Для анализа устойчивости запишем уравнения (6.2.52)

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \left[ l_0 + l_1(\lambda + j\omega_k) + l_2(\lambda + j\omega_k)^2 \right] - \\ & - \left[ r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \left[ \delta_0 + \delta_1(\lambda + j\omega_k) + \delta_2(\lambda + j\omega_k)^2 + (\lambda + j\omega_k)^3 \right] = 0 \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

Представим эти уравнения как

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \left\{ \left[ l_0 + l_1 \lambda + l_2(\lambda^2 - \omega_k^2) \right] + j \left[ l_1 \omega_k + l_2 2\lambda \omega_k \right] \right\} - \\ & - \left[ r_{paz}^\lambda(\omega_k) + j i_{paz}^\lambda(\omega_k) \right] \left\{ \left[ \delta_0 + \delta_1 \lambda + \delta_2(\lambda^2 - \omega_k^2) + \lambda^3 - 3\lambda \omega_k^2 \right] + \right. \\ & \left. + j \left[ \delta_1 \omega_k + \delta_2 2\lambda \omega_k - \omega_k^3 + 3\lambda^2 \omega_k \right] \right\} = 0 \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6.2.59)$$

Отсюда получим уравнения вида (6.2.53), (6.2.54)

$$\begin{aligned} & \left\{ [1 + r_{паз}^\lambda(\omega_k)] (\lambda^2 - \omega_k^2) - i_{паз}^\lambda(\omega_k) 2\lambda\omega_k \right\} l_2 + \left\{ [1 + r_{паз}^\lambda(\omega_k)] \lambda - i_{паз}^\lambda(\omega_k) \omega_k \right\} l_1 + \\ & + \left\{ 1 + r_{паз}^\lambda(\omega_k) \right\} l_0 - \left\{ r_{паз}^\lambda(\omega_k) (\lambda^2 - \omega_k^2) - i_{паз}^\lambda(\omega_k) 2\lambda\omega_k \right\} \delta_2 - \\ & - \left\{ r_{паз}^\lambda(\omega_k) \lambda - i_{паз}^\lambda(\omega_k) \omega_k \right\} \delta_1 - \left\{ r_{паз}^\lambda(\omega_k) \right\} \delta_0 = \\ & = r_{паз}^\lambda(\omega_k) (\lambda^3 - 3\lambda\omega_k^2) - i_{паз}^\lambda(\omega_k) (-\omega_k^3 + 3\lambda^2\omega_k) \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (6.2.60)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) (\lambda^2 - \omega_k^2) + [1 + r_{паз}^\lambda(\omega_k)] 2\lambda\omega_k \right\} l_2 + \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) \lambda + [1 + r_{паз}^\lambda(\omega_k)] \omega_k \right\} l_1 + \\ & + \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) \right\} l_0 - \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) (\lambda^2 - \omega_k^2) + r_{паз}^\lambda(\omega_k) 2\lambda\omega_k \right\} \delta_2 - \\ & - \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) \lambda + r_{паз}^\lambda(\omega_k) \omega_k \right\} \delta_1 - \left\{ i_{паз}^\lambda(\omega_k) \right\} \delta_0 = \\ & = i_{паз}^\lambda(\omega_k) (\lambda^3 - 3\lambda\omega_k^2) + r_{паз}^\lambda(\omega_k) (-\omega_k^3 + 3\lambda^2\omega_k) \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6.2.61)$$

Поставим в эту систему числа (6.2.56), (6.2.57) и решим её. Получим

$$l_2 = -15, \quad l_1 = -155, \quad l_0 = -390; \quad \delta_2 = 23, \quad \delta_1 = 139, \quad \delta_0 = 262. \quad (6.2.62)$$

На основе чисел  $\delta_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_0$  заключаем, используя критерий Гурвица, что система велосипед-робот асимптотически устойчива. Заметим, что числа  $\delta_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_0$  совпали с числами (6.2.40). Это объясняется тем, что  $\omega$ -индексы разомкнутой системы были получены для велосипеда и робота с параметрами примера 6.2.1. ■

## 6.3. Идентификационное управление

### 6.3.1. Постановка задачи идентификации и её решение

Рассмотрим объект первого вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (6.3.1)$$

с неизвестными параметрами (матрица  $A$  размеров  $n \times n$  и  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{b}$  неизвестны). Пусть известны векторы  $\mathbf{r}_x(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) его  $\omega$ -индексов.

Задача 6.3.1. (Задача определения параметров, задача идентификации). Найти параметры (матрицу  $A$  и вектор  $\mathbf{b}$ ) асимптотически устойчивого и полностью управляемого объекта (6.3.1) по заданным векторам его  $\omega$ -индексов. ■

Для решения этой задачи запишем по определению

$$\mathcal{B}(j\omega_k) = (Ej\omega_k - A)^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{r}_x(\omega_k) + j\mathbf{i}_x(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.3.2)$$

Умножим это выражение слева на  $(Ej\omega_k - A)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Тогда

$$(Ej\omega_k - A)\mathcal{B}(j\omega_k) = \mathbf{b} \quad \text{или} \quad (Ej\omega_k - A)[\mathbf{r}_x(\omega_k) + j\mathbf{i}_x(\omega_k)] = \mathbf{b} \quad k = \overline{1, n}.$$

Матрица  $A$  и вектор  $\mathbf{b}$  – вещественные, и поэтому отсюда следует

$$A\mathbf{i}_x(\omega_k) - \omega_k\mathbf{r}_x(\omega_k) = \mathbf{0} \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.3.3)$$

$$-A\mathbf{r}_x(\omega_k) - \omega_k\mathbf{i}_x(\omega_k) = \mathbf{b} \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.3.4)$$

Запишем систему (6.3.3) в матричной форме

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n \mathbf{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix}. \quad (6.3.5)$$

Тогда получим уравнение для определения искомой матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n \mathbf{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.6)$$

Вектор  $\mathbf{b}$  находим из (6.3.4), (6.3.5)

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_n \mathbf{r}_x(\omega_n) \\ \cdot \mathbf{r}_x(\omega_k) - \omega_k \mathbf{i}_x(\omega_k) & & & k \in \overline{1, n}. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.7)$$

Таким образом, процедура идентификации сводится к вычислению по формулам (6.3.6), (6.3.7). Она осуществима, если выполняется условие

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix} \neq 0, \quad (6.3.8)$$

которое будем называть *условием частотной идентифицируемости*.

Утверждение 6.3.1. Если объект (6.3.1) асимптотически устойчив и полностью управляем, то он частотно идентифицируем. ■

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.4.

Из доказательства следует, что для выполнения неравенства (6.3.8) необходимо, чтобы

$$\Delta_{n-1} \neq 0, \quad (6.3.9)$$

где  $\Delta_{n-1}$  –  $n-1$ -й определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома  $d(s) = \det(Es - A)$ .

Это условие не конструктивно (так как указанный полином неизвестен), и поэтому оно заменено условием

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad (6.3.10)$$

которое выполняется, если объект обладает свойством асимптотической устойчивости, проверяемым экспериментально.

Пример 6.3.1. Пусть для некоторого объекта получены экспериментально при

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad (6.3.11)$$

векторы  $\omega$ -индексов

$$\mathbf{r}_x(\omega_1) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_x(\omega_1) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_x(\omega_2) = \begin{bmatrix} -\frac{64}{98} \\ \frac{104}{104} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_x(\omega_2) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{30} \\ -\frac{104}{104} \end{bmatrix}. \quad (6.3.12)$$

Требуется идентифицировать параметры этого объекта.

В соответствии с (6.3.6) запишем

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x(\omega_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} -0.5 & -\frac{64}{104} \cdot 2 \\ 1 & \frac{104}{98} \cdot 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.5 & -\frac{8}{104} \\ 0 & -\frac{104}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}. \quad (6.3.13)$$

Используем (6.3.4) и получим

$$\mathbf{b} = -A \mathbf{r}_x(\omega_1) - \omega_1 \mathbf{i}_x(\omega_1) = -\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b} = -A \mathbf{r}_x(\omega_2) - \omega_2 \mathbf{i}_x(\omega_2) = -\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{64}{104} \\ \frac{104}{98} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{8}{104} \\ -\frac{104}{30} \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (6.3.14)$$

Нетрудно проверить, что объект с параметрами (6.3.13), (6.3.14) имеет  $\omega$ -индексы (6.3.10). Для этого нужно сформировать вектор

$$\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \begin{pmatrix} j\omega - 1 & -4 \\ 2 & j\omega - 6 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

и убедиться, что при  $\omega_1 = 1$  и  $\omega_2 = 2$  вещественная и мнимая составляющие этого вектора совпадают с (5.3.10). ■

### 6.3.2. Неустойчивые объекты

Объект (6.3.1) может быть неустойчив и задан векторами смещённых  $\omega$ -индексов  $\mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Найдём его параметры.

По определению

$$\mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) + j \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) = \boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega_k) = (E j\omega_k - A + E\lambda)^{-1} \mathbf{b} \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.3.15)$$

Введём матрицу

$$\tilde{A} = A - E\lambda. \quad (6.3.16)$$

Она вычисляется по формуле (6.3.6), которая принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \omega_n \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_1) & \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.17)$$

Вектор

$$\mathbf{b} = -\tilde{A} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) - \omega_k \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \quad k \in \overline{1, n}. \quad (6.3.18)$$

Матрица  $\tilde{A}$  – гурвицева по построению, а пара  $(\tilde{A}, \mathbf{b})$  – полностью управляема. Это означает, что

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_1) & \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (6.3.19)$$

**Примечание 6.3.1.** Если неустойчивый объект (6.3.1) задан стабилизированными  $\omega$ -индексами  $r_x^c(\omega_k)$  и  $i_x^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то он, вообще говоря, частотно неидентифицируем. Действительно, для неустойчивого объекта может нарушаться неравенство (6.3.9), необходимое для выполнения условия (6.3.8). ■

### 6.3.3. Объекты второго вида (частный случай)

Рассмотрим асимптотически устойчивый объект (6.3.20)

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = u, \quad (6.3.21)$$

заданный  $\omega$ -индексами  $r(\omega_k)$  и  $i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Найдём параметры  $d_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) этого объекта. Эту задачу идентификации сведём к уже рассмотренной. Для этого приведём уравнение (6.3.21) к виду (6.3.1) и построим вектора  $\omega$ -индексов.

Введём обозначения

$$y = \check{x}_1, \quad \dot{y} = \check{x}_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \check{x}_n. \quad (6.3.22)$$

и запишем (6.3.21) в канонической форме

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{b}u, \quad (6.3.23)$$

в которой матрица  $\check{A}$  и вектор  $\check{b}$  имеют вид (3.4.5).

Передаточный вектор объекта (6.3.23)

$$\check{\beta}(s) = (Es - \check{A})^{-1}\check{b} = \begin{bmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-1} \end{bmatrix}' \cdot \frac{1}{d(s)}. \quad (6.3.24)$$

Отсюда следует, что вектор  $\omega$ -индексов для этого объекта

$$\begin{aligned} \check{r}_x(\omega_k) &= \operatorname{Re} \check{\beta}(j\omega_k) = \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & j\omega_k & \dots & (j\omega_k)^{n-1} \end{bmatrix}' \cdot [r(\omega_k) + ji(\omega_k)] \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} r(\omega_k) & -\omega_k i(\omega_k) & -\omega_k^2 r(\omega_k) & \omega_k^3 i(\omega_k) & \dots \\ \dots & (-1)^{n-2} \omega_k^{n-2} r(\omega_k) & (-1)^{n-1} \omega_k^{n-1} i(\omega_k) \end{bmatrix} \quad k = \overline{1, n}, \end{bmatrix} \quad (6.3.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{i}_x(\omega_k) &= \operatorname{Im} \check{\beta}(j\omega_k) = \operatorname{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & j\omega_k & \dots & (j\omega_k)^{n-1} \end{bmatrix}' \cdot [r(\omega_k) + ji(\omega_k)] \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} i(\omega_k) & \omega_k r(\omega_k) & -\omega_k^2 i(\omega_k) & -\omega_k^3 r(\omega_k) & \dots \\ \dots & (-1)^{n-2} \omega_k^{n-2} i(\omega_k) & (-1)^{n-1} \omega_k^{n-1} r(\omega_k) \end{bmatrix} \quad k = \overline{1, n}. \end{bmatrix} \quad (6.3.26) \end{aligned}$$

Используем эти числа и найдём, аналогично (6.3.6),

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \omega_1 \check{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \check{r}_x(\omega_2) & \dots & \omega_n \check{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{i}_x(\omega_1) & \check{i}_x(\omega_2) & \dots & \check{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.27)$$

Если объект (6.3.21) неустойчив и задан  $\omega$ -индексами  $r^\lambda(\omega_k)$  и  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то

$$\check{\beta}^\lambda(s) = (Es - \check{A} + E\lambda)^{-1}\check{b} = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & s + \lambda & \cdots & (s + \lambda)^{n-1} \end{array} \right]' \cdot \frac{1}{d(s + \lambda)}, \quad (6.3.28)$$

и тогда вектора смещенных  $\omega$ -индексов объекта (6.3.23)

$$\check{r}_x^\lambda(\omega_k) = \text{Re} \check{\beta}^\lambda(j\omega_k) = \text{Re} \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & \lambda + j\omega_k & \cdots & (\lambda + j\omega_k)^{n-1} \end{array} \right]' \left[ r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k) \right] \right\} \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.3.29)$$

$$\check{i}_x^\lambda(\omega_k) = \text{Im} \check{\beta}^\lambda(j\omega_k) = \text{Im} \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & \lambda + j\omega_k & \cdots & (\lambda + j\omega_k)^{n-1} \end{array} \right]' \left[ r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k) \right] \right\} \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.3.30)$$

Используем эти вектора, найдём по формуле (6.3.17) матрицу  $\check{A} = \check{A} - E\lambda$ .

#### 6.3.4. Объекты второго вида (общий случай)

Рассмотрим теперь объект более общего, чем (6.3.21), вида

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (\gamma < n), \quad (6.3.31)$$

заданный расширенными  $\omega$ -индексами  $r(\omega_k)$  и  $i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ). Найдём числа  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ). Для сведения этой задачи к задаче 6.3.1 сформируем «объект» (4.5.78)

$$d(s)y = b(s)u, \quad \mu(s)u = \check{u}, \quad (6.3.32)$$

где  $\mu(s) = s^n + \mu_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \mu_1s + \mu_0$  - произвольный гурвицев полином.

Введём обозначения

$$y = \check{x}_1, \quad \dot{y} = \check{x}_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \check{x}_n; \quad u = \check{x}_{n+1}, \quad \dot{u} = \check{x}_{n+2}, \quad \dots, \quad u^{(n-1)} = \check{x}_{2n}, \quad (6.3.33)$$

и запишем (6.3.32) в виде (6.3.1)

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{b}\check{u}, \quad (6.3.34)$$

где

$$\check{x} = \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \\ \vdots \\ \check{x}_n \\ \check{x}_{n+1} \\ \check{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{x}_{2n} \end{bmatrix}, \quad \check{A} = \left( \begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & \cdots & -\mu_{n-1} \end{array} \right), \quad \check{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3.35)$$



Выразим  $\omega$ -индексы «объекта» (6.3.34)  $\check{r}_x(\omega_k)$  и  $\check{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) через заданные частотные параметры объекта (6.3.31).

Утверждение 6.3.2. Частотные параметры объектов (6.3.31) и (6.3.34) связаны соотношением

$$\check{\beta}(j\omega_k) = \check{r}_x(\omega_k) + j\check{i}_x(\omega_k) = \begin{bmatrix} \eta(j\omega_k) & j\omega_k\eta(j\omega_k) & \cdots & (j\omega_k)^{n-1}\eta(j\omega_k) \\ \mu^{-1}(j\omega_k) & j\omega_k\mu^{-1}(j\omega_k) & \cdots & (j\omega_k)^{n-1}\mu^{-1}(j\omega_k) \end{bmatrix}' \quad k = \overline{1, 2n}, \quad (6.3.36)$$

где

$$\eta(j\omega_k) = -\frac{r(\omega_k) + ji(\omega_k)}{\mu(j\omega_k)} \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.3.37)$$

Доказательство утверждения приведено в 6.Д.5.

Имея векторы  $\check{r}_x(\omega_k)$  и  $\check{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ), находим, в соответствии с (6.3.6),

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \omega_1\check{r}_x(\omega_1) & \omega_2\check{r}_x(\omega_2) & \cdots & \omega_{2n}\check{r}_x(\omega_{2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{i}_x(\omega_1) & \check{i}_x(\omega_2) & \cdots & \check{i}_x(\omega_{2n}) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.38)$$

Если объект (6.3.31) неустойчив и задан смещёнными  $\omega$ -индексами, то нетрудно получить аналогичное соотношение

$$\check{A} = \check{A} - E\lambda = \begin{bmatrix} \omega_1\check{r}_x^\lambda(\omega_1) & \omega_2\check{r}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \omega_{2n}\check{r}_x^\lambda(\omega_{2n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{i}_x^\lambda(\omega_1) & \check{i}_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & \check{i}_x^\lambda(\omega_{2n}) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.3.39)$$

в котором  $\check{r}_x^\lambda(\omega_k)$  и  $\check{i}_x^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) определяются из выражения

$$\check{\beta}^\lambda(j\omega_k) = \check{r}_x^\lambda(\omega_k) + j\check{i}_x^\lambda(\omega_k) = \begin{bmatrix} \eta^\lambda(j\omega_k) & (\lambda + j\omega_k)\eta^\lambda(j\omega_k) & \cdots & (\lambda + j\omega_k)^{n-1}\eta^\lambda(j\omega_k) \\ \mu^{-1}(\lambda + j\omega_k) & (\lambda + j\omega_k)\mu^{-1}(\lambda + j\omega_k) & \cdots & (\lambda + j\omega_k)^{n-1}\mu^{-1}(\lambda + j\omega_k) \end{bmatrix}' \quad k = \overline{1, 2n}, \quad (6.3.40)$$

где

$$\eta^\lambda(j\omega_k) = -\frac{r^\lambda(\omega_k) + ji^\lambda(\omega_k)}{\mu(\lambda + j\omega_k)} \quad k = \overline{1, 2n}. \quad (6.3.41)$$

Заметим, что если в (6.3.31) известно число  $\gamma$  и оно меньше  $n - 1$ , то полином  $\mu(s)$  может иметь степень  $\gamma + 1$ , а система (6.3.35) будет содержать  $n + \gamma + 1$  уравнений вместо  $2n$ . В этом случае двойной набор  $\omega$ -индексов, описывающих уравнение (6.3.31), может быть заменён расширенным набором  $r(\omega_k)$  и  $i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n + \gamma + 1}$ ).

Пример 6.3.2. Идентифицируем параметры велосипеда

$$\ddot{y} + d_0y = b_1\dot{u} + b_0u, \quad (6.3.42)$$

заданного  $\omega$ -индексами

$$r^\lambda(\omega_1), \quad i^\lambda(\omega_1), \quad r^\lambda(\omega_2), \quad i^\lambda(\omega_2); \quad (6.3.43)$$

$$r^\lambda(\omega_3), \quad i^\lambda(\omega_3), \quad r^\lambda(\omega_4), \quad i^\lambda(\omega_4), \quad (6.3.44)$$

при

$$\lambda = 6; \quad \omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \quad \omega_3 = 9, \quad \omega_4 = 12. \quad (6.3.45)$$

Зададимся полиномом

$$\mu(s) = s^2 + 2s + 1 \quad (6.3.46)$$

и сформируем функцию вида (6.3.41)

$$\eta^\lambda(j\omega) = -\frac{r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega)}{\mu(\lambda + j\omega)} = -\frac{r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega)}{(\lambda + j\omega)^2 + 2(\lambda + j\omega) + 1} = r^\eta(\omega) + ji^\eta(\omega),$$

где

$$r^\eta(\omega) = -\frac{r^\lambda(\omega)(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1) + i^\lambda(\omega)(2\lambda\omega + 2\omega)}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}, \quad (6.3.47)$$

$$i^\eta(\omega) = \frac{r^\lambda(\omega)(2\lambda\omega + 2\omega) - i^\lambda(\omega)(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}. \quad (6.3.48)$$

На основе (6.3.40) запишем

$$\check{\mathcal{B}}^\lambda(j\omega) = \check{\mathbf{r}}_x^\lambda(\omega) + j\check{\mathbf{i}}_x^\lambda(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} [r^\eta(\omega) + jr^\eta(\omega)] & (\lambda + j\omega) [r^\eta(\omega) + jr^\eta(\omega)] \\ [r^\mu(\omega) + ji^\mu(\omega)] & (\lambda + j\omega) [r^\mu(\omega) + ji^\mu(\omega)] \end{array} \right\}', \quad (6.3.49)$$

где

$$r^\mu(\omega) = \operatorname{Re} \frac{1}{\mu(\lambda + j\omega)} = \frac{\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}, \quad (6.3.50)$$

$$i^\mu(\omega) = \operatorname{Im} \frac{1}{\mu(\lambda + j\omega)} = -\frac{2\lambda\omega + 2\omega}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda + 1)^2 + (2\lambda\omega + 2\omega)^2}. \quad (6.3.51)$$

Итак,

$$\check{\mathbf{r}}_x^\lambda(\omega) = \begin{bmatrix} r^\eta(\omega) \\ \lambda r^\eta(\omega) - \omega i^\eta(\omega) \\ r^\mu(\omega) \\ \lambda r^\mu(\omega) - \omega i^\mu(\omega) \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{i}}_x^\lambda(\omega) = \begin{bmatrix} i^\eta(\omega) \\ \omega r^\eta(\omega) + \lambda i^\eta(\omega) \\ i^\mu(\omega) \\ \omega r^\mu(\omega) + \lambda i^\mu(\omega) \end{bmatrix}. \quad (6.3.52)$$

Придавая  $\lambda$  и  $\omega$  значения (6.3.45), получим в соответствии с (6.3.39) матрицу  $\check{\mathbf{A}}$ . ■

### 6.3.5. Идентификационное управление

Вернёмся к задаче 6.1.2 синтеза регулятора (6.1.2) для объекта (6.1.28), заданного  $\omega$ -индексами. Непосредственное (прямое) решение этой задачи состоит из операций: а) построение полинома  $\psi(s)$  и б) вычисление параметров регулятора путём решения системы  $2n$  уравнений (6.1.13), (6.1.14).

При идентификационном методе решения этой задачи последняя операция разбивается на две подоперации: определение (идентификация) параметров объекта (6.1.28)

по формулам (6.3.39)-(6.3.41) и нахождение параметров регулятора (6.1.2) с помощью процедуры 3.1.1 модального управления (решение уравнений (3.1.9)). Построенное таким образом управление называется *идентификационным управлением*.

Если сравнивать объём вычислений, необходимых для построения прямого и идентификационного управлений, то нетрудно заметить, что построение прямого управления требует примерно в два раза меньшего объёма вычислений. Действительно, для нахождения прямого управления решается система  $2n$  уравнений (6.1.13), (6.1.14), а для вычисления идентификационного управления нужно решить систему  $(2n)^2$  уравнений (6.3.39) для определения параметров объекта (6.1.28), а затем решить систему  $2n$  уравнений (3.1.9) для вычисления параметров искомого регулятора.

Заметим, что в практике идентификации решают систему  $2n$  уравнений (1.2.9) (1.2.10) вместо матричного уравнения (6.3.39), и поэтому отношение объёмов вычисления прямого и идентификационного управлений составляет примерно  $1 : 2$ .

Однако, если учесть, что условия существования и единственности решения системы (1.2.9), (1.2.10) не исследованы и поэтому для гарантии нужно использовать уравнения (6.3.39), то построение идентификационного управления потребует существенно большего (чем в 2 раза) объёма вычислений, чем прямое.

## Приложения к главе 6

### 6.П. Прямое управление дискретными объектами

#### 6.П.1. Постановка задачи и её решение

Пусть имеется полностью управляемый дискретный объект, устойчивый по управлению

$$y(iT) + d_1y[(i-1)T] + \dots + d_ny[(i-n)T] = b_1u[(i-1)T] + \dots + b_nu[(i-n)T] \quad i = n, n+1, \dots \quad (6.П.1)$$

заданный  $\omega$ -индексами  $r_\delta^\lambda(\omega_k)$  и  $i_\delta^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Требуется найти параметры регулятора

$$\begin{aligned} g_0u(iT) + g_1u[(i-1)T] + \dots + g_{n-1}u[(i-n+1)T] + g_nu[(i-n)T] = \\ = r_0y(iT) + r_1y[(i-1)T] + \dots + r_{n-1}y[(i-n+1)T] \quad i = n, n+1, \dots \end{aligned} \quad (6.П.2)$$

такие, чтобы характеристический полином системы (6.П.1), (6.П.2) совпадал с заданным полиномом

$$\delta(q) = b(q)\psi(q), \quad (6.П.3)$$

где

$$b(q) = b_1q + \dots + b_nq^n, \quad \psi(q) = 1 + \psi_1q + \dots + \psi_\nu q^\nu. \quad (6.П.4)$$

Для решения этой задачи осуществим  $z$ -преобразование уравнений (6.П.1) и (6.П.2), заменим, как и в п. 5.П.2,  $z^{-1} = q$  и сформируем модальное тождество

$$d(q)g(q) - b(q)r(q) = b(q)\psi(q), \quad (6.П.5)$$

где (6.П.6)

$$\begin{aligned} d(q) &= 1 + d_1q + \dots + d_{n-1}q^{n-1} + d_nq^n, & b(q) &= b_1q + \dots + b_{n-1}q^{n-1} + b_nq^n, \\ g(q) &= g_1q + \dots + g_{n-1}q^{n-1} + g_nq^n, & r(q) &= r_1q + \dots + r_{n-1}q^{n-1} + r_nq^n. \end{aligned} \quad (6.П.7)$$

Покажем, что тождество (6.П.5) имеет единственное решение (6.П.7). Полином  $\delta(q) = b(q)\psi(q)$  имеет структуру

$$\delta(q) = \delta_1q + \delta_2q^2 + \dots + \delta_{n+\nu}q^{n+\nu} = q\tilde{\delta}(q).$$

Представим

$$g(q) = q\tilde{g}(q), \quad r(q) = q\tilde{r}(q),$$

и тогда тождество (6.П.5) примет вид

$$\tilde{d}(q)\tilde{g}(q) - \tilde{b}(q)\tilde{r}(q) = \tilde{b}(q)\psi(q), \quad (6.П.8)$$

где  $\tilde{d}(q) = qd(q)$ ,  $\tilde{b}(q) = qb(q)$ .

Заметим, что

$$\deg \tilde{r}(q) < \deg [\tilde{d}(q)q^{-1}].$$

Закljučаем по теореме 3.1.2, что то соотношение (6.П.8) допускает единственное решение  $\tilde{g}(q)$  и  $\tilde{r}(q)$ . Выражения (6.П.8) и (6.П.5) совпадают, и поэтому (6.П.5) имеет единственное решение.

Разделим (6.П.3) на  $d(q)$ . Тогда

$$g(q) - w(q)r(q) = w(q)\psi(q). \quad (6.П.9)$$

Положим в этом тождестве

$$q = \lambda_\partial + j\omega_\partial, \quad (6.П.10)$$

где

$$\lambda_\partial = e^{-\lambda T} \cos \omega T, \quad \omega_\partial = -e^{-\lambda T} \sin \omega T. \quad (6.П.11)$$

Тогда из (6.П.8) следует модальное частотное тождество

$$g(\lambda_\partial + j\omega_\partial) - w(\lambda_\partial + j\omega_\partial)r(\lambda_\partial + j\omega_\partial) = w(\lambda_\partial + j\omega_\partial)\psi(\lambda_\partial + j\omega_\partial).$$

Зафиксируем  $n$  значений  $\omega$  и получим

$$g(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) - w(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})r(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) = w(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})\psi(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.П.12)$$

Примем во внимание связь

$$w(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) = r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) + ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad (6.П.13)$$

и запишем окончательно

$$\begin{aligned} g(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) - \left[ r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) + ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) \right] r(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) = \\ = \left[ r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) + ji_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) \right] \psi(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.П.14)$$

Отсюда следует (если положить  $g_0 = 0$ ) система  $2n$  уравнений для определения  $2n$  неизвестных коэффициентов уравнения (6.П.2). Повторяя доказательство теоремы 6.1.1, нетрудно показать, что система имеет единственное решение, совпадающее с решением уравнения (6.П.5).

## 6.П.2. Объекты с запаздыванием

Если объект (6.П.1) имеет запаздывание по управлению величины  $\varkappa T$ , то он описывается уравнением (5.П.39)

$$\begin{aligned} y(iT) + d_1 y[(i-1)T] + \dots + d_n y[(i-n)T] = \\ = b_1 u[(i-1-\varkappa)T] + \dots + b_n u[(i-n-\varkappa)T] \quad i = n, n+1, \dots \end{aligned} \quad (6.П.15)$$

Полиномы (6.П.6) и (6.П.7) принимают в этом случае вид (6.П.16)

$$\begin{aligned} d(q) = 1 + d_1 q + \dots + d_{n-1} q^{n-1} + d_n q^n, \quad b(q) = (b_1 q + \dots + b_{n-1} q^{n-1} + b_n q^n) q^{\varkappa}, \\ g(q) = g_0 q + \dots + g_{\varkappa} q^{\varkappa} + \dots + g_{\varkappa+n} q^{\varkappa+n}, \quad r(q) = r_1 q + \dots + r_{n-1} q^{n-1} + r_n q^n, \end{aligned} \quad (6.П.17)$$

а

$$\delta(q) = b(q)\psi(q) = \delta_{\varkappa+1} q^{\varkappa+1} + \dots + \delta_{\varkappa+n+\nu} q^{\varkappa+n+\nu}, \quad (6.П.18)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $q$  в левой и правой частях тождества (6.П.5), получим

$$g_0 = g_1 = \dots = g_{\varkappa} = 0. \quad (6.П.19)$$

Учтём это равенство и получим из (6.П.14) систему  $2n$  уравнений для определения  $2n$  параметров регулятора

$$\begin{aligned} g_{\varkappa+1} u[(i-\varkappa-1)T] + \dots + g_{\varkappa+n} u[(i-\varkappa-n)T] = \\ = r_1 y[(i-1)T] + \dots + r_n y[(i-n)T] \quad i = \varkappa+n, \varkappa+n+1, \dots \end{aligned} \quad (6.П.20)$$

### 6.П.3. Синтез регуляторов

Пусть к объекту (6.П.15) приложено внешнее возмущение и он описывается уравнением

$$y(iT) + d_1 y[(i-1)T] + \dots + d_n y[(i-n)T] = b_1 u[(i-1-\varkappa)T] + \dots + b_n u[(i-n-\varkappa)T] + m_1 f[(i-1)T] + \dots + m_n f[(i-n)T] \quad i = n, n+1, \dots \quad (6.П.21)$$

Требуется найти регулятор (6.П.20), такой, чтобы, начиная с некоторого момента  $\rho T$ , выполнялось условие

$$|y(iT)| \leq y^*, \quad i > \rho, \quad (6.П.22)$$

где  $y^*$  – заданное число. Для ступенчатого  $f(iT)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) выберем коэффициенты полинома  $\psi(q) = 1 + \psi_1 q + \dots + \psi_n q^n$ , из неравенства

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^n m_i \right|}{\left| \sum_{i=1}^n \psi_i \right|} \bar{f} < y^*, \quad (6.П.23)$$

в котором  $\bar{f}$  – ограничение внешнего возмущения (величина «ступеньки»). Таким образом, для выбора параметров полинома  $\psi(q)$  уравнения качества необходима оценка суммы коэффициентов при внешнем воздействии. После определения этих параметров решаем систему (6.П.14) и находим регулятор, обеспечивающий требование к точности системы (6.П.21), (6.П.20).

Пример 6.П.1. Продолжим рассмотрение примера 6.1.1. Пусть управление велосипедом (6.1.35) имеет запаздывание  $t_{зан}$ . Зададимся интервалом дискретности  $T$  и найдём  $\varkappa = \left\lceil \frac{t_{зан}}{T} \right\rceil + 1$ . При  $\varkappa = 1$  дискретная модель велосипеда описывается разностными уравнениями (5.П.42), а его передаточная функция имеет вид (5.П.45).

Итак, пусть велосипед (5.П.42) задан  $\omega$ -индексами (5.П.54), (5.П.55) и требуется найти регулятор

$$g_2 u[(i-2)T] + g_3 u[(i-3)T] = r_1 y[(i-1)T] + r_2 y[(i-2)T] \quad i = 3, 4, \dots, \quad (6.П.24)$$

такой, чтобы при ступенчатом внешнем возмущении, ограниченном  $\bar{f} = 10$ , установившаяся ошибка удовлетворяла неравенству (6.П.41)

$$|y(iT)| \leq 0.204. \quad (6.П.25)$$

Для решения этой задачи найдём коэффициенты полинома

$$\psi(q) = 1 + \psi_1 q + \psi_2 q^2 \quad (6.П.26)$$

из условия (6.П.23)

$$\frac{10 \cdot 10^2}{|1 + \psi_1 + \psi_2|} < 0.204, \quad (6.П.27)$$

в котором использована оценка  $|m_1 + m_2| < 10^{-2}$ .

Эту оценку нетрудно получить, если привести уравнение (6.1.35) к дискретной форме (5.П.42) с учётом внешнего возмущения, а затем записать (5.П.42) в форме

$$y(iT) + d_1 y[(i-1)T] + d_2 y[(i-2)T] = b_1 u[(i-2)T] + b_2 u[(i-3)T] + m_1 f[(i-1)T] + m_2 f[(i-2)T] \quad i = 2, 3, \dots, \quad (6.П.28)$$

где

$$m_1 = m_2 = \nu^{-2} [\operatorname{ch} \nu T - 1]. \quad (6.П.29)$$

Зададимся корнями полинома  $q_1 = q_2 = -2$  и получим  $\psi_1 = 1$ ,  $\psi_2 = 0.25$ . При таких значениях  $\psi_1$  и  $\psi_2$  неравенство (6.П.27) выполняется.

Уравнения (6.П.14) имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} & [g_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2 + g_3(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^3] - \\ & - [r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) + j i_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)] \cdot [r_1(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) + r_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2] = \\ & = [r_{\partial}^{\lambda}(\omega_k) + j i_{\partial}^{\lambda}(\omega_k)] \cdot [1 + \psi_1(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k}) + \psi_2(\lambda_{\partial k} + j\omega_{\partial k})^2] \quad k = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (6.П.30)$$

Подставим в эти уравнения числа (5.П.54) и (5.П.55) и положим, в соответствии с (5.П.51), (5.П.52),

$$\lambda_{\partial 1} = 0, \quad \omega_{\partial 1} = -0.549; \quad \lambda_{\partial 2} = 0.388, \quad \omega_{\partial 2} = -0.338. \quad (6.П.31)$$

Система (6.П.30) содержит 4 уравнения для определения четырёх неизвестных. Решая эту систему, получим искомые числа

$$g_2, \quad g_3, \quad r_1, \quad r_2. \quad (6.П.32)$$

■

## Доказательства к главе 6

### 6.Д. Доказательство теорем и утверждений

#### 6.Д.1. Доказательство теоремы 6.1.1

Представим систему (6.1.21) в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} (\lambda + j\omega_k)^{\alpha} \eta_{\alpha} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.Д.1)$$

где, в соответствии с (3.1.9),

$$\eta_{\alpha} = \sum_{i=0}^n d_i g_{\alpha-1} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} - \delta_{\alpha} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (6.Д.2)$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству соотношений

$$\eta_\alpha = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (6.Д.3)$$

Рассмотрим вначале случай, когда  $\lambda = 0$ .

В этом случае (6.Д.1) представим, с учётом вещественности  $\eta_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}$ , как две подсистемы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_k^{2i} (-1)^i \eta_{2i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_k^{2i+1} (-1)^i \eta_{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (6.Д.4)$$

которые можно записать в матричной форме

$$M\eta = 0, \quad (6.Д.5)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_1^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} & 0 \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^4 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-1} \\ 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_2^3 & 0 & \omega_2^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \omega_n & 0 & -\omega_n^3 & 0 & \omega_n^5 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-1} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{2n-2} \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{2n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.Д.6)$$

Вычислим определитель матрицы  $M$ . Переставляя столбцы этой матрицы, получим

$$\det M = \det \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} = \det W_1 \cdot \det W_2. \quad (6.Д.7)$$

где

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} \\ 1 & -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 & -\omega_1^3 & \omega_1^5 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-1} \\ \omega_2 & -\omega_2^3 & \omega_2^5 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n & -\omega_n^3 & \omega_n^5 & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.8)$$

Построим матрицы

$$V = [W_1 E^{(1)}]' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_n^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \cdots & \omega_n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{2n-2} & \omega_2^{2n-2} & \cdots & \omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}, \quad W_1 = [W_2 E^{(2)}]', \quad (6.Д.9)$$



где

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}, \quad E^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} \frac{1}{\omega_n} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.10)$$

Определитель матрицы  $V$  является определителем Вандермонда. Он обладает свойством

$$\det V \neq 0 \quad \text{при} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad (i \neq j). \quad (6.Д.11)$$

Из (6.Д.10) и (6.Д.9) следует, что

$$\det W_1 = \frac{\det V}{\det E^{(1)}} \neq 0, \quad \det W_2 = \frac{\det V}{\det E^{(2)}} \neq 0, \quad (6.Д.12)$$

и, таким образом,

$$\det M \neq 0. \quad (6.Д.13)$$

Тогда из (6.Д.5) следует (6.Д.3).

Пусть теперь  $\lambda \neq 0$ .

Уравнения (6.Д.1) можно записать, с учётом (6.1.10), в виде двух систем

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor^*} \rho_{2\nu}^{(i)} \omega_k^{2\nu} \right) \eta_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{2n-1} \left( \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor^*} \mu_{2\nu+1}^{(i)} \omega_k^{2\nu+1} \right) \eta_i = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.Д.14)$$

Эти уравнения принимают в матричной форме вид

$$M^\lambda \eta = 0, \quad (6.Д.15)$$

где

$$M^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 - \omega_1^2 & \rho_0^{(3)} + \rho_2^{(3)}\omega_1^2 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_1^{2\nu} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_1^{2\nu} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 - \omega_2^2 & \rho_0^{(3)} + \rho_2^{(3)}\omega_2^2 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_2^{2\nu} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_2^{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 - \omega_n^2 & \rho_0^{(3)} + \rho_2^{(3)}\omega_n^2 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-2)}\omega_n^{2\nu} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_{2\nu}^{(2n-1)}\omega_n^{2\nu} \\ \hline 0 & \omega_1 & \lambda\omega_1 & \mu_1^{(3)}\omega_1 + \mu_3^{(3)}\omega_1^3 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_1^{2\nu+1} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_1^{2\nu+1} \\ 0 & \omega_2 & \lambda\omega_2 & \mu_1^{(3)}\omega_2 + \mu_3^{(3)}\omega_2^3 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_2^{2\nu+1} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_2^{2\nu+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \omega_n & \lambda\omega_n & \mu_1^{(3)}\omega_n + \mu_3^{(3)}\omega_n^3 & \cdots & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-2)}\omega_n^{2\nu+1} & \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_{2\nu+1}^{(2n-1)}\omega_n^{2\nu+1} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.16)$$

Покажем, что

$$\det M^\lambda = \det M. \quad (6.Д.17)$$

Для этого осуществим преобразование матрицы  $M^\lambda$ , не изменяющее её определителя.

Умножим второй столбец этой матрицы на  $\lambda$  и вычтем его из третьего столбца. Тогда первые три столбца матрицы  $M^\lambda$  совпадут с одноимёнными столбцами матрицы  $M$ . Полученную матрицу обозначим  $M_3^\lambda$ . Умножим первый столбец  $M_3^\lambda$  на  $\rho_0^{(3)}$ , второй на  $-\rho_1^{(3)}$ , третий на  $-\rho_2^{(3)}$  и вычтем их из четвёртого столбца. Результат совпадает с четвёртым столбцом матрицы  $M$ .

Продолжая этот процесс, приходим к матрице  $M$  и таким образом равенство (6.Д.17) доказано. Невырожденность матрицы  $M^\lambda$  (для любых различных  $(k = \overline{1, n})$  и любом  $\lambda$ ) означает, что уравнение (6.Д.15) имеет решение  $\eta = 0$ , которое выражает систему (3.1.9). Решение системы (3.1.9) существует, так как объект (6.1.1) полностью управляем и единственно в силу неравенства (3.1.26), и, таким образом, теорема доказана.

## 6.Д.2. Доказательство утверждения 6.2.1

Покажем вначале, что уравнение (6.2.10)

$$d^u(s)l(s) - b(s)\delta(s) = 0 \quad (6.Д.18)$$

имеет не единственное решение, если полиномы  $d^u(s)$  и  $b(s)$  имеют общий делитель  $\nu(s)$ . Последнее означает, что

$$d^u(s) = \bar{d}^u(s)\nu(s), \quad b(s) = \bar{b}(s)\nu(s). \quad (6.Д.19)$$

Подставим эти выражения в (6.Д.18). Получим

$$\bar{d}^u(s)l(s) - \bar{b}(s)\delta(s) = 0. \quad (6.Д.20)$$

Если, например,  $\bar{b}(s) = 1$  [ $\nu(s) = b(s)$ ], то

$$\delta(s) = \bar{d}^u(s)l(s), \quad (6.Д.21)$$

где  $l(s)$  – произвольный полином степени  $\gamma$ .

При нарушении условий (6.2.9) решение уравнения (6.Д.18) также неединственно и имеет вид

$$l(s) = b(s)k(s), \quad \delta(s) = d^u(s)k(s), \quad (6.Д.22)$$

где  $k(s)$  – произвольный полином.

При условиях (6.2.9)  $k(s) = 1$ .

Уравнение (6.Д.18) может иметь тривиальное решение

$$\delta(s) = l(s) = 0. \quad (6.Д.23)$$

Для того, чтобы избежать такого решения, коэффициент при старшей степени  $\delta(s)$

$$\delta_{2n-1} = 1. \quad (6.Д.24)$$

Запишем тождество (6.Д.18) в развёрнутой форме

$$\begin{aligned} & \left( s^N + d_{N-1}^u s^{N-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u \right) (l_\gamma s^\gamma + l_{\gamma-1} s^{\gamma-1} + \dots + l_1 s + l_0) - \\ & - \left( s^N + \delta_{N-1} s^{N-1} + \dots + \delta_1 s + \delta_0 \right) (b_\gamma s^\gamma + b_{\gamma-1} s^{\gamma-1} + \dots + b_1 s + b_0) = 0 \quad N = 2n - 1. \end{aligned} \quad (6.Д.25)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим систему уравнений для неизвестных  $l_i, \delta_j$  ( $i = \overline{0, \gamma}, j = \overline{0, N-1}$ )

$$\sum_{i=0}^{\gamma} (l_i d_{\alpha-i}^u - b_i \delta_{\alpha-i}) = 0 \quad \alpha = \overline{0, N + \gamma}, \quad (6.Д.26)$$

где аналогично (3.1.5)-(3.1.7) (6.Д.27)

$$d_{\alpha-i}^u = 0 \quad \text{и} \quad \delta_{\alpha-i} = 0 \quad \text{если} \quad \alpha - i < 0 \quad \text{и} \quad \alpha - i > N. \quad (6.Д.28)$$

Приведём несколько уравнений этой системы.

При  $\alpha = N + \gamma$ :  $l_\gamma - b_\gamma = 0$ . При  $\alpha = N + \gamma - 1$ :  $l_{\gamma-1} d_N^u + l_\gamma d_{N-1}^u - b_{\gamma-1} \delta_N^u - b_\gamma \delta_{N-1}^u = 0$ ,

и т.д. Запишем систему (6.Д.26) в матричной форме

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ d_{N-1}^u & 1 & & & -b_\gamma & & & & \\ \vdots & d_{N-1}^u & \cdots & & \vdots & -b_\gamma & \cdots & & \\ d_0^u & \vdots & \cdots & 1 & -b_0 & \vdots & \cdots & & \\ & d_0^u & \ddots & d_{N-1}^u & & -b_0 & \ddots & -b_\gamma & \\ & & \cdots & \vdots & & & \cdots & \vdots & \\ \mathbf{0} & & & d_0^u & \mathbf{0} & & & -b_0 & \end{array} \right) \times \begin{bmatrix} l_\gamma \\ l_{\gamma-1} \\ \vdots \\ l_0 \\ \delta_{N-1} \\ \delta_{N-2} \\ \vdots \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_\gamma \\ b_{\gamma-1} \\ \vdots \\ b_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} : N + \gamma \\ : N + \gamma - 1 \\ : \vdots \\ : N \\ : \vdots \\ : 1 \\ : 0 \end{matrix} \quad (6.Д.29)$$

Допустим противное утверждению 6.2.1 и положим, что, наряду с решением (6.2.10), существует решение

$$l(s) = l^*(s), \quad \delta(s) = \delta^*(s), \quad (6.Д.30)$$

где  $l^*(s)$  и  $\delta^*(s)$  – некоторые полиномы степеней  $\gamma$  и  $2n - 1$  соответственно. При этом  $\delta_{2n-1}^* = 1$ .

Это означает, что выполняется тождество

$$d^u(s)l^*(s) - b(s)\delta^*(s) = 0. \quad (6.Д.31)$$

Вычтем его из уравнения

$$d^u(s)b(s) - b(s)d^u(s) = 0 \quad (6.Д.32)$$

и получим

$$d^u(s)\bar{l}(s) - b(s)\bar{\delta}(s) = 0, \quad (6.Д.33)$$

где  $\bar{l}(s) = b(s) - l^*(s)$ ,  $\bar{\delta}(s) = d^u(s) - \delta^*(s) = (d_{2n-2}^u - \delta_{2n-2}^*)s^{2n-2} + \cdots + (d_1^u - \delta_1^*)s + (d_0^u - \delta_0^*)$ .

Нетрудно видеть, что

$$\deg \bar{\delta}(s) < \deg d^u(s),$$

и поэтому, в соответствии с теоремой 3.1.2, заключаем, что уравнение (6.Д.33) имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$\bar{l}(s) = \bar{\delta}(s) = 0.$$

Это и доказывает утверждение 6.2.1.

### 6.Д.3. Доказательство утверждения 6.2.2

Система (6.2.19)-(6.2.21) – это система  $2n + \gamma + 1$  уравнений для определения  $2n + \gamma + 1$  неизвестных  $\delta_{2n-1}, \dots, \delta_1, \delta_0; l_\gamma, \dots, l_1, l_0$ .

При чётном  $\gamma$  подсистемы (6.2.19) и (6.2.20) содержат одинаковое число  $\left(n + \frac{\gamma}{2}\right)$  уравнений. При нечётном  $\gamma$  подсистема (6.2.19) содержит  $n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}$ , а подсистема (6.2.20) –  $n + \left[\frac{\gamma}{2}\right]$  уравнений. Это означает, что число уравнений первой подсистемы на одно уравнение превышает число уравнений второй. Однако, по прежнему  $n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\} + n + \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1 = 2n + \gamma + 1$ .

**Пусть  $\gamma$  – чётное число.**

В этом случае система (6.2.19), (6.2.20) эквивалентна системе (6.2.13). Умножим каждое из уравнений (6.2.13) на  $d(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ) и представим результат как

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1+\gamma} (\lambda + j\omega_k)^\alpha \varkappa_\alpha = 0 \quad k = \overline{1, p}, \quad (6.Д.34)$$

где, в соответствии с (6.Д.26),

$$\varkappa_\alpha = \sum_{i=0}^{\gamma} (l_i d_{\alpha-i}^u - b_i \delta_{\alpha-i}) \quad (\alpha = 2n - 1 + \gamma). \quad (6.Д.35)$$

Полностью повторяя доказательство теоремы 6.1.1, заключаем, что

$$\varkappa_\alpha = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n - 1 + \gamma}. \quad (6.Д.36)$$

Эта система имеет в соответствии с утверждением 6.2.1 единственное решение (6.2.10), и таким образом для чётного  $\gamma$  утверждение 6.2.2 доказано.

**Пусть теперь  $\gamma$  – нечётное число.**

Дополним систему (6.2.20) уравнением

$$\sum_{i=0}^{\gamma} \left[ r^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] l_i - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[ r^\lambda(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + i^\lambda(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0$$

$$\left( k = n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\} = n + \left[\frac{\gamma}{2}\right] + 1 \right). \quad (6.Д.37)$$

Теперь система (6.2.19), (6.2.20), (6.Д.37) эквивалентна системе (6.2.13). Умножая каждое из уравнений (6.2.13) на  $d(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ), приходим к равенствам (6.Д.34), которые представим при  $\lambda = 0$  в виде (6.Д.4)

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*} \omega_k^{2i} (-1)^i \varkappa_{2i} = 0 \quad k = \overline{1, n + \left\{\frac{\gamma}{2}\right\}^*}, \quad (6.Д.38)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left[\frac{\gamma}{2}\right]^*} \omega_k^{2i+1} (-1)^i \varkappa_{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n + \left[\frac{\gamma}{2}\right]^*}. \quad (6.Д.39)$$

Опустим в подсистеме (6.Д.39) уравнение при  $k = n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*$ . Тогда она примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1+\left[\frac{\gamma}{2}\right]^*} \omega_k^{2i+1} (-1)^i \mathfrak{a}_{2i+1} = 0 \quad k = 1, n + \left[ \frac{\gamma}{2} \right]^*. \quad (6.Д.40)$$

Заметим, что каждое из уравнений подсистемы (6.Д.38) лишь на число  $d(j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ) отличается от соответствующих уравнений (6.2.19), а уравнения (6.2.20) на те же числа отличаются от (6.Д.40). Уравнения (6.Д.38), (6.Д.40) имеют в матричной форме вид, аналогичный (6.Д.6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_1^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]} \omega_1^{2n-1+\gamma} \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]} \omega_2^{2n-1+\gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -\omega_p^2 & 0 & \omega_p^4 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\left[\frac{2n-1+\gamma}{2}\right]} \omega_p^{2n-1+\gamma} \\ \hline 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_1^3 & 0 & \omega_1^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]} \omega_1^{2n-2+\gamma} & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_2^3 & 0 & \omega_2^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]} \omega_2^{2n-2+\gamma} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \omega_{p-1} & 0 & -\omega_{p-1}^3 & 0 & \omega_{p-1}^5 & \cdots & (-1)^{\left[\frac{2n-2+\gamma}{2}\right]} \omega_{p-1}^{2n-2+\gamma} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{a}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{2n-1+\gamma} \\ \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{2n-2+\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (6.Д.41)$$

Вычислим определитель матрицы  $M_\gamma$  коэффициентов этой системы. Переставляя столбцы этой матрицы

$$\det M_\gamma = \det \begin{pmatrix} W_1^\gamma & 0 \\ 0 & W_2^\gamma \end{pmatrix} = \det W_1^\gamma \cdot \det W_2^\gamma \neq 0,$$

где  $W_1^\gamma$  – матрица размеров  $\frac{2n-1+\gamma}{2} \times \frac{2n-1+\gamma}{2}$ , а  $W_2^\gamma$  имеет размеры  $\left\{ \frac{2n-2+\gamma}{2} \right\}^* \times \left\{ \frac{2n-2+\gamma}{2} \right\}^*$ . Эти матрицы аналогичны 6.Д.8. Их определители являются определителями Вандермонда.

При  $\lambda \neq 0$ , повторяя изложенное в п. 6.Д.1, заключаем, что  $\det M_\gamma^\lambda \neq 0$  и, таким образом, система (6.Д.38), (6.Д.40) имеет единственное решение (6.Д.36). Система (6.Д.36) имеет единственное решение (6.2.10). Это следует из утверждения 6.2.1.

#### 6.Д.4. Доказательство утверждения 6.3.1

Объект (6.3.1) асимптотически устойчив, поэтому

$$\det(Ej\omega - A) = d(j\omega) \neq 0. \quad (6.Д.42)$$

Используем это неравенство и представим

$$\mathbf{i}_x(\omega) = \text{Jm} \beta(j\omega) \frac{d(-j\omega)}{d(-j\omega)} = \text{Jm} \frac{(Ej\widetilde{\omega} - A)\mathbf{b}d(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2}. \quad (6.Д.43)$$

Рассмотрим подробнее произведение  $(Es - A)bd(s)$ , в котором  $Es - A$  – присоединённая матрица. Эту матрицу представим как

$$(Es - A) = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_{\gamma} s^{\gamma}, \quad (6.Д.44)$$

где матрица

$$A_{\gamma} = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad \gamma = \overline{0, n-2}, \quad A_{n-1} = E. \quad (6.Д.45)$$

В справедливости этих соотношений нетрудно убедиться, если заменить в (6.Д.44)  $Es - A = (Es - A)^{-1}d(s)$ , а затем умножить результат на  $Es - A$  и сравнить матрицы при одинаковых степенях  $s$ .

Таким образом, произведение

$$\begin{aligned} (Es - A)bd(-s) &= \left[ \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_{\gamma} s^{\gamma} \right] \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i s^i \right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-1} \left[ \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_{\gamma} b d_{\alpha-\gamma} (-1)^{\alpha-\gamma} \right] s^{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{2n-1} \psi_{\alpha} s^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} s^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} s^{2i+1}. \end{aligned} \quad (6.Д.46)$$

Здесь

$$\psi_{\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_{\gamma} b d_{\alpha-\gamma} (-1)^{\alpha-\gamma} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}, \quad (6.Д.47)$$

при этом  $d_{\alpha-\gamma} = 0$  при  $\alpha - \gamma < 0$  и  $\alpha - \gamma > n$ . (6.Д.48)

Возвращаясь к (6.Д.43), получим

$$\mathbf{i}_x(\omega) = \frac{1}{|d(j\omega)|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega^{2i+1} (-1)^i. \quad (6.Д.49)$$

Сформируем матрицу

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{i}_x(\omega_n) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_1^{2i+1} (-1)^i & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_2^{2i+1} (-1)^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_n^{2i+1} (-1)^i \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{|d(j\omega_1)|^2} \quad \frac{1}{|d(j\omega_2)|^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \right]. \end{aligned}$$

Представим

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_1^{2i+1} (-1)^i \quad \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_2^{2i+1} (-1)^i \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i+1} \omega_n^{2i+1} (-1)^i \right] = \\ = \left[ \boldsymbol{\psi}_1 \quad \boldsymbol{\psi}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\psi}_{2n-1} \right] \check{S}, \end{aligned} \quad (6.Д.50)$$

где

$$\check{S} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & \cdots & -\omega_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-1} & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-1} & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.51)$$

Утверждение будет доказано, если

$$\det M = \det \left[ \psi_1 \quad \psi_3 \quad \cdots \quad \psi_{2n-1} \right] \det \check{S} \prod_{i=1}^n \frac{1}{|d(j\omega_i)|^2} \neq 0. \quad (6.Д.52)$$

В этом выражении

$$\det \check{S} \neq 0, \quad (6.Д.53)$$

как определитель Вандермонда, и поэтому неравенство (6.Д.52) выполняется, если

$$\det \left[ \psi_1 \quad \psi_3 \quad \cdots \quad \psi_{2n-1} \right] \neq 0. \quad (6.Д.54)$$

На основе (6.Д.47) запишем

$$\begin{aligned} \psi_{2\mu+1} &= \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma \mathbf{b} d_{2\mu+1-\gamma} (-1)^{2\mu+1-\gamma} = \left[ A_{n-1} \mathbf{b} \quad A_{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad A_1 \mathbf{b} \quad A_0 \mathbf{b} \right] \cdot \\ &\cdot \left[ (-1)^{2\mu+1-(n-1)} d_{2\mu+1-(n-1)} \mid (-1)^{2\mu+1-(n-2)} d_{2\mu+1-(n-2)} \mid \cdots \mid (-1)^{2\mu} d_{2\mu} \mid (-1)^{2\mu+1} d_{2\mu+1} \right]' \\ &\quad \mu = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (6.Д.55)$$

Тогда матрица

$$\left[ \psi_1 \quad \psi_3 \quad \cdots \quad \psi_{2n-1} \right] = \left[ A_{n-1} \mathbf{b} \quad A_{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad A_1 \mathbf{b} \quad A_0 \mathbf{b} \right] \cdot \Gamma_1, \quad (6.Д.56)$$

где

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{(-1)^{-n+2} d_{-n+2}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+4} d_{-n+4}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{n-2} d_{n-2}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^n d_n}^{\mu=n-1} \\ \overbrace{(-1)^{-n+3} d_{-n+3}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+5} d_{-n+5}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{n-1} d_{n-1}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^{n+1} d_{n+1}}^{\mu=n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4} d_{2n-4} & (-1)^{2n-2} d_{2n-2} \\ -d_1 & -d_3 & \cdots & (-1)^{2n-3} d_{2n-3} & (-1)^{2n-1} d_{2n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.57)$$

Найдём условия, при которых

$$\det \Gamma_1 \neq 0. \quad (6.Д.58)$$

Для этого представим

$$\begin{aligned} \det \Gamma_1 &= (-1)^n d_n \cdot \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+3} d_{-n+3} & (-1)^{-n+5} d_{-n+5} & \cdots & (-1)^{n-1} d_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4} d_{2n-4} \\ -d_1 & -d_3 & \cdots & (-1)^{2n-3} d_{2n-3} \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^n d_n \cdot \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-n+4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.Д.59)$$



$$\cdot \det \begin{pmatrix} d_{-n+3} & d_{-n+5} & \cdots & d_{n-1} \\ d_{-n+4} & d_{-n+6} & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} \\ d_1 & d_3 & \cdots & d_{2n-3} \end{pmatrix}.$$

Переставим столбцы в последнем определителе и получим  $n - 1$  определитель Гурвица. Действительно, принимая во внимание (3.1.14) и учитывая, что  $d_i = 0$  при  $i > n$  и  $i < 0$ , получим

$$\det \begin{pmatrix} d_{-n+3} & d_{-n+5} & \cdots & d_{n-1} \\ d_{-n+4} & d_{-n+6} & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} \\ d_1 & d_3 & \cdots & d_{2n-3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} d_{n-1} & \cdots & d_{-n+5} & d_{-n+3} \\ d_n & \cdots & d_{-n+6} & d_{-n+4} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{2n-4} & \cdots & d_2 & d_0 \\ d_{2n-3} & \cdots & d_3 & d_1 \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}.$$

Таким образом, если

$$\Delta_{n-1} \neq 0, \quad (6.Д.60)$$

то  $\Gamma_1$  невырожденная матрица. Объект (6.3.1) асимптотически устойчив, поэтому  $\Delta_{n-1} > 0$ , и, следовательно, условие (6.Д.58) выполняется.

Покажем теперь, что для полностью управляемого объекта

$$\det [ A_{n-1}\mathbf{b} \ A_{n-2}\mathbf{b} \ \cdots \ A_1\mathbf{b} \ A_0\mathbf{b} ] \neq 0.$$

На основе (6.Д.45) запишем

$$A_\gamma \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i \mathbf{b} d_{\gamma+i+1} = [ \mathbf{b} \ A\mathbf{b} \ \cdots \ A^{n-\gamma-1}\mathbf{b} ] \cdot [ d_{\gamma+1} \ d_{\gamma+2} \ \cdots \ d_n ]', \quad \gamma = \overline{0, n-1},$$

и тогда

$$[ A_{n-1}\mathbf{b} \ A_{n-2}\mathbf{b} \ \cdots \ A_1\mathbf{b} \ A_0\mathbf{b} ] = [ \mathbf{b} \ A\mathbf{b} \ \cdots \ A^{n-1}\mathbf{b} ] \cdot \Gamma_3,$$

где

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & \cdots & d_2 & d_1 \\ 0 & d_n & \cdots & d_3 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}. \quad (6.Д.61)$$

Отсюда следует, что

$$\det [ A_{n-1}\mathbf{b} \ A_{n-2}\mathbf{b} \ \cdots \ A_1\mathbf{b} \ A_0\mathbf{b} ] = \det [ \mathbf{b} \ A\mathbf{b} \ \cdots \ A^{n-1}\mathbf{b} ] \cdot d_n^n \neq 0,$$

как условие полной управляемости объекта.

Таким образом, неравенство (6.Д.54) доказано и

$$\det M \neq 0.$$

### 6.Д.5. Доказательство утверждения 6.3.2

Передаточный вектор объекта (6.3.34)

$$\check{\beta}(s) = (Es - \check{A})^{-1} \check{b}. \quad (6.Д.62)$$

Учитывая структуру матрицы  $\check{A}$ , найдём

$$(Es - \check{A})^{-1} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2T_4^{-1} \\ 0 & T_4^{-1} \end{pmatrix}, \quad (6.Д.63)$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & s + d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.Д.64)$$

Вектор  $\check{\beta}(s)$  – это последний столбец матриц  $-T_1^{-1}T_2T_4^{-1}$  и  $T_4^{-1}$ . Последний столбец матрицы  $T_4^{-1}$

$$[T_4^{-1}]_{[n]} = [1 \quad s \quad s^2 \quad \cdots \quad s^{n-1}]' \frac{1}{\mu(s)}. \quad (6.Д.65)$$

Пусть

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11}^{(1)}(s) & t_{12}^{(1)}(s) & \cdots & t_{1n}^{(1)}(s) \\ t_{21}^{(1)}(s) & t_{22}^{(1)}(s) & \cdots & t_{2n}^{(1)}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^{(1)}(s) & t_{n2}^{(1)}(s) & \cdots & t_{nn}^{(1)}(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T_1^{-1}T_2 = \begin{pmatrix} -t_{1n}^{(1)}(s)b_0 & -t_{1n}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{1n}^{(1)}(s)b_{n-1} \\ -t_{2n}^{(1)}(s)b_0 & -t_{2n}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{2n}^{(1)}(s)b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_{nn}^{(1)}(s)b_0 & -t_{nn}^{(1)}(s)b_1 & \cdots & -t_{nn}^{(1)}(s)b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Умножим это выражение на  $[T_4^{-1}]_{[n]}$  и получим

$$T_1^{-1}T_2 [T_4^{-1}]_{[n]} = \begin{pmatrix} -t_{1n}^{(1)}(s)(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}) \\ -t_{2n}^{(1)}(s)(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}) \\ \vdots \\ -t_{nn}^{(1)}(s)(b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\mu(s)} = -[T_1^{-1}]_{[n]} \cdot \frac{b(s)}{\mu(s)}, \quad (6.Д.66)$$

где  $[T_1^{-1}]_{[n]}$  – последний столбец матрицы  $T_1^{-1}$ .

Нетрудно видеть, что

$$[T_1^{-1}]_{[n]} = \left[ 1 \quad s \quad s^2 \quad \dots \quad s^{n-1} \right]' \frac{1}{d(s)}.$$

Подставим это выражение в (6.Д.66). Тогда получим, с учётом (6.Д.65)

$$\check{\beta}(s) = \left[ -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{1}{\mu(s)} \quad -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{s}{\mu(s)} \quad \dots \quad -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{s^{n-1}}{\mu(s)} \mid \frac{1}{\mu(s)} \quad \frac{s}{\mu(s)} \quad \dots \quad \frac{s^{n-1}}{\mu(s)} \right]' \quad (6.Д.67)$$

Положим в этом выражении  $s = j\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и получим (6.3.36).

## Заключение к главе 6

Подведём итоги этой главы.

1. Доказана теорема 6.1.1 о существовании и единственности частотного модального структурного управления.
2. Описан (п. 6.1.5 и п. 6.1.6) метод частотных параметров, разрешающий задачу синтеза систем регулирования и слежения по заданной точности. При этом рассмотрены объекты второго вида, устойчивые по управлению.
3. Доказан критерий устойчивости (критерий 6.2.1) систем, объекты которых заданы  $\omega$ -индексами, а регулятор – известным дифференциальным уравнением.
4. Аналогичный критерий (критерий 6.2.2) получен для систем с известными частотными параметрами разомкнутой системы.
5. Получены условия частотной идентифицируемости (утверждение 6.3.1), при которых коэффициенты дифференциального уравнения объекта в пространстве состояний однозначно выражаются через его частотные параметры.
6. Построены алгоритмы частотной идентификации объектов первого и второго видов.
7. Показано (п. 6.3.5), что идентификационное управление требует значительно большего объёма вычислений по сравнению с прямым методом частотных параметров.
8. (П) Метод частотных параметров развит для дискретных объектов второго вида, устойчивых по управлению. Это, в частности, даёт возможность синтеза регуляторов для непрерывных объектов с запаздыванием в управлении.

## Глава 7. Частотное оптимальное управление

Частотное оптимальное управление – это управление, построенное по частотным параметрам объекта и обеспечивающее минимум заданного функционала. Метод синтеза такого управления служит базой метода частотных параметров, разрешающего задачу регулирования и слежения по заданной точности.

Отличие от предыдущей главы состоит в том, что здесь рассматриваются системы с объектами первого вида.

Цель этой главы:

- разработка процедуры АКОР по частотным параметрам,
- построение на этой основе метода частотных параметров для систем с объектами первого вида,
- критерии устойчивости систем с объектами первого и второго видов.

### 7.1. АКОР по частотным параметрам

#### 7.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (7.1.1)$$

все переменные состояния  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  которого измеряются, а матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{b}$  – неизвестны. Если объект (7.1.1) неустойчив, то пусть известно стабилизирующее управление

$$u = \mathbf{c}^{(0)'}\mathbf{x}. \quad (7.1.2)$$

Задача 7.1.1. (Задача АКОР по частотным параметрам). Пусть заданы вектора  $\mathbf{r}_x(\omega_k)$  и  $\dot{\mathbf{i}}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) (а для неустойчивых объектов вектора  $\mathbf{r}_x^c(\omega_k)$  и  $\dot{\mathbf{i}}_x^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ )) частотных параметров объекта и требуется найти вектор  $\mathbf{c}'$  регулятора

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (7.1.3)$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (7.1.1), (7.1.3), возбуждённой произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^2) dt, \quad (7.1.4)$$

в котором  $\mathbf{Q}$  – заданная положительно-определённая матрица. ■

Эта задача отличается от задачи 4.1.1 лишь объёмом сведений о параметрах объекта и называется *задачей об аналитическом конструировании оптимальных регуляторов по частотным параметрам объекта*.

К решению этой задачи возможны два подхода: идентификационный и прямой. Первый подход состоит в вычислении (идентификации) матрицы  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$  по формулам (6.3.6), (6.3.7) и использовании процедуры 4.1.1 (процедуры АКОР).

Прямой метод основан на тождестве (4.2.9), которое выражает условие оптимальности в частотной форме. Это позволяет найти вектор  $\mathbf{c}'$ , разрешающий задачу 7.1.1, непосредственно (прямо) по  $\omega$ -индексам объекта, минуя идентификацию, что существенно сократит объём вычислений по сравнению с идентификационным методом.

Наряду с задачей 7.1.1 будем рассматривать АКОР по критерию обобщённой работы и частотным параметрам объекта.

### 7.1.2. Критерий обобщённой работы

АКОР по критерию обобщённой работы занимает важное место в решении задачи 7.1.1. Это связано с тем, что для решения последней используется метод Ньютона-Рафсона, каждый шаг которого – это АКОР по критерию обобщённой работы.

Итак, для асимптотически устойчивого объекта (7.1.1), заданного  $\omega$ -индексами, будем искать регулятор, оптимальный по критерию обобщённой работы.

Применим вначале идентификационный метод. Найдём по формулам (6.3.6), (6.3.7) параметры объекта и вычислим на основе (4.1.39) искомый вектор

$$\mathbf{c} = -P^{(1)}\mathbf{b}, \quad (7.1.5)$$

где положительно-определённая матрица  $P^{(1)}$  является решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} + Q = 0. \quad (7.1.6)$$

Переходя к прямому методу, используем тождество (4.2.10)

$$w_{paz}(-j\omega) + w_{paz}(j\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (7.1.7)$$

выражающее условие оптимальности по критерию обобщённой работы в частотной форме. Здесь

$$w_{paz}(j\omega) = -\mathbf{c}'(Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b} = -\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)$$

– передаточная функция оптимальной системы (7.1.1), (7.1.2), а  $h_i(j\omega)$  – компонента вектора

$$\mathbf{h}(j\omega) = H(Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b} = H\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad H'H = Q. \quad (7.1.8)$$

Запишем тождество (7.1.7) в форме

$$-\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega) - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad (7.1.9)$$

или

$$-2\mathbf{c}'\mathbf{r}_x(\omega) = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega) = \mathbf{r}'_x(\omega)Q\mathbf{r}_x(\omega) + \mathbf{i}'_x(\omega)Q\mathbf{i}_x(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.1.10)$$

Зафиксируем  $\omega$  в этом тождестве и получим систему уравнений

$$-2\mathbf{c}'\mathbf{r}_x(\omega_k) = \mathbf{r}'_x(\omega_k)Q\mathbf{r}_x(\omega_k) + \mathbf{i}'_x(\omega_k)Q\mathbf{i}_x(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.1.11)$$

В матричной форме система принимает вид

$$M_r \mathbf{c}' = N_r, \quad (7.1.12)$$

где

$$M_r = - \left[ \mathbf{r}_x(\omega_1) \quad \mathbf{r}_x(\omega_2) \quad \cdots \quad \mathbf{r}_x(\omega_n) \right]', \quad (7.1.13)$$

$$N_r = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{r}'_x(\omega_1)Q\mathbf{r}_x(\omega_1) + \mathbf{i}'_x(\omega_1)Q\mathbf{i}_x(\omega_1) \quad \cdots \quad \mathbf{r}'_x(\omega_n)Q\mathbf{r}_x(\omega_n) + \mathbf{i}'_x(\omega_n)Q\mathbf{i}_x(\omega_n) \right]'. \quad (7.1.14)$$

Теорема 7.1.1. Если объект (7.1.1) асимптотически устойчив и полностью управляем, то решение системы (7.1.12) существует и единственно. При этом вектор  $\mathbf{c}$  не зависит от выбора испытательных частот и совпадает с (7.1.5). ■

Доказательство теоремы приведено в 7.Д.1.

Пример 7.1.1. Пусть имеется объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0 x_1 - d_1 x_2 + b_2 u, \quad (7.1.15)$$

о параметрах которого известно лишь, что

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad b_2 \neq 0. \quad (7.1.16)$$

Эти неравенства означают, что объект полностью управляем и асимптотически устойчив.

Пусть известны частотные параметры объекта

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x(\omega_1) &= \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 3.1 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, & \mathbf{i}_x(\omega_1) &= \begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{r}_x(\omega_2) &= \begin{bmatrix} -0.55 \cdot 10^{-3} \\ 2.1 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, & \mathbf{i}_x(\omega_2) &= \begin{bmatrix} -0.7 \cdot 10^{-3} \\ -1.67 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

с  $\omega_1 = 10$ ,  $\omega_2 = 30$ .

Требуется найти регулятор

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (7.1.18)$$

оптимальный по критерию обобщённой работы при

$$q_{11} = 8 \cdot 10^6, \quad q_{22} = 3 \cdot 10^4. \quad (7.1.19)$$

Построим уравнение (7.1.12), решающее эту задачу.

Сформируем вектор

$$N_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_x(\omega_1)Q\mathbf{r}_x(\omega_1) + \mathbf{i}'_x(\omega_1)Q\mathbf{i}_x(\omega_1) \\ \mathbf{r}'_x(\omega_2)Q\mathbf{r}_x(\omega_2) + \mathbf{i}'_x(\omega_2)Q\mathbf{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10^{-5}q_{11} + 10^{-3}q_{22} \\ 0.8 \cdot 10^{-6}q_{11} + 6.8 \cdot 10^{-4}q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 13.4 \end{bmatrix}, \quad (7.1.20)$$

а матрицу

$$M_r = - \begin{pmatrix} 10^{-3} & 3.1 \cdot 10^{-2} \\ 0.55 \cdot 10^{-3} & 2.1 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}. \quad (7.1.21)$$

Уравнению

$$\begin{pmatrix} 10^{-3} & 3.1 \cdot 10^{-2} \\ -0.55 \cdot 10^{-3} & 2.1 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 13.4 \end{bmatrix} \quad (7.1.22)$$

удовлетворяют

$$c_1 = -2 \cdot 10^4, \quad c_2 = -11.5 \cdot 10^2. \quad (7.1.23)$$

Для проверки этого результата применим идентификационный метод. Для определения параметров объекта (7.1.15) используем формулы (6.3.6) и (6.3.7)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{r}_x(\omega_1) & \omega_2 \mathbf{r}_x(\omega_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x(\omega_1) & \mathbf{i}_x(\omega_2) \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -10^{-2} & -1.65 \cdot 10^{-2} \\ 3.1 \cdot 10^{-1} & 6.2 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \cdot 10^{-3} & -0.7 \cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} & -1.67 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -30 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.1.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -A\mathbf{r}_x(\omega_1) - \omega_1 \mathbf{i}_x(\omega_1) = \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -30 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 3.1 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-3} \\ 10^{-2} \end{bmatrix} \cdot 10 \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.25)$$

Уравнение Ляпунова имеет в рассматриваемом случае вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.1.26)$$

или в развёрнутой форме

$$-2p_{12}d_0 = -q_{11}, \quad p_{11} - p_{12}d_1 - p_{22}d_0 = 0, \quad 2(p_{12} - p_{22}d_1) = -q_{22}.$$

Используем (7.1.5) и получим

$$c_1 = -p_{12} = -\frac{q_{11}}{2d_0} = -2 \cdot 10^4, \quad c_2 = -p_{22} = -\frac{q_{22} + 2p_{12}}{2d_1} = -11.5 \cdot 10^2. \quad (7.1.27)$$

■

### 7.1.3. Процедура АКОР

Для решения задачи 7.1.1 используем метод Ньютона-Рафсона, описанный в теореме 4.1.2. В соответствии с этим методом на каждом шаге ( $\alpha$ ) итерации решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)'}P^{(\alpha+1)} = -Q - \mathbf{c}^{(\alpha)}\mathbf{c}^{(\alpha)'} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (7.1.28)$$

в котором

$$A^{(\alpha)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(\alpha)'}, \quad \mathbf{c}^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}\mathbf{b} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (7.1.29)$$

и затем находится

$$\mathbf{c}^{(\alpha+1)} = -P^{(\alpha+1)}\mathbf{b} \quad \alpha = 0, 1, \dots. \quad (7.1.30)$$

Другими словами, на каждом шаге этого процесса решается задача АКОР по критерию обобщённой работы для «объекта»

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(\alpha)}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \alpha = 0, 1, \dots \quad (7.1.31)$$

и находится оптимальное управление

$$u = \mathbf{c}^{(\alpha+1)'}\mathbf{x}. \quad (7.1.32)$$

Условие оптимальности системы (7.1.31), (7.1.32) в частотной форме имеет в соответствии с (7.1.9) вид

$$-\mathbf{c}^{(\alpha+1)'}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(-j\omega) - \mathbf{c}^{(\alpha+1)'}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)' }(-j\omega) [Q + \mathbf{c}^{(\alpha)}\mathbf{c}^{(\alpha)'}] \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (7.1.33)$$

где

$$\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) = [Ej\omega - A - \mathbf{b}\mathbf{c}^{(\alpha)'}]^{-1}\mathbf{b}. \quad (7.1.34)$$

Используя равенство (5.1.42), представим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}(j\omega) &= [Ej\omega - A - \mathbf{b}\mathbf{c}^{(\alpha)'}]^{-1}\mathbf{b} = \\ &= (Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b} [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' } (Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b}]^{-1} = \boldsymbol{\beta}(j\omega) [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(j\omega)]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1.35)$$

Подставим это выражение в (7.1.34), положим  $\omega = \omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и получим для каждого фиксированного  $\lambda$  систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора  $\mathbf{c}^{(\alpha+1)}$

$$\begin{aligned} &-\mathbf{c}^{(\alpha+1)'}\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k) [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)]^{-1} - \mathbf{c}^{(\alpha+1)'}\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)]^{-1} = \\ &= \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k) [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)]^{-1} \{Q + \mathbf{c}^{(\alpha)}\mathbf{c}^{(\alpha)'}\} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)]^{-1} \end{aligned} \quad (7.1.36)$$

$k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots.$

Эту рекуррентную систему можно записать, после её умножения на

$$[1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(-j\omega_k)] [1 - \mathbf{c}^{(\alpha)' }\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)] \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots,$$



в более компактной форме

$$-2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{c}^{(\alpha+1)'} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}^{(\alpha)'} \boldsymbol{\beta}(-j\omega_k) \right] \right\} = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k) \left[ Q + \mathbf{c}^{(\alpha)} \mathbf{c}^{(\alpha)'} \right] \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \quad (7.1.37)$$

$$k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots$$

Если объект (7.1.1) асимптотически устойчив, то в системе (7.1.37) вектор  $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{0}$ . Для неустойчивого объекта в ней следует заменить  $\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)$  на стабилизированные передаточные вектора  $\boldsymbol{\beta}^c(j\omega_k) = \mathbf{r}_x^c(\omega_k) + j\mathbf{i}_x^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

#### 7.1.4. Существование и единственность решения

В связи с этой системой возникают вопросы: существует и единственно ли её решение при каждом фиксированном  $\lambda$ , сходится ли последовательность векторов  $\mathbf{c}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots$ ) и если сходится, то соответствует ли получаемый вектор оптимальному управлению. Ответ на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 7.1.2. Если объект (7.1.1), заданный частотными параметрами, полностью управляем и асимптотически устойчив (либо, если он неустойчив, то известен стабилизирующий регулятор

$$\mathbf{u} = \mathbf{c}^{(0)'} \mathbf{x}, \quad (7.1.38)$$

обеспечивающий его асимптотическую устойчивость), тогда существует единственная последовательность векторов  $\mathbf{c}^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots$ ), получаемых в результате решения рекуррентной системы (7.1.37).

Эта последовательность сходится к вектору

$$\mathbf{c} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{c}^{(\alpha)}, \quad (7.1.39)$$

разрешающему задачу 7.1.1. ■

Доказательство теоремы, приведённое в приложении 7.Д.2, сводится к доказательству существования для каждого вектора  $\mathbf{c}^{(\alpha)}$ , матрицы  $P^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots$ ), являющейся решением уравнений Ляпунова (4.1.8). Из сходимости матриц  $P^{(\alpha)}$ , утверждаемой теоремой 4.1.2, следует (7.1.39).

Если сравнивать идентификационный и прямой методы решения задачи, то нетрудно заметить сокращение объёма вычислений при использовании прямого метода, так как на каждом шаге итерационного процесса вместо решения системы из  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнений (4.1.8) решается система из  $n$  уравнений (7.1.37). Кроме того, в прямом методе отсутствует процедура идентификации, для осуществления которой нужно решить ещё  $n^2 + n$  уравнений.

Пример 7.1.2. Приведём прямой метод аналитического конструирования оптимального регулятора (7.1.18) для объекта (7.1.15), заданного частотными парамет-

рами (7.1.17)

$$\begin{aligned} & -2 \operatorname{Re} \left\{ \left[ c_1^{(\alpha+1)} \beta_1(j\omega_k) + c_2^{(\alpha+1)} \beta_2(j\omega_k) \right] \left[ 1 - c_1^{(\alpha)} \beta_1(-j\omega_k) - c_2^{(\alpha)} \beta_2(-j\omega_k) \right] \right\} = \\ & = \beta_1(-j\omega_k) \left[ q_{11} + c_1^{(\alpha)2} \right] \beta_1(j\omega_k) + \beta_2(-j\omega_k) \left[ q_{22} + c_2^{(\alpha)2} \right] \beta_2(j\omega_k) \\ & \quad k = 1, 2 \quad \alpha = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7.1.40)$$

В правой части этой системы отсутствует сумма

$$\beta_1(-j\omega_k) c_1^{(\alpha)} c_2^{(\alpha)} \beta_2(j\omega_k) + \beta_2(-j\omega_k) c_1^{(\alpha)} c_2^{(\alpha)} \beta_1(j\omega_k) \quad k = 1, 2 \quad \alpha = 0, 1, \dots,$$

которая для объекта (7.1.15) равна нулю. Это связано с тем, что вектор  $\beta(j\omega)$  для него имеет структуру

$$\beta(j\omega) = \begin{bmatrix} \beta_1(j\omega) \\ \beta_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \\ \omega a(\omega) e^{j[\varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}]} \end{bmatrix}, \quad (7.1.41)$$

в которой  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  – амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики этого объекта.

Объект (7.1.15) асимптотически устойчив, поэтому принимаем параметры стабилизирующего управления (7.1.2)

$$c_1^{(0)} = c_2^{(0)} = 0. \quad (7.1.42)$$

При  $\alpha = 0$  получим уравнения для первого шага итерационного процесса

$$\begin{aligned} & -2 \operatorname{Re} \left[ c_1^{(1)} \beta_1(j\omega_k) + c_2^{(1)} \beta_2(j\omega_k) \right] = \\ & = \beta_1(-j\omega_k) q_{11} \beta_1(j\omega_k) + \beta_2(-j\omega_k) q_{22} \beta_2(j\omega_k) \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.1.43)$$

Это уравнение совпадает с (7.1.22), и поэтому

$$c_1^{(1)} = -2 \cdot 10^4, \quad c_2^{(1)} = -11.5 \cdot 10^2. \quad (7.1.44)$$

Подставим эти значения в (7.1.40) и получим при  $\alpha = 1$

$$c_1^{(2)} = -10^4, \quad c_2^{(2)} = -5.58 \cdot 10^2. \quad (7.1.45)$$

Подставим эти значения в (7.1.40) и находим при  $\alpha = 2$

$$c_1^{(3)} = -0.5 \cdot 10^4, \quad c_2^{(3)} = -2.8 \cdot 10^2. \quad (7.1.46)$$

Искомые значения параметров регулятора (7.1.18)

$$c_1 = -2.63 \cdot 10^3, \quad c_2 = -1.6 \cdot 10^2.$$

В этом можно убедиться, если подставить эти числа в (7.1.40), полагая при этом

$$c_1^{(\alpha+1)} = c_1^{(\alpha)} = c_1, \quad c_2^{(\alpha+1)} = c_2^{(\alpha)} = c_2. \quad (7.1.47)$$

■

## 7.1.5. Системы с эталонной моделью\*

Пусть наряду с объектом (7.1.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x} \quad (7.1.48)$$

имеется эталонная модель

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m\mathbf{x}_m, \quad z_m = \mathbf{l}'\mathbf{x}_m, \quad (7.1.49)$$

заданная векторами  $\mathbf{r}_x^m(\omega_k)$  и  $\mathbf{r}_x^m(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) частотных параметров. Эти частотные параметры получены путём экспериментов с эталонной моделью, возбуждённой  $n$ -мерным вектором  $\mathbf{b}_m u_{ucn}$ . В этом случае эталонная модель описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m\mathbf{x}_m + \mathbf{b}_m u_{ucn}. \quad (7.1.50)$$

Требуется найти управление

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{c}'_m\mathbf{x}_m, \quad (7.1.51)$$

такое, чтобы на движениях системы (7.1.48), (7.1.51) минимизировался функционал (4.1.74)

$$J = \int_0^{\infty} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)'Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) + u^2] dt, \quad (7.1.52)$$

где  $Q = q\mathbf{l}'\mathbf{l}$ .

Эта задача является развитием задачи 4.1.2 на случай, когда объект и эталонная модель заданы частотными параметрами.

Для её решения запишем (4.2.36), (4.2.41) при  $s = j\omega$

$$[1 - \mathbf{c}'\beta(-j\omega)][1 - \mathbf{c}'\beta(j\omega)] = 1 + q|\mathbf{l}'\beta(j\omega)|^2, \quad (7.1.53)$$

$$\delta'\beta^3(j\omega) + \mathbf{c}'_m\beta_m(-j\omega) = q\beta'_m(-j\omega)\mathbf{l}'\beta^3(j\omega). \quad (7.1.54)$$

Здесь, в отличие от (4.2.40), произвольный вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{b}_m$ , и поэтому

$$\beta_m(j\omega) = (Ej\omega - A_m)^{-1}\mathbf{b}_m. \quad (7.1.55)$$

Зафиксируем частоту  $\omega$  и получим

$$[1 - \mathbf{c}'\beta(-j\omega_k)][1 - \mathbf{c}'\beta(j\omega_k)] = 1 + q|\mathbf{l}'\beta(j\omega_k)|^2 \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.1.56)$$

$$\delta'\beta^3(j\omega_k) + \mathbf{c}'_m\beta_m(-j\omega_k) = q\beta'_m(-j\omega_k)\mathbf{l}'\beta^3(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.1.57)$$

В разделе 4.1.5 показано, что при известных параметрах модели и объекта вектор  $\mathbf{c}'$  в управлении (7.1.52) не зависит от параметров модели. Это свойство сохраняется и для объектов, заданных  $\omega$ -индексами, и поэтому систему уравнений (7.1.56) можно решать независимо от системы (7.1.57). Уравнения (7.1.56) решаются с помощью

рекуррентной системы (7.1.37) и доставляют  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{c}$ . Вектор  $\mathbf{c}_m$  и вектор  $\delta$  (последний не используется при управлении) являются решением системы  $2n$  линейных алгебраических уравнений. Эта система следует из (7.1.57), если учесть, что вектора  $\delta$  и  $\mathbf{c}_m$  – вещественные, и имеет вид

$$-\mathbf{c}'_m \mathbf{r}_x^m(\omega_k) - \delta' \mathbf{r}^3(\omega_k) = -q [\mathbf{r}_x^{m'}(\omega_k) \mathbf{l}' \mathbf{r}^3(\omega_k) + \mathbf{i}_x^{m'}(\omega_k) \mathbf{l}' \mathbf{i}^3(\omega_k)] \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.1.58)$$

$$\mathbf{c}'_m \mathbf{i}_x^m(\omega_k) - \delta' \mathbf{i}^3(\omega_k) = -q [\mathbf{r}_x^{m'}(\omega_k) \mathbf{l}' \mathbf{r}^3(\omega_k) - \mathbf{i}_x^{m'}(\omega_k) \mathbf{l}' \mathbf{i}^3(\omega_k)] \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.1.59)$$

$\omega$ -индексы  $\mathbf{r}^3(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}^3(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) замкнутой системы вычисляются по формуле (4.2.43) с использованием известных частотных параметров объекта.

**Утверждение 7.1.1.** Если пара  $(A, \mathbf{b})$  и  $(A_m, \mathbf{b}_m)$  полностью управляема, то решение  $\mathbf{c}'_m$  системы (7.1.58), (7.1.59) существует, единственно и совпадает с решением задачи 4.1.2. ■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.3.

## 7.2. Аналитический синтез регуляторов

### 7.2.1. Синтез по критерию точности

Пусть к объекту (7.1.1) приложено внешнее возмущение, а процессы в нём оцениваются по регулируемой переменной  $z(t)$ . Тогда объект описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + f), \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad (7.2.1)$$

где  $\mathbf{l}$  – известный  $n$ -мерный вектор чисел, а ступенчатое возмущение  $|f(t)| \leq f^*$ .

**Задача 7.2.1.** Для объекта (7.2.1), заданного векторами  $\mathbf{r}_x(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) его  $\omega$ -индексов, найти регулятор

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (7.2.2)$$

такой, чтобы система (7.2.1), (7.2.2) удовлетворяла требованию к точности

$$|z_{cm}| \leq z^*, \quad (7.2.3)$$

(где  $z^*$  – заданное число) и была грубой (обладала запасами устойчивости  $\varphi_s \geq 30^\circ$ ,  $L \geq 2$ ). ■

Эта задача является развитием задачи 6.1.2 на объекты первого вида.

Для её решения применим процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Матрица  $Q$  в уравнениях (7.1.12) этой процедуры имеет вид

$$Q = q\mathbf{l}'\mathbf{l}, \quad (7.2.4)$$

где число  $q$  находится из (4.3.12)

$$q \geq \frac{|\mathbf{l}'\beta(0)|\bar{f} - z^*}{0.5|\mathbf{l}'\beta(0)|^2 z^*}. \quad (7.2.5)$$

В это соотношение входит произведение  $l'\beta(0)$  для вычисления которого необходимо включить в  $\omega$ -тест испытательную частоту  $\omega = 0$ .

При гармоническом внешнем воздействии  $f(t) = f_{zarpm} \sin \omega^f t$  амплитуда ( $z_{zarpm}$ ) вынужденных колебаний системы (7.2.1), (7.2.2) определяется выражением (4.3.38)

$$z_{zarpm} = \frac{|l'\beta(j\omega^f)|}{|1 + w_{paz}(j\omega^f)|} \cdot f_{zarpm}. \quad (7.2.6)$$

При оптимальном управлении отсюда следует оценка (4.3.41), из которой получим число

$$q \geq \frac{|l'\beta(j\hat{\omega}^f)|^2 f_{zarpm}^{*2} - z_{zarpm}^{*2}}{|l'\beta(j\hat{\omega}^f)|^2 z_{zarpm}^{*2}}. \quad (7.2.7)$$

В этом выражении  $\hat{\omega}^f$  – оценка частоты внешнего возмущения, включаемая в  $\omega$ -тест как одна из испытательных частот. Для  $q$  определяемого (7.2.7)

$$z_{zarpm} \leq z_{zarpm}^*. \quad (7.2.8)$$

### 7.2.2. Учёт требований к показателям качества

Усложним задачу 7.2.1 требованием к показателям качества переходных процессов

$$t_{peg} \leq \bar{t}_{peg}, \quad \sigma \leq \bar{\sigma}, \quad (7.2.9)$$

где  $\bar{t}_{peg}$  и  $\bar{\sigma}$  – заданные числа, и будем называть её *задачей 7.2.2*. Она отличается от задачи 4.4.1 лишь объёмом сведений об объекте, и поэтому её решение является частотной интерпретацией процедуры 4.4.1.

Для решения задачи 7.2.2 достаточно, чтобы объект (7.2.1) обладал следующими структурными свойствами:

- а) Объект устойчив по управлению, если записать (7.2.1) в форме «регулируемая переменная – управление». Это означает, что полином  $b_z(s)$  в передаточной функции (4.4.17) – гурвицев.
- б) Известна степень  $\gamma_z$  полинома  $b_z(s)$  и коэффициент  $b_\gamma$  при его старшей степени.
- в) Известно число  $\delta$ , при котором выполняются равенства (4.4.13)

$$l'b = l'Ab = \dots = l'A^{\delta-1}b = 0. \quad (7.2.10)$$

- г) Степень  $\mu$  полинома Баттерворта, соответствующая заданному (7.2.9) перерегулированию  $\bar{\sigma}$ , удовлетворяет неравенству

$$n - \gamma_z - \delta \leq \mu. \quad (7.2.11)$$

Эти структурные свойства используются для формирования функционала оптимизации (4.4.21), в котором матрица

$$Q = q \left( \mathbf{l} + \tau_1 A' \mathbf{l} + \dots + \tau_\delta A^{\delta-1} \mathbf{l} \right) \left( \mathbf{l}' + \tau_1 \mathbf{l}' A + \dots + \tau_\delta \mathbf{l}' A^{\delta-1} \right). \quad (7.2.12)$$

Здесь, в соответствии с (4.2.20), число

$$q \geq \max \left\{ \frac{f^{*2}}{z^{*2}}, \frac{1}{[\mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(0)]^2}, \frac{1}{b_\gamma^2} \cdot \left[ \frac{3(n - \gamma - \delta)}{\bar{t}_{pez}} \right]^{2(n - \gamma - \delta)} \right\}, \quad (7.2.13)$$

а коэффициенты  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ) определяются на основе (4.4.15), (4.4.16) как коэффициенты полинома

$$\tau(s) = (1 + \tau s)^\delta, \quad \tau < \bar{t}_{pez}. \quad (7.2.14)$$

Последующее решение задачи 7.2.2 сводится к рекуррентной процедуре решения уравнения (7.1.37).

Заметим, что выражение (7.2.12) для матрицы  $Q$  содержит неизвестную матрицу  $A$  и поэтому рассмотрим произведение  $\boldsymbol{\beta}'(s)Q\boldsymbol{\beta}(s)$  в правой части (7.1.37).

Принимая во внимание соотношение  $A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E$  и равенства (7.2.10), получим выражение

$$\mathbf{l}' A^i \boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{l}' A^i (Es - A)^{-1} \mathbf{b} = s^i \mathbf{l}' (Es - A)^{-1} \mathbf{b} = s^i \mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(s), \quad (7.2.15)$$

которое позволяет записать

$$\boldsymbol{\beta}'(-s)Q\boldsymbol{\beta}(s) = q\tau(-s)\tau(s)\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}(-s)\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}(s), \quad \tau(s) = 1 + \tau_1 s + \dots + \tau_\delta s^\delta, \quad (7.2.16)$$

или

$$\boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega_k) = q|\tau(j\omega_k)|^2 |\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega_k)|^2 \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.2.17)$$

При гармоническом внешнем возмущении число  $q$  определяется из (7.2.7). Действительно, подставим в (7.2.6)

$$\left| 1 + w_{paz}(j\omega^f) \right| = \sqrt{1 + q|\tau(j\omega^f)|^2 |\mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}(j\omega^f)|^2}$$

и получим после замены  $\omega^f$  на  $\hat{\omega}^f$  неравенство (7.2.7).

### 7.2.3. Следящие системы и системы с эталонной моделью\*

Будем теперь искать управление

$$u = \mathbf{c}' \mathbf{x} + kv, \quad (7.2.18)$$

которое обеспечивает не только требование (7.2.3) к точности регулирования, но и условие точного слежения

$$|z(t) - v(t)| \leq \varepsilon, \quad (7.2.19)$$

где  $\varepsilon$  – заданное число.

Регулируемая переменная  $z(t)$  и задающее воздействие оптимальной системы связаны соотношением (4.4.87), и поэтому условие (7.2.19) выполняется, если при решении задачи 7.2.2 выбрать достаточно большое число  $q$  (удовлетворяющее, в частности, (7.2.13)) и положить в (7.2.18) число  $k = \sqrt{q}$ .

Такое решение задачи синтеза следящей системы обладает двумя недостатками. Во-первых, оно требует сведений о структурных свойствах объекта (7.2.1), используемых для решения задачи 7.2.2. Во-вторых, большое значение коэффициента  $q$  в функционале оптимизации усиливает влияние структурных возмущений объекта и может привести к неустойчивости системы.

Эти обстоятельства приводят к необходимости использования эталонной модели. Следящая система с эталонной моделью описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad (7.2.20)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m\mathbf{x}_m + \mathbf{b}_m v, \quad z_m = \mathbf{l}'\mathbf{x}_m, \quad (7.2.21)$$

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{c}'_m\mathbf{x}_m. \quad (7.2.22)$$

Искомые вектора  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}'_m$  находятся как решения уравнений (7.1.56), (7.1.58), (7.1.59).

#### 7.2.4. ПИД-регулятор\*

Для построения ПИД-регулятора в п. 4.4.6 использован приём, который состоит в формировании «расширенного» объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad \dot{x}_{n+1} = z \quad (7.2.23)$$

с последующим применением процедуры АКОР.

Характеристический полином «объекта» (7.2.23) содержит нулевой корень, и поэтому для него нельзя использовать процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Применение процедуры 4.4.1 также затруднено, так как неясно является ли управление (7.1.2) стабилизирующим для «объекта» (7.2.23).

В связи с этим рассмотрим «расширенный» объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad (7.2.24)$$

$$\dot{x}_{n+1} = -\frac{1}{t_1}x_{n+1} + \frac{1}{t_1}z, \quad (7.2.25)$$

где  $t_1$  – некоторое положительное число (постоянная времени инерционного звена).

Его характеристический полином содержит, дополнительно к корням исходного объекта (7.2.24), корень  $\lambda_{n+1} = -\frac{1}{t_1}$  и, следовательно, «объект» (7.2.24), (7.2.25) –

асимптотически устойчив, если этим свойством обладает объект (7.2.24). Далее, стабилизирующее управление (7.1.2) сохраняет при достаточно малых  $t_1$  способность стабилизировать «объект» (7.2.24), (7.2.25).

Однако регулятор

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + c_{n+1}x_{n+1}, \quad (7.2.26)$$

получаемый в результате процедур АКОР, не обеспечивает астатизма системы ( $\lim_{t \rightarrow \infty} z \neq 0$  при ступенчатом внешнем возмущении). Поэтому, после решения задачи АКОР и определения коэффициентов регулятора (7.2.26), сформируем управление

$$\dot{u}^{(1)} = t_1 \dot{u} + u \quad \left( u^{(1)} = t_1 u + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right) \quad (7.2.27)$$

и приложим его к объекту (7.2.24)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u^{(1)}, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}. \quad (7.2.28)$$

Исследуем свойства регулятора, описываемого уравнением (7.2.25)–(7.2.27).

Из (7.2.25) получим

$$t_1 x_{n+1}(t) + \int_{t_0}^t x_{n+1}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau + x_{n+1}(t_0). \quad (7.2.29)$$

Уравнение (7.2.27) принимает, если учесть (7.2.26), (7.2.29), вид

$$u^{(1)} = t_1 \mathbf{c}'\mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{c}'\mathbf{x}(\tau) d\tau + c_{n+1} \left( t_1 x_{n+1} + \int_{t_0}^t x_{n+1}(\tau) d\tau \right),$$

или (при  $x_{n+1}(t_0) = 0$ )

$$u^{(1)} = t_1 \mathbf{c}'\mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{c}'\mathbf{x}(\tau) d\tau + c_{n+1} \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau. \quad (7.2.30)$$

При таком регуляторе система (7.2.28), (7.2.30) – астатическая.

Астатизм достигается введением в систему дополнительного звена (7.2.27), и поэтому необходимо исследовать устойчивость системы (7.2.28), (7.2.30).

Будем трактовать уравнение (7.2.27) как структурное возмущение (4.4.106) модели (7.2.28). Его передаточная функция

$$w_{\text{возм.1}}(s) = \frac{t_1 s + 1}{s}. \quad (7.2.31)$$

Для анализа влияния этого возмущения на устойчивость оптимальной системы (7.2.24)–(7.2.26) найдём

$$w_{\text{возм.1}}(j\omega) + w_{\text{возм.1}}(-j\omega) = 2t_1. \quad (7.2.32)$$



Из утверждения 4.4.6 и неравенства  $t_1 > 0$  следует, что, если управление (7.2.26) получено в результате процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, то структурное возмущение не нарушает устойчивости оптимальной системы.

Если

$$t_1 > 0.5, \quad (7.2.33)$$

то уравнение (7.2.27) не нарушает устойчивости системы, регулятор (7.2.26) которой получен на основе рекуррентной системы (7.1.37). Это следует из утверждения 4.4.5.

В заключение найдём  $\omega$ -индексы «расширенного» объекта (7.2.24), (7.2.25).

Передаточный вектор этого объекта

$$\beta_p(s) = \begin{pmatrix} Es - A & \mathbf{0} \\ \frac{1}{t_1} l' & -\frac{1}{t_1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Es - A)^{-1} \mathbf{b} \\ \frac{1}{t_1 s + 1} l' (Es - A)^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(s) \\ \frac{l' \beta(s)}{t_1 s + 1} \end{bmatrix}. \quad (7.2.34)$$

Отсюда находим, используя заданные  $\omega$ -индексы  $\mathbf{r}_x(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n+1}$ ),

$$\beta_p(j\omega_k) = \mathbf{r}_{px}(\omega_k) + j\mathbf{i}_{px}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Нетрудно показать также, что расширенный объект полностью управляем, если этим свойством обладает исходный объект (7.2.24).

## 7.3. Анализ устойчивости

### 7.3.1. Первый критерий устойчивости (необходимое условие)

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (7.3.1)$$

$$u = \mathbf{c}^* \mathbf{x}, \quad (7.3.2)$$

в которой  $\mathbf{c}^*$  – заданный вектор регулятора (7.3.2), а полностью управляемый и наблюдаемый по сигналу  $u(t)$  объект задан векторами частотных параметров  $\mathbf{r}_x(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Если объект (7.3.1) неустойчив, то пусть известно стабилизирующее управление (7.1.2) и он описывается стабилизированными  $\omega$ -индексами  $\mathbf{r}_x^c(\omega_k)$  и  $\mathbf{i}_x^c(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

При этих условиях требуется установить, является ли система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчивой. Для этого используем теорему 4.5.1, в соответствии с которой для любой асимптотически устойчивой системы (7.3.1), (7.3.2) существует функционал

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + 2(\tilde{l}' \mathbf{x}) u + u^2] dt \quad (7.3.3)$$

с положительно-определённой матрицей  $Q$  и вектором  $\tilde{\mathbf{l}}$ , удовлетворяющим неравенству (4.5.4)

$$Q_l = Q - \tilde{\mathbf{l}}' > 0, \quad (7.3.4)$$

такой, что система (7.3.1), (7.3.2) является оптимальной в системе этого функционала.

Матрица  $Q$  и вектор  $\tilde{\mathbf{l}}$  удовлетворяют тождеству (4.5.34), которое для удобства запишем как

$$\tilde{\mathbf{l}}'\beta(-j\omega) + \tilde{\mathbf{l}}'\beta(j\omega) + \beta'(-j\omega)Q\beta(j\omega) = \gamma(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (7.3.5)$$

где

$$\gamma(\omega) = -\mathbf{c}^*\beta(-j\omega) - \mathbf{c}^*\beta(j\omega) + \beta'(-j\omega)\mathbf{c}^*\mathbf{c}^*\beta(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.3.6)$$

На  $\omega$ -тесте это тождество примет вид

$$\tilde{\mathbf{l}}'\beta(-j\omega_k) + \tilde{\mathbf{l}}'\beta(j\omega_k) + \beta'(-j\omega_k)\mathbf{c}^*\mathbf{c}^*\beta(j\omega_k) = \gamma(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.3.7)$$

Утверждение 7.3.1. Множество матриц  $Q$  и векторов  $\tilde{\mathbf{l}}$ , удовлетворяющих системе уравнений (7.3.7), совпадает с множеством этих матриц и векторов, удовлетворяющих тождеству (7.3.5). Другими словами, равенства (7.3.7) служат необходимым и достаточным условием выполнения тождества (7.3.5). ■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.4.

Запишем уравнения (7.3.7) в матричной форме. В связи с этим введём обозначения

$$\frac{1}{2}M_r = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x(\omega_1) & \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma(\omega_1) & \gamma(\omega_2) & \cdots & \gamma(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad (7.3.8)$$

$$N_- = \begin{bmatrix} \beta(-j\omega_1) & \beta(-j\omega_2) & \cdots & \beta(-j\omega_n) \end{bmatrix}, \quad N_+ = \begin{bmatrix} \beta(j\omega_1) & \beta(j\omega_2) & \cdots & \beta(j\omega_n) \end{bmatrix}. \quad (7.3.9)$$

$D\{A\}$  – вектор-столбец, компонентами которого являются соответствующие элементы диагонали квадратной матрицы  $A$ .

При этих обозначениях (7.3.7) примет вид

$$M_r\tilde{\mathbf{l}} + D\{N_-^*QN_+\} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (7.3.10)$$

где известный  $n$ -мерный вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = -M_r\mathbf{c}^* + D\{N_-^*\mathbf{c}^*\mathbf{c}^*N_+\}. \quad (7.3.11)$$

Если

$$\det M_r \neq 0, \quad (7.3.12)$$

тогда из (7.3.10) находим

$$\tilde{\mathbf{l}} = M_r^{-1}[\boldsymbol{\gamma} - D\{N_-^*QN_+\}]. \quad (7.3.13)$$

Подставляя это выражение в (7.3.11), получим

$$Q - M^{-1}[\gamma - D\{N_-^* Q N_+\}][\gamma - D\{N_-^* Q N_+\}]' M^{-1'} > 0. \quad (7.3.14)$$

Если объект (7.3.1) асимптотически устойчив, то из теоремы 7.1.1 следует, что неравенство (7.3.12) выполняется. При неустойчивом объекте следует заменить  $A$  на  $A^{(0)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(0)'}$  и  $\beta(j\omega)$  – на  $\beta^s(j\omega) = \beta(j\omega) [1 - \mathbf{c}^{(0)'}\beta(j\omega)]$ , тогда матрица при векторе  $\tilde{\mathbf{l}}$  в (7.3.10) вновь будет невырожденной.

Если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то всегда существует положительно-определённая матрица  $Q$ , удовлетворяющая неравенству (7.3.14), и, таким образом, это неравенство выступает как необходимое условие устойчивости.

### 7.3.2. Первый критерий (достаточное условие)

Однако может случиться так, что  $Q > 0$  найдется из (7.3.14) и для неустойчивой системы (7.3.1), (7.3.2). Неравенство (7.3.14) будет достаточным для асимптотической устойчивости рассматриваемой системы, если в результате решения задачи оптимизации функционала (7.3.3), в котором  $Q$  и  $\tilde{\mathbf{l}}$  получены на основе (7.3.14), (7.3.13), найдём

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^*. \quad (7.3.15)$$

Переходя к рассмотрению этой задачи об аналитическом конструировании регуляторов (задачи АКОР) для объектов, заданных частотными параметрами, запишем функционал (7.3.3) в виде

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \mathbf{x}' (Q - \tilde{\mathbf{l}}\tilde{\mathbf{l}}') \mathbf{x} + (u + \tilde{\mathbf{l}}'\mathbf{x})^2 \right] dt \quad (7.3.16)$$

и введём «новое» управление

$$u_l = u + \tilde{\mathbf{l}}'\mathbf{x}. \quad (7.3.17)$$

Тогда уравнение (7.3.1) и функционал (7.3.16) с учётом обозначений (7.3.4) примут вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A_l \mathbf{x} + \mathbf{b}u_l, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (7.3.18)$$

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q_l \mathbf{x} + u_l^2) dt, \quad (7.3.19)$$

где

$$A_l = A - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{l}}'. \quad (7.3.20)$$

«Объект» (7.3.18) задан частотными параметрами

$$\begin{aligned} \beta_l(j\omega_k) &= (E_n j\omega_k - A_l)^{-1} \mathbf{b} = (E_n j\omega_k - A + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{l}}')^{-1} \mathbf{b} = \\ &= \beta(j\omega_k) [1 + \tilde{\mathbf{l}}'\beta(j\omega_k)]^{-1} \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

Он полностью управляем, так как из управляемости пары  $(A, \mathbf{b})$  следует управляемость пары  $(A_l, \mathbf{b})$ . Для него можно указать управление

$$u_l = [\mathbf{c}^{(0)} + \tilde{\mathbf{l}}]' \mathbf{x} = \mathbf{c}_l^{(0)'} \mathbf{x}, \quad (7.3.22)$$

такое, что система (7.3.18), (7.3.22) асимптотически устойчива.

Оптимальное управление

$$u_l = \mathbf{c}_l' \mathbf{x}, \quad (7.3.23)$$

при котором на движениях системы (7.3.18), (7.3.23), возбуждённых произвольным вектором  $\mathbf{x}^{(0)}$ , минимизируется функционал (7.3.19), находится в результате решения рекуррентной системы уравнений, аналогичной (7.1.37)

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{c}_l^{(\alpha+1)'} \boldsymbol{\beta}_l(j\omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \boldsymbol{\beta}_l(-j\omega_k) \right] \right\} &= \boldsymbol{\beta}_l'(-j\omega_k) \left[ Q_l + \mathbf{c}_l^{(\alpha)} \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \right] \boldsymbol{\beta}_l(j\omega_k) \\ k = \overline{1, n} \quad \alpha &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

Свойства «объекта» (7.3.18) обеспечивают сходимость последовательности векторов  $\mathbf{c}_l^{(\alpha)}$  так, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{c}_l^{(\alpha)} = \mathbf{c}_l. \quad (7.3.25)$$

**Критерий 7.3.1.** Критерий устойчивости. Для асимптотической устойчивости системы (7.3.1), (7.3.2) необходимо существование положительно-определённой матрицы  $Q$ , удовлетворяющей неравенству (7.3.14), и достаточно, чтобы  $Q$  и вектор  $\tilde{\mathbf{l}}$ , найденные из соотношений (7.3.14), (7.3.13), были таковы, что последовательность векторов  $\mathbf{c}_l^{(\alpha)}$ , являющихся решениями системы (7.3.24), обладала свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{c}_l^{(\alpha)} = \mathbf{c}^* + \tilde{\mathbf{l}}. \quad (7.3.26)$$

■

**Примечание 7.3.1.** Практическое применение этого критерия затруднено нахождением матрицы  $Q$  из нелинейного неравенства (7.3.14). Однако в ряде случаев это неравенство значительно упрощается. Так, если выполняется условие

$$[1 - \mathbf{c}^{*'} \boldsymbol{\beta}(-j\omega)] [1 - \mathbf{c}^{*'} \boldsymbol{\beta}(j\omega)] > 1 \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (7.3.27)$$

то  $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{0}$ , и тогда необходимо найти лишь  $Q > 0$  из неравенства

$$D\{N'_- Q N_+\} = \gamma. \quad (7.3.28)$$

Условие (7.3.27) выполняется, если вектор  $\mathbf{c}^*$  получен в результате решения задачи АКОР либо АКОР по критерию обобщённой работы. ■

**Пример 7.3.1.** Исследуем устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0 x_1 - d_1 x_2 + b u, \quad u = c_1^* x_1 + c_2^* x_2, \quad (7.3.29)$$

о которой известно, что

$$d_0 > 0, \quad d_1 > 0, \quad b \neq 0, \quad c_1^* = -2.63 \cdot 10^3, \quad c_2^* = -1.6 \cdot 10^2. \quad (7.3.30)$$

В результате испытаний объекта этой системы при гармонических воздействиях с частотой  $\omega_1 = 10$ ,  $\omega_2 = 30$  получены частотные характеристики (7.1.17).

Переходя к анализу устойчивости, положим  $l_1 = l_2 = 0$  и будем искать параметры  $q_{11}$  и  $q_{22}$  диагональной матрицы  $Q$  из уравнения (7.3.28).

Сформируем матрицы

$$N_+ = \begin{pmatrix} a_1(\omega_1)e^{j\varphi_1(\omega_1)} & a_1(\omega_2)e^{j\varphi_1(\omega_2)} \\ \omega_1 a_1(\omega_1)e^{j[\varphi_1(\omega_1) + \frac{\pi}{2}]} & \omega_2 a_1(\omega_2)e^{j[\varphi_1(\omega_2) + \frac{\pi}{2}]} \end{pmatrix}, \quad (7.3.31)$$

$$M_r = 2 \begin{pmatrix} a_1(\omega_1) \cos \varphi_1(\omega_1) & \omega_1 a_1(\omega_1) \cos \left[ \varphi_1(\omega_1) + \frac{\pi}{2} \right] \\ a_1(\omega_2) \cos \varphi_1(\omega_2) & \omega_2 a_1(\omega_2) \cos \left[ \varphi_1(\omega_2) + \frac{\pi}{2} \right] \end{pmatrix}. \quad (7.3.32)$$

Уравнение (7.3.28) имеет в рассматриваемом случае вид

$$q_{11} + q_{22}\omega_k^2 = \frac{1}{a_1^2(\omega_k)} \left\{ -2c_1^* a_1(\omega_k) \cos \varphi_1(\omega_k) - \right. \\ \left. - 2c_2^* \omega_k a_1(\omega_k) \cos \left[ \varphi_1(\omega_k) + \frac{\pi}{2} \right] + (c_1^{*2} + c_2^{*2} \omega_k^2) a_1^2(\omega_k) \right\} \quad k = 1, 2. \quad (7.3.33)$$

Решая эту систему при значениях её параметров из (7.1.17), (7.3.30), получим

$$q_{11} = 8 \cdot 10^6, \quad q_{22} = 3 \cdot 10^4. \quad (7.3.34)$$

Отсюда (так как  $q_{11} > 0$ ,  $q_{22} > 0$ ) следует, что необходимое условие устойчивости выполняется. Для проверки достаточного условия решаем задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty [8 \cdot 10^6 x_1^2 + 3 \cdot 10^4 x_2^2 + u^2] dt \quad (7.3.35)$$

на движениях объекта системы (7.3.29), заданного частотными параметрами. Это решение получено ранее в примере 7.1.2, где показано, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} c_1^{(\alpha)} = -2.63 \cdot 10^3, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} c_2^{(\alpha)} = -1.6 \cdot 10^2. \quad (7.3.36)$$

Сравнивая эти значения с заданными (7.3.30), заключаем об асимптотической устойчивости системы (7.3.29). ■

### 7.3.3. Второй критерий устойчивости

Введём в рассмотрение функционал

$$J = \int_0^\infty [\varepsilon^2 \mathbf{x}' Q^{(2)} \mathbf{x} + (u - \mathbf{c}^{*t} \mathbf{x})^2] dt, \quad (7.3.37)$$

где  $Q^{(2)}$  – заданная положительно-определённая матрица,  $\varepsilon$  – некоторое число (неопределённый параметр).

Исследуем зависимость от  $\varepsilon$  управления

$$u = \mathbf{c}'(\varepsilon)\mathbf{x}, \quad (7.3.38)$$

при котором функционал (7.3.37) достигает на движениях системы (7.3.1), (7.3.38) наименьшего значения.

Утверждение 7.3.2. Если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{c}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}^*, \quad (7.3.39)$$

если же эта система неустойчива, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{c}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}^{**} \neq \mathbf{c}^*. \quad (7.3.40)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 7.Д.5.

Для вычисления вектора  $\mathbf{c}(\varepsilon)$  введём «новое» управление

$$u_l = u - \mathbf{c}^{*l}\mathbf{x}, \quad (7.3.41)$$

тогда уравнение (7.3.1) и функционал (7.3.37) примут вид (7.3.18), (7.3.19), где

$$\mathbf{l} = -\mathbf{c}^*, \quad A_l = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{*l}, \quad Q_l = \varepsilon^2 Q^{(2)}. \quad (7.3.42)$$

Решая при этих значениях рекуррентную систему уравнений (7.3.24), получим (для каждого фиксированного  $\varepsilon$ ) вектор

$$\mathbf{c}_l(\varepsilon) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{c}_l^{(\alpha)}(\varepsilon). \quad (7.3.43)$$

В соответствии с (7.3.41)

$$\mathbf{c}_l(\varepsilon) = \mathbf{c}(\varepsilon) - \mathbf{c}^*, \quad (7.3.44)$$

и, следовательно, если система (7.3.1), (7.3.2) асимптотически устойчива, то  $\mathbf{c}_l(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а, если она неустойчива, то  $\mathbf{c}_l(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}^{**} \rightarrow \mathbf{c}^* \neq 0$ .

Критерий 7.3.2. Критерий устойчивости. Для асимптотической устойчивости системы (7.3.1), (7.3.2) необходимо и достаточно, чтобы вектора  $\mathbf{c}_l(\varepsilon)$ , порождаемые системой (7.3.24) с параметрами (7.3.42), при различных значениях параметра  $\varepsilon$ , обладали свойством

$$\mathbf{c}_l(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.3.45)$$

■

Необходимость (7.3.45) следует из (7.3.29), а достаточность – из оптимальности (7.3.41).

Соотношения (7.3.45) означают, что при достаточно малом  $\varepsilon$  вектор  $\mathbf{c}_l(\varepsilon)$  должен быть достаточно мал.

Для практического использования критерия необходимо как-то определить понятие достаточной малости. Определим её путём сравнения с заданным вектором  $\mathbf{c}^*$ . Будем считать, что вектор  $\mathbf{c}_l$  достаточно мал, если

$$|c_{li}| \ll |c_i^*| \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.3.46)$$

Пример 7.3.2. Исследуем устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = -d_0 x_1 + bu, \quad u = c_1^* x_1, \quad (7.3.47)$$

параметры ( $d_0$  и  $b$ ) объекта которой неизвестны. Известно лишь, что  $b \neq 0$ . Кроме того, известен регулятор  $u = c_1^{(0)} x_1$  ( $c_1^{(0)} = -3$ ), при котором объект системы (7.3.47), замкнутый этим регулятором, асимптотически устойчив. При этом условии можно определить экспериментально значение амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик объекта. Так на частоте  $\omega_1 = 2.25$ :

$$a_1(\omega_1) = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2.25}, \quad \varphi_1(\omega_1) = -\frac{\pi}{2}. \quad (7.3.48)$$

Будем исследовать две ситуации. В первой из них  $c_1^* = -2$ , во второй  $c_1^* = 2$ .

Переходя к анализу устойчивости при  $c_1^* = -2$ , запишем уравнение (7.3.24)

$$-2c_l^{(\alpha+1)} a_l(\omega_1) [\cos \varphi_l(\omega_1) - c_l^{(\alpha)} a_l(\omega_1)] = a_l^2(\omega_1) [\varepsilon^2 q_{11} + c_l^{(\alpha)2}] \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (7.3.49)$$

где, в соответствии с (7.3.21)

$$a_l(\omega_1) e^{j\varphi_l(\omega_1)} = a_1(\omega_1) e^{j\varphi_1(\omega_1)} [1 - c_1^* a_1(\omega_1) e^{j\varphi_1(\omega_1)}]^{-1}. \quad (7.3.50)$$

При значениях (7.3.48) получим

$$a_l(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2 + c_1^{*2}}} = \frac{1}{3}, \quad \cos \varphi_l(\omega_1) = \frac{-c_1^*}{\sqrt{\omega_1^2 + c_1^{*2}}} = \frac{2}{3}. \quad (7.3.51)$$

Из (7.3.49) следует, что

$$c_l^{(\alpha+1)} = -\frac{a_l(\omega_1) [\varepsilon^2 q_{11} + c_l^{(\alpha)2}]}{2 [\cos \varphi_l(\omega_1) - c_l^{(\alpha)} a_l(\omega_1)]} \quad \alpha = 0, 1, \dots. \quad (7.3.52)$$

На основе (7.3.22) определим

$$c_l^{(0)} = c^{(0)} - c_1^* = -1. \quad (7.3.53)$$

Тогда, используя (7.3.52), получим, полагая  $\varepsilon^2 q_{11} = 0.2$

$$c_l^{(1)} = 0.2, \quad c_l^{(2)} = -0.054, \quad c_l^{(3)} = -0.049. \quad (7.3.54)$$

Положим  $\varepsilon^2 q_{11} = 0.1$ , тогда

$$c_l^{(1)} = -0.183, \quad c_l^{(2)} = -0.03, \quad c_l^{(3)} = -0.0248. \quad (7.3.55)$$

Из неравенства  $|-2| \gg |-0.0496|$  и пропорциональной зависимости  $c_l$  от  $\varepsilon$  заключаем об асимптотической устойчивости системы (7.3.47) при  $c_1^* = -2$ .

Пусть теперь  $c_1^* = 2$ . В этом случае в (7.3.51) следует записать  $\cos \varphi_l(\omega_1) = -\frac{2}{3}$ , а в (7.3.53)  $c_l^{(0)} = c^{(0)} - c_1^* = -5$ .

При  $\varepsilon^2 q_{11} = 0.2$  получим по формулам (7.3.52)

$$c_l^{(1)} = -4.2, \quad c_l^{(2)} = -4.054, \quad c_l^{(3)} = -4.05.$$

При  $\varepsilon^2 q_{11} = 0.1$  найдём

$$c_l^{(1)} = -4.18, \quad c_l^{(2)} = -4.01, \quad c_l^{(3)} = -4.005.$$

Таким образом, система (7.3.47) неустойчива при  $c_1^* = 2$ . ■

#### 7.3.4. Объекты второго вида\*

Пусть имеется система

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (7.3.56)$$

$$u^{(n)} + g_{n-1}^*u^{(n-1)} + \dots + g_1^*\dot{u} + g_0^*u = r_{n-1}^*y^{(n-1)} + \dots + r_1^*\dot{y} + r_0^*y, \quad (7.3.57)$$

параметры  $g_i^*$ ,  $r_j^*$  ( $i, j = \overline{0, n-1}$ ) регулятора которой известны, а объект (7.3.56) описывается  $\omega$ -индексами  $r(\omega_k)$  и  $i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Если объект (7.3.56) неустойчив, то известно стабилизирующее управление

$$u^{(n)} + g_{n-1}^{(0)}u^{(n-1)} + \dots + g_1^{(0)}\dot{u} + g_0^{(0)}u = r_{n-1}^{(0)}y^{(n-1)} + \dots + r_1^{(0)}\dot{y} + r_0^{(0)}y, \quad (7.3.58)$$

и он задаётся стабилизированными  $\omega$ -индексами.

Для анализа устойчивости системы (7.3.56), (7.3.57) использовался критерий 6.2.1.

Применим теперь критерий 7.3.1 для такого анализа.

Для этого приведём рассматриваемую систему к виду (4.5.80)

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{b}\check{u}, \quad (7.3.59)$$

$$\check{u} = \check{c}^*\check{x}, \quad (7.3.60)$$

где  $\check{x}(t)$  –  $2n$ -мерный вектор (4.5.79), составленный из переменных  $y(t)$  и  $u(t)$  и их производных, а матрица  $\check{A}$  и вектора  $\check{b}$  и  $\check{c}^*$  определяются выражениями (4.5.82), (7.3.58). Частотные параметры  $\check{r}_x(\omega_k)$  и  $\check{i}_x(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) «объекта» выражаются



через  $\omega$ -индексы объекта (7.3.56) соотношением (6.3.36), которое следует из передаточного вектора «объекта»

$$\check{\beta}(s) = \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{1}{\mu(s)} & -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{s}{\mu(s)} & \cdots & -\frac{b(s)}{d(s)} \frac{s^{n-1}}{\mu(s)} \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\mu(s)} & \frac{s}{\mu(s)} & \cdots & \frac{s^{n-1}}{\mu(s)} \end{array} \right]. \quad (7.3.61)$$

Таким образом, система (7.3.56), (7.3.57) свелась к системе вида (7.3.1), (7.3.2).

Убедимся, что система (7.3.59), (7.3.60) обладает свойствами системы (7.3.1), (7.3.2), достаточными для использования критерия 7.3.1.

Так, если объект (7.3.56) асимптотически устойчив, то таковым является и «объект» (7.3.59). В этом нетрудно убедиться, если использовать выражение (7.3.61) для его передаточного вектора и удостовериться, что

$$\det (Es - \check{A}) = d(s)\mu(s), \quad (7.3.62)$$

где  $\mu(s)$  – произвольный гурвицев полином.

Если объект (7.3.56) неустойчив, то для «объекта» (7.3.59) можно указать, используя (7.3.58), стабилизирующее управление  $\check{u}^{(0)} = \check{c}^{(0)'} x$ .

Для полной управляемости «объекта» следует выбирать полином  $\mu(s)$  так, чтобы его корни не совпадали с корнями многочлена  $b(s)$ . Наконец, для наблюдаемости «закона управления» (7.3.60) достаточно, чтобы передаточная функция

$$\check{c}^{*'} \check{\beta}(s) = \frac{\left( \sum_{i=1}^n c_i^* s^{i-1} \right) b(s) + \left( \sum_{i=n+1}^{2n} c_i^* s^{i-1} \right) d(s)}{d(s)\mu(s)}. \quad (7.3.63)$$

не имела в числителе и знаменателе общих корней.

### 7.3.5. Погрешности вычислений (инструментальные погрешности) и анализ устойчивости\*

Рассмотрим систему (7.1.12), которая разрешает задачу АКОР по частотным параметрам. Определитель матрицы  $M_r$  этой системы

$$\det M_r \neq 0. \quad (7.3.64)$$

Однако он, в отличие от искомого вектора  $c$ , зависит от испытательных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , и может случиться так, что определитель матрицы  $M_r$  – малое число  $\varepsilon$

$$\det M_r = \varepsilon. \quad (7.3.65)$$

В этом случае решение уравнения (7.1.12) становится чувствительным к погрешностям вычислений, связанных с решением этого уравнения. При условии (7.3.65)

указанные погрешности могут привести к тому, что результатом решения уравнения (7.1.12) служит вектор  $\hat{c}$ , который существенно отличается от искомого вектора. В связи с этим возникает задача анализа устойчивости объекта (7.1.1) с регулятором

$$u = \hat{c}'x. \quad (7.3.66)$$

Такой анализ можно осуществить, используя критерии 7.3.1, 7.3.2.

Оказывается, что ситуация (7.3.65) является скорее правилом, чем исключением. Для того, чтобы пояснить это, рассмотрим пример.

Пример 7.3.3. Исследуем аналитически матрицу  $M_r$  в примере 7.1.1.

Очевидно, что

$$\beta_1(j\omega) = \dots, \\ \beta_2(j\omega) = \frac{s}{s^2 + d_1s + d_0} \Big|_{s=j\omega} = \frac{k(T_1 + T_2)\omega^2}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)} + j \frac{k(1 - T_1T_2\omega^2)\omega}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)}.$$

где постоянные времени  $T_1$ ,  $T_2$  и коэффициент  $k$  находятся из соотношений

$$k = \frac{1}{d_0}, \quad T_1 \cdot T_2 = \frac{1}{d_0}, \quad T_1 + T_2 = \frac{d_1}{d_0},$$

так, что 
$$\frac{1}{s^2 + d_1s + d_0} = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Таким образом

$$M_r = \begin{pmatrix} k(1 - T_1T_2\omega_1^2) & k(T_1 + T_2)\omega_1^2 \\ k(1 - T_1T_2\omega_2^2) & k(T_1 + T_2)\omega_2^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(T_1^2\omega^2 + 1)(T_2^2\omega^2 + 1)}.$$

Пусть испытательные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  таковы, что

$$T_1T_2\omega_1^2 \gg 1, \quad T_1T_2\omega_2^2 \gg 1,$$

тогда величина  $\det M_r$  определяется погрешностями вычисления произведений  $T_1T_2\omega_1^2$  и  $T_1T_2\omega_2^2$ . Аналогичная ситуация возникает, когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  удовлетворяют соотношениям

$$T_1T_2\omega_1^2 \ll 1, \quad T_1T_2\omega_2^2 \ll 1,$$

и, лишь когда эти частоты ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ ) близки к значениям  $\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{T_1}$  и  $\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{T_2}$ , влияние погрешностей вычисления  $T_1T_2\omega_1^2$  и  $T_1T_2\omega_2^2$  незначительно.

Поскольку постоянные времени  $T_1$  и  $T_2$  объекта (7.1.15) неизвестны, то возможны описанные ситуации, которые могут привести к значениям  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$ , при которых объект (7.1.15) с регулятором  $u = c_1^*x_1 + c_2^*x_2$  будет неустойчив.

В связи с этим необходимо, прежде чем прикладывать к объекту это управление, исследовать, будет ли система с таким управлением асимптотически устойчивой. ■

Доказательства к главе 7

## 7.Д. Доказательство теорем и утверждений

### 7.Д.1. Доказательство теоремы 7.1.1

Решение системы  $n$  – линейных уравнений (7.1.12) с  $n$  неизвестными существует и единственно, если

$$\det M_r = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x(\omega_1) & \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (7.Д.1)$$

Представим вектор  $\mathbf{r}_x(\omega)$  аналогично (6.Д.43) как

$$\mathbf{r}_x(\omega) = \operatorname{Re} \beta(j\omega) \frac{d(-j\omega)}{d(-j\omega)} = \operatorname{Re} \frac{(Ej\omega - A)\mathbf{b}d(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2}. \quad (7.Д.2)$$

Подставим в числитель этого соотношения выражение (6.Д.46) при  $s = j\omega$  и получим

$$\mathbf{r}_x(\omega) = \frac{1}{|d(j\omega)|^2} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega^{2i} (-1)^i. \quad (7.Д.3)$$

Сформируем матрицу

$$\begin{aligned} M_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x(\omega_1) & \mathbf{r}_x(\omega_2) & \cdots & \mathbf{r}_x(\omega_n) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_1^{2i} (-1)^i & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_2^{2i} (-1)^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_n^{2i} (-1)^i \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \operatorname{diag} \left[ \frac{1}{|d(j\omega_1)|^2}, \frac{1}{|d(j\omega_2)|^2}, \cdots, \frac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \right] \end{aligned} \quad (7.Д.4)$$

и представим

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_1^{2i} (-1)^i & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_2^{2i} (-1)^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{2i} \omega_n^{2i} (-1)^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 & \psi_2 & \cdots & \psi_{2n-2} \end{bmatrix} s^r, \quad (7.Д.5)$$

где

$$S^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \cdots & -\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} \omega_1^{2n-2} & (-1)^{n-1} \omega_2^{2n-2} & \cdots & (-1)^{n-1} \omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (7.Д.6)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det S^r \neq 0 \quad (7.Д.7)$$

как определитель Вандермонда, и поэтому неравенство (7.Д.1) выполнится, если

$$\det \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_2 & \cdots & \psi_{2n-2} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (7.Д.8)$$

На основе (6.Д.47) запишем

$$\begin{aligned} \psi_{2\mu} &= \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_{\gamma} \mathbf{b} d_{2\mu-\gamma} (-1)^{2\mu-\gamma} = \left[ A_{n-1} \mathbf{b} \quad A_{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad A_1 \mathbf{b} \quad A_0 \mathbf{b} \right] \times \\ &\times \left[ (-1)^{n-1} d_{2\mu-(n-1)} \quad (-1)^{n-2} d_{2\mu-(n-2)} \quad \cdots \quad (-1)^{2\mu-1} d_{2\mu-1} \quad (-1)^{2\mu} d_{2\mu} \right], \end{aligned} \quad (7.Д.9)$$

и тогда матрица

$$\left[ \psi_0 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_{2n-4} \quad \psi_{2n-2} \right] = \left[ A_{n-1} \mathbf{b} \quad A_{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad A_1 \mathbf{b} \quad A_0 \mathbf{b} \right] \cdot \Gamma_2, \quad (7.Д.10)$$

где

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \overbrace{(-1)^{-n+1} d_{-n+1}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+3} d_{-n+3}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{n-3} d_{n-3}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^{n-1} d_{n-1}}^{\mu=n-1} \\ \overbrace{(-1)^{-n+2} d_{-n+2}}^{\mu=0} & \overbrace{(-1)^{-n+4} d_{-n+4}}^{\mu=1} & \cdots & \overbrace{(-1)^{n-2} d_{n-2}}^{\mu=n-2} & \overbrace{(-1)^n d_n}^{\mu=n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{-1} & -d_1 & \cdots & (-1)^{2n-5} d_{2n-5} & (-1)^{2n-3} d_{2n-3} \\ d_0 & d_2 & \cdots & (-1)^{2n-4} d_{2n-4} & (-1)^{2n-2} d_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (7.Д.11)$$

Представим

$$\det \Gamma_2 = \det \begin{pmatrix} (-1)^{-n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-n+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} d_{-n+1} & d_{-n+3} & \cdots & d_{n-3} & d_{n-1} \\ d_{-n+2} & d_{-n+4} & \cdots & d_{n-2} & d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{-1} & d_1 & \cdots & d_{2n-5} & d_{2n-3} \\ d_0 & d_2 & \cdots & d_{2n-4} & d_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Переставим столбцы последней матрицы (последний столбец поменяем местами с первым, предпоследний столбец – со вторым и т.д.) и получим определитель матрицы  $H$  (2.1.13), который является  $\Delta_n$  определителем Гурвица.

Объект (7.1.1) асимптотически устойчив, и поэтому

$$\Delta_n > 0 \quad (7.Д.12)$$

и, следовательно,  $\det \Gamma_2 \neq 0$ .

В 6.Д.4, показано, что для полностью управляемого объекта

$$\det \left[ A_{n-1} \mathbf{b} \quad A_{n-2} \mathbf{b} \quad \cdots \quad A_1 \mathbf{b} \quad A_0 \mathbf{b} \right] \neq 0,$$

следовательно, решение системы (7.1.12) существует и единственно.

Докажем теперь вторую часть теоремы 7.1.10 независимости вектора  $\mathbf{c}$  от выбора испытательных частот. Доказательство опирается на следующее утверждение.

Утверждение 7.Д.1. Необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.1.11) служит тождество (7.1.10). ■

Достаточность этого тождества следует из построения равенств (7.1.11). Докажем его необходимость.

Для этого умножим (7.1.10) на  $|d(j\omega)|^2 \neq 0$  и получим, с учётом (6.Д.45) и (7.Д.3),

$$-2 \sum_{\mu=0}^{n-1} \mathbf{c}' \boldsymbol{\psi}_{\mu} s^{2\mu} = \mathbf{b}' \left[ \sum_{\gamma=0}^{n-1} A'_{\gamma} s^{\gamma} (-1)^{\gamma} \right] Q \left[ \sum_{\psi=0}^{n-1} A_{\psi} s^{\psi} \right] \mathbf{b}, \quad s = j\omega, \quad (7.Д.13)$$

или

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \left[ -2\mathbf{c}' \boldsymbol{\psi}_{\mu} - \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\gamma} \mathbf{b}' A'_{\gamma} Q A_{2\mu-\gamma} \mathbf{b} \right] (j\omega)^{2\mu} = 0. \quad (7.Д.14)$$

Введём обозначение

$$\mathfrak{a}_{\mu} = -2\mathbf{c}' \boldsymbol{\psi}_{\mu} - \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\gamma} \mathbf{b}' A'_{\gamma} Q A_{2\mu-\gamma} \mathbf{b} \quad \mu = \overline{0, n-1} \quad (7.Д.15)$$

и запишем тождество (7.1.10) в виде

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \mathfrak{a}_{\mu} (j\omega)^{2\mu} = 0. \quad (7.Д.16)$$

Тогда система уравнения (7.1.11) запишется как

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \mathfrak{a}_{\mu} (j\omega_k)^{2\mu} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.Д.17)$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме как

$$S^{r'} \mathfrak{a} = \mathbf{0}, \quad (7.Д.18)$$

где  $\mathfrak{a}$  –  $n$ -мерный вектор с компонентами  $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-1}$ , а  $S^r$  – матрица (7.Д.6). Так как  $\det S \neq 0$ , единственным решением (7.Д.18) является

$$\mathfrak{a}_{\mu} = 0 \quad \mu = \overline{0, n-1}. \quad (7.Д.19)$$

Подставляя эти значения в соотношение (7.Д.16), заключаем, что оно выполняется для всех  $\omega$ , и, таким образом необходимость (7.1.10) доказана.

## 7.Д.2. Доказательство теоремы 7.1.2

Оно опирается на следующие две леммы о свойствах вектора  $\mathbf{c}^{(1)}$ , получаемого на первом шаге ( $\alpha = 0$ ) итерационного процесса (7.1.37). При  $\alpha = 0$  уравнения (7.1.37) имеют вид

$$-\mathbf{c}^{(1)'} \boldsymbol{\beta}^{(0)}(-j\omega_k) - \mathbf{c}^{(1)'} \boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega_k) = \boldsymbol{\beta}^{(0)'}(-j\omega_k) \left[ Q + \mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)'} \right] \boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.Д.20)$$

где

$$\beta^{(0)}(j\omega_k) = [Ej\omega_k - A - \mathbf{b}\mathbf{c}^{(0)'}]^{-1} \mathbf{b} = \beta(j\omega_k) [1 - \mathbf{c}^{(0)'}\beta(j\omega_k)]^{-1}. \quad (7.Д.21)$$

Лемма 7.Д.1. При условиях теоремы 7.1.1 решение  $\mathbf{c}^{(1)}$  уравнений (7.Д.20) существует и единственно. ■

Для доказательства леммы отметим, что уравнения (7.Д.20) доставляют решение  $u = \mathbf{c}^{(1)'}\mathbf{x}$  задачи АКОР по критерию обобщённой работы для «объекта»

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(0)}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad A^{(0)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(0)'}. \quad (7.Д.22)$$

В соответствии с теоремой 7.1.1 вектор  $\mathbf{c}^{(1)}$  является единственным решением (7.Д.20), если «объект» (7.Д.22) асимптотически устойчив и полностью управляем. Первое условие выполняется по построению вектора  $\mathbf{c}^{(0)}$ . Второе требование также выполняется. Действительно, известна следующая лемма.

Лемма 7.Д.2. Если пара  $(A, \mathbf{b})$  полностью управляема, то полностью управляема пара  $(A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{b})$ , где  $\boldsymbol{\gamma}$  – некоторый  $n$ -мерный вектор-столбец. ■

Убедимся в её справедливости при  $n = 3$ . В этом случае условие полной управляемости пары  $(A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}', \mathbf{b})$  имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{b} & (A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}')\mathbf{b} & (A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}')^2\mathbf{b} \end{bmatrix} \neq 0. \quad (7.Д.23)$$

Вводя обозначения  $\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{b} = \alpha_0$ ,  $\boldsymbol{\gamma}'A\mathbf{b} = \alpha_1$ , запишем

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathbf{b} & (A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}')\mathbf{b} & (A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}')^2\mathbf{b} \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} + \alpha_0\mathbf{b} & (A + \mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}')(A\mathbf{b} + \alpha_0\mathbf{b}) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} + \alpha_0\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} + \alpha_0A\mathbf{b} + \alpha_0^2\mathbf{b} + \alpha_1\mathbf{b} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} \end{bmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Используем эту лемму и заключаем, что «объект» (7.Д.22) полностью управляем, и, таким образом, лемма 7.Д.1 доказана.

Лемма 7.Д.3. При условиях теоремы 7.1.2 вектор  $\mathbf{c}^{(1)}$  обладает следующими свойствами:

1. Его можно представить в виде

$$\mathbf{c}^{(1)} = -P^{(1)}\mathbf{b}, \quad (7.Д.24)$$

где  $P^{(1)}$  – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)'}P^{(1)} = -Q - \mathbf{c}^{(0)'}\mathbf{c}^{(0)'}, \quad (7.Д.25)$$

в котором

$$A^{(0)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(0)'}. \quad (7.Д.26)$$

2. Собственные числа –  $\lambda_i [A^{(1)}]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – матрицы  $A^{(1)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(1)'}$  таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i [A^{(1)}] < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.Д.27)$$

■

Докажем лемму 7.Д.3. В соответствии с утверждением 7.Д.1 необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.Д.20) является тождество

$$- \mathbf{c}^{(1)'} \boldsymbol{\beta}^{(0)}(-j\omega) - \mathbf{c}^{(1)'} \boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega) = \boldsymbol{\beta}^{(0)' }(-j\omega) [Q + \mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)'}] \boldsymbol{\beta}^{(0)}(j\omega). \quad (7.Д.28)$$

Подставляя в него выражения (7.Д.24) и (7.Д.25), получим при  $\omega_k = \omega$  выражение

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}' P^{(1)} [Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{b} [-Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} P^{(1)} \mathbf{b} = \\ & = \mathbf{b}' [-Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} [Q + \mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)'}] [Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.Д.29)$$

Его можно записать как

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}' [-Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} \left\{ [-Ej\omega - A^{(0)}]' P^{(1)} + P^{(1)} [Ej\omega - A^{(0)}] + \right. \\ & \left. + Q + \mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)'} \right\} [Ej\omega - A^{(0)}]^{-1} \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (7.Д.30)$$

Если выполняется (7.Д.25), то последнее равенство выполняется для всех  $\omega$ . С другой стороны, оно эквивалентно, при выполнении (7.Д.24), тождеству (7.Д.28), которое является необходимым и достаточным условием выполнения равенств (7.Д.20), что и доказывает первая часть (п. 1°) леммы.

Вторая часть леммы (п. 2°) была доказана ранее в п. 4.Д.1 соотношением (4.Д.11).

Это и завершает доказательство леммы 7.Д.3. ■

Переходя к доказательству теоремы 7.1.2, обобщим леммы 7.Д.1 и 7.Д.3 и покажем, что они справедливы для каждого шага итерационного процесса (7.1.37), а не только для первого из этих шагов.

Действительно, условия, при которых справедливы утверждения этих лемм, на первом шаге можно записать в форме

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A^{(0)} \mathbf{b} & \dots & [A^{(0)}]^{n-1} \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (7.Д.31)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i [A^{(0)}] < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.Д.32)$$

Первое из этих неравенств выражает полную управляемость объекта (7.Д.22), второе – его асимптотическую устойчивость, при замыкании стабилизирующим регулятором (7.1.2), в котором  $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{0}$ , если объект асимптотически устойчив.

Рассмотрим теперь второй шаг итерационного процесса (7.1.27). Условия лемм 7.Д.1 и 7.Д.3 выполняются, так как

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A^{(1)} \mathbf{b} & \dots & [A^{(1)}]^{n-1} \mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (7.Д.33)$$

в силу управляемости пары  $(A + \mathbf{b} \mathbf{c}^{(1)'}, \mathbf{b})$ , а

$$\operatorname{Re} \lambda_i [A^{(1)}] < 0 \quad i = \overline{1, n}$$

по свойству (7.Д.27).

Применяя леммы 7.Д.1 и 7.Д.3, заключаем, что уравнение (7.1.37) при  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} & -2 \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{c}^{(2)'} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}^{(2)'} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \right]^{-1} \right\} = \\ & = \boldsymbol{\beta}'(-j\omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}^{(2)'} \boldsymbol{\beta}(-j\omega_k) \right]^{-1} \left[ Q + \mathbf{c}^{(1)} \mathbf{c}^{(1)'} \right] \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}^{(2)'} \boldsymbol{\beta}(j\omega_k) \right]^{-1} \quad (7.Д.34) \\ & \quad \quad \quad k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

имеет единственное решение. Это решение можно представить в виде

$$\mathbf{c}^{(2)} = P^{(2)} \mathbf{b}, \quad (7.Д.35)$$

где  $P^{(2)}$  – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(2)} A^{(1)} + A^{(1)'} P^{(2)} = -Q - \mathbf{c}^{(1)} \mathbf{c}^{(1)'}, \quad (7.Д.36)$$

а собственные числа  $-\lambda_i [A^{(2)}]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) матрицы  $A^{(2)} = A + \mathbf{b} \mathbf{c}^{(2)'}$  имеют отрицательные вещественные части.

Продолжая итерационный процесс, получим последовательность векторов  $\mathbf{c}^{(1)}$ ,  $\mathbf{c}^{(2)}$ ,  $\mathbf{c}^{(3)}$ ,  $\dots$ . Для каждого из этих векторов существует (в силу лемм 7.Д.1 и 7.Д.3) единственная последовательность  $P^{(1)}$ ,  $P^{(2)}$ ,  $P^{(3)}$ ,  $\dots$ , которая в силу теоремы 4.1.2 имеет предел (4.1.12). Отсюда следует соотношение (7.1.39), выражающее сходимость последовательности  $\mathbf{c}^{(1)}$ ,  $\mathbf{c}^{(2)}$ ,  $\mathbf{c}^{(3)}$ ,  $\dots$ , к вектору  $\mathbf{c}$  оптимального управления.

### 7.Д.3. Доказательство утверждения 7.1.1

#### 7.Д.3.1. Преобразование уравнений

Запишем уравнения (7.1.58), (7.1.59) в виде

$$\operatorname{Re} \{ \boldsymbol{\delta}' \boldsymbol{\beta}^3(j\omega_k) + \mathbf{c}'_{.m} \boldsymbol{\beta}_m(-j\omega_k) - q \boldsymbol{\beta}'_m(-j\omega_k) \mathbf{U}' \boldsymbol{\beta}^3(-j\omega_k) \} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.Д.37)$$

$$\operatorname{Im} \{ \boldsymbol{\delta}' \boldsymbol{\beta}^3(j\omega_k) + \mathbf{c}'_{.m} \boldsymbol{\beta}_m(-j\omega_k) - q \boldsymbol{\beta}'_m(-j\omega_k) \mathbf{U}' \boldsymbol{\beta}^3(-j\omega_k) \} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.Д.38)$$

Умножим вторую из этих подсистем систем на  $j$  и сложим её с первой. Тогда получим систему

$$\boldsymbol{\delta}' \boldsymbol{\beta}^3(j\omega_k) + \mathbf{c}'_{.m} \boldsymbol{\beta}_m(-j\omega_k) - q \boldsymbol{\beta}'_m(-j\omega_k) \mathbf{U}' \boldsymbol{\beta}^3(j\omega_k) = 0 \quad k = \overline{1, n} \quad (7.Д.39)$$

с комплексными коэффициентами.

Заменим пока  $j\omega$  на  $s$  и запишем (7.Д.39) в более подробной форме

$$\boldsymbol{\delta}' (Es - A^3)^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c}'_{.m} (-Es - A_m)^{-1} \mathbf{b}_m - q \boldsymbol{\beta}'_m (-Es - A_m)^{-1} \mathbf{U}' (Es - A^3)^{-1} \mathbf{b} = 0. \quad (7.Д.40)$$

Преобразуем матрицы  $A_m$ ,  $A^3$  и вектора  $\mathbf{b}_m$ ,  $\mathbf{b}$  к канонической форме Фробениуса. Для этого используем преобразования

$$T^3 A^3 (T^3)^{-1} = \check{A}^3, \quad T^3 \mathbf{b} = \check{\mathbf{b}}, \quad T_m A_m T_m^{-1} = \check{A}_m, \quad T_m \mathbf{b}_m = \check{\mathbf{b}}_m, \quad (7.Д.41)$$



в которых матрицы  $T^3$  и  $T_m$  имеют вид (3.4.10). Такие матрицы существуют, поскольку пары  $(A^3, \mathbf{b})$ ,  $(A_m, \mathbf{b}_m)$  полностью управляемы [управляемость пары  $(A^3, \mathbf{b})$  следует из леммы (7.Д.2)].

После указанного преобразования и умножения (7.Д.41) на  $d_m(s)d^c(s)$ ,  $d_m(s) = \det(Es - A_m)$ ,  $d^c(s) = \det(Es - A^3)$ , получим тождество

$$\check{c}_m(-s)d^c(s) + \check{\delta}(s)d_m(-s) - q\check{l}^3(s)\check{l}_m(-s) = 0, \quad (7.Д.42)$$

в котором

$$\check{c}_m(s) = \sum_{i=1}^n \check{c}_{m,i}s^{i-1}, \quad \check{\delta}(s) = \sum_{i=1}^n \check{\delta}_i s^{i-1}, \quad \check{l}^3(s) = \sum_{i=1}^n \check{l}_i^3 s^{i-1}, \quad \check{l}_m(s) = \sum_{i=1}^n \check{l}_{m,i}s^{i-1}, \quad (7.Д.43)$$

вектора

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{c}}_m' &= \begin{bmatrix} \check{c}_{m,1} & \check{c}_{m,2} & \cdots & \check{c}_{m,n} \end{bmatrix}, & \check{\boldsymbol{\delta}}' &= \begin{bmatrix} \check{\delta}_1 & \check{\delta}_2 & \cdots & \check{\delta}_n \end{bmatrix}, \\ \check{l}^3' &= \begin{bmatrix} \check{l}_1^3 & \check{l}_2^3 & \cdots & \check{l}_n^3 \end{bmatrix}, & \check{\mathbf{l}}_m' &= \begin{bmatrix} \check{l}_{m,1} & \check{l}_{m,2} & \cdots & \check{l}_{m,n} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.Д.44)$$

связаны с векторами тождества (7.Д.40) соотношениями

$$\mathbf{c}'_m = \check{\mathbf{c}}_m' T_m, \quad \boldsymbol{\delta}' = \check{\boldsymbol{\delta}}' T^3, \quad \mathbf{l}' = \check{l}^3' T^3, \quad \mathbf{l}' = \check{\mathbf{l}}_m' T_m. \quad (7.Д.45)$$

Тождество (7.Д.42) имеет в развёрнутой форме вид

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \check{c}_{m,i} s^{i-1} \right] \cdot \left[ \sum_{i=0}^n d_i^c s^i \right] + \left[ \sum_{i=1}^n \check{\delta}_i s^{i-1} \right] \cdot \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{m,i} s^i \right] - \\ &- q \left[ \sum_{i=1}^n \check{l}_i^3 s^{i-1} \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \check{l}_{m,i} s^{i-1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.Д.46)$$

Очевидно, что

$$\left[ \sum_{\rho=1}^n \check{\delta}_\rho s^{\rho-1} \right] \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{m,i} s^i \right] = \sum_{\rho=1}^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \check{\delta}_\rho d_{m,i} s^{i+\rho-1}.$$

Обозначим  $i + \rho - 1 = \alpha$  ( $i = \alpha - \rho + 1$ ) и запишем это выражение как

$$\sum_{\rho=1}^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \check{\delta}_\rho d_{m,i} s^{i+\rho-1} = \sum_{\alpha=0}^{2n-1} \left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_\rho d_{m,\alpha-\rho+1} \right] s^\alpha,$$

где  $d_{m,\alpha-\rho+1} = 0$  при  $\alpha - \rho + 1 < 0$  и при  $\alpha - \rho + 1 > n$ .

Аналогично получим

$$\left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{m,\rho} s^{\rho-1} \right] \cdot \left[ \sum_{i=0}^n d_i^c s^i \right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-1} \left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{m,\rho} d_{\alpha-\rho+1}^c \right] s^\alpha,$$

где  $d_{\alpha-\rho+1}^c = 0$  при  $\alpha - \rho + 1 < 0$  и при  $\alpha - \rho + 1 > n$ , а также

$$\left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{l}_{m,\rho} s^{\rho-1} \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \check{l}_i^3 s^{i-1} \right] = \sum_{\alpha=0}^{2n-2} \left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{l}_{m,\rho} \check{l}_{\alpha-\rho+2}^3 \right] s^\alpha,$$

где  $\check{l}_{\alpha-\rho+2}^3 = 0$  при  $\alpha - \rho + 2 < 1$  и при  $\alpha - \rho + 2 > n$ .

Таким образом, (7.Д.46) принимает вид

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} \left[ \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{\mathcal{M}, \alpha-\rho+1} + \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{\mathcal{M}, \rho} d_{\alpha-\rho+1}^c - q \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{l}_{\mathcal{M}, \rho} \check{l}_{\alpha-\rho+2}^3 \right] s^{\alpha} = 0, \quad (7.Д.47)$$

или в более компактной форме

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} \check{\alpha}_{\alpha} s^{\alpha} = 0, \quad (7.Д.48)$$

где

$$\check{\alpha}_{\alpha} = \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{\mathcal{M}, \alpha-\rho+1} + \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{\mathcal{M}, \rho} d_{\alpha-\rho+1}^c - q \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{l}_{\mathcal{M}, \rho} \check{l}_{\alpha-\rho+2}^3$$

$$\alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (7.Д.49)$$

Запишем (7.Д.48) как

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} \check{\alpha}_{\alpha} \cdot (j\omega_k)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} \check{\alpha}_{2i} \cdot (j\omega_k)^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} \check{\alpha}_{2i+1} \cdot (j\omega_k)^{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.Д.50)$$

Необходимым и достаточным условием этого равенства служат уравнения

$$\sum_{i=0}^{n-1} \check{\alpha}_{2i} \cdot (j\omega_k)^{2i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \check{\alpha}_{2i+1} \cdot (j\omega_k)^{2i+1} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (7.Д.51)$$

которые можно представить в матричной форме как

$$S^r \check{\mathbf{a}}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad S^i \check{\mathbf{a}}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad (7.Д.52)$$

где  $\check{\mathbf{a}}^{(1)} = [\check{\alpha}_0 \quad \check{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \check{\alpha}_{2n-2}]'$ ,  $\check{\mathbf{a}}^{(2)} = [\check{\alpha}_1 \quad \check{\alpha}_3 \quad \cdots \quad \check{\alpha}_{2n-1}]'$  —  $n$ -мерные вектора, а матрицы  $S^r$  и  $S^i$  имеют вид (7.Д.6) и (7.Д.52) соответственно.

Определители матриц  $S^r$  и  $S^i$  (как определители Вандермонда) отличны от нуля и поэтому решением уравнений (7.Д.52) служит

$$\check{\mathbf{a}}^{(1)} = \check{\mathbf{a}}^{(2)} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что

$$\check{\alpha}_{\alpha} = \mathbf{0} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (7.Д.53)$$

Итак, для доказательства утверждения нужно показать, что система

$$\sum_{\rho=1}^n \left[ (-1)^{\rho-1} \check{c}_{\mathcal{M}, \rho} d_{\alpha-\rho+1}^c + (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{\mathcal{M}, \alpha-\rho+1} - q (-1)^{\rho-1} \check{l}_{\mathcal{M}, \rho} l_{\alpha-\rho+2}^3 \right] = 0$$

$$\alpha = \overline{0, 2n-1} \quad (7.Д.54)$$

имеет единственное решение. При этом должно выполняться соотношение

$$\check{\mathbf{c}}_{\mathcal{M}}' = \mathbf{c}'_{\mathcal{M}} T_{\mathcal{M}}^{-1}, \quad (7.Д.55)$$

в котором

$$\mathbf{c}_m = -P_{21}\mathbf{b}, \quad (7.Д.56)$$

где квадратная матрица  $P_{21}$  является решением уравнения Ляпунова (4.2.37)

$$P_{21}A^3 + A_m'P_{21} = Q, \quad Q = q\mathbf{u}\mathbf{u}'. \quad (7.Д.57)$$

Соотношение (7.Д.55) выражает последнюю часть утверждения 7.1.1, в которой говорится о совпадении  $\mathbf{c}_m$  с решением (7.Д.56) задачи 4.1.2.

Отметим, что решение уравнения Ляпунова существует и единственно, если выполняется условие

$$\lambda_i^3 + \lambda_{m,j} \neq 0 \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (7.Д.58)$$

где  $\lambda_i^3$  и  $\lambda_{m,j}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – собственные числа матриц  $A^3$  и  $A_m$  соответственно. Собственные числа этих матриц обладают свойством  $\operatorname{Re} \lambda_i^3 < 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_{m,j} < 0$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), и поэтому условие (7.Д.58) выполняется.

### 7.Д.3.2. Преобразование уравнений Ляпунова

Приведём уравнение Ляпунова (7.Д.57) к канонической форме. Для этого умножим его справа на матрицу  $(T^3)^{-1}$ , а слева на матрицу  $T_m^{-1'}$  и запишем

$$\left[ T_m^{-1} P_{21} (T^3)^{-1} \right] \cdot \left[ T^3 A^3 (T^3)^{-1} \right] + \left[ T_m A_m T_m^{-1} \right] \cdot \left[ T_m^{-1'} P_{21} (T^3)^{-1} \right] = q \left[ T_m^{-1'} \mathbf{u}\mathbf{u}' (T^3)^{-1} \right]. \quad (7.Д.59)$$

Обозначим

$$\check{P}_{21} = T_m^{-1'} P_{21} (T^3)^{-1} \quad (7.Д.60)$$

и получим с учётом (7.Д.41) и (7.Д.45) уравнение

$$\check{P}_{21} \check{A}^3 + \check{A}_m' \check{P}_{21} = \check{Q}, \quad \check{Q} = q \check{\mathbf{t}}_m \check{\mathbf{t}}_m'. \quad (7.Д.61)$$

Убедимся, что вектор

$$\check{\mathbf{c}}_m = -\check{P}_{21} \check{\mathbf{b}}. \quad (7.Д.62)$$

Действительно, из (7.Д.55) и (7.Д.60) следует

$$\mathbf{c}_m = -P_{21}\mathbf{b} = -T_m^{-1'} \check{P}_{21} T^3 \mathbf{b} = -T_m^{-1'} \check{P}_{21} \check{\mathbf{b}}.$$

Учтём (7.Д.55) и получим искомое выражение (7.Д.62).

Запишем уравнение Ляпунова (7.Д.61) в развёрнутой форме

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0^c & -d_1^c & -d_2^c & \cdots & -d_{n-1}^c \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -d_{m,0} \\ 1 & 0 & \cdots & -d_{m,1} \\ 0 & 1 & \cdots & -d_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -d_{m,n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & \cdots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{7.Д.63}$$

Кроме того, из (7.Д.62) следует

$$\check{c}_{m,i} = -p_{in} \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.Д.64}$$

Найдём связь вектора  $\check{\delta}$ , входящего в (7.Д.46) с матрицей  $\check{p}_{21}$ . Из (4.2.42) при  $\mathbf{k} = \mathbf{b}_m$  следует  $\check{\delta} = -P'_{21} \mathbf{b}_m$ . Повторяя вывод (7.Д.62), получим

$$\check{\delta} = -\check{P}'_{21} \check{\mathbf{b}}_m,$$

или

$$\check{\delta}_i = -p_{ni} \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.Д.65}$$

Уравнение Ляпунова (7.Д.63) можно записать в виде системы уравнений

$$p_{\psi, \gamma-1} + p_{\psi-1, \gamma} - p_{\psi, n} d_{\gamma-1}^c - p_{n, \gamma} d_{m, \psi-1} = q_{\psi, \gamma} \quad \psi, \gamma = \overline{1, n}. \tag{7.Д.66}$$

### 7.Д.3.3. Доказательство совпадения систем уравнений

Система (7.Д.66) с точностью до преобразования (7.Д.60) эквивалентна уравнениям (7.Д.57), и поэтому её решение существует и единственно. Если показать, что уравнения (7.Д.64)–(7.Д.66) совпадают с (7.Д.54), то тем самым будет доказано утверждение 7.1.1.

Система (7.Д.64)–(7.Д.66) содержит промежуточные неизвестные  $p_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). Исключим их из (7.Д.66) с помощью соотношений (7.Д.64) и (7.Д.65).

Запишем вначале уравнения (7.Д.66), с учётом указанных соотношений, в виде

$$p_{\psi, \gamma-1} + p_{\psi-1, \gamma} = \tilde{q}_{\psi, \gamma} \quad \psi, \gamma = \overline{1, n}. \tag{7.Д.67}$$

где

$$\tilde{q}_{\psi, \gamma} = q_{\psi, \gamma} - \check{c}_{m, \psi} d_{\gamma-1}^c - \check{\delta}_\gamma d_{m, \psi-1} \quad \psi, \gamma = \overline{1, n}. \tag{7.Д.68}$$

При  $\psi = \gamma$  получим из (7.Д.67)

$$p_{\gamma, \gamma-1} + p_{\gamma-1, \gamma} = \tilde{q}_{\gamma\gamma} \quad \gamma = \overline{1, n}. \quad (7.Д.69)$$

Рассмотрим эти уравнения при различных значениях  $\gamma$

$$\gamma = n \quad : \quad -\check{c}_{m, n-1} - \check{\delta}_{n-1} = \tilde{q}_{nn}, \quad (7.Д.70)$$

$$\gamma = n - 1 : \quad p_{n-1, n-2} + p_{n-2, n-1} = \tilde{q}_{n-1, n-1}. \quad (7.Д.71)$$

Для исключения из этого уравнения неизвестных  $p_{n-1, n-2}$  и  $p_{n-2, n-1}$  положим в (7.Д.69)  $\psi = n$ ,  $\gamma = n - 2$  а затем  $\psi = n - 2$ ,  $\gamma = n$  и получим

$$p_{n, n-3} + p_{n-1, n-2} = \tilde{q}_{n, n-2}, \quad p_{n-2, n-1} + p_{n-3, n} = \tilde{q}_{n-2, n}.$$

Подставим эти выражения в (7.Д.71) и получим

$$-\check{c}_{m, n-3} - \check{\delta}_{n-3} = -\tilde{q}_{n-1, n-1} + \tilde{q}_{n, n-2} + \tilde{q}_{n-2, n}. \quad (7.Д.72)$$

Продолжим процесс исключения промежуточных неизвестных для  $\gamma = n - 2, \dots, \gamma = 1$ .

Теперь положим в (7.Д.67) вначале  $\gamma = \psi + 1$ , затем  $\psi = \gamma + 1$ . Тогда

$$p_{\psi\psi} + p_{\psi-1, \psi+1} = \tilde{q}_{\psi, \psi+1}, \quad p_{\gamma+1, \gamma-1} + p_{\gamma\gamma} = \tilde{q}_{\gamma+1, \gamma} \quad \psi, \gamma = \overline{0, n-1}.$$

Заменим в первой подсистеме  $\psi$  на  $\gamma$ , вычтем её из второй подсистемы и получим

$$p_{\gamma+1, \gamma-1} - p_{\gamma-1, \gamma+1} = \tilde{q}_{\gamma+1, \gamma} - \tilde{q}_{\gamma, \gamma+1} \quad \gamma = \overline{0, n-1}. \quad (7.Д.73)$$

Рассмотрим эти уравнения при различных  $\gamma$

$$\gamma = n - 1 : \quad -\check{c}_{m, n-2} + \check{\delta}_{n-2} = \tilde{q}_{n-1, n} - \tilde{q}_{n, n-1}, \quad (7.Д.74)$$

$$\gamma = n - 2 : \quad p_{n-1, n-3} - p_{n-3, n-1} = \tilde{q}_{n-1, n-2} - \tilde{q}_{n-2, n-1}. \quad (7.Д.75)$$

Для исключения из этого уравнения промежуточных переменных положим в (7.Д.67)  $\psi = n$ ,  $\gamma = n - 3$  а затем  $\psi = n - 3$ ,  $\gamma = n$  и получим

$$p_{n, n-4} + p_{n-1, n-3} = \tilde{q}_{n, n-3}, \quad p_{n-3, n-1} + p_{n-4, n} = \tilde{q}_{n-3, n}.$$

Подставим эти выражения в (7.Д.75) и найдём

$$-\check{c}_{m, n-4} + \check{\delta}_{n-4} = -\tilde{q}_{n-1, n-2} - \tilde{q}_{n-2, n-1} - \tilde{q}_{n, n-3} + \tilde{q}_{n-3, n}. \quad (7.Д.76)$$

Продолжим этот процесс для  $\gamma = n, \dots, \gamma = 1$ . Изложенные процессы (первый из них начинается с формулы (7.Д.69), второй с (7.Д.73)) можно описать системой

$$-\check{c}_{m, n-i} - (-1)^{i+1} \check{\delta}_{n-i} = (-1)^{i+1} \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^\mu \tilde{q}_{n-\mu, n-i+1+\mu} \quad i = \overline{0, 2n-1}, \quad (7.Д.77)$$

которая при  $i = 1, 3, 5, \dots$  описывает первый процесс, а при  $i = 2, 4, 6, \dots$  – второй.

Подставим в (7.Д.77) известное выражение и получим

$$\begin{aligned} & \check{c}_{m,n-i} + (-1)^{i+1} \check{\delta}_{n-i} + (-1)^{i+1} \sum_{\mu=0}^{i-1} \left[ -(-1)^\mu \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c + \right. \\ & \left. + (-1)^\mu \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{m,n-\mu-1} + (-1)^\mu q_{n-\mu,n-i+1+\mu} \right] = 0 \quad i = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

Перепишем эти уравнения в более удобной, для сравнения с (7.Д.54), форме

$$\begin{aligned} & \left[ \check{c}_{m,n-i} + (-1)^{i+1} \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^\mu \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c \right] + \\ & + \left[ (-1)^{i+1} \check{\delta}_{n-i} + (-1)^{i+1} \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^\mu \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{m,n-\mu-1} \right] + \\ & + \left[ (-1)^{i+1} \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^\mu q_{n-\mu,n-i+1+\mu} \right] = 0 \quad i = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned} \quad (7.Д.78)$$

Теперь сравним (7.Д.78) с (7.Д.54).

Рассмотрим вначале **первую совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{m,\rho} d_{\alpha-\rho+1}^c \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}.$$

Введём новые переменные

$$\mu = n - \rho, \quad i = 2n - \alpha - 1. \quad (7.Д.79)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \check{c}_{m,\rho} d_{\alpha-\rho+1}^c &= \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{m,n-\mu} d_{\alpha-n+\mu+1}^c = \\ &= \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c \quad i = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

Если учесть, что  $d_{n-i+\mu}^c = 0$  при  $\mu > i$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c &= \sum_{\mu=0}^i (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c = \\ &= (-1)^{n-i-1} \check{c}_{m,n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{m,n-\mu} d_{n-i+\mu}^c. \end{aligned} \quad (7.Д.80)$$

Преобразуем **вторую совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{m,\alpha-\rho+1} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (7.Д.81)$$

Введём переменные

$$\mu = \rho + i - n - 1, \quad i = 2n - \alpha - 1,$$

при которых

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{\mathcal{M}, \alpha-\rho+1} &= \sum_{\mu=-n}^{2n-2} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} = \\ &= \sum_{\mu=-1}^{n-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1}. \end{aligned}$$

Последнее получено из условия  $d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} = 0$  при  $n - \mu - 1 < 0$  и  $n - \mu - 1 > n$ . Из этих неравенств следует, что  $-1 < \mu < n - 1$ .

Учитывая, что  $\check{\delta}_{n-i+1+\mu} = 0$  при  $n - i + 1 + \mu \leq n$ , получим, что  $\mu \leq n - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\alpha-\rho+1} \check{\delta}_{\rho} d_{\mathcal{M}, \alpha-\rho+1} &= \sum_{\mu=-1}^{n-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} = \\ &= \sum_{\mu=-1}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} = (-1)^n \check{\delta}_{n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1}. \end{aligned} \quad (7.Д.82)$$

Наконец, рассмотрим **третью совокупность** слагаемых в (7.Д.54)

$$\sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} q_{\rho, \alpha-\rho+2} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1},$$

где  $q_{\rho, \alpha-\rho+2} = (-1)^{\rho-1} q \check{l}_{\mathcal{M}, \rho} \check{l}_{\alpha-\rho+2}^3$ .

Используя ранее принятые обозначения, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} q_{\rho, \alpha-\rho+2} &= \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu-1} q_{n-\mu, \alpha-n+\mu+2} = \\ &= \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu-1} q_{n-\mu, n-i+1+\mu} = \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} q_{n-\mu, n-i+1+\mu} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned} \quad (7.Д.83)$$

Последнее равенство следует из условия  $q_{n-\mu, n-i+1+\mu} = 0$  при  $n - i + \mu + 1 > n$ .

Объединим полученные соотношения и запишем

$$\begin{aligned} &\left[ (-1)^{n-i-1} \check{c}_{\mathcal{M}, n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{c}_{\mathcal{M}, n-\mu} d_{n-i+\mu}^c \right] + \\ &+ \left[ (-1)^n \check{\delta}_{n-i} + \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} \right] + \\ &+ \left[ \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{n-\mu-1} q_{n-\mu, n-i+1+\mu} \right] = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned} \quad (7.Д.84)$$

Умножим эти уравнения на  $(-1)^{-n+i+1}$  и получим

$$\begin{aligned} &\left[ \check{c}_{\mathcal{M}, n-i} + (-1)^i \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{\mu} \check{c}_{\mathcal{M}, n-\mu} d_{n-i+\mu}^c \right] + \\ &+ \left[ (-1)^{i+1} \check{\delta}_{n-i} + (-1)^i \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{\mu} \check{\delta}_{n-i+1+\mu} d_{\mathcal{M}, n-\mu-1} \right] + \\ &+ \left[ -(-1)^i \sum_{\mu=0}^{i-1} (-1)^{\mu} q_{n-\mu, n-i+1+\mu} \right] = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

Эта система, эквивалентная (7.Д.54), совпадает с системой (7.Д.64) – (7.Д.66), если учесть, что  $-(-1)^{i+1} = (-1)^i$ , и таким образом утверждение 7.1.1 доказано.

#### 7.Д.4. Доказательство утверждения 7.3.1

Оно повторяет доказательство утверждения 7.Д.1. Действительно, представим тождество (7.3.5) в форме тождества (7.1.10)

$$(\tilde{l}' + c^{*'})\beta(-j\omega) + (\tilde{l}' + c^{*'})\beta(j\omega) = \beta'(-j\omega)[-Q + c^*c^{*'}]\beta(j\omega),$$

или

$$-2(l' + c^{*'})r_x(\omega) = \beta'(-j\omega)[Q - c^*c^{*'}]\beta(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.Д.85)$$

При фиксированных  $\omega$  из него следуют равенства (7.3.7)

$$-2(l' + c^{*'})r_x(\omega_k) = \beta'(-j\omega_k)[Q - c^*c^{*'}]\beta(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.Д.86)$$

Заменим в (7.Д.85), (7.Д.86)  $l + c^*$  на  $c$ , повторим доказательство утверждения 7.Д.1, и таким образом утверждение 7.3.1 доказано.

#### 7.Д.5. Доказательство утверждения 7.3.2

Вектор  $c(\varepsilon)$ , разрешающий задачу о минимуме функционала (7.3.37) на движениях системы (7.3.1), (7.3.38), удовлетворяет тождеству

$$[1 - c'(\varepsilon)\beta(-s)][1 - c'(\varepsilon)\beta(s)] = [1 - c^{*'}\beta(-s)][1 - c^{*'}\beta(s)] + \varepsilon^2\beta(-s)Q^{(1)}\beta(s), \\ s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.Д.87)$$

которое нетрудно получить из (4.5.33), если заменить в нём  $c$  на  $c(\varepsilon)$  и положить

$$l = -c^*, \quad Q^{(1)} = Q^{(2)} - c^*c^{*'} \quad (7.Д.88)$$

Исследуем зависимость вектора  $c(\varepsilon)$  от параметра  $\varepsilon$ . Для этого представим компоненты вектора

$$\beta_i(s) = \frac{b_i(s)}{d(s)} \quad i = \overline{1, n}$$

и запишем

$$d_\varepsilon(-s)d_\varepsilon(s) = d^*(-s)d^*(s) + \varepsilon^2 b'(-s)Q^{(1)}b(s), \quad (7.Д.89)$$

где  $d_\varepsilon(s) = d(s) - c'(\varepsilon)b(s)$ ,  $d^*(s) = d(s) - c^{*'}b(s)$ .

$d_\varepsilon(s)$  – это характеристический полином оптимальной системы (7.3.1), (7.3.38), а  $d^*(s)$  – исходной системы (7.3.1), (7.3.2). Если  $\nu_i$  и  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни этих полиномов, то

$$d_\varepsilon(s) = \prod_{i=1}^n (s - \nu_i), \quad d^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \tau_i).$$



Из условия ограниченности интеграла (7.3.37) следует, что

$$\operatorname{Re} \nu_i < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.Д.90)$$

Пусть для определённости  $\operatorname{Re} \tau_i < 0$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ),  $\operatorname{Re} \tau_i \geq 0$  ( $i = \overline{\delta + 1, n}$ ). Тогда  $\delta = n$  означает асимптотическую устойчивость исследуемой системы (7.3.1), (7.3.2).

Из (7.Д.89) следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\nu_i \rightarrow \tau_i \quad i = \overline{1, \delta}, \quad \nu_i \rightarrow -\tau_i \quad i = \overline{\delta + 1, n}.$$

Если  $\delta = n$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\nu_i \rightarrow \tau_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), и, следовательно,  $d_\varepsilon(s) \rightarrow d^*(s)$ . Последнее означает, при условии полной управляемости пары  $(A, \mathbf{b})$ , что  $\mathbf{c}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}^*$ .

Если  $\delta < n$ , то  $d_\varepsilon(s) \rightarrow \prod_{i=1}^{\delta} (s - \tau_i) \prod_{i=\delta+1}^n (s + \tau_i) \neq d^*(s)$ , и поэтому  $\mathbf{c}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{c}^{**}$ , где  $\mathbf{c}^{**}$  – единственный (в силу полной управляемости пары  $(A, \mathbf{b})$ ) вектор, компоненты которого находятся после сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $s$  в обеих частях равенства

$$d(s) - \mathbf{c}^{**'} \tilde{\beta}(s) = \prod_{i=1}^{\delta} (s - \tau_i) \prod_{i=\delta+1}^n (s + \tau_i). \quad (7.Д.91)$$

Поскольку равенству

$$d(s) - \mathbf{c}^{*'} \tilde{\beta}(s) = \prod_{i=1}^n (s - \tau_i) \quad (7.Д.92)$$

удовлетворяет также единственный вектор  $\mathbf{c}^*$ , то из последних двух выражений следует, что  $\mathbf{c}^{**} \neq \mathbf{c}^*$ .

## Заключение к главе 7

Таким образом, результаты этой главы состоят в следующем.

1. Построена (п. 7.1.3) итерационная процедура АКОР по частотным параметрам объектов первого вида.
2. Доказана (теорема 7.1.2) сходимость этой процедуры.
3. Сравнение этой процедуры с идентификационным методом синтеза показывает значительное сокращение объёма вычислений.
4. Разработан метод частотных параметров, разрешающий задачи синтеза регуляторов по требованиям к точности и грубости (п. 7.2.1), а также к точности, качеству и грубости (п. 7.2.2).
5. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости (критерии 7.3.1 и 7.3.2) систем с объектами первого вида, заданными частотными параметрами, и регуляторами, описываемыми алгебраическим соотношением с известными коэффициентами.

## Глава 8. Частотные адаптивные регуляторы

Предмет этой главы – системы с несамотождественными объектами (однорежимными и многорежимными).

В таких системах нужно объединить в одном устройстве вычисление частотных параметров, расчёт параметров регулятора и его реализацию. Такое устройство, названное частотным декларативным регулятором, может быть реализовано в настоящее время, если использовать современную микропроцессорную технику.

Декларативные регуляторы занимают промежуточное положение между обычными и адаптивными регуляторами. Объединение в одном устройстве традиционных операций проектирования обычного регулятора (определение параметров объекта, синтез регулятора и его реализация) приводит к новым свойствам: декларативный регулятор, как и адаптивный задаётся целями управления (требованием устойчивости и точности управления) и настраивается на конкретный экземпляр объекта, но, в отличие от адаптивного, процессы идентификации (либо определения частотных параметров) и управления в нём разделены во времени. Последнее выступает в ряде случаев как преимущество, поскольку разделение этих процессов существенно упрощает анализ сходимости адаптации (настройки), являющийся основной проблемой адаптивных систем.

Использование частотных декларативных регуляторов для управления многорежимными объектами имеет ряд особенностей, учёт которых приводит к алгоритмам, которые названы частотным адаптивным управлением.

Существо подхода к построению декларативных и адаптивных частотных регуляторов было изложено в разделе 1.3.

Цель этой главы:

- алгоритмы работы частотных декларативных регуляторов однорежимных несамотождественных объектов первого и второго видов,
- алгоритмы частотного адаптивного управления для многорежимных несамотождественных объектов.

### 8.1. Декларативный регулятор ЧДР-1

#### 8.1.1. Управление несамотождественными объектами

Пусть имеем несамотождественный объект управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u + m_\alpha f^{(\alpha)} + \dots + m_1\dot{f} + m_0f \quad (8.1.1)$$

с неизвестными параметрами  $d_i, b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, \gamma}$ ). Известно, что он полностью управляем, устойчив по управлению [ $b(s)$  – гурвицев полином], а

$$|f(t)| \leq f^*, \quad (8.1.2)$$

где  $f^*$  – заданное число.

Если  $f(t)$  ступенчатая функция, то известна оценка  $|m_0| \leq m_0^*$ , а при гармонической  $f(t)$  известны оценки параметров  $m_i$  ( $i = \overline{0, \alpha}$ ).

Задача 8.1.1. Для объекта (8.1.1) с неизвестными параметрами найти регулятор

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y, \quad (8.1.3)$$

такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени  $t^*$ , выполнялось требование к точности

$$|y(t)| \leq y^*, \quad t > t^*, \quad (8.1.4)$$

где  $y^*$  – заданное число. ■

Если объект (8.1.1) самотождественный, то достижение цели (8.1.4) осуществляется с помощью процедуры 8.1.1, состоящей из следующих операций:

**Операция 1.** Определить частотные параметры объекта.

**Операция 2.** Синтезировать регулятор (8.1.3) по частотным параметрам (решить задачу 6.1.2).

**Операция 3.** Реализовать (аппаратурно или программно) регулятор, действующий по алгоритму (8.1.3).

**Операция 4.** Подключить регулятор к объекту (замкнуть объект регулятором).

**Операция 5.** Достичь цели (8.1.4) через время  $t_{рег}$ . ■

Операции разделены в пространстве и во времени. Так, первая операция часто носит экспериментальный характер. Вторая и третья операции – это проектирование регулятора. Это приводит к тому, что для несамотождественных объектов они теряют смысл. Действительно, пусть на первом интервале пуск-останов определены  $\omega$ -индексы объекта и спроектирован (синтезирован и реализован) регулятор. После подключения регулятора к объекту начинается второй интервал пуск-останов, и может случиться так, что при этом реализуются параметры объекта, отличные от параметров на первом интервале. В этом случае цель (8.1.4) не будет достигнута.

Объединим выполнение всех операций процедуры 8.1.1 в одном устройстве, называемом *частотным декларативным регулятором*, и будем осуществлять эти операции без перерывов, затрачивая на каждую из них минимально необходимое время.

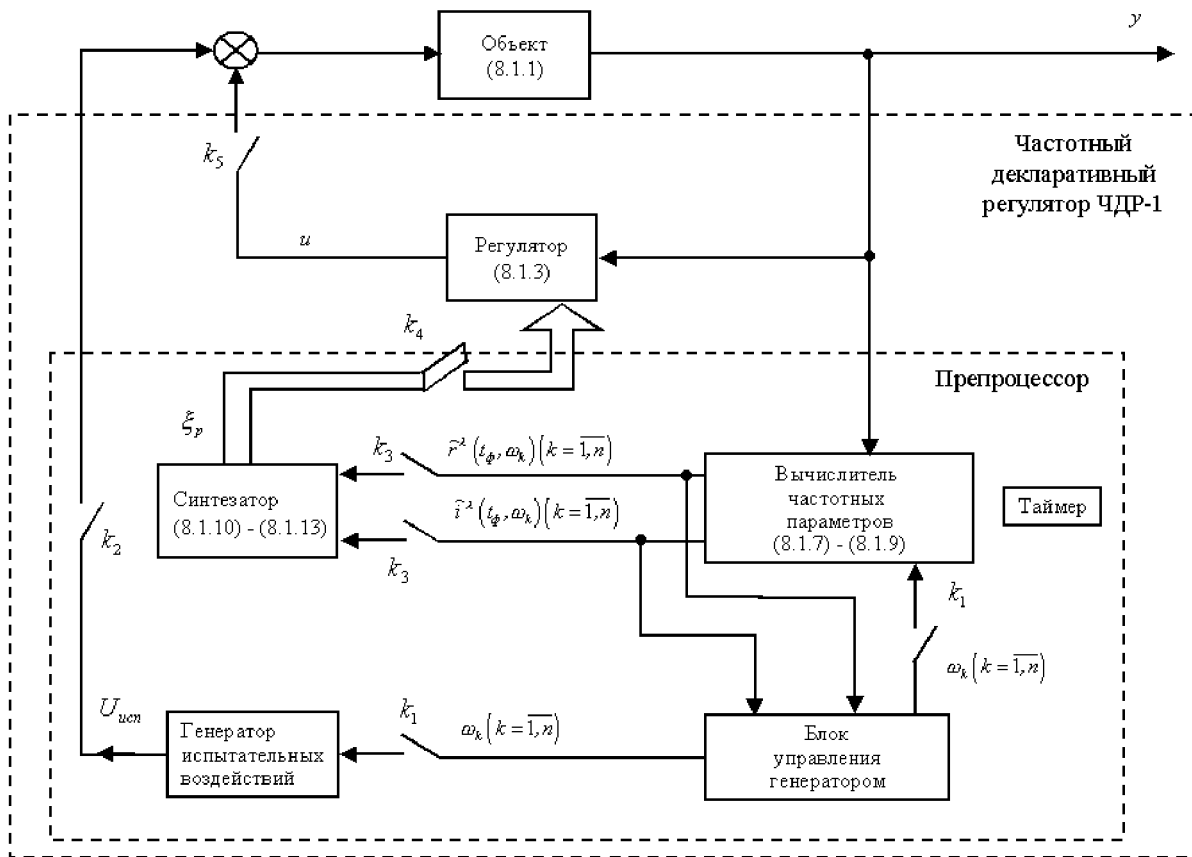


Рис. 8.1.1

### 8.1.2. Структурная схема

Структурная схема декларативного регулятора ЧДР-1 для объектов второго вида приведена на рис. 8.1.1.

Он состоит из регулятора и препроцессора, в котором реализуются первая, вторая и четвертая операции процедуры 8.1.1.

Генератор испытательных воздействий формирует сигнал

$$u_{исп}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t, \quad (8.1.5)$$

в котором, в соответствии с (5.1.19),

$$\lambda \geq \text{Re } s_i \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.1.6)$$

где  $s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни полинома  $d(s)$ .

Испытательные частоты  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) вырабатываются блоком управления генератором.

Вычислитель частотных параметров состоит из умножителя и фильтра Фурье. Его структурная схема приведена на рис. 8.1.2.

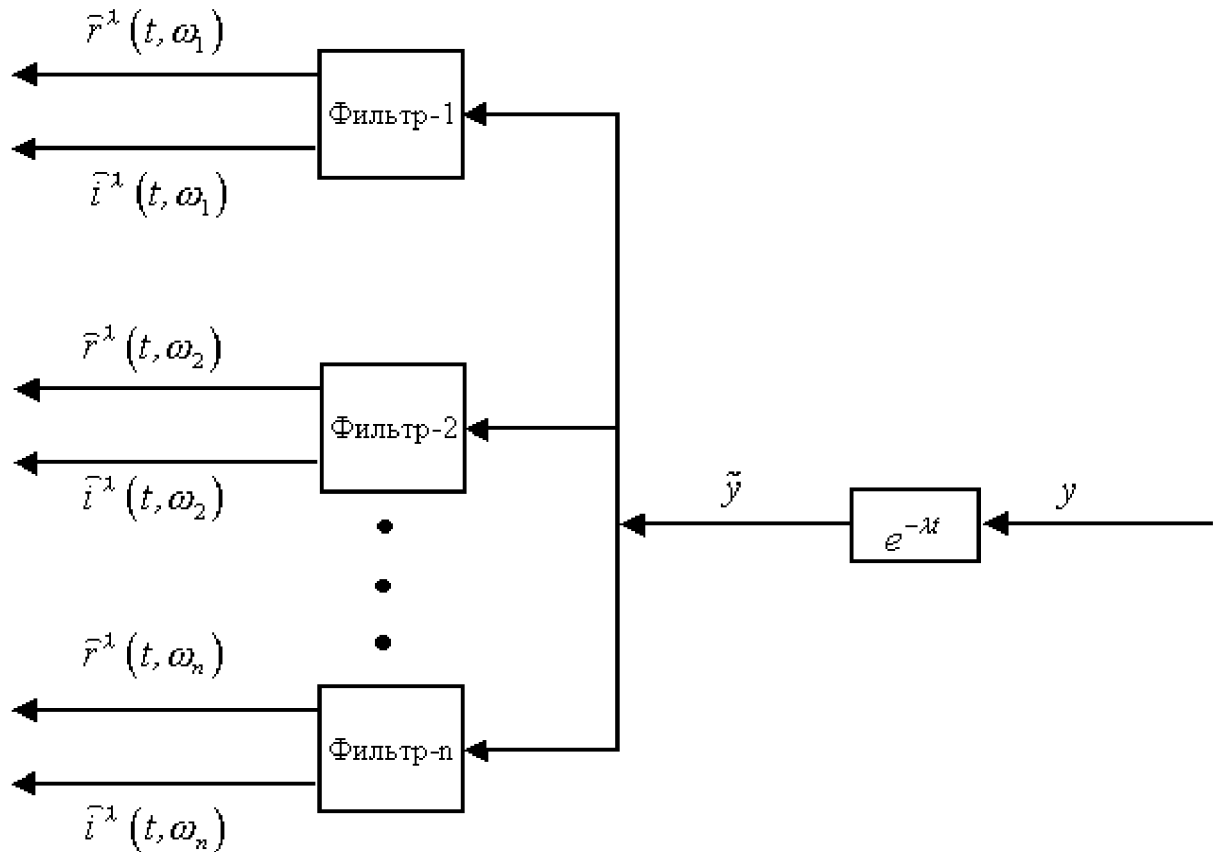


Рис. 8.1.2

Выходом синтезатора служат параметры регулятора (8.1.3)

$$\xi_p = \left[ g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{n-1} \mid r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{n-1} \right].$$

Таймер, входящий в состав препроцессора, управляет ключами К1–К5 (на рис. 8.1.1 не приведены связи таймера с другими устройствами регулятора).

### 8.1.3. Алгоритм препроцессора

**Вычислитель частотных параметров** формирует в момент  $(t'_0 + T_\phi)$  окончания фильтрации оценки вида (5.3.13), (5.3.14)

$$\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_\phi} \int_{t'_0}^{t'_0 + T_\phi} \tilde{y}(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.1.7)$$

$$\hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_\phi} \int_{t'_0}^{t'_0 + T_\phi} \tilde{y}(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.1.8)$$

где

$$\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t}, \quad (8.1.9)$$

$t'_0$  – момент начала фильтрации.

Сигналы  $\hat{r}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k)$ ,  $\hat{i}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) поступают в **синтезатор**, алгоритм работы которого заключается в решении уравнений (6.1.13), (6.1.14), где частотные параметры заменяются их оценками

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \rho_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \rho_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \mu_l(\omega_k) \right] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \rho_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \mu_l(\omega_k) \right] \psi_l \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \mu_l(\omega_k) g_l - \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \mu_l(\omega_k) + \hat{i}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \rho_l(\omega_k) \right] r_l = \\ = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \mu_l(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \rho_l(\omega_k) \right] \psi_l \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

Выражения для  $\rho_l(\omega_k)$  и  $\mu_l(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в этих уравнениях находятся из равенства (6.1.10)

$$(\lambda + j\omega_k)^l = \rho_l(\omega_k) + j\mu_l(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad l = \overline{0, 2n - \gamma}, \quad (8.1.12)$$

Числа  $\psi_l$  ( $l = \overline{0, 2n - \gamma - 1}$ ) – это коэффициенты полинома  $\psi(s)$ , которые определяются требованиями к точности. Так, для ступенчатых внешних возмущений имеем, в соответствии с (6.1.32),

$$\psi(s) = \sum_{l=0}^{2n-\gamma-1} \psi_l s^l = \frac{m_0^* \bar{f}}{y^*} (\varepsilon^0 s + 1)^{2n-\gamma-1}. \quad (8.1.13)$$

Для гармонических внешних возмущений аналогичный полином строится с использованием неравенств (6.1.34).

**Блок управления генератором** работает в соответствии с одним из алгоритмов, описанных в п. 5.3.9 и п. 5.3.10. Так, при использовании алгоритма с паузами генератор испытательных воздействий начинает работать в момент времени  $t_0 + T_{n.z}$ , а на интервале  $[t_0, t_0 + T_{n.z}]$ , которое названо временем паузы генератора, проверяется выполнение неравенств (5.3.66)

$$\hat{r}^\lambda(t_0 + T_{n.z}, \omega_k) \leq \varepsilon_{\mathcal{F}}, \quad \hat{i}^\lambda(t_0 + T_{n.z}, \omega_k) \leq \varepsilon_{\mathcal{F}} \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.1.14)$$

где  $\varepsilon_{\mathcal{F}}$  – допустимая погрешность фильтрации.

Если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, например, при  $\omega_k = \omega_\nu$ , то изменяем  $\omega_\nu$ . Блок управления генератором целесообразно использовать при  $\lambda = 0$ , когда объект асимптотически устойчив.

**Таймер** организует работу декларативного регулятора. В момент времени  $t_0$  он запускает объект управления и замыкает ключ КЛ1. При  $t'_0 = t_0 + T_{n.z}$  замыкается

ключ КЛ2 и испытательное воздействие прикладывается к объекту. Через время  $T_\phi$  (при  $t = t'_0 + T_\phi$ ) замыкается ключ КЛ3 (ключ КЛ1 при этом размыкается) и начинается вычисление параметров регулятора. При этом ключи КЛ2 и КЛ3 размыкаются. После завершения расчётов, на которые затрачивается время  $T_p$ , замыкается при ( $t = t'_0 + T_\phi + T_p$ ) ключ КЛ4. Затем в течение времени  $T_{nep}$  данные (вектор  $\xi_p$ ) передаются в регулятор. После этого ключ КЛ4 размыкается и срабатывает ключ КЛ5, объект замыкается регулятором и в системе возникает переходный процесс длительностью  $t_{pez}$ . По окончании этого процесса выполняется неравенство (8.1.4). Таким образом, момент времени, начиная с которого достигается цель управления,

$$t^* = t_0 + T_{n,z} + T_\phi + T_p + T_{nep} + t_{pez}. \quad (8.1.15)$$

#### 8.1.4. Неопределённые структурные показатели

В задаче 8.1.1 предполагается, что структурные показатели объекта  $n$  и  $\gamma$  заданы.

Рассмотрим теперь случай, когда эти числа неизвестны. В этом случае препроцессор содержит еще одно устройство – **анализатор**, который осуществляет анализ устойчивости по одному из частотно-алгебраических критериев. При использовании первого из этих критериев анализатор осуществляет: а) решение системы алгебраических уравнений (6.2.19)–(6.2.21), б) проверку выполнения неравенств (6.2.24) Гурвица.

Структурная схема постпроцессора с анализатором приведена на рис. 8.1.3.

Анализатор решает уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\gamma} \left[ \hat{r}(\omega_k) \rho_i(\omega_k) - \hat{i}(\omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \rho_i(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, \rho}, \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\gamma} \left[ \hat{r}(\omega_k) \mu_i(\omega_k) + \hat{i}(\omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] l_i - \\ & - \sum_{i=0}^{2n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \mu_i(\omega_k) + \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] \delta_i = 0 \quad k = \overline{1, \rho}, \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

где

$$\delta_{2n-1} = 1, \quad (8.1.18)$$

$$\hat{r}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \rho_i(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \mu_i(\omega_k) \right] r_i \quad k = \overline{1, p}, \quad (8.1.19)$$

$$\hat{i}(\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(\omega_k) g_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \mu_i(\omega_k) - \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) \rho_i(\omega_k) \right] r_i \quad k = \overline{1, p}, \quad (8.1.20)$$

$$p = n + \left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^*, \quad (8.1.21)$$

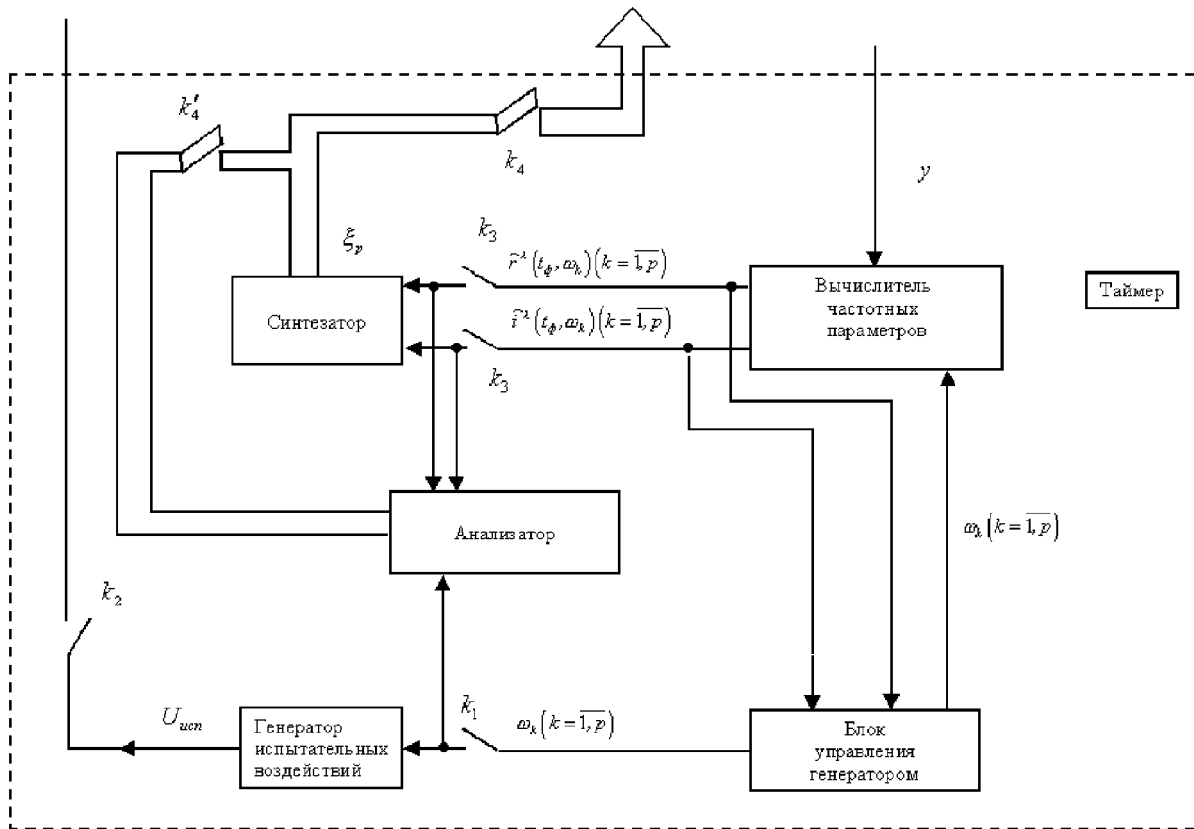


Рис. 8.1.3

$$\left\{ \frac{\gamma}{2} \right\}^* = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} & \text{для чётных } \gamma, \\ \frac{\gamma+1}{2} & \text{для нечётных } \gamma, \end{cases} \quad (8.1.22)$$

и проверяет выполнение неравенств

$$\Delta_i > 0 \quad i = \overline{1, 2n-1}, \quad (8.1.23)$$

в которых  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1, 2n-1}$ ) определяются формулами (6.2.23).

Его работа описывается *итерационной процедурой 8.1.2*, которая является развитием процедуры 3.2.4 (процедура построения структурного грубого регулятора) на случай, когда параметры и структурные показатели уточнённой модели неизвестны.

Процедура 8.1.2 содержит следующие операции:

**Операция 1.** Задаться числами  $n^{(0)}$  и  $\gamma^{(0)}$  и найти в соответствии с (8.1.21)

$$p^{(0)} = n^{(0)} + \left\{ \frac{\gamma^{(0)}}{2} \right\}^* + 2.$$

**Операция 2.** Использовать алгоритм п. 8.1.3, при  $n = n^{(0)}$  и  $\gamma = \gamma^{(0)}$ , однако после получения вектора  $\xi^{(0)}$  замкнуть ключ КЛ4 и передать значение этого вектора в анализатор (вместо регулятора (8.1.3), как это было ранее).



Частотные параметры  $\hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k)$ ,  $\hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k)$  ( $k = \overline{n^{(0)} + 1, p^{(0)}}$ ), снимаемые с выходов вычислителя частотных параметров не используются синтезатором, а поступают в анализатор вместе с  $2n^{(0)}$  частотными параметрами.

**Операция 3.** Решить уравнения (8.1.16)-(8.1.21) при

$$n = n^{(1)} = n^{(0)} + 1, \quad \gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + 1. \quad (8.1.24)$$

**Операция 4.** Проверить выполнение неравенств (8.1.23). Если эти неравенства выполняются, то замкнуть ключ К4 и передать  $\xi_p^{(0)}$  в регулятор. Если хотя бы одно из неравенств (8.1.23) нарушается, то вернуться к операции 1, полагая в ней  $n^{(0)} = n^{(1)}$ ,  $\gamma^{(0)} = \gamma^{(1)}$ ,  $p^{(0)} = p^{(1)} = n^{(1)} + \left\{ \frac{\gamma^{(1)}}{2} \right\}^*$ . Осуществить операцию 2 при  $n = n^{(1)}$ ,  $\gamma = \gamma^{(1)}$  и найти вектор  $\xi_p^{(1)}$ , а затем операцию 3 при

$$n = n^{(2)} = n^{(1)} + 1, \quad \gamma = \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} + 1. \quad (8.1.25)$$

Если неравенства (8.1.23) выполняются, то вектор  $\xi_p^{(1)}$  передать в регулятор, а если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то осуществить следующий шаг итерационного процесса: в операции 1 полагать  $n^{(0)} = n^{(2)}$ ,  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)}$ ,  $p^{(0)} = p^{(2)} = n^{(2)} + \left\{ \frac{\gamma^{(2)}}{2} \right\}^*$  и т.д.

■

Отметим, что в упомянутой выше процедуре 3.2.4 структурные параметры уточнённой модели  $n_{ym}$  и  $\gamma_{ym}$  предполагались известными. При этом условии в операции 3 процедуры 8.1.2 следует положить, вместо (8.1.24),

$$n = n_{ym}, \quad \gamma = \gamma_{ym}, \quad (8.1.26)$$

а число  $p$  в схеме на рис. 8.1.3 определять как

$$p = n_{ym} + \left\{ \frac{\gamma_{ym}}{2} \right\}^*. \quad (8.1.27)$$

В этом случае процедура 8.1.2 служит для построения регулятора (8.1.3) минимального порядка.

Возвращаясь к исходному предположению, когда числа  $n_{ym}$  и  $\gamma_{ym}$  неизвестны, отметим, что для большей гарантии эффективности процедуры 8.1.2 следует брать приращения структурных показателей при анализе (при выполнении операции 3) больше единицы и полагать вместо (8.1.24)

$$n = n^{(1)} = n^{(0)} + \alpha, \quad \gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \alpha, \quad \alpha \geq 1. \quad (8.1.28)$$

### 8.1.5. Свойства

Определим место декларативных регуляторов среди других видов регуляторов. Для этого классифицируем регуляторы по нескольким признакам: времени  $t_\partial$  достижения цели управления, групповые регуляторы – ТЭИ регуляторы, процедуральность – декларативность.

#### 8.1.5.1. Время достижения цели управления

Этот признак характеризует меру близости времени достижения цели управления к времени регулирования  $t_{рег}$ . Так, в обычных регуляторах, которые получаются в результате операций идентификации, синтеза и реализации (частным случаем этих операций являются операции 1–3 процедуры 8.1.1), время  $t_\partial - t_{рег}$  не связано с временем регулирования. В адаптивных системах числа  $t_\partial$  и  $t_{рег}$  часто связаны, и при использовании эффективных алгоритмов адаптации эти числа соизмеримы. Декларативные регуляторы занимают промежуточное положение между обычными и адаптивными. Разность  $t_\partial - t_{рег}$  у них больше чем у адаптивных, поскольку операции идентификации и управления осуществляются последовательно, а не параллельно, как в адаптивных системах. С другой стороны, время  $t_\partial - t_{рег}$  для декларативных регуляторов меньше чем для обычных, так как операции идентификации, синтеза и реализации осуществляются без перерывов.

#### 8.1.5.2. Групповой регулятор. ТЭИ-регулятор

Рассмотрим вначале самотождественные объекты. Уравнение (8.1.1) описывает группу объектов, которая характеризуется вектором коэффициентов

$$\xi^{(2)} = \left[ d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-1} \mid b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{\gamma-1} \right], \quad (8.1.29)$$

и граничными векторами

$$\begin{aligned} \underline{\xi}^{(2)} &= \left[ \underline{d}_0 \ \underline{d}_1 \ \dots \ \underline{d}_{n-1} \mid \underline{b}_0 \ \underline{b}_1 \ \dots \ \underline{b}_{\gamma-1} \right], \\ \overline{\xi}^{(2)} &= \left[ \overline{d}_0 \ \overline{d}_1 \ \dots \ \overline{d}_{n-1} \mid \overline{b}_0 \ \overline{b}_1 \ \dots \ \overline{b}_{\gamma-1} \right], \end{aligned} \quad (8.1.30)$$

составленными из нижних и верхних границ значений параметров объекта. Таким образом,

$$\underline{\xi}^{(2)} \leq \xi^{(2)} \leq \overline{\xi}^{(2)}. \quad (8.1.31)$$

Конкретный (данный) экземпляр объекта будем называть далее *изделием*. Каждое изделие описывается числовым вектором из множества (8.1.31), которое называется *вариантом вектора параметров объекта*  $\xi^{(2)}$ . Варианты порождаются разбросом параметров изделий в пределах технологических допусков на их изготовление, старением изделий и т.п.

При синтезе обычных регуляторов используется расчётный вектор  $\xi^{(2)*}$ . По этому вектору находится регулятор, который можно назвать *групповым регулятором*, поскольку предполагается, что он обеспечивает требуемые точность и качество регулирования для каждого изделия из группы объектов. Для построения группового регулятора необходим анализ грубости синтезированной системы.

При больших разбросах параметров объекта относительно расчётного вектора может не существовать группового регулятора. В этом случае используют адаптивный регулятор, который в процессе работы настраивается (адаптируется) к конкретному экземпляру объекта, и поэтому регулятор, обладающий таким свойством, будем называть *ТЭИ-регулятором* (Только Этого Изделия регулятор).

Очевидно, что декларативный регулятор относится к виду ТЭИ-регуляторов.

Если объект (8.1.1) несамотождественный, то в число изделий следует включить дополнительно экземпляры конкретного объекта, которые реализуются при различных пусках. Другими словами, множество реализаций одного несамотождественного экземпляра объекта можно трактовать как множество экземпляров самотождественного объекта.

### 8.1.5.3. Процедуральные и декларативные регуляторы

Синтез обычного регулятора завершается уравнением (8.1.3), которое описывает процедуру (алгоритм) преобразования входного сигнала  $y(t)$  в выходной сигнал  $y(t)$ , и поэтому это уравнение будем называть процедуральным описанием регулятора или *процедуральным регулятором*.

Декларативный регулятор, в отличие от обычного, задаётся не алгоритмом управления (процедурой преобразования входного сигнала в выходной), а описанием (декларированием) цели управления. Алгоритм управления [уравнение (8.1.3)] – это результат работы декларативного регулятора. Таким образом, процедуральный регулятор – это описание того, как нужно управлять, а декларативный – какой цели нужно достичь.

В рамках приведённой классификации обычный регулятор – это *процедуральный групповой регулятор*, а регулятор, приведённый на рис. 8.1.1, – *декларативный ТЭИ-регулятор*.

Заметим, что могут существовать *процедуральный ТЭИ-регулятор* и *декларативный групповой регулятор*.

Действительно, обычный регулятор для объекта с параметрами  $\xi^{(2)*}$  (которые использовались для расчёта регулятора) является ТЭИ-регулятором, а декларативный регулятор, в котором осуществляется идентификация лишь одного изделия, а синтезированный в нём закон управления используется для управления другими изделиями, является групповым.

### 8.1.6. Следящие системы

Усложним задачу 8.1.1 условием

$$|y(t) - y_{жс}(t)| \leq y^*, \quad t > t^*, \quad (8.1.32)$$

в котором  $y_{жс}(t)$  – желаемый выход объекта, связанный с задающим воздействием соотношением

$$y_{жс}(s) = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)} v(s). \quad (8.1.33)$$

Регулятор, разрешающий эту задачу, описывается уравнением (6.1.47). Если выполняется условие согласования

$$\psi_0^m > \psi_0, \quad (8.1.34)$$

где  $\psi_0 = \frac{m_0^* \bar{f}}{y^*}$ , то коэффициентами  $\psi_l$  ( $l = \overline{0, 2n - \gamma - 1}$ ) в уравнениях (8.1.10), (8.1.11) служат параметры полинома

$$\psi(s) = \psi_m(s), \quad (8.1.35)$$

а  $r^n(s) = l_m(s)$ .

#### Примечание 8.1.1.

До момента подключения регулятора к объекту (это происходит при  $t^{**} = t_0 + T_{n.z} + T_{\phi} + T_p$ ) задающее воздействие не влияет на движение объекта, и ошибка  $|y(t) - y_{жс}(t)|$  может становиться на интервале  $[t_0, t^{**}]$  недопустимо большой.

В связи с этим возможен такой алгоритм: на интервале  $[t_0, t^{**}]$  прикладывать к объекту, наряду с  $u_{исн}(t)$ , сигнал

$$u_m = r^n(s)v. \quad (8.1.36)$$

В ряде случаев это уменьшит ошибку слежения, однако при этом увеличивается время фильтрации (к объекту приложено дополнительное  $kf(t)$  возмущение (8.1.36), реакцию на которое нужно отфильтровать от сигналов, возбуждённых испытательным воздействием). ■

Рассмотрим частный случай, когда объект асимптотически устойчив, а задающее воздействие содержит  $n$  известных гармоник и описывается выражением

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t + v_1(t), \quad (8.1.37)$$

где  $\rho_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – известные числа, а  $v_1(t)$  – неизвестная функция.

В этом случае задающее воздействие может служить и как испытательное.

### 8.1.7. Проблема настройки времени фильтрации

Управление при неопределённых параметрах носит двойственный (дуальный) характер. Оно выступает как средство изучения объекта и как средство направления его к желаемому состоянию (цели управления). Изучающая часть управления формируется как испытательное воздействие, а направляющая имеет вид (8.1.3). Всегда существует противоречие между познавательной и направляющей сторонами управляющего воздействия. Действительно, слишком поспешное управление без достаточной информации – с одной стороны, и слишком осторожное управление, хотя и основанное на накопленной информации, но действующее, когда надобность в нём миновала – с другой стороны, являются двумя крайностями, и проблема состоит в том, чтобы наилучшим образом сочетать познавательную и направляющую стороны управляющего воздействия.

В рассматриваемом случае проблема сочетания познавательной и направляющей сторон управления имеет количественную характеристику – время фильтрации. Другими словами, задача состоит в рациональном выборе времени фильтрации –  $T_\phi$ .

Переходя к выбору  $T_\phi$ , рассмотрим различные виды управлений, которые строятся в зависимости от величины  $T_\phi$ .

**Осторожное управление.** При таком управлении время фильтрации (время изучения объекта) выбирается достаточно большим. Укажем признаки достаточно большого  $T_\phi$  для асимптотически устойчивых объектов.

Первый признак: собственное движение (переходные процессы) в объекте за время фильтрации затухает. Для количественной характеристики этого признака используем значение  $C_0$  степени устойчивости объекта

$$C_0 = \min \{ |\operatorname{Re} \lambda_1|, |\operatorname{Re} \lambda_2|, \dots, |\operatorname{Re} \lambda_n| \}, \quad (8.1.38)$$

(где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $A$ ) и будем говорить, что  $T_\phi$  достаточно велико, если

$$T_\phi > \frac{1}{C_0}. \quad (8.1.39)$$

Другим признаком является неравенство

$$T_\phi > \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad (8.1.40)$$

которое выражает естественную нижнюю границу времени фильтрации, при которой период наиболее медленной испытательной гармоники меньше  $T_\phi$ .

При достаточно большом времени фильтрации оценки частотных характеристик и их истинные значения –  $r^\lambda(\omega_k)$ ,  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – близки. Это означает, что

$$\left| \hat{r}^\lambda(T_\phi, \omega_k) - r^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_\phi, \quad \left| \hat{i}^\lambda(T_\phi, \omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_\phi \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.1.41)$$

### 8.1.8. Алгоритмы сокращения времени фильтрации

**Управление с настраиваемым временем фильтрации.** Время фильтрации при осторожном управлении выбирается априори (до начала процесса адаптации). Ясно, что время  $T_\phi$ , при котором выполняются неравенства (8.1.41), существенно зависит от начальных отклонений объекта, реализации внешнего воздействия  $f(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$ . В связи с этим  $T_\phi$  берётся с достаточным запасом так, чтобы (8.1.41) выполнялось для каждой из функций  $f(t)$  и  $\varepsilon(t)$ .

В действительности каждой конкретной реализации  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $f(t)$  и  $\varepsilon(t)$  соответствует своё значение  $T_\phi = T_\phi(\mathbf{x}^{(0)}, f(t), \varepsilon(t))$ , при котором оценки и истинные значения частотных характеристик близки. Поэтому нужно определять (настраивать) его в процессе адаптации. Это позволит сократить время фильтрации для большого числа реализаций внешних воздействий, помех и начальных условий.

Для описания процесса настройки  $T_\phi$  будем полагать его в (8.1.7)-(8.1.11) переменным ( $t_\phi$ ), а зависимость оценок от времени фильтрации будем выражать, используя обозначения

$$\hat{r}^\lambda(t_\phi, \omega_k), \quad \hat{i}^\lambda(t_\phi, \omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.1.42)$$

Из утверждения 5.3.3 следует сходимость процесса фильтрации

$$\lim_{t_\phi \rightarrow \infty} \hat{r}^\lambda(t_\phi, \omega_k) = r^\lambda(\omega_k), \quad \lim_{t_\phi \rightarrow \infty} \hat{i}^\lambda(t_\phi, \omega_k) = i^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.1.43)$$

и поэтому искомый вектор

$$\xi_p = \lim_{t_\phi \rightarrow \infty} \xi_p(t_\phi). \quad (8.1.44)$$

Из этого равенства можно определить момент окончания фильтрации исходя из близости  $\xi_p(t_\phi)$  и  $\xi_p$ . Поскольку вектор  $\xi_p$  неизвестен, то используем признак близости векторов  $\xi_p(t_\phi)$  и  $\xi_p$  и будем искать  $t_\phi$  из неравенства

$$\sum_{i=1}^n |\xi_{pi}(t_\phi) - \xi_{pi}(t_\phi + \Delta t_\phi)| \leq \varepsilon_\phi \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.1.45)$$

где  $\Delta t_\phi$  – достаточно малое положительное число.

**Управление с возвратом.** Пусть  $T_\phi$  удовлетворяет неравенству (8.1.40), а соотношение (8.1.39) может при этом нарушаться. Используя алгоритм п. 8.1.3, получим регулятор (8.1.3). После подключения его к объекту возможны две ситуации: первая – система (8.1.1), (8.1.3) – асимптотически устойчива; вторая – эта система неустойчива. Для того, чтобы различить эти ситуации, в процессе работы будем считать нарушение неравенства (8.1.4) признаком неустойчивости системы (8.1.1), (8.1.3). Если возникла первая ситуация, то задача 8.1.1 решена. При второй ситуации прекращаем [в момент выполнения равенства (8.1.4)] процесс управления (размыкаем ключ К5), повторяем фильтрацию, увеличивая время фильтрации, например, в

два раза ( $T_{\phi}^{(1)} = 2T_{\phi}^{(0)}$ ) и вычисляем вектор параметра регулятора (8.1.3). Прикладывая это управление к объекту (8.1.1), вновь проверяем выполнение условия (8.1.4) т.д.

## 8.2. Декларативный регулятор ЧДР-2 и его экспериментальное исследование

### 8.2.1. Алгоритм регулятора

Рассмотрим асимптотически устойчивый и полностью управляемый объект первого вида с неизвестными параметрами

$$\dot{x} = Ax + b(u + f), \quad z = l'x, \quad (8.2.1)$$

где  $l$  – заданный  $n$ -мерный вектор чисел, а внешнее возмущение  $f(t)$  – ограниченная функция (8.1.2).

Пример 8.2.1. Найти регулятор

$$u = c'x \quad (8.2.2)$$

для объекта (8.2.1) с неизвестными параметрами такой, чтобы, начиная с некоторого момента времени  $t^*$ , выполнялось целевое условие

$$|z(t)| \leq z^*, \quad t > t^*, \quad (8.2.3)$$

в котором  $z^*$  – заданное число. ■

Регулятор (8.2.2) для самотождественных объектов можно найти, используя аналог процедуры 8.1.1. Операция синтеза в такой процедуре сводится к решению задачи 7.2.1.

Построим декларативный регулятор для несамотождественных объектов (8.2.1), а также для самотождественных объектов, параметры конкретных экземпляров которых существенно отличаются (большой разброс параметров изделий). Структурная схема объекта с декларативным регулятором приведена на рис. 8.2.1.

Сигнал с генератора испытательных воздействий

$$u_{исп}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t. \quad (8.2.4)$$

Выход вычислителя частотных параметров

$$\hat{r}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int_{t'_0}^{t'_0 + T_{\phi}} x(\tau) \sin \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.2.5)$$

$$\hat{i}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int_{t'_0}^{t'_0 + T_{\phi}} x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.2.6)$$

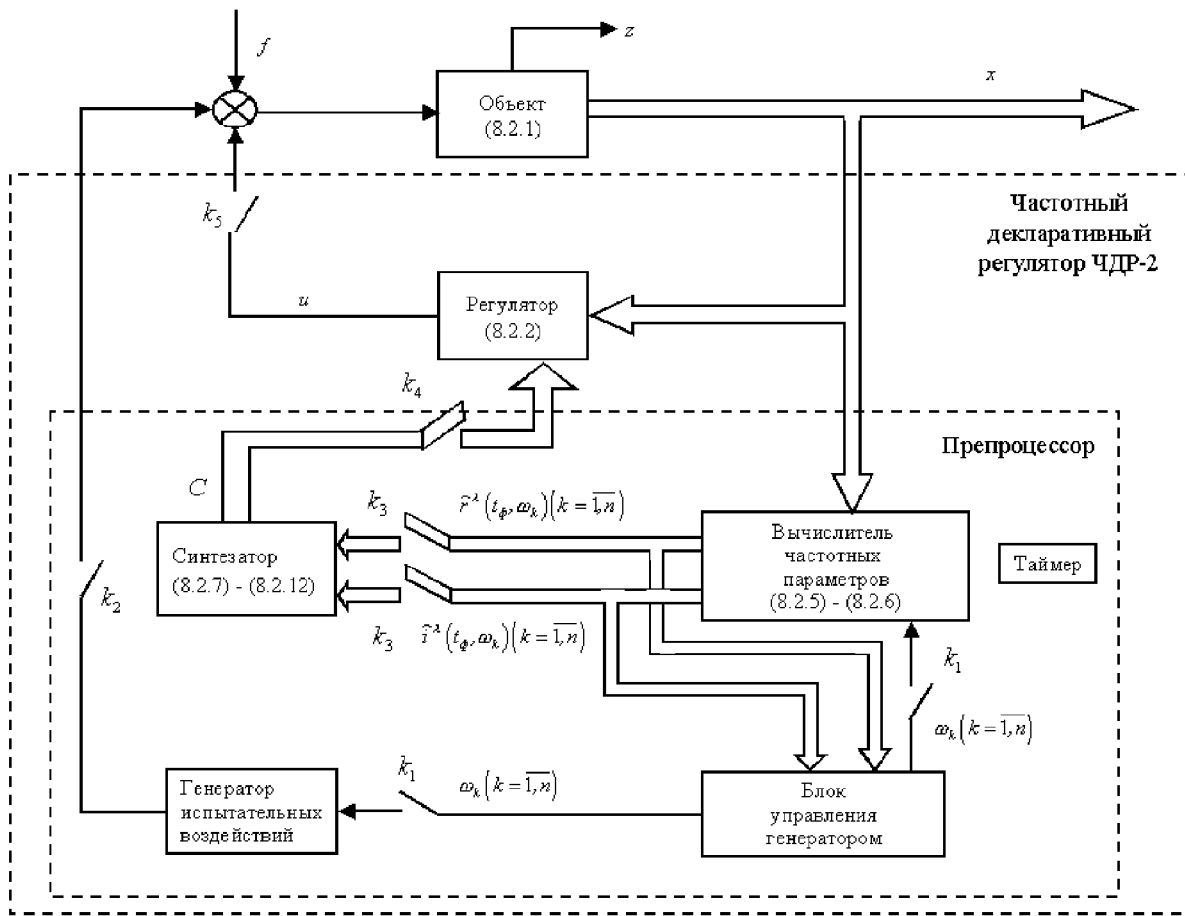


Рис. 8.2.1

Эти вектора поступают в синтезатор, уравнения которого имеют, в соответствии с (7.1.12), (7.2.5), вид

$$M_r(T_\phi) \mathbf{c} = \mathbf{n}_r(T_\phi), \quad (8.2.7)$$

где

$$M_r(T_\phi) = - \left( \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_1) \quad \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_2) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_n) \right)', \quad (8.2.8)$$

$$\mathbf{n}_r(T_\phi) = \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{r}}_x'(T_\phi, \omega_1) Q \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_1) + \hat{\mathbf{i}}_x'(T_\phi, \omega_1) Q \hat{\mathbf{i}}_x(T_\phi, \omega_1) \right. \\ \left. \hat{\mathbf{r}}_x'(T_\phi, \omega_2) Q \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_2) + \hat{\mathbf{i}}_x'(T_\phi, \omega_2) Q \hat{\mathbf{i}}_x(T_\phi, \omega_2) \quad \cdots \right. \\ \left. \hat{\mathbf{r}}_x'(T_\phi, \omega_n) Q \hat{\mathbf{r}}_x(T_\phi, \omega_n) + \hat{\mathbf{i}}_x'(T_\phi, \omega_n) Q \hat{\mathbf{i}}_x(T_\phi, \omega_n) \right]'. \quad (8.2.9)$$

Для ступенчатых внешних возмущений

$$Q = q \mathbf{l} \mathbf{l}', \quad (8.2.10)$$

$$q \geq \frac{|\mathbf{l}' \hat{\boldsymbol{\beta}}(0)| \hat{f} - z^*}{0.5 |\mathbf{l}' \hat{\boldsymbol{\beta}}(0)|^2 z^{*2}}, \quad (8.2.11)$$



где

$$\hat{\beta}(0) = \hat{r}_x(T_f, \omega_0) + j\hat{i}_x(T_f, \omega_0), \quad \omega_0 = 0. \quad (8.2.12)$$

Работа регулятора организуется таймером, который управляется ключами К1–К5 в той же последовательности, как и в регуляторе ЧДР-1.

Пример 8.2.1. Пусть имеем объект управления

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_1(u + f), \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2, \quad (8.2.13)$$

$$z = x_3, \quad (8.2.14)$$

подверженный действию ступенчатого возмущения

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 \geq 0, \\ 0 & \text{при } t_0 < 0. \end{cases} \quad (8.2.15)$$

Требуется найти регулятор

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad (8.2.16)$$

такой, чтобы через время  $t^*$  выполнялось условие

$$|x_3(t)| \leq 0.5. \quad (8.2.17)$$

Объект (8.2.13) асимптотически устойчив, графики его переходных процессов, возбуждённых воздействием (8.1.15), приведены на рис. 8.2.2.

Эти графики получены путём интегрирования уравнений (8.2.13) на ЭВМ при численных значениях параметров

$$a_{11} = -0.97, \quad a_{21} = 1.03, \quad a_{22} = -0.206, \quad a_{23} = -0.13, \quad a_{32} = -1.03; \quad b = 0.97.$$

Шаг интегрирования 0.01 с.

Из графика для  $x_3(t)$  замечаем, что без регулятора требование (8.1.17) к точности не выполняется.

В связи с этим уравнения (8.2.13) были решены при последовательном испытательном воздействии

$$u_{исн} = \begin{cases} \sin \omega_1 t & \text{при } t \in [0, 11T_1], \\ \sin \omega_2 t & \text{при } t \in [11T_1, 11T_2], \\ \sin \omega_3 t & \text{при } t \in [11(T_1 + T_2), 11T_3], \end{cases} \quad (8.2.18)$$

где  $T_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – периоды испытательных частот

$$\omega_1 = 0.16 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 0.34 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 0.63 \text{ рад/с}. \quad (8.2.19)$$

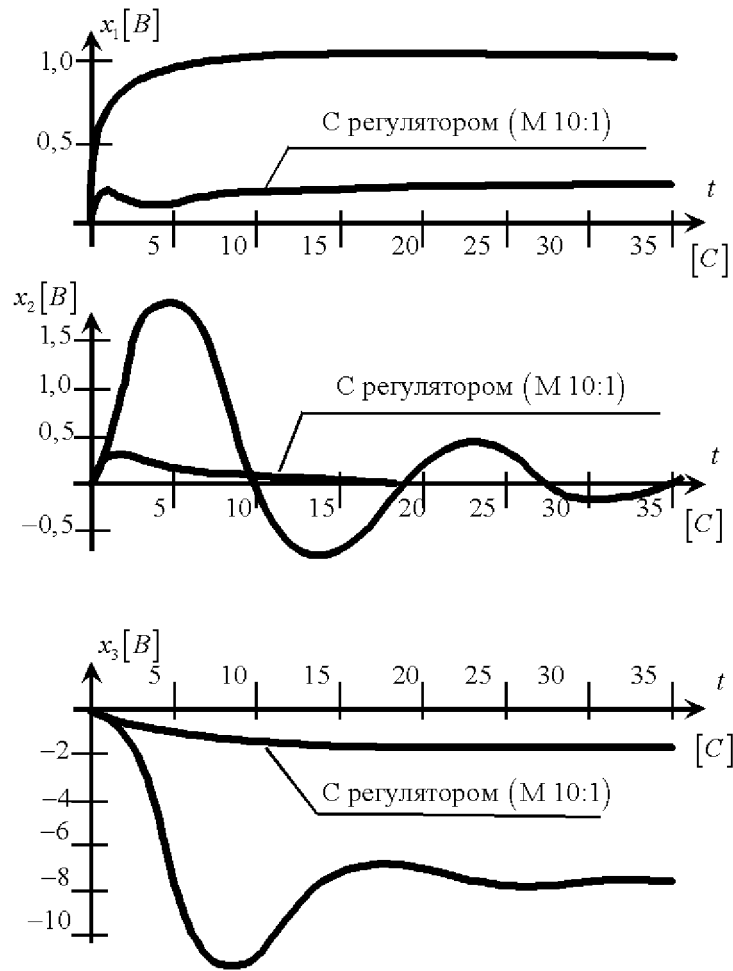


Рис. 8.2.2

Фильтруя последовательно реакции на каждую из трёх испытательных гармоник, найдем вектора частотных параметров

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_x(T_\phi, \omega_1) &= \quad , & \hat{i}_x(T_\phi, \omega_1) &= \quad ; \\
 \hat{r}_x(T_\phi, \omega_2) &= \quad , & \hat{i}_x(T_\phi, \omega_2) &= \quad ; \\
 \hat{r}_x(T_\phi, \omega_3) &= \quad , & \hat{i}_x(T_\phi, \omega_3) &= \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{8.2.20}$$

по которым была построена система линейных алгебраических уравнений (8.2.7), решение последней при

$$q_{11} = q_{22} = 0, \quad q_{33} = 1 \tag{8.2.21}$$

привело к параметрам регулятора (8.2.16)

$$c_1 = -18.5, \quad c_2 = -17.8, \quad c_3 = 1.58. \tag{8.2.22}$$

Графики переходных процессов в системе (8.2.13), (8.2.16) при таких параметрах регулятора приведены на рис. 8.2.2. ■

### 8.2.2. Анализатор

При неизвестной размерности вектора пространства состояний объекта применим итерационную процедуру, аналогичную процедуре 8.1.2. Для этого в состав процессора введём анализатор, основанный на критериях устойчивости, приведённых в п. 7.3. Построим алгоритм работы анализатора, используя второй из этих критериев (как более конструктивный).

Процедура 8.2.1. работы анализатора состоит из операций:

**Операция 1.** Задаться числом  $n^{(0)}$ .

**Операция 2.** Использовать алгоритм п. 8.2.1 при  $n = n^{(0)}$  и найти вектор  $\mathbf{c}_{(0)}$ .

Передать вектор  $\mathbf{c}_{(0)}$  вместо регулятора в анализатор (это означает, что ключ КЛ4 остаётся разомкнутым).

**Операция 3.** На основе (7.3.24) сформировать уравнения

$$M^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}})\mathbf{c}^{(\alpha+1)} = \mathbf{n}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (8.2.23)$$

где

$$M^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) = - \left[ M_{[1]}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \quad M_{[2]}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \quad \dots \quad M_{[n]}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \right] \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (8.2.24)$$

$$\mathbf{n}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) = \frac{1}{2} \left[ n_1^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \quad n_2^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \quad \dots \quad n_n^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) \right] \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (8.2.25)$$

$$M_{[k]}^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) = \mathbf{r}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ 1 - \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \mathbf{r}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right] - \mathbf{i}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \mathbf{i}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right] \quad k = \overline{1, n},$$

$$n_k^{(\alpha)}(T_{\mathcal{F}}) = \mathbf{r}_x^{l'}(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ \varepsilon^2 \tilde{Q} + \mathbf{c}_l^{(\alpha)} \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \right] \mathbf{r}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) + \mathbf{i}_x^{l'}(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ \varepsilon^2 \tilde{Q} + \mathbf{c}_l^{(\alpha)} \mathbf{c}_l^{(\alpha)'} \right] \mathbf{i}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \quad k = \overline{1, n},$$

$$\mathbf{r}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) = \frac{\hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ 1 + \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right] + \hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]}{\left[ 1 + \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]^2 + \left[ \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]^2} \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.2.26)$$

$$\mathbf{i}_x^l(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) = \frac{\hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ 1 + \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right] - \hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \left[ \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]}{\left[ 1 + \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{r}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]^2 + \left[ \tilde{\mathbf{l}}' \hat{\mathbf{i}}_x(T_{\mathcal{F}}, \omega_k) \right]^2} \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.2.27)$$

$$\mathbf{c}_l^{(0)} = -\mathbf{c}^*,$$

$$\tilde{\mathbf{l}} = -\mathbf{c}^*, \quad (8.2.28)$$

$\tilde{Q}$  – произвольная положительно-определённая матрица.

**Операция 4.** В этих уравнениях положить

$$n = n^{(0)} + 1, \quad \mathbf{c}^* = [\mathbf{c}_{(0)}, 0]' \quad (8.2.29)$$

и решить эти уравнения для различных значений  $\varepsilon$  и получить  $n^{(0)} + 1$ -мерные векторы

$$\mathbf{c}_l(\varepsilon) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbf{c}_l^{(\alpha)}(\varepsilon). \quad (8.2.30)$$

**Операция 5.** Если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{c}_l(\varepsilon) = 0, \quad (8.2.31)$$

то передать вектор  $\mathbf{c}_{(0)}$  в регулятор (замкнуть ключ КЛ4). Если соотношение (8.2.31) не выполняется, то вернуться к операции 1 и положить в ней  $n = n^{(1)} = n^{(0)} + 1$ . Затем осуществить операции 2 и 3, положив в последней операции  $n = n^{(1)} = n^{(0)} + 2$ ,  $\mathbf{c}^* = [\mathbf{c}_{(1)}, 0]'$ , где  $\mathbf{c}_{(1)}$  – результат операции 2.

Вновь проверить выполнение соотношения (8.2.31). Если оно выполняется, то  $\mathbf{c}_{(1)}$  передать в регулятор. Если не выполняется, вернуться к операции I, полагая  $n = n^{(0)} + 2$  и т.д.

■

### 8.2.3. Описание экспериментальной установки

Для исследования частотного декларативного регулятора была создана экспериментальная установка. Она состоит из имитатора физического объекта (ИФО), аналого-цифрового преобразователя, цифро-аналогового преобразователя и микро-ЭВМ «Электроника-60».

Имитатор физического объекта, приведённый на рис. 8.2.3, представляет собой последовательное соединение инерционного (А1) и колебательного (А3-А5) звеньев, собранных на операционных усилителях (А2, А6, А7 – развязывающие усилители).

Вход « $f$ » предназначен для подачи возмущения

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (8.2.32)$$

С помощью ключей S1-S5 осуществляется изменение параметров ИФО, приводящее к существенному изменению его динамических характеристик ( $\bar{S}$  – ключ разомкнут, S – ключ замкнут).

В качестве аналого-цифрового преобразователя используется стандартный 10-разрядный преобразователь Ф7707/1 с коммутатором на 8 каналов. Одноканальный цифро-аналоговый преобразователь реализован на базе 10-разрядного ЦАП К572ПА1.

Программа микро-ЭВМ «Электроника-60», реализующая алгоритм п. 8.2.1 (для операции с фиксированной точкой и двух десятичных знаков после запятой), содержит 800 операторов Ассемблера и занимает объем 5.5 Кб.

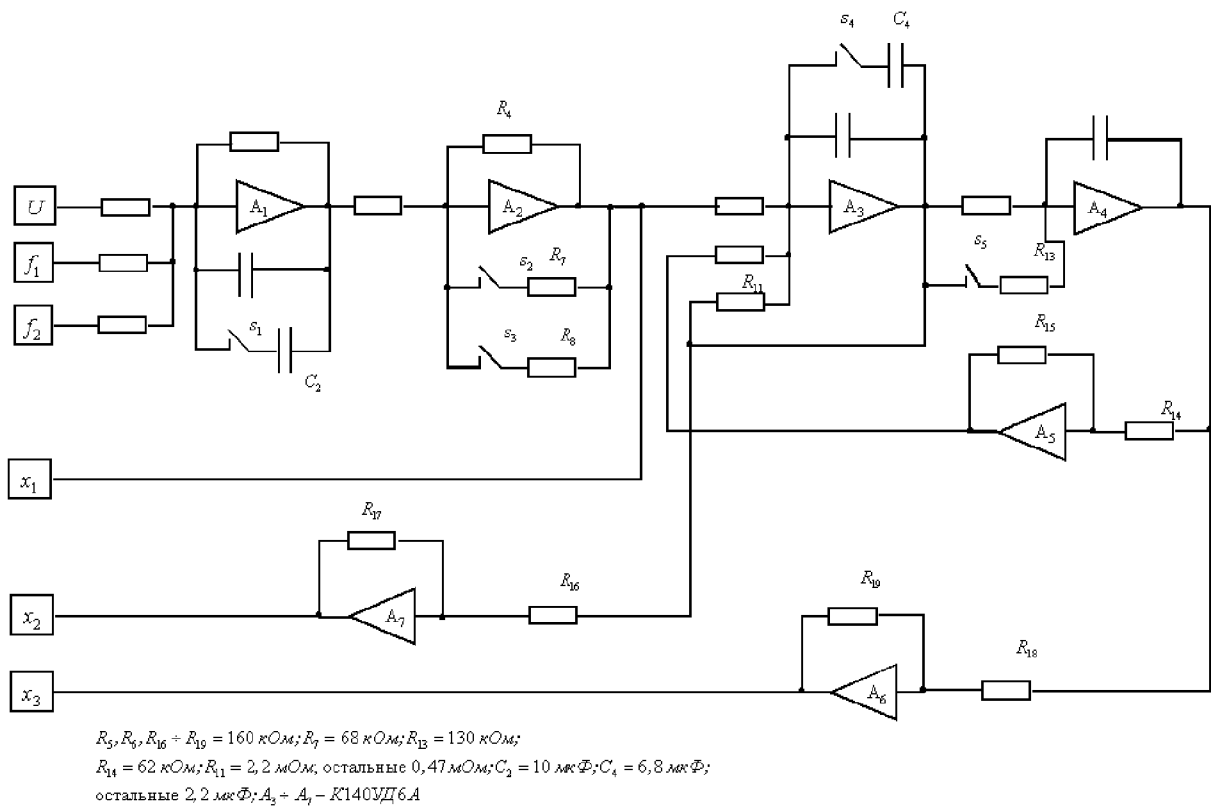


Рис. 8.2.3

#### 8.2.4. Экспериментальное исследование

Задача адаптивного управления ставится так: для объекта, приведённого на рис. 8.2.3, требуется определить параметры регулятора

$$u_{упр}(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \quad (8.2.33)$$

( $x_1, x_2, x_3$  доступны измерению), чтобы при действии возмущения (8.2.32) с

$$\bar{f} = 1 \quad (8.2.34)$$

установившееся значение по переменной  $x_3$  не превосходило заданного

$$|x_{3,уст}| \geq 1 [B] \quad (8.2.35)$$

на любом из возможных режимов движений объекта, определяемым соответствующим положением ключей.

Эксперимент проводился в 2 этапа.

Сначала определялись параметры регулятора  $c_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) при действии возмущения с параметром  $\bar{f} = 0,1$ , а затем прикладывалось возмущение с  $\bar{f} = 1$  и проверялось достижение цели (8.2.35) (одновременная подача испытательного сигнала и большого внешнего возмущения приводит к насыщению операционных усилителей).

Всего было проведено 3 серии экспериментов, общими для которых являются значения испытательных сигналов с частотами

$$\omega_1 = 0.16 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 0.34 \text{ рад/с}, \quad \omega_3 = 0.63 \text{ рад/с}, \quad (8.2.36)$$

подававшимися последовательно во времени.

В первой серии исследовалось решение поставленной задачи для различных режимов движения имитатора физического объекта (см. таблицу 8.2.1) при  $q_{33} = 0.3$ .

Таблица 8.2.1. Достижение цели управления

Режим	Ключи	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$x_{3,уст}$
1	$\bar{S}_1 S_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	- 0.4	- 0.4	+0.06	-0.73
2	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	- 6.86	- 3.97	+0.62	-0.74
3	$S_1 S_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	- 2.5	0	0	-0.75
4	$S_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 \bar{S}_5$	-12.9	- 2.06	+0.03	-0.75
5	$\bar{S}_1 S_3 S_4 \bar{S}_5$	- 0.51	- 1.1	+0.09	-0.65
6	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 S_4 \bar{S}_5$	- 4.15	-10.9	+0.63	-0.62
7	$S_1 S_3 S_4 \bar{S}_5$	+ 0.5	- 0.4	-0.33	-1
8	$S_1 \bar{S}_3 S_4 \bar{S}_5$	-14.3	- 8.61	+0.08	-0.74
9	$\bar{S}_1 S_3 \bar{S}_4 S_5$	- 1.5	- 1.63	+0.07	-0.77
10	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 S_5$	-15.8	-13.3	+0.18	-1
11	$S_1 S_3 \bar{S}_4 S_5$	- 1.5	- 0.5	-0.02	-0.73
12	$S_1 \bar{S}_3 \bar{S}_4 S_5$	-23.1	- 2.84	-0.45	-0.74
13	$\bar{S}_1 S_3 S_4 S_5$	- 4	- 5.27	-0.13	-0.75
14	$\bar{S}_1 \bar{S}_3 S_4 S_5$	-24.8	-28.4	-0.18	-0.75
15	$S_1 S_3 S_4 S_5$	0	- 3.01	0	-0.87
16	$S_1 \bar{S}_3 S_4 S_5$	-35.2	-16.6	-1.36	-0.3

Значение  $x_{3,уст}$  для различных режимов может быть уменьшено (таблица 8.2.2) при увеличении параметра  $q_{33}$ .

Таблица 8.2.2. Повышение точности регулирования

Режим	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$x_{3,уст}$	Примечание
2	-20.83	-13.6	+1.89	-0.24	$q_{33} = 1$

Время фильтрации  $T_{\bar{f}}$  определяется временем установления вынужденных колебаний в объекте управления при смене испытательных частот и составляет около 8 минут.

Процесс регулирования (достижение цели управления) после того как определены коэффициенты регулятора при действии возмущения типа «ступенька» с  $\bar{f} = 1$  показан на рис. 8.2.4 (испытательный сигнал не подаётся).

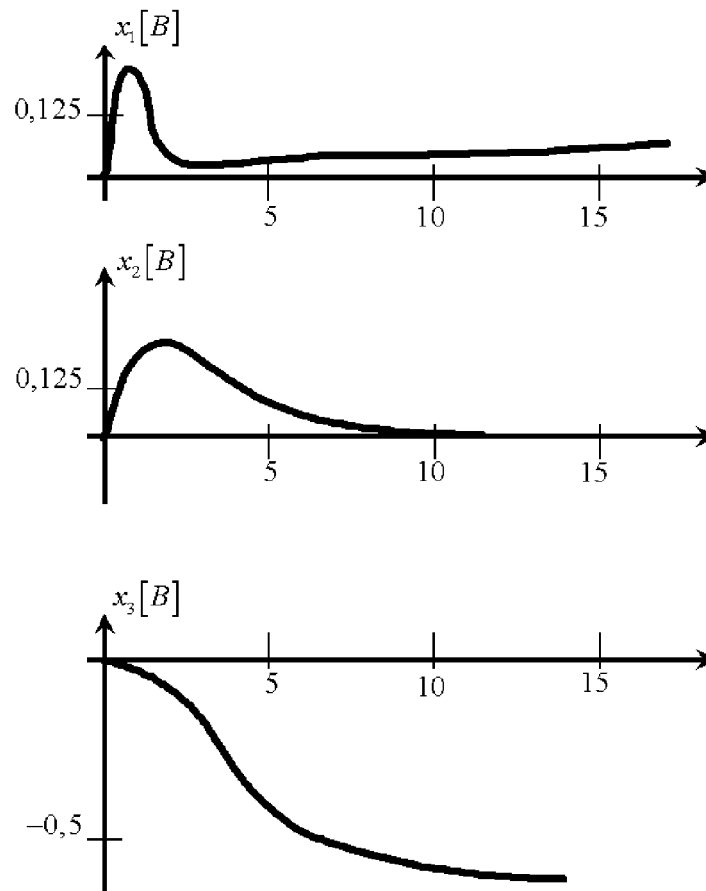


Рис. 8.2.4

Необходимость адаптации при изменении параметров ИФО исследовалась в третьей серии экспериментов. После определения коэффициентов регулятора для какого-либо режима происходило изменение параметров объекта управления, а адаптация к «новому» режиму не производилась (см. табл. 8.2.3).

Таблица 8.2.3. Регулирование без адаптации

Регулятор для режима	Переход на режим	$x_{3,уст}$	Примечание
1	2	-4.9	Не выполняется требование по точности стабилизации
3	4	-3.73	
5	6	-4.76	
9	10	-5	
11	12	-5.32	
7	8	—	неустойчива
13	14	—	
15	16	—	

Результаты экспериментов показывают, что при переходе на «новый» режим воз-

можно потеря устойчивости системы, замкнутой «старым» регулятором. После подстройки (таблица 8.2.1) обеспечивается устойчивость и заданная точность процесса регулирования.

### 8.3. Управление многорежимными объектами

#### 8.3.1. Объекты с известными моментами изменения режима

Многорежимный объект управления описывается уравнениями

$$y^{(n)} + d_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)} + \dots + d_1^{(i)} \dot{y} + d_0^{(i)} y = b_\gamma^{(i)} u^{(\gamma)} + \dots + b_1^{(i)} \dot{u} + b_0^{(i)} u + m_\alpha^{(i)} f^{(\alpha)} + \dots + m_1^{(i)} \dot{f} + m_0^{(i)} f, \quad (8.3.1)$$

заданными на интервалах

$$t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.3.2)$$

где  $t_{i-1}$  – заданный момент начала  $i$ -го режима, а  $t_i$  – момент его окончания ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Будем полагать, что в каждом из режимов объект полностью управляем и устойчив по управлению  $[b^{(i)}(s) \ (i = 1, 2, \dots) \text{ – гурвицевы полиномы}]$ , а

$$|f(t)| \leq f^*. \quad (8.3.3)$$

Пусть известны необходимые оценки чисел  $m_j^i \ (j = \overline{0, \alpha}, \ i = 1, 2, \dots)$ . Если объект (8.3.1) – самotoждественный, то, используя процедуру 8.1.1, построим многорежимный регулятор

$$g_{n-1}^{(i)} u^{(n-1)} + \dots + g_1^{(i)} \dot{u} + g_0^{(i)} u = r_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)} + \dots + r_1^{(i)} \dot{y} + r_0^{(i)} y, \quad t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.3.4)$$

который обеспечивает достижение цели управления

$$|y(t)| \leq y^*, \quad (8.3.5)$$

за время  $t_{рег}$ , если  $t_{рег} < t_i - t_{i-1}$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ .

Для несамотождественных объектов используем в каждом режиме частотный декларативный регулятор ЧДР-1. При этом возникают две особенности. Первая состоит в том, что длительности режимов  $T^{(i)} = t_i - t_{i-1}$  должны быть согласованы с временем  $t^{*(i)}$  достижения цели управления в каждом режиме.

Приведём условия такого согласования. Время достижения цели управления (время адаптации, время настройки) однорежимного объекта (8.1.1), определяемое выражением (8.1.15), зависит от реализовавшегося варианта параметров объекта, начальных условий, вида внешнего возмущения, и поэтому введём предельное время адаптации

$$t_{пред}^* = \max_{\xi \in \Xi, |f(t)| \leq f^*} t^*. \quad (8.3.6)$$



Для многорежимного объекта предельное время адаптации для каждого режима

$$t_{пред}^{*(i)} = \max_{\xi^i \in \Xi^i, |f(t)| \leq f^*} t^{*(i)}. \quad (8.3.7)$$

Таким образом, условия согласования имеют вид

$$T^{(i)} > t_{пред}^{*(i)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.3.8)$$

Вторая особенность применения ЧДР-1 для многорежимных объектов состоит в том, что к началу второго режима объект замкнут регулятором и описывается уравнениями (8.3.1), (8.3.4) при  $i = 1$ .

Определение 8.3.1. Многорежимный объект называется *самотождественным* в  $i$ -том режиме относительно регулятора  $i - 1$ -го режима, если система

$$d^{(i)}(s)y = b^{(i)}(s)u + m^{(i)}(s)f, \quad (8.3.9)$$

$$g^{(i-1)}(s)u = r^{(i-1)}(s)y, \quad (8.3.10)$$

асимптотически устойчива. ■

Далее будем полагать, что объект обладает указанным свойством для  $i = 2, 3, \dots$ . Рассмотрим указанные особенности более подробно.

### 8.3.2. Частотно-квазистационарные объекты\*

В связи с неконструктивным характером условия согласования (8.3.8) приведём проверяемый признак выполнения этого условия.

Заметим, что выражение (8.1.15) для времени адаптации доминирующим (определяющим) является время фильтрации  $T_{\phi}$ . Определим, аналогично (8.3.6), *предельное время фильтрации*

$$T_{\phi.пред}^{(i)} = \max_{\xi^i \in \Xi^i, |f(t)| \leq f^*} T_{\phi}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.3.11)$$

Определение 8.3.2. Многорежимный объект называется *частотно-квазистационарным*, если предельное время фильтрации (предельное время определения частотных параметров)  $T_{\phi.пред}^{(i)}$  в каждом  $i$ -том режиме не превышает длительности  $T^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) этого режима. ■

Частотная квазистационарность объекта служит признаком выполнения условия (8.3.8).

Правда, здесь есть опасность, что система (8.3.1), (8.3.4) с частотно-квазистационарным объектом может оказаться неустойчивой, хотя в каждом режиме (при каждом  $i = 1, 2, \dots$ ) корни её характеристического полинома имеют по построению отрицательные вещественные части. Эта неустойчивость хорошо известна в нестационарных системах (а система (8.3.1), (8.3.4) – частный случай нестационарной

системы), когда они трактуются как совокупность стационарных систем. При этом может оказаться, что исходная нестационарная система неустойчива несмотря на гурвицевость бесчисленного множества стационарных систем, порождаемых «замораживанием» параметров нестационарной системы.

Заметим, что при условии (8.3.8) подобная ситуация маловероятна, поскольку переходные процессы затухают к моменту окончания режима.

### 8.3.3. Частотный адаптивный регулятор ЧАР-3

В первом режиме работы объекта управление формируется препроцессором ЧДР - 1. Во втором и последующих режимах необходимо выделить частотные параметры объекта из частотных параметров объекта, замкнутого регулятором первого и других предыдущих режимов. Возможны два способа выделения: определение стабилизированных частотных параметров по формулам (5.2.31), (5.2.32) и использование частотных параметров входа и выхода, введённых определениями 5.2.5 и 5.2.6.

**Первый способ** реализуется путём введения в вычислитель частотных параметров ЧДР-1 дополнительного блока (блока-восстановителя  $\omega$ -индексов объекта), выходом которого служат стабилизированные частотные параметры объекта

$$r(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \operatorname{Re} \frac{\alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + j\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)}{[1 + \alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + j\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)] \cdot w_p^{(i-1)}(j\omega_k)} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (8.3.12)$$

$$i(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \operatorname{Im} \frac{\alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + j\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)}{[1 + \alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + j\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)] \cdot w_p^{(i-1)}(j\omega_k)} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots \quad (8.3.13)$$

Здесь  $\alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)$  и  $\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)$  – выходы фильтров Фурье в  $i$ -том режиме.

Они формируются аналогично (8.1.7), (8.1.8). При этом, в силу устойчивости объекта в  $i$ -том режиме, замкнутого регулятором, полученным для  $i - 1$ -го режима, полагаем  $\lambda = 0$ . Таким образом,

$$\alpha(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \alpha_k(T_{\phi}^{(i)}) = \frac{2}{T_{\phi}} \int_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1} + T_{\phi}^{(i)}} y(\tau) \sin \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}, \quad (8.3.14)$$

$$\beta(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \beta_k(T_{\phi}^{(i)}) = \frac{2}{T_{\phi}} \int_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1} + T_{\phi}^{(i)}} y(\tau) \cos \omega_k \tau \, d\tau \quad k = \overline{1, n}. \quad (8.3.15)$$

При **втором способе** в препроцессор ЧДР-1 вводится вычислитель частотных параметров входа объекта и тогда препроцессор принимает вид, показанный на рис. 8.3.1 (в схеме препроцессора опущен таймер и управляемые им ключи).

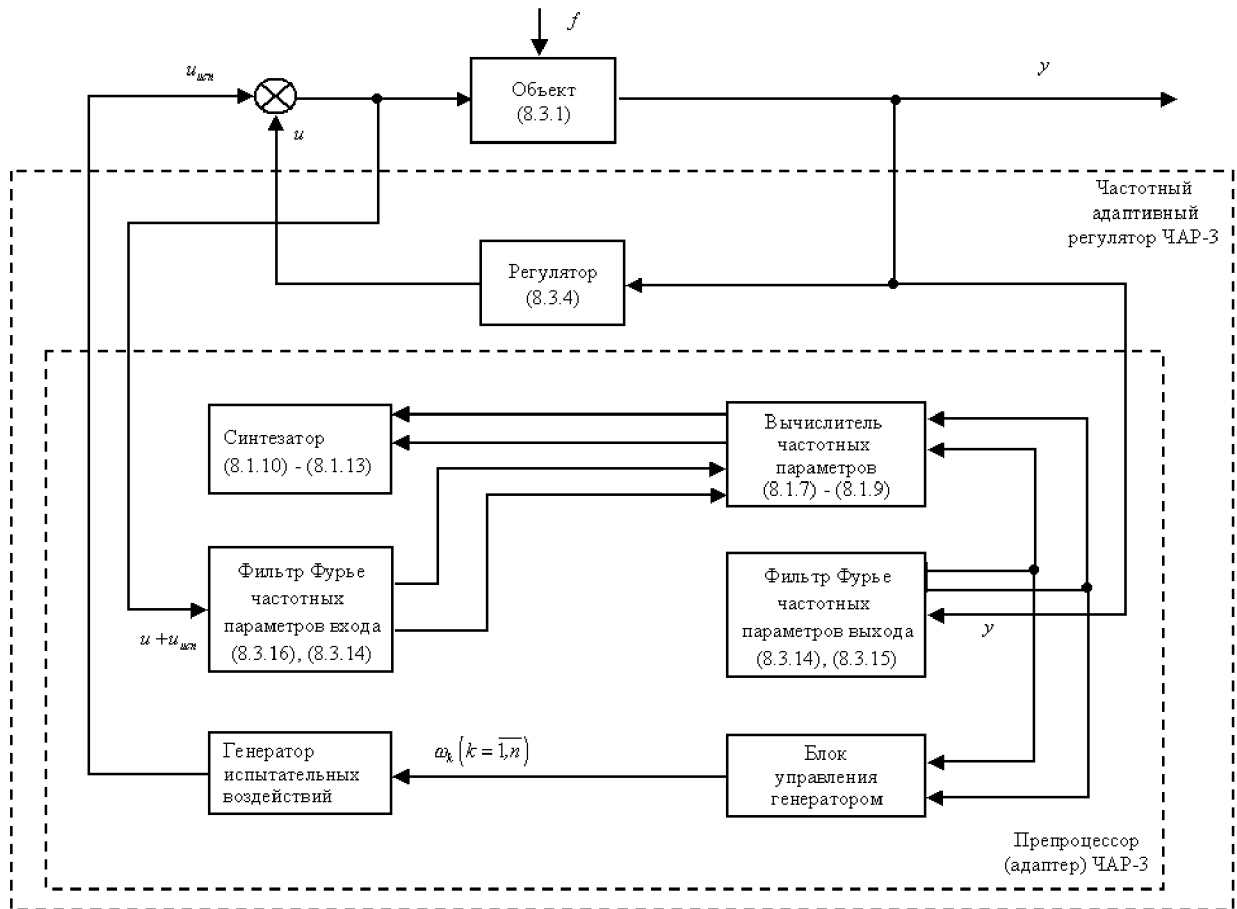


Рис. 8.3.1

Фильтр частотных параметров входа аналогичен фильтру частотных параметров выхода

$$\nu(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \nu_k(T_{\phi}^{(i)}) = \frac{2}{T_{\phi}} \int_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1} + T_{\phi}^{(i)}} u(\tau) \sin \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (8.3.16)$$

$$\gamma(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \gamma_k(T_{\phi}^{(i)}) = \frac{2}{T_{\phi}} \int_{t'_{i-1}}^{t'_{i-1} + T_{\phi}^{(i)}} u(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots \quad (8.3.17)$$

Вычислитель частотных параметров формирует в соответствии с (5.2.43)

$$r^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \frac{\nu_k(T_{\phi}^{(i)}) \alpha_k(T_{\phi}^{(i)}) + \gamma_k(T_{\phi}^{(i)}) \beta_k(T_{\phi}^{(i)})}{\nu_k^2(T_{\phi}^{(i)}) + \gamma_k^2(T_{\phi}^{(i)})} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (8.3.18)$$

$$i^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \frac{\nu_k(T_{\phi}^{(i)}) \beta_k(T_{\phi}^{(i)}) - \gamma_k(T_{\phi}^{(i)}) \alpha_k(T_{\phi}^{(i)})}{\nu_k^2(T_{\phi}^{(i)}) + \gamma_k^2(T_{\phi}^{(i)})} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots \quad (8.3.19)$$

8.3.4. Объекты с неизвестными моментами изменения режима

Пусть при неизвестных моментах  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) изменения режима известны оценки длительности режимов

$$\check{T}^i \leq T^i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.3.20)$$

где  $\check{T}^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) – заданные числа.

Определим моменты изменения режима регулятора

$$t_{i_p} = i_p T^* \quad i_p = 1, 2, \dots, \quad (8.3.21)$$

где  $T^* = \min \{T^1, T^2, \dots\}$  – наименьшая продолжительность режимов объекта.

Это означает, что регулятор работает циклически (с периодом  $T^*$ ) и описывается уравнением

$$\begin{aligned} &g_{n-1}(i_p T^*) u^{(n-1)} + \dots + g_1(i_p T^*) \dot{u} + g_0(i_p T^*) u = \\ &= r_{n-1}(i_p T^*) y^{(n-1)} + \dots + r_1(i_p T^*) \dot{y} + r_0(i_p T^*) y \quad i_p = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.3.22)$$

где  $g_i(i_p T^*)$ ,  $r_j(i_p T^*)$   $i = \overline{0, n-1}$   $j = \overline{0, n-1}$  – параметры регулятора в  $i_p$ -том ( $i_p = 1, 2, \dots$ ) режиме его работы. Естественно, что для периода  $T^*$  должно выполняться условие согласования (8.3.8)

$$T^* > t_{np\epsilon d}^{*(i)} \quad i = 1, 2, \dots. \quad (8.3.23)$$

Приведём ситуацию, когда это условие выполняется. Применим описанный адаптивный регулятор для стабилизации нестационарного объекта

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + d_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + d_1(t)\dot{y} + d_0(t)y = \\ &= b_\gamma(t)u^{(\gamma)} + \dots + b_1(t)\dot{u} + b_0(t)u + m_\alpha(t)f^{(\alpha)} + \dots + m_1(t)\dot{f} + m_0(t)f, \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

параметры которого изменяются достаточно медленно (например, при «старении» элементов объекта). Пусть, в частности, скорость изменения параметров удовлетворяет неравенствам

$$\left| \dot{d}_i(t) \right| \leq \frac{\varepsilon_\phi}{T^*}, \quad \left| \dot{b}_j(t) \right| \leq \frac{\varepsilon_\phi}{T^*} \quad i = \overline{0, n-1} \quad j = \overline{0, \gamma}, \quad (8.3.25)$$

где  $\varepsilon_\phi$  – допустимая величина погрешности фильтрации (определения) частотных параметров, а  $T^*$  – достаточно большое число.

Для такого объекта, который будем называть *объектом с дрейфующими параметрами*, условие (8.3.23) выполняется при соответствующем выборе числа  $T^*$ . Кроме того, если выполняются неравенства (8.3.25), то объект (8.3.24) можно интерпретировать как многорежимный с моментами изменения режима  $t_1 = T^*$ ,  $t_2 = 2T^*$ ,  $t_3 = 3T^*$ ,  $\dots$ .

Такой многорежимный объект почти наверное удовлетворяет определению 8.3.1, если погрешность определения его параметров по частотным параметрам не превышает  $\varepsilon_\phi$ .

### 8.3.5. Объекты первого вида с регулятором ЧАР-4

Многорежимный объект первого вида описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(i)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(i)}(u + f), \quad z = \mathbf{e}^{(i)'}\mathbf{x}, \quad t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.3.26)$$

Пусть при неизвестных моментах  $t_i$  перехода с режима на режим известны нижние границы длительности режимов –  $\underline{T}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Адаптивный регулятор ЧАР-4 построим на основе частотного декларативного регулятора ЧДР-2, работающего в циклическом режиме. ЧАР-4 формирует управление

$$u = \mathbf{c}'(i_p T^*)\mathbf{x}, \quad (i_p - 1)T^* \leq t < i_p T^* \quad i_p = 2, 3, \dots \quad (8.3.27)$$

Предполагается, что это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(i)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(i)}(u + f), \quad u = \mathbf{c}'(t_{i-2})\mathbf{x} = \mathbf{c}^{(i-1)'}\mathbf{x}, \quad t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 2, 3, \dots \quad (8.3.28)$$

В вычислитель частотных параметров ЧДР-2 включается дополнительный блок, преобразующий частотные параметры выходов объекта в его частотные параметры. Алгоритм работы этого блока определяется выражением (5.1.44) и имеет вид

$$r_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) = \frac{\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) [1 + \mathbf{c}^{(i-1)'}\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)] - \beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) [\mathbf{c}^{(i-1)'}\beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]}{[1 + \mathbf{c}^{(i-1)'}\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]^2 + [\mathbf{c}^{(i-1)'}\beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]^2} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (8.3.29)$$

$$i_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) = \frac{\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) [\mathbf{c}^{(i-1)'}\beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)] + \beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k) [1 + \mathbf{c}^{(i-1)'}\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]}{[1 + \mathbf{c}^{(i-1)'}\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]^2 + [\mathbf{c}^{(i-1)'}\beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)]^2} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (8.3.30)$$

где  $\alpha_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)$ ,  $\beta_x(T_\phi^{(i)}, \omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) –  $n$ -мерные вектора выходов фильтров Фурье в  $i$ -том режиме.

Примечание 8.3.1. Регулятор ЧАР-4 (также как и ЧАР-3) может не обеспечивать выполнения требования (8.2.3) к точности в начале каждого режима, когда идёт процесс фильтрации частотных параметров объекта в этих режимах, расчёт и формирование управления (8.3.27). ■

## 8.4. Система с эталонной моделью (следящие системы)

### 8.4.1. Структурная схема

Вновь рассмотрим многорежимный объект (8.3.1)

$$y^{(n)} + d_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)} + \dots + d_1^{(i)} \dot{y} + d_0^{(i)} y = b_\gamma^{(i)} u^{(\gamma)} + \dots + b_1^{(i)} \dot{u} + b_0^{(i)} u + m_\alpha^{(i)} f^{(\alpha)} + \dots + m_1^{(i)} \dot{f} + m_0^{(i)} f, \quad (8.4.1)$$

заданный на интервалах

$$t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8.4.2)$$

Требуется найти регулятор

$$\begin{aligned} & g_{n-1} (i_p T^*) u^{(n-1)} + \dots + g_1 (i_p T^*) \dot{u} + g_0 (i_p T^*) u = \\ & = r_{n-1} (i_p T^*) y^{(n-1)} + \dots + r_1 (i_p T^*) \dot{y} + r_0 (i_p T^*) y + \\ & + r_{n-1}^n (i_p T^*) v^{(n-1)} + \dots + r_1^n (i_p T^*) \dot{v} + r_0^n (i_p T^*) v \end{aligned} \quad \begin{aligned} & (i_p - 1)T^* \leq t \leq i_p T^* \\ & i_p = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

при котором выход объекта приближается к желаемому с заданной погрешностью

$$|y(t) - y_{жс}(t)| \leq y^*, \quad (8.4.4)$$

при этом известна связь желаемого движения  $y_{жс}(t)$  с задающим воздействием  $v(t)$

$$y_{жс} = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)} v, \quad t > t_0. \quad (8.4.5)$$

Пусть, как и для адаптивных систем регулирования, допускается нарушение целевого условия (8.4.4) в начале каждого из режимов объекта. Положим также, для простоты, что  $f(t)$  – ступенчатое внешнее воздействие, а коэффициент  $\psi_0^m$  модели (8.4.5) удовлетворяет условию согласования

$$\psi_0^m > \frac{m_0^i \bar{f}}{y^*}, \quad (8.4.6)$$

при котором целевое условие (8.4.4) выполняется при  $y_{жс}(t) = 0$ .

Исследуем возможность использования регулятора, построенного в п. 8.1.6 для однорежимного объекта, в многорежимном варианте. В связи с этим представим выход объекта (8.4.1) как

$$y(t) = y^v(t) = y^f(t) = y^{ucn}(t), \quad (8.4.7)$$

где  $y^v(t)$  – реакция (объекта с регулятором) на задающее воздействие  $v(t)$ ,  $y^f(t)$  – составляющая выходного сигнала, зависящая от внешнего возмущения,  $y^{ucn}(t)$  – реакция на испытательное воздействие.

Последние две функции обычно соизмеримы, а регулирование должно осуществляться так, что

$$y^* > \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |y^f(t)| \geq 2 \div 3 \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |y^{ucn}(t)| \quad i = 1, 2, \dots. \quad (8.4.8)$$

Функция  $y^v(t) \approx y_{жс}(t)$ , как правило, несоизмеримо больше величины  $y^*$ , и поэтому в регуляторе для однорежимного объекта полагалось  $v(t) = 0$  до момента окончания фильтрации частотных параметров. Если же  $v(t) \neq 0$ , то процесс фильтрации сильно затягивается, так как функция  $y^v(t)$ , которая выступает при фильтрации как помеха, несоизмеримо больше полезного сигнала  $y^{ucn}(t)$ . По этим причинам регулятор для однорежимного объекта непригоден для многорежимного.

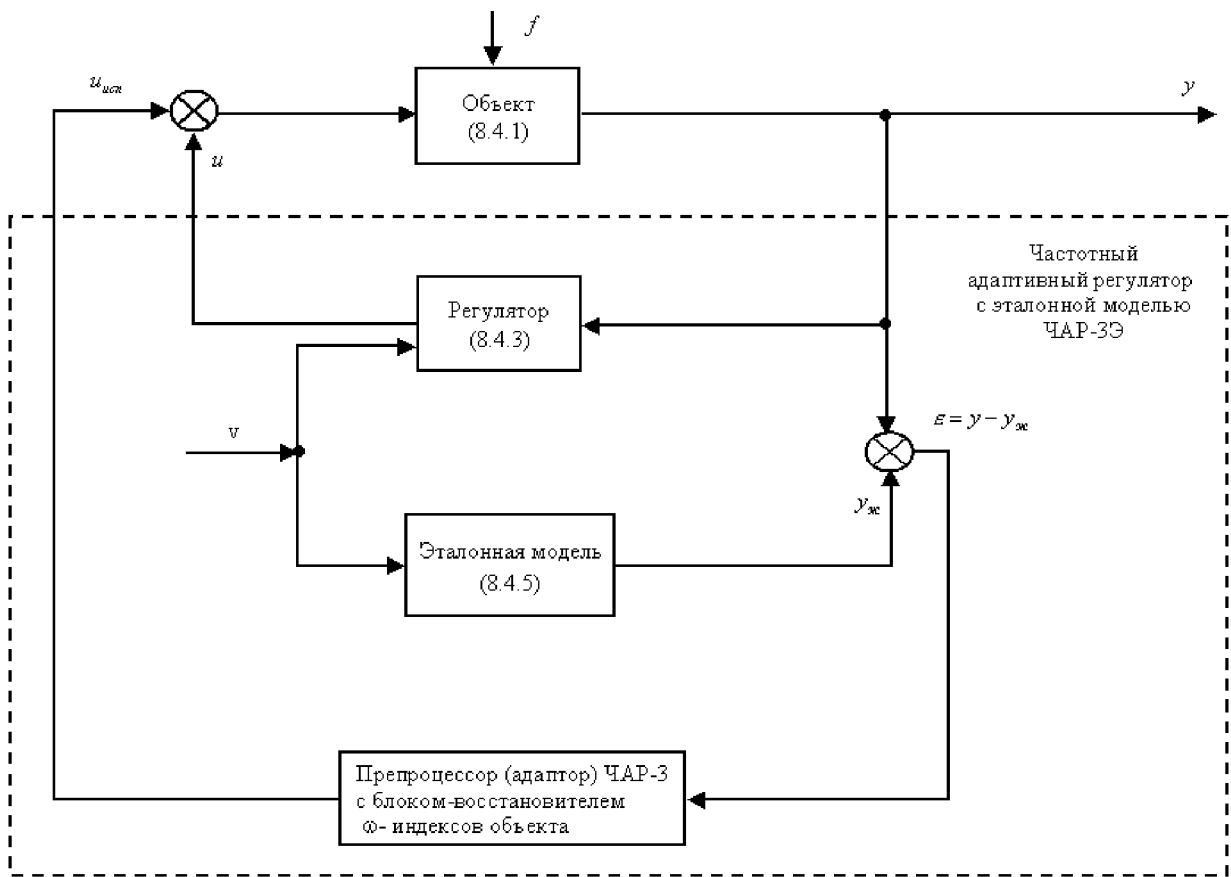


Рис. 8.4.1

Для сокращения времени фильтрации при  $v \neq 0$  будем вычитать из выходного сигнала объекта (8.4.7) основную его составляющую  $y_{жс}(t)$ , которую сформируем с помощью эталонной модели.

Эталонная модель – это физически реализованная эталонная модель замкнутой системы с передаточной функцией  $w_m(s)$ . На рис. 8.4.1 приведена структурная схема адаптивной следящей системы с эталонной моделью. В адаптере используется блок-восстановитель  $\omega$ -индексов, который осуществляет вычисления по формулам (8.3.12), (8.3.13)

Она состоит из объекта и частотного адаптивного регулятора с эталонной моделью – ЧАР-3Э.

#### 8.4.2. Первый режим работы объекта

В первом режиме работы регулятора ( $0 \leq t < T^*$ ) задающее воздействие не подается ( $v = 0$ ) на объект и эталонную модель до окончания фильтрации и решения уравнений (8.1.10), (8.1.11), в которых

$$\psi_l = \psi_l^m \quad l = \overline{0, 2n - \gamma - 1}. \quad (8.4.9)$$

После подключения регулятора

$$\begin{aligned} & g_{n-1}(T^*)u^{(n-1)} + \dots + g_1(T^*)\dot{u} + g_0(T^*)u = \\ & = r_{n-1}(T^*)y^{(n-1)} + \dots + r_1(T^*)\dot{y} + r_0(T^*)y + \quad T_{n.z} + T_{\phi} + T_p \leq t < T^*, \quad (8.4.10) \\ & + l_{n-1}^m v^{(n-1)} + \dots + l_1^m \dot{v} + l_0^m v \end{aligned}$$

выход объекта

$$|y(t)| \leq y^*, \quad (t^* \leq t < T^*). \quad (8.4.11)$$

Пусть второй режим регулятора ( $T^* \leq t < 2T^*$ ), когда к нему и эталонной модели приложено  $v \neq 0$ , полностью укладывается в первый режим работы объекта ( $2T^* < t_1$ ).

Найдём выражение для рассогласования сигналов  $y(t)$  и  $y_{ж}(t)$  на интервале  $[T^*, T^* + T_{n.z} + T_{\phi}]$  фильтрации.

Запишем уравнения (8.4.1), (8.4.10) в компактной форме

$$d^{(1)}(s)y = b^{(1)}(s)u + m^{(1)}(s)f + b^{(1)}(s)u_{ucn}, \quad (8.4.12)$$

$$g(T^*, s)u = r(T^*, s)y + l_m(s)v. \quad (8.4.13)$$

Заменяем в этих уравнениях  $y = \varepsilon + y_{ж}$  и получим

$$\begin{aligned} d^{(1)}(s)\varepsilon &= b^{(1)}(s)u - d^{(1)}(s)y_{ж} + m^{(1)}(s)f + b^{(1)}(s)u_{ucn}, \\ g(T^*, s)u &= r(T^*, s)\varepsilon + r(T^*, s)y_{ж} + l_m(s)v. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{b^{(1)}(s)l_m(s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}v - y_{ж} + \\ &+ \frac{b^{(1)}(s)g(T^*, s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}u_{ucn} + \frac{m^{(1)}(s)g(T^*, s)}{d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s)}f. \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

По построению

$$d^{(1)}(s)g(T^*, s) - b^{(1)}(s)r(T^*, s) = b^{(1)}(s)\psi_m(s), \quad (8.4.15)$$

$$g(T^*, s) = b^{(1)}(s), \quad (8.4.16)$$

и поэтому

$$\varepsilon = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)}v - y_{ж} + \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_m(s)}u_{ucn} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_m(s)}f. \quad (8.4.17)$$

С учётом (8.4.5) получим

$$\varepsilon = \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_m(s)}u_{ucn} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_m(s)}f. \quad (8.4.18)$$

После окончания фильтрации  $u_{ucn} = 0$ , и эта ошибка удовлетворяет требованию (8.4.4) к точности.



Сравним (4.8.18) с выражением для выхода объекта в системе (8.4.12), (8.4.13) при  $v = 0$

$$y = \frac{b^{(1)}(s)}{\psi_m(s)} u_{ucn} + \frac{m^{(1)}(s)}{\psi_m(s)} f. \quad (8.4.19)$$

Таким образом, использование эталонной подели позволяет рассматривать следящую систему как систему регулирования. Поэтому во втором режиме регулятора получим его параметры

$$g_i(2T^*) = g_i(T^*), \quad r_i(2T^*) = r_i(T^*) \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (8.4.20)$$

### 8.4.3. Второй режим работы объекта

Пусть второй режим работы объекта начался в начале третьего режима регулятора  $t_2 = 2T^* + \varepsilon_m$ , где  $\varepsilon_m$  – некоторое достаточно малое число,  $\varepsilon_m < T_{n,2}$ .

Выражение (8.4.14) для рассогласования сигналов эталонной модели и объекта принимает теперь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{b^{(2)}(s)l_m(s)}{d^{(2)}(s)g(T^*, s) - b^{(2)}(s)r(T^*, s)} v - y_{ж} + \\ & + \frac{b^{(2)}(s)g(T^*, s)}{d^{(2)}(s)g(T^*, s) - b^{(2)}(s)r(T^*, s)} u_{ucn} + \frac{m^{(2)}(s)g(T^*, s)}{d^{(2)}(s)g(T^*, s) - b^{(2)}(s)r(T^*, s)} f, \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

где  $d^{(2)}(s)$ ,  $b^{(2)}(s)$ ,  $m^{(2)}(s)$  – операторы объекта (8.4.1) во втором режиме. В этом режиме модальное тождество, аналогичное (8.4.15), нарушается до окончания фильтрации и расчёта нового управления, и поэтому

$$\varepsilon_v = y_{ж} - \frac{b^{(2)}(s)l_m(s)}{d^{(2)}(s)g(T^*, s) - b^{(2)}(s)r(T^*, s)} v \neq 0. \quad (8.4.22)$$

Помеха  $\varepsilon_v$  увеличивает время фильтрации, однако она меньше функции  $y_{ж}(t)$ , особенно если второй режим не очень существенно отличается от первого.

Запишем передаточную функцию, связывающую в (8.4.21) переменные  $\varepsilon$  и  $u_{ucn}$  как

$$\frac{b^{(2)}(s)g(T^*, s)}{d^{(2)}(s)g(T^*, s) - b^{(2)}(s)r(T^*, s)} = \frac{w^{(2)}(s)}{1 - w^{(2)}(s)w_p(T^*, s)} = w_{зам}^{(2)}(s).$$

В блоке-восстановителе вычисляются, по формулам (8.3.12), (8.3.13), параметры объекта. При этом используются оценки  $\alpha^{(2)}(T_{\phi}^{(2)}, \omega_k)$ ,  $\beta^{(2)}(T_{\phi}^{(2)}, \omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) передаточной функции

$$w_{зам}^{(2)}(j\omega_k) = \alpha^{(2)}(T_{\phi}^{(2)}, \omega_k) + j\beta^{(2)}(T_{\phi}^{(2)}, \omega_k).$$

В третьем режиме работы регулятора его параметры  $g_i(3T^*)$  и  $r_i(3T^*)$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) находятся путём решения уравнений (8.1.10), (8.1.11) с коэффициентами (8.4.9) и т.д.

Применим ЧАР-3Э для построения следящей системы с объектом (8.3.24) с дрейфующими параметрами. В этом случае откажемся от циклической работы регулятора и будем определять моменты его перехода с режима на режим следующим образом.

Пусть задано число  $\varepsilon_v^*$ , определяющее допустимое превышение числа  $y^*$  в процессе фильтрации.

Моменты  $t_p^i$  определим как моменты, когда выход объекта достигает предельной величины

$$|y(t_p^i)| = y^* + \varepsilon_v^*. \quad (8.4.23)$$

Число  $\varepsilon_v^*$  определяет допустимое рассогласование выходов объекта и эталонной модели при  $f = 0$ . Кроме того, оно определяет время фильтрации в каждом режиме, поскольку обычно  $\varepsilon_v^* > y^*$ .

## Заключение к главе 8

Подведём итоги этой главы.

1. Построены алгоритмы работы частотного декларативного регулятора (ЧДР-1) для объектов второго вида, устойчивых по управлению.
2. Получена итерационная процедура 8.1.2, позволяющая применять регулятор ЧДР-1 для управления объектами с неизвестными структурными показателями объекта.
3. Построены алгоритмы работы частотного декларативного регулятора (ЧДР-2) для объектов первого вида. Этот алгоритм может быть дополнен процедурой 8.2.1, учитывающей неопределённость структурных показателей.
4. Проведены экспериментальные исследования ЧДР-2, реализованного на базе микро-ЭВМ «Электроника-60». Объектом управления служила схема на операционных усилителях, описываемая линейными уравнениями в трёхмерном пространстве состояний.
5. Сформированы алгоритмы работы частотного адаптивного регулятора (ЧАР-3) для управления многорежимными объектами второго вида, устойчивых по управлению.
6. Сформированы алгоритмы работы регулятора ЧАР-4 для объектов первого вида.
7. Предложен алгоритм управления с эталонной моделью, предназначенный для слежения с заданной точностью в системах с многорежимными объектами второго вида.

---

## Часть 4. Многомерные системы

Результаты второй и третьей частей развиваются здесь на многомерный случай, когда система имеет более одной регулируемой либо управляющей переменных.

Исследование, как и в одномерном случае, осуществляется в три этапа: методы пространства состояний – аналитический синтез – метод частотных параметров, которые приводят к частотному управлению. При этом рассматривается, в основном, случай, когда число регулируемых переменных совпадает с числом управляющих. Это вызвано тем, что лишь в этом случае можно установить связь целей управления в методах пространства состояний с точностью регулирования и на этой основе построить процедуры аналитического синтеза.

Цель этой части:

- аналитический синтез регуляторов при известных коэффициентах уравнений объекта,
- анализ грубости, который значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем,
- метод частотных параметров для построения частотного управления самotoждественными и несамotoждественными объектами.

## Глава 9. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта

Эта глава посвящена первым двум этапам указанной выше триады: методам пространства состояний и аналитическому синтезу, рассмотренным для одномерного случая в главах 3 и 4.

Если процедуры АКОР легко обобщаются для объектов с векторным управлением, то развитие модального управления для объектов второго вида является уже не столь простым.

Вторая проблема связана с установлением связи между коэффициентами функционала оптимизации в процедуре АКОР и коэффициентами желаемого полинома в модальном управлении с точностью и качеством регулирования.

Таким образом, цель этой главы:

- постановка и решение задачи модального управления многомерными объектами второго вида,
- определение структуры и параметров желаемого полинома замкнутой системы, при которых модальное управление реализуемо и обеспечивает требуемую точность регулирования и слежения при ограниченных внешних возмущениях,
- установление связи между структурой и параметрами функционала оптимизации в задаче АКОР с качеством и точностью синтезированной системы и построение на этой основе процедур синтеза регуляторов для объектов первого и второго видов.

### 9.1. Модальное управление

#### 9.1.1. Постановка задачи

Пусть имеется полностью управляемый и полностью наблюдаемый многомерный объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad (9.1.1)$$

где  $\mathbf{u}(t)$  –  $m$ -мерный вектор управлений,  $\mathbf{y}(t)$  –  $r$ -мерный вектор измеряемых переменных,  $A$ ,  $B$  и  $D$  – заданные матрицы чисел размеров  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $r \times n$  соответственно.

Уравнение многомерного регулятора запишем в виде

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad (9.1.2)$$

где  $\mathbf{x}_p(t)$  –  $n_p$ -мерный вектор переменных состояния регулятора,  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $D_p$  и  $F_p$  – матрицы чисел размеров  $n_p \times n_p$ ,  $n_p \times r$ ,  $m \times n_p$  и  $m \times r$ .

Характеристический полином системы (9.1.1), (9.1.2)

$$d^u(s) = \det \left( \begin{array}{cc|cc} E_n s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -D_p & -F_p \\ \hline 0 & 0 & E_{n_p-1} s - A_p & -B_p \\ -D & 0 & 0 & E_r \end{array} \right) = \quad (9.1.3)$$

$$= s^{n+n_p} + d_{n+n_p-1}^u s^{n+n_p-1} + \dots + d_1^u s + d_0.$$

**Задача 9.1.1. (Задача модального управления многомерными объектами)**

Для объекта (9.1.1) найти матрицы  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $D_p$  и  $F_p$  регулятора (9.1.2) такие, чтобы характеристический полином (9.1.3) имел заданные корни  $s_i^*$  ( $i = \overline{1, n+n_p}$ ).

■

Примечание 9.1.1. Размерность  $n_p$  вектора состояний регулятора часто неизвестна, поэтому зададимся числом корней полинома (9.1.3), равным  $2n - m$ . Желаемый полином системы имеет вид

$$\delta(s) = \prod_{i=1}^{2n-m} (s - s_i^*) = \sum_{i=0}^{2n-m} \delta_i s^i. \quad (9.1.4)$$

■

Примечание 9.1.2. Решение задачи 9.1.1, в отличие от задачи 3.1.1 для одномерных систем, не единственно. Действительно, пусть все переменные состояния объекта (9.1.1) измеряются ( $D = E_n$ ), а размерность  $n_p = 0$ . Тогда уравнения искомого регулятора примут вид

$$\mathbf{u} = C' \mathbf{x}, \quad (9.1.5)$$

где  $C'$  ( $C' = F_p$ ) – искомая матрица размеров  $m \times n$ . Найдём матрицу  $M$  размеров  $m \times n$  такую, чтобы система

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + BM)\mathbf{x} + B_{[1]}u_1, \quad (9.1.6)$$

(где  $B_{[1]}$  – первый столбец матрицы  $B$ ,  $u_1$  – первая компонента вектора  $\mathbf{u}$ ) была полностью управляема.

Используем процедуру 3.4.1 и найдём управление

$$u_1 = C'_{[1]} \mathbf{x}, \quad (9.1.7)$$

вектор-строка  $C'_{[1]}$  которого разрешает задачу (9.1.1), а искомая матрица

$$C' = M + \begin{pmatrix} C'_{[1]} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.1.8)$$

Существует множество матриц  $M$ , для которых «объект» (9.1.6) полностью управляем. Каждой из матриц этого множества соответствует свой вектор  $\mathbf{c}'_{[1]}$  и своя матрица  $C'$ .

Неоднозначность решения задачи модального управления многомерных систем будем далее использовать для достижения требуемой точности стабилизации или слежения при заданных корнях характеристического полинома системы. ■

### 9.1.2. Подход к решению

Решение задачи 9.1.1 в одномерном случае, когда  $u$  и  $y$  – скаляры, состоит из трёх процедур: приведения объекта (9.1.1) в форме Коши к форме «вход-выход» (3.1.1), решения модального тождества (процедура 3.1.1) и приведения полученного регулятора (3.1.2) в форме «вход-выход» к форме Коши (9.1.2).

Первая из этих процедур не вызывает затруднений, так как передаточная функция объекта – это отношение полиномов формы «вход-выход»

$$y = \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{d}(Es - A)\mathbf{b}}{d(s)} = \frac{b(s)}{d(s)}. \quad (9.1.9)$$

Последнюю процедуру также легко осуществить.

В многомерном случае решение задачи модального управления также состоит из указанных трёх процедур. Однако теперь эти процедуры значительно усложняются.

Так, приведение уравнений (9.1.1) к форме *вход-выход* описано в приложении 9.П.2 (процедура 9.П.2). Результатом приведения является уравнение

$$\left[ D^{(\rho)}s^\rho + \dots + D^{(1)}s + D^{(0)} \right] \mathbf{y} = \left[ B^{(\gamma)}s^\gamma + \dots + B^{(1)}s + B^{(0)} \right] \mathbf{u}, \quad (9.1.10)$$

где  $D^{(i)}$ ,  $B^{(j)}$  ( $i = \overline{0, \rho}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) – матрицы чисел размеров  $r \times r$ ,  $r \times m$ .

Запишем его в более компактной форме

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u}, \quad (9.1.11)$$

где  $D(s)$  и  $B(s)$  – полиномиальные матрицы

$$D(s) = \sum_{i=0}^{\rho} D^{(i)}s^i, \quad B(s) = \sum_{j=0}^{\gamma} B^{(j)}s^j. \quad (9.1.12)$$

Наряду с формой «вход-выход» (9.1.10) ниже широко используется описание объекта в *канонической форме Лагранжа*. В этой форме уравнения объекта имеют вид

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad (9.1.13)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  –  $m$ -мерный вектор неполного состояния объекта

$$P(s) = \sum_{i=0}^{\mu} P^{(i)}s^i, \quad N(s) = \sum_{j=0}^{\nu} N^{(j)}s^j, \quad (9.1.14)$$

$P^{(i)}$ ,  $N^{(j)}$  ( $i = \overline{0, \mu}$ ,  $j = \overline{0, \nu}$ ) – матрицы чисел размеров  $m \times m$ ,  $r \times m$ .

Переход от уравнений (9.1.1) в форме Коши к уравнениям (9.1.13) приведён в приложении 9.П.1 (процедура 9.П.1).

Уравнения регулятора (9.1.2) также можно записать в этих двух формах.

В форме «вход-выход» регулятор записывается как

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}, \quad (9.1.15)$$

где полиномиальные матрицы

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\rho_p} G^{(i)} s^i, \quad R(s) = \sum_{j=0}^{\gamma_p} R^{(j)} s^j. \quad (9.1.16)$$

Уравнения (9.1.2) в канонической форме Лагранжа имеют вид

$$P_p(s)\mathbf{q}_p = \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = N_p(s)\mathbf{q}_p, \quad (9.1.17)$$

где  $\mathbf{q}_p(t)$  –  $r$ -мерный вектор неполного состояния регулятора,

$$P_p(s) = \sum_{i=0}^{\mu_p} P_p^{(i)} s^i, \quad N_p(s) = \sum_{j=0}^{\nu_p} N_p^{(j)} s^j. \quad (9.1.18)$$

Обратный переход от уравнений регулятора в форме «вход-выход» и канонической формы Лагранжа к уравнениям в форме Коши приведён в приложении 9.П.3.

Из приведённых форм описания объекта и регулятора можно сформировать четыре варианта моделей системы:

**1-й вариант:** объект и регулятор описываются в форме «вход-выход» (вариант ВВ-ВВ)

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u}, \quad G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}, \quad (9.1.19)$$

**2-й вариант:** объект в канонической форме Лагранжа, а регулятор в форме «вход-выход» (вариант КЛ-ВВ)

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}, \quad (9.1.20)$$

**3-й вариант:** объект в форме «вход-выход», а регулятор в канонической форме Лагранжа (вариант ВВ-КЛ)

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u}, \quad P_p(s)\mathbf{q}_p = \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = N_p(s)\mathbf{q}_p, \quad (9.1.21)$$

**4-й вариант:** объект и регулятор в канонической форме Лагранжа (вариант КЛ-КЛ)

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad P_p(s)\mathbf{q}_p = \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = N_p(s)\mathbf{q}_p. \quad (9.1.22)$$

### 9.1.3. Матричное модальное тождество

Построим модальное тождество, решение которого составляет центральную процедуру в решении задачи 9.1.1.

Рассмотрим вначале второй вариант (9.1.20) модели системы (9.1.1), (9.1.2)

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}. \quad (9.1.23)$$

Используем формулу для определителя блочной матрицы и получим характеристический полином системы (9.1.23)

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \begin{pmatrix} P(s) & -E \\ -R(s)N(s) & G(s) \end{pmatrix} = \det P(s) \det [G(s) - R(s)N(s)P^{-1}(s)] = \\ &= \det [G(s)P(s) - R(s)N(s)]. \end{aligned} \quad (9.1.24)$$

Как и в одномерном случае сформируем, используя заданные корни  $s_i^*$  ( $i = \overline{1, 2n-m}$ ), желаемый полином (9.1.4).

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях полиномов  $d^u(s)$  и  $\delta(s)$  и получим систему алгебраических уравнений для определения параметров  $g_{ij}^{(k)}$ ,  $r_{il}^{(p)}$  ( $i, j = \overline{1, m}$ ,  $l = \overline{1, r}$ ,  $k = \overline{1, \mu_p}$ ,  $p = \overline{1, \nu_p}$ ) регулятора. Эти алгебраические уравнения имеют множество решений. Поэтому построим  $m \times m$  полиномиальную матрицу  $\Delta(s)$ , определитель которой

$$\det \Delta(s) = \delta(s). \quad (9.1.25)$$

Будем искать матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора из *матричного модального тождества*

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \Delta(s), \quad (9.1.26)$$

которое является матричным аналогом соотношения (3.1.20), разрешающего задачу модального управления одномерных систем.

Заметим, что для первого варианта модели системы

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u}, \quad G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y},$$

характеристический полином

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \begin{pmatrix} D(s) & -B(s) \\ -R(s) & G(s) \end{pmatrix} = \det D(s) \det [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)] = \\ &= \det [G(s)D(s) - R(s)\tilde{D}(s)B(s)] \cdot \left[ \frac{1}{\det D(s)} \right]^{m-1}. \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

Он представляет собой отношение полиномов, которые делятся нацело. Такая форма описания характеристического полинома системы (9.1.1), (9.1.2) менее удобна по сравнению с (9.1.24), и поэтому далее ограничимся последней.

Для того чтобы описать условия существования и алгоритм решения тождества (9.1.26), введём ряд понятий, связанных с полиномиальными матрицами, и исследуем свойства этих матриц.



9.1.4. Свойства полиномиальных матриц системы

Приведём вначале строгое понятие полиномиальной матрицы.

Определение 9.1.1. Полиномиальной матрицей называется матрица, элементами которой служат полиномы конечных степеней с вещественными коэффициентами. ■

Например, элемент матрицы  $D(s)$ , находящийся на пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца

$$D_{ij}(s) = d_{ij}^{[\rho]} s^\rho + d_{ij}^{[\rho-1]} s^{\rho-1} + \dots + d_{ij}^{[1]} s + d_{ij}^{[0]}.$$

Степень полиномиальной матрицы  $A(s)$  – это степень полинома наивысшей степени в  $A(s)$ . Так, полиномы  $D(s)$  и  $B(s)$  имеют степени  $\rho$  и  $\gamma$  соответственно.

Степень  $j$ -того столбца матрицы  $A(s)$ , обозначаемого как  $A_{[j]}(s)$ , – это степень полинома наивысшей степени в  $A_{[j]}(s)$ . Степень  $j$ -того столбца  $A(s)$  обозначается далее как  $\partial_{cj}[A(s)]$  или просто  $\partial_{cj}$ .

Пример 9.1.1. Если

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2 - 3 & 1 & 2s \\ 4s + 2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s + 3 & -3s + 2 \end{pmatrix}, \quad (9.1.28)$$

то  $\partial_{c1} = 2$ ,  $\partial_{c2} = \partial_{c3} = 1$ . ■

Аналогично определяется степень  $j$ -той строки матрицы  $A(s)$  как степень полинома наивысшей степени в строке  $A^{[i]}(s)$  матрицы  $A(s)$ . Степень  $i$ -той строки обозначается как  $\partial_{ri}[A(s)]$  либо просто  $\partial_{ri}$ . Так, для матрицы (9.1.28)  $\partial_{r1} = \partial_{r3} = 2$ ,  $\partial_{r2} = 1$ .

Обозначим  $\Gamma_c[A(s)]$ , или просто  $\Gamma_c$ , матрицу коэффициентов при наивысших степенях в столбцах матрицы  $A(s)$  а  $\Gamma_r[A(s)]$ , или просто  $\Gamma_r$  – матрицу коэффициентов при наивысших степенях полиномов в строках матрицы  $A(s)$ .

Например, для матрицы (9.1.28)

$$\Gamma_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 9.1.2. Полиномиальная матрица  $A(s)$  размеров  $r \times m$  называется столбцово-правильной тогда и только тогда, когда  $\Gamma_c[A(s)]$  имеет ранг, равный наименьшему из чисел  $r$  и  $m$ . Эта же матрица называется строчно-правильной, когда  $\text{rank } \Gamma_r[A(s)] = \min\{r, m\}$ .

Квадратные полиномиальные матрицы называются столбцово- (строчно-) правильными, когда

$$\det \Gamma_c \neq 0 \quad (\det \Gamma_r \neq 0). \quad (9.1.29)$$

■

Свойство 9.1.1. Матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$  объекта (9.1.13) в канонической форме Лагранжа, полученные из матриц объекта в форме Коши, обладают следующими свойствами:

а) Матрица  $P(s)$  – столбцово-правильная.

б) Степень каждого столбца матрицы  $P(s)$  не нулевая:

$$\partial_{cj}[P(s)] = \nu_j \geq 1 \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.1.30)$$

где  $\sum_{j=1}^m \nu_j = n$ .

в) Степень каждого столбца матрицы  $N(s)$  меньше или равна степени соответствующего столбца матрицы  $P(s)$

$$\partial_{cj}[N(s)] \leq \partial_{cj}[P(s)] \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.1.31)$$

■

Доказательство этих свойств приведено в приложении 9.П.1.5.

Свойство 9.1.2. Матрицы  $D(s)$  и  $B(s)$  объекта (9.1.12) в форме «вход-выход», полученные из матриц объекта в форме Коши обладают следующими свойствами:

а) Матрица  $D(s)$  – строчно-правильная.

б) Степень каждой строки матрицы  $D(s)$  не нулевая:

$$\partial_{ri}[D(s)] = \bar{\nu}_i \geq 1 \quad i = \overline{1, r}, \quad (9.1.32)$$

где  $\sum_{i=1}^r \bar{\nu}_i = n$ .

в) Степень каждой строки матрицы  $B(s)$  меньше или равна степени соответствующей строки матрицы  $D(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] \leq \partial_{ri}[D(s)] \quad i = \overline{1, r}. \quad (9.1.33)$$

Эти свойства следуют из результатов, приведённых в приложении 9.П.2.3.

### 9.1.5. Элиминантная матрица

Введём понятие элиминантной (исключающей) матрицы двух полиномиальных матриц  $P(s)$  и  $N(s)$  размеров  $m \times m$  и  $r \times m$ , обладающих свойством 9.1.1.

Для удобства изложения рассмотрим вначале одномерный случай системы (9.1.1), когда  $r = m = 1$ . Для такой системы  $p(s)$  и  $n(s)$  – полиномы

$$p(s) = d(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0, \quad n(s) = b(s) = n_\gamma s^\gamma + \dots + n_1s + n_0. \quad (9.1.34)$$

Определение 9.1.3. Элиминантной (исключающей) матрицей  $M_e$  двух полиномов (9.1.34) называется следующая  $2n \times 2n$  матрица чисел, составленная из коэффициентов этих полиномов

$$M_e = \left( \begin{array}{cccc|cccc} n_0 & n_1 & \cdots & n_n & & & & \mathbf{0} \\ & n_0 & n_1 & \cdots & n_n & & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \mathbf{0} & & & n_0 & n_1 & \cdots & n_n & \\ \hline p_0 & p_1 & \cdots & p_n & & & & \mathbf{0} \\ & p_0 & p_1 & \cdots & p_n & & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \mathbf{0} & & & p_0 & p_1 & \cdots & p_n & \end{array} \right). \quad (9.1.35)$$

■

Пример 9.1.2. Сформируем элиминантную матрицу полиномов  $d(s)$  и  $b(s)$  примера 3.1.1.

Полагая

$$d(s) = s^2 + d_0 = p(s) = s^2 + p_0, \quad b(s) = b_1 s + b_0 = n(s) = n_1 s + n_0,$$

запишем

$$M_e = \left( \begin{array}{cccc|cccc} n_0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 \\ \hline p_0 & p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 \end{array} \right), \quad M'_e = \left( \begin{array}{cc|cc} n_0 & 0 & p_0 & 0 \\ n_1 & n_0 & p_1 & p_0 \\ \hline n_2 & n_1 & p_2 & p_1 \\ 0 & n_2 & 0 & p_2 \end{array} \right).$$

Сравним матрицу  $M'_e$  с матрицей коэффициентов уравнения (3.1.17). Нетрудно видеть, если записать это уравнение в следующей эквивалентной форме

$$\left( \begin{array}{cc|cc} b_0 & 0 & d_0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & d_0 \\ \hline 0 & b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \times \begin{bmatrix} -r_0 \\ -r_1 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix},$$

то матрица его коэффициентов совпадет с  $M'_e$ .

■

Возвращаясь к многомерным объектам ( $m \geq 1, r \geq 1$ ), сформируем множество полиномиальных матриц

$$M_{ek}(s) = \left[ N'(s) \quad sN'(s) \quad \cdots \quad s^{k-1}N'(s) \mid P'(s) \quad sP'(s) \quad \cdots \quad s^{k-1}P'(s) \right]' \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.1.36)$$

Выразим каждую из матриц как произведение числовой матрицы  $M_{ek}$  размеров  $k(m+r) \times (n+mk)$  на  $(n+mk) \times m$  матрицу  $S_{ek}(s)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Это означает,

что

$$\begin{pmatrix} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}N(s) \\ \hline P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}P(s) \end{pmatrix} = M_{ek} S_{ek}(s) = M_{ek} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{\nu_1+k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s^{\nu_2+k-1} & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\nu_m+k-1} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.1.37)$$

Пример 9.1.3. Пусть

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.1.38)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 1, \quad n = 3, \quad r = m = 2.$$

При  $k = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \end{pmatrix}}_{M_{e1}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M_{e1}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \hline s^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}_{S_{e1}(s)}.$$

При  $k = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ s^2+s & 0 \\ \hline s & s \\ s^2 & 0 \\ 1 & -s+1 \\ s^3 & 0 \\ s & -s^2+s \end{pmatrix}}_{M_{e2}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M_{e2}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ \hline s^3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}}_{S_{e2}(s)}.$$

■

Определение 9.1.4. Элиминантной матрицей двух полиномиальных матриц  $P(s)$  и  $N(s)$ , обладающих свойством 9.1.1, называется матрица размеров  $\check{\mu}(m+r) \times (n+m\check{\mu})$ , где  $\check{\mu}$  – это наименьшее целое число  $k$ , для которого разность

$$\eta = (n + mk) - \text{rank } M_{ek} \quad (9.1.39)$$

наименьшая при условии, что  $k \geq \frac{n}{r}$ . ■

Число  $\check{\mu}$  будем называть *индексом элиминантной матрицы*.

Пример 9.1.4. Покажем, что в примере 9.1.3 матрица  $M_{e2}$  – элиминантная для полиномиальных матриц (9.1.38). Действительно, при  $k = 1$  число  $\eta = 1$  (этот случай можно было не рассматривать, так как  $\frac{n}{r} > 1$ ); при  $k = 2$  разность  $\eta = 0$ ; при  $k = 3$  значение  $\eta \geq 0$ . Таким образом, наименьшим из чисел, при котором  $\eta = 0$ , является  $k = 2$ , и поэтому  $\check{\mu} = 2$ . ■

### 9.1.6. Решение модального тождества

Далее будем полагать, что матрица  $\Delta(s)$  в тождестве (9.1.26) такова, что её можно представить как произведение числовой  $m \times (n+m\check{\mu})$  матрицы  $\Delta$  на матрицу  $S_{e\check{\mu}}(s)$

$$\Delta(s) = \Delta S_{e\check{\mu}}(s). \quad (9.1.40)$$

Такое представление всегда существует, если степени столбцов матрицы  $\Delta(s)$  удовлетворяют соотношению

$$\partial_{cj}[\Delta(s)] \leq \nu_j + \check{\mu} - 1 \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.1.41)$$

Матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора будем искать в виде

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} G^{[i]} s^i, \quad R(s) = \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} R^{[i]} s^i.$$

Преобразуем левую часть рассматриваемого тождества

$$\begin{aligned} G(s)P(s) - R(s)N(s) &= - \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} R^{[i]} s^i N(s) + \sum_{i=0}^{\check{\mu}-1} G^{[i]} s^i P(s) = \\ &= \left( -R^{[0]} \quad -R^{[1]} \quad \dots \quad -R^{[\check{\mu}-1]} \mid G^{[0]} \quad G^{[1]} \quad \dots \quad G^{[\check{\mu}-1]} \right) \times \begin{pmatrix} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^{\check{\mu}-1}N(s) \\ P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{\check{\mu}-1}P(s) \end{pmatrix} = X M_{e\check{\mu}} S_{e\check{\mu}}(s), \end{aligned} \quad (9.1.42)$$

где  $m \times (r\check{\mu} + m\check{\mu})$  – числовая матрица

$$X = \left( -R^{[0]} \quad -R^{[1]} \quad \dots \quad -R^{[\check{\mu}-1]} \mid G^{[0]} \quad G^{[1]} \quad \dots \quad G^{[\check{\mu}-1]} \right). \quad (9.1.43)$$

Приравняем полиномы (9.1.40) и (9.1.42) и получим систему линейных алгебраических уравнений для параметров  $G^{[i]}, R^{[i]}$  ( $i = \overline{0, \check{\mu}-1}$ ) регулятора

$$X M_{e\check{\mu}} = \Delta. \quad (9.1.44)$$

Матрица  $M_{e\check{\mu}}$  – прямоугольная, размеров  $(r\check{\mu} + m\check{\mu}) \times (n + m\check{\mu})$ . Так как по определению элиминантной матрицы  $\check{\mu} \geq \frac{n}{r}$ , то

$$\text{rank } M_{e\check{\mu}} \leq n + m\check{\mu}.$$

Пусть  $M_{e\check{\mu}}$  – матрица полного ранга:

$$\text{rank } M_{e\check{\mu}} = \min \{n + m\check{\mu}, r\check{\mu} + m\check{\mu}\} = n + m\check{\mu}. \quad (9.1.45)$$

Число уравнений в системе (9.1.44) меньше (при  $\check{\mu} > \frac{n}{r}$ ) либо равно (при  $\check{\mu} = \frac{n}{r}$ ) числу неизвестных. Для первого случая составим из  $n + m\check{\mu}$  линейно независимых строк матрицы  $M_{e\check{\mu}}$  квадратную матрицу  $\bar{M}_e$  ( $\det \bar{M}_e \neq 0$ ) и сформируем матрицу  $\bar{X}$  вычёркиванием  $\check{\mu}r - n$  столбцов в  $X$ , связанных с  $\check{\mu}r - n$  строками в  $M_{e\check{\mu}}$ . Тогда

$$\bar{X} \bar{M}_e = \Delta.$$

Отсюда

$$\bar{X} = \Delta \bar{M}_e^{-1}. \quad (9.1.46)$$

Для того, чтобы найти искомую матрицу  $X$ , можно вставить  $\check{\mu}r - n$  нулевых столбцов в  $X$ , связанных с  $\check{\mu}r - n$  строками  $M_{e\check{\mu}}$ , которые исключены в  $\bar{M}_e$ . Тогда

$$\bar{X} \bar{M}_e = X M_{e\check{\mu}} = \Delta. \quad (9.1.47)$$

Таким образом, если выполняются соотношения (9.1.41), (9.1.45), то всегда можно найти полиномы  $G(s)$  и  $R(s)$ , разрешающие модальное тождество.

Теорема 9.1.1.

$$\text{rank } M_{e\check{\mu}} = n + m\check{\mu}, \quad (9.1.48)$$

тогда и только тогда, когда объект (9.1.1) полностью управляем и полностью наблюдаем. ■

Доказательство этой теоремы, которая обобщает на многомерный случай теорему 3.1.1 и следствие 3.1.1, приведено в 9.Д.1.

Процедура 9.1.1. (процедура решения модального тождества) состоит из операций:

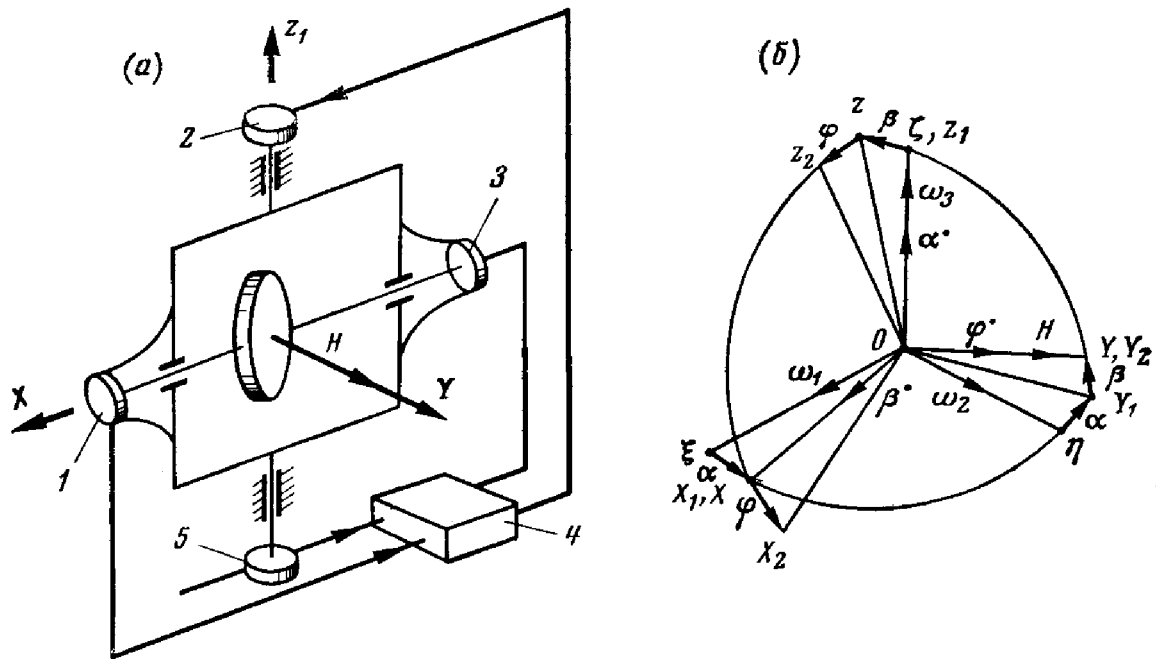


Рис. 9.1.1

**Операция 1.** Построить элиминантную матрицу  $M_{e\mu}$  полиномов  $P(s)$  и  $N(s)$ .

**Операция 2.** Матрицу  $\Delta(s)$ , удовлетворяющую условию (9.1.41), представить в виде (9.1.40).

**Операция 3.** Из линейно независимых строк матрицы  $M_{e\mu}$  сформировать неособую квадратную матрицу  $\bar{M}_e$ , найти по формуле (9.1.46) матрицу  $\bar{X}$  и дополнить её нулевыми столбцами, связанными со строками, которые были исключены в  $M_{e\mu}$  при построении  $\bar{M}_e$ . Искомые матрицы  $G^{[i]}$ ,  $R^{[i]}$  ( $i = \overline{0, \check{\mu} - 1}$ ) находятся в соответствии с (9.1.43) как составляющие матрицы  $X$ .

■

Пример 9.1.4. Решим задачу модального управления двухкомпонентным измерителем (датчиком) угловой скорости (ДУС'ом), построенным на основе трёхстепенного гироскопа. Его схема приведена на рис. 9.1.1.

Регуляторы ДУС'а представляют собой систему привода главной оси гироскопа в нуль ( $\alpha = \beta = 0$ ), которая состоит из датчиков угла – 1,5, усилителя преобразователя – 4 и датчиков моментов – 2,3.

Уравнения ДУС'а имеют вид

$$\begin{aligned} a\ddot{\alpha} + h\dot{\beta} &= m_{z_1}, & m_{z_1} &= k_2 u_2; \\ r\ddot{\beta} - h\dot{\alpha} &= m_x, & m_x &= k_1 u_1. \end{aligned} \quad (9.1.49)$$

Они описывают трёхстепенной гироскоп по осям подвеса которого приложены моменты  $m_{z_1}$  и  $m_x$ , развиваемые датчиками моментов 2 и 3 соответственно,  $a$  и

$r$  – моменты инерции гироскопа относительно его осей подвеса,  $h$  – кинематический момент гироскопа,  $\alpha$  и  $\beta$  – углы поворота внешнего и внутреннего колец карданова подвеса. Эти углы измеряются датчиками 5 и 1 соответственно.

Пусть  $k_1 = k_2 = 1$ . Тогда уравнения (9.1.49) можно записать в канонической форме Лагранжа. Для этого введём безразмерные параметры

$$q_1 = \frac{r\beta}{r_0\beta_0}, \quad q_2 = \frac{a\alpha}{a_0\alpha_0},$$

(в которых положим для простоты  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$  рад,  $r_0 = a_0 = 1$  кгм<sup>2</sup>) и обозначим

$$p_{12}^{[1]} = -\frac{h_\alpha a_0}{r_0\beta_0} = h, \quad p_{21}^{[1]} = \frac{h_\beta r_0}{a_0\alpha_0} = h. \quad (9.1.50)$$

Тогда уравнения (9.1.49) примут вид

$$\begin{pmatrix} s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (9.1.51)$$

Переменные  $\alpha$  и  $\beta$  измеряются, поэтому, полагая

$$y_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

запишем

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \quad (9.1.52)$$

где  $r = \frac{r}{r_0}$ ,  $a = \frac{a}{a_0}$ .

Требуется найти параметры регулятора

$$\begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.53)$$

такие, чтобы характеристический полином системы (9.1.51)-(9.1.53) имел заданные корни  $s_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ).

Для решения этой задачи построим, в соответствии с операцией 1, элиминантную матрицу полиномов

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad (9.1.54)$$

В рассматриваемом случае  $n = 4$ ,  $m = r = 2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 2$ . Запишем (9.1.37) при



$k = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \\ rs & 0 \\ 0 & as \\ \hline s^2 & p_{12}^{[1]}s \\ p_{21}^{[1]}s & s^2 \\ s^3 & p_{12}^{[1]}s^2 \\ p_{21}^{[1]}s^2 & s^3 \end{pmatrix}}_{M_{e2}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & p_{12}^{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & p_{21}^{[1]} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & p_{12}^{[1]} & 0 \\ 0 & 0 & p_{21}^{[1]} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{e2}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{S_{e2}(s)}. \quad (9.1.55)$$

Нетрудно проверить, что  $\det M_{e2} \neq 0$ , и поэтому

$$\text{rank } M_{e2} = 8 = n + m\check{\mu}, \quad (\check{\mu} = 2).$$

**Операция 2.** По заданным корням  $s_i^*$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) сформируем матрицу

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[0]} & \delta_{11}^{[1]} & \delta_{11}^{[2]} & \delta_{11}^{[3]} & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \delta_{22}^{[0]} & \delta_{22}^{[1]} & \delta_{22}^{[2]} & \delta_{22}^{[3]} \end{pmatrix} \cdot S_{e2}(s) = \Delta S_{e2}(s), \quad (9.1.56)$$

в которой числа  $\delta_{11}^{[i]}$  и  $\delta_{22}^{[i]}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) определим из равенств

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{[0]} + \delta_{11}^{[1]}s + \delta_{11}^{[2]}s^2 + \delta_{11}^{[3]}s^3 &= (s - s_1^*)(s - s_2^*)(s - s_3^*), \\ \delta_{22}^{[0]} + \delta_{22}^{[1]}s + \delta_{22}^{[2]}s^2 + \delta_{22}^{[3]}s^3 &= (s - s_4^*)(s - s_5^*)(s - s_6^*). \end{aligned} \quad (9.1.57)$$

**Операция 3.** Вычислим

$$X = \begin{pmatrix} -R^{[0]} & -R^{[1]} & | & G^{[0]} & G^{[1]} \end{pmatrix} = \Delta M_{e2}^{-1}.$$

Заметим, что матрицы регулятора (9.1.53)

$$(G^{[1]}s + G^{[0]})u = (R^{[1]}s + R^{[0]})y \quad (9.1.58)$$

можно определить непосредственно из модального тождества, сравнивая, как и в одномерном случае, матрицы при одинаковых степенях  $s$ . Действительно, модальное тождество имеет вид

$$(G^{[1]}s + G^{[0]}) \cdot (P^{[2]}s^2 + P^{[1]}s) - (R^{[1]}s + R^{[0]}) \cdot N^{[0]} = \Delta^{[3]}s^3 + \Delta^{[2]}s^2 + \Delta^{[1]}s + \Delta^{[0]}, \quad (9.1.59)$$

где

$$\begin{aligned} P^{[2]} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^{[1]} \\ p_{21}^{[1]} & 0 \end{pmatrix}, \quad N^{[0]} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ \Delta^{[3]} &= \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[3]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[3]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[2]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[2]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[2]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[1]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[1]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[1]} \end{pmatrix}, \quad \Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{[0]} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Сравним матрицы при одинаковых степенях  $s$

$$G^{[1]} = \Delta^{[3]}, \quad G^{[1]}P^{[1]} + G^{[0]} = \Delta^{[2]}, \quad G^{[0]}P^{[1]} - R^{[1]}N^{[0]} = \Delta^{[1]}, \quad -R^{[0]}N^{[0]} = \Delta^{[0]}.$$

Из этих уравнений получим

$$\begin{aligned} G^{[1]} &= \Delta^{[3]}, & G^{[0]} &= -\Delta^{[3]}P^{[1]} + \Delta^{[2]}, \\ R^{[1]} &= \left[ \left( -\Delta^{[3]}P^{[1]} + \Delta^{[2]} \right) P^{[1]} - \Delta^{[1]} \right] \left[ N^{[0]} \right]^{-1}, & R^{[0]} &= -\Delta^{[0]} \left[ N^{[0]} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.1.60)$$

■

### 9.1.7. Условия реализуемости регулятора

Результатом решения модального тождества служит уравнение регулятора в форме «вход-выход»

$$\left( G^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1} + \dots + G^{[1]}s + G^{[0]} \right) u = \left( R^{[\check{\mu}-1]}s^{\check{\mu}-1} + \dots + R^{[1]}s + R^{[0]} \right) y. \quad (9.1.61)$$

Приведём условия реализуемости этого регулятора. В одномерном случае  $\check{\mu} = n$ , а уравнение (9.1.61) имеет вид

$$\left( g_{n-1}s^{n-1} + \dots + g_1s + g_0 \right) u = \left( r_{n-1}s^{n-1} + \dots + r_1s + r_0 \right) y. \quad (9.1.62)$$

Регулятор, описываемый таким уравнением – реализуем, так как степень числителя его передаточной функции не превышает степени знаменателя.

Приведём (9.1.62) к форме Коши и получим уравнение регулятора в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y, \quad u = \mathbf{d}_p \mathbf{x}_p + f_p y. \quad (9.1.63)$$

Уравнение (9.1.61), приведённое к форме Коши, имеет в общем случае вид

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + L_p(s) \mathbf{y}. \quad (9.1.64)$$

Эти уравнения содержат «чистые» производные вектора  $\mathbf{y}$  и поэтому не реализуемы. Реализуемая форма аналогично (9.1.2)

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}. \quad (9.1.65)$$

Из процедуры преобразования уравнений к форме Коши, описанной в 9.П.3, следует, что, если степень каждой строки матрицы  $G(s)$  больше степени соответствующей строки матрицы  $R(s)$

$$\partial_{ri}[G(s)] \geq \partial_{ri}[R(s)] \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.1.66)$$

то уравнения регулятора (9.1.61), приведённые к форме Коши, имеют реализуемую структуру (9.1.65).

Будем называть неравенства (9.1.66) *условием реализуемости регулятора* (9.1.61).

Если это условие нарушается, то дополним матрицу  $G(s)$  в (9.1.61)  $m \times m$  реализующей матрицей

$$L(s) = L^{(\rho)}s^\rho + \dots + L^{(\mu)}s^\mu. \quad (9.1.67)$$

Структуру этого полинома выберем так, чтобы выполнялось условие реализуемости

$$\partial_{ri}[L(s) + G(s)] > \partial_{ri}[R(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.1.68)$$

Для определения параметров  $L(s)$  рассмотрим характеристический полином объекта (9.1.13) с регулятором

$$[L(s) + G(s)]\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}. \quad (9.1.69)$$

Аналогично (9.1.24) запишем, с учётом (9.1.26)

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \begin{pmatrix} P(s) & -E \\ -R(s)N(s) & L(s) + G(s) \end{pmatrix} = \\ &= \det [L(s)P(s) + G(s)P(s) - R(s)N(s)] = \det [L(s)P(s) + \Delta(s)]. \end{aligned} \quad (9.1.70)$$

Параметры  $L(s)$  определим из тождества

$$\det [L(s)P(s) + \Delta(s)] = \delta(s)\delta_1(s), \quad (9.1.71)$$

где  $\delta_1(s)$  – полином, корни которого несоизмеримо больше корней заданного полинома  $\delta(s)$ .

### 9.1.8. Компенсационная схема\*

Изложим ещё один путь построения реализуемого регулятора. Будем искать его уравнение в виде

$$Q(s)\mathbf{u} = H^{(1)}(s)\mathbf{y} + H^{(2)}(s)\mathbf{u}, \quad (9.1.72)$$

где  $Q(s)$  – заданная  $m \times m$  гурвицева матрица, обладающая свойствами

$$\partial_{ri}[Q(s)] \geq \partial_{ri}[H^{(1)}(s)], \quad \partial_{ri}[Q(s)] \geq \partial_{ri}[H^{(2)}(s)] \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.1.73)$$

$$\partial_{ri}[Q(s)] = \check{\mu} - 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.1.74)$$

Структурная схема такого регулятора в одномерном случае приведена на рис. 3.3.3. Неравенства (9.1.73) означают, что уравнение (9.1.71) приводимо к реализуемой форме Коши (9.1.2).

Действительно, положим в правой части (9.1.72)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)}$  и введём вектор  $\mathbf{y}^{(1)} = [\mathbf{y}', \mathbf{u}^{(1)'}]'$ . Тогда (9.1.72) примет в форме Коши вид

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p^{(1)} \mathbf{y}^{(1)}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + F_p^{(1)} \mathbf{y}^{(1)}.$$

Возвращаясь к «старым» переменным, получим уравнения

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p^{(1,1)} \mathbf{y} + B_p^{(1,2)} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + F_p^{(1,1)} \mathbf{y} + F_p^{(1,2)} \mathbf{u},$$

которые после несложных преобразований принимают вид (9.1.65).

Характеристический полином объекта (9.1.13) с регулятором (9.1.72)

$$d^u(s) = \det \left\{ [Q(s) - H^{(2)}(s)] P(s) - H^{(1)}(s) N(s) \right\}. \quad (9.1.75)$$

Определим матрицы  $H^{(1)}(s)$  и  $H^{(2)}(s)$  из тождества

$$H^{(2)}(s)P(s) + H^{(1)}(s)N(s) = Q(s)F(s), \quad (9.1.76)$$

в котором  $m \times m$  матрица  $F(s)$  удовлетворяет условию

$$\partial_{ci}[F(s)] < \partial_{ci}[P(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.1.77)$$

Матрица  $Q(s)F(s)$  в правой части этого тождества удовлетворяет условию (9.1.41), и поэтому оно разрешимо.

Подставим (9.1.76) в выражение (9.1.75) для характеристического полинома и получим

$$d^u(s) = \det Q(s) \det [P(s) - F(s)]. \quad (9.1.78)$$

Если выбрать матрицы  $Q(s)$  и  $F(s)$  так, чтобы они удовлетворяли тождеству

$$\det Q(s) \det [P(s) - F(s)] = \delta(s), \quad (9.1.79)$$

то из (9.1.76) получим матрицы

$$\begin{aligned} H^{(1)}(s) &= H^{(1)[\mu-1]} s^{\mu-1} + \dots + H^{(1)[1]} s + H^{(1)[0]}, \\ H^{(2)}(s) &= H^{(2)[\mu-1]} s^{\mu-1} + \dots + H^{(2)[1]} s + H^{(2)[0]}, \end{aligned}$$

разрешающие задачу 9.1.1 модального управления. При этом

$$\partial_{ri} [H^{(1)}(s)] \leq \check{\mu} - 1, \quad \partial_{ri} [H^{(2)}(s)] \leq \check{\mu} - 1 \quad i = \overline{1, m},$$

и поэтому выполняются неравенства (9.1.73), обеспечивающие реализуемость регулятора (9.1.72).

Построим матрицу  $Q(s)$ , удовлетворяющую условиям (9.1.73), (9.1.74) с определителем, равным заданному полиному

$$\delta_2(s) = s^{m(\check{\mu}-1)} + \delta_{m(\check{\mu}-1)-1}^{(2)} s^{m(\check{\mu}-1)-1} + \dots + \delta_1^{(2)} s + \delta_0^{(2)} = \prod_{i=1}^{m(\check{\mu}-1)} (s - s_i^*). \quad (9.1.80)$$

Такая матрица имеет вид

$$Q(s) = \begin{pmatrix} s^{\check{\mu}-1} & 0 & \cdots & \alpha_{1m}(s) \\ -1 & s^{\check{\mu}-1} & \cdots & \alpha_{2m}(s) \\ 0 & -1 & \cdots & \alpha_{3m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{\check{\mu}-1} + \alpha_{mm}(s) \end{pmatrix}, \quad (9.1.81)$$

где

$$\alpha_{im}(s) = \sum_{k=0}^{\check{\mu}-2} \delta_{(i-1)(\check{\mu}-1)+k} s^k \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.1.82)$$

Нетрудно проверить, что  $\det Q(s) = \delta_2(s)$ . Остальные  $[n - m(\check{\mu} - 1)]$  корни полинома  $\delta(s) = \delta_2(s)\delta_3(s)$  обеспечиваются выбором  $F(s)$  из условия

$$\det[P(s) - F(s)] = \delta_3(s) = \delta_{n-m(\check{\mu}-1)}^{(3)} s^{n-m(\check{\mu}-1)} + \cdots + \delta_1^{(3)} s + \delta_0^{(3)}. \quad (9.1.83)$$

## 9.2. Синтез регуляторов и следящих систем на основе модального тождества

### 9.2.1. Показатели точности и качества

Рассмотрим процессы по регулируемым переменным  $z_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) в системе (9.1.1), (9.1.2) при внешних возмущениях  $f_i(t)$  ( $i = \overline{1, \mu}$ ). Эта система принимает теперь вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + M\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = L\mathbf{x}; \quad (9.2.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad (9.2.2)$$

где  $M$  и  $L$  – заданные матрицы размеров  $n \times \mu$  и  $m \times n$  соответственно.

Будем различать три вида возмущений: ступенчатое

$$f_i(t) = \begin{cases} \bar{f}_i & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0, \end{cases} \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (9.2.3)$$

гармоническое

$$f_i(t) = f_{\text{гарм.}i} \sin \omega_i^f t \quad i = \overline{1, \mu} \quad (9.2.4)$$

и произвольное ограниченное

$$|f_i(t)| \leq f_i^* \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (9.2.5)$$

где  $\bar{f}_i$ ,  $f_{\text{гарм.}i}$ ,  $f_i^*$  ( $i = \overline{1, \mu}$ ) – заданные числа.

Процесс по  $i$ -той регулируемой переменной  $z_i(t)$  можно разбить во времени на два процесса: установившийся и переходный. Первый из них – это обычный режим

работы системы, обусловленный внешними возмущениями. Переходный процесс вызывается начальными отклонениями и изменением состояния системы при возникновении возмущений. По истечении некоторого времени, называемого временем регулирования по  $i$ -той регулируемой переменной ( $t_{пер.i}$ ), переходный процесс затухает до установившегося.

Каждый из этих процессов характеризуется своей точностью:

а) точность в установившемся режиме

$$z_{уст.i} = \max_{t_{пер.i} \leq t \leq \infty} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m}; \quad (9.2.6)$$

б) точность в переходном процессе

$$z_{перех.i} = \max_{t_0 \leq t \leq t_{пер.i}} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.7)$$

Часто используют значение

$$\sigma_i = \frac{|z_{перех.i} - z_{уст.i}|}{|z_{уст.i}|} \cdot 100\% \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.2.8)$$

которое называется *перерегулированием по  $i$ -той регулируемой переменной*.

Время регулирования ( $t_{пер.i}$ ) и перерегулирование ( $\sigma_i$ ) по  $i$ -той регулируемой переменной называются *показателями качества системы по  $i$ -той регулируемой переменной*, а число  $z_{уст.i}$  — *показателем точности по  $i$ -той регулируемой переменной*.

Геометрический смысл этих показателей заключается в следующем. Пусть найдено всё множество решений дифференциальных уравнений (9.2.1), (9.2.2), порождённых начальными условиями и внешними возмущениями из множества (9.2.5). Используем эти решения и найдём множество функций  $z_i(t)$ , описывающих возможное поведение  $i$ -той регулируемой переменной. Это множество часто можно заключить в две трубки, как показано на рис. 9.2.1.

Параметры этих трубок позволяют найти показатели точности и качества. Отметим, что понятие времени регулирования по  $i$ -той регулируемой переменной точно не определено, а носит интуитивный характер. Для ступенчатых и гармонических внешних возмущений можно дать точное его определение.

При ступенчатых внешних возмущениях (9.2.3) определяют статические ошибки

$$z_{ст.i} = \lim_{t \rightarrow \infty} z_i(t) \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.2.9)$$

которые находятся как решения системы алгебраических уравнений, получаемой из (9.2.1), (9.2.2) при  $\dot{x} = \dot{x}_p = 0$ .

Время регулирования по  $i$ -той регулируемой переменной в этом случае определяется (как и для одномерных систем) как время, через которое процесс по  $i$ -той

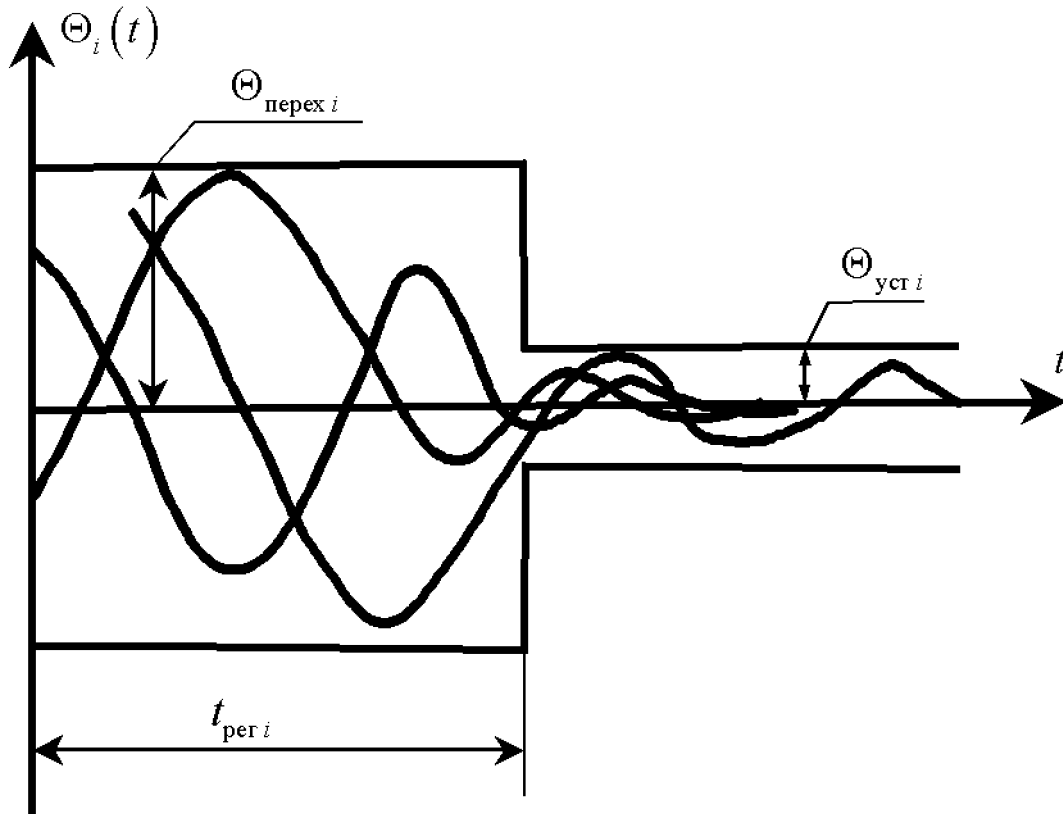


Рис. 9.2.1

регулируемой переменной не выходит из зоны  $\pm 5\% z_{уст.i}$ . Используя эти зоны, найдем, что

$$z_{уст.i} = 1.05 |z_{см.i}| \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.10)$$

При гармонических возмущениях (9.2.4) найдём

$$z_{гарм.i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{t_1 \leq t \leq \infty} |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.11)$$

Время регулирования по  $i$ -той регулируемой переменной – это время, через которое процесс по  $i$ -той регулируемой переменной не выходит из трубки

$$z_{уст.i} = 1.05 z_{гарм.i} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.12)$$

### 9.2.2. Постановка задачи синтеза и уравнение качества

Выделим из объектов (9.2.1) объекты первого вида, для которых  $M = B$  и  $D = E_n$ , и объекты второго вида, в которых измеряемые переменные совпадают с регулируемыми ( $y = z$ ). Для этих видов объектов сформулируем задачу синтеза.

Задача 9.2.1. Для объекта (9.2.1) найти регулятор (9.2.2) такой, чтобы эта система удовлетворяла требованию к точности

$$z_{уст.i} \leq z_{уст.i}^* \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.13)$$

и имела при ступенчатом внешнем возмущении показатели качества

$$\underline{t}_{рег.i} \leq t_{рег.i} \leq \bar{t}_{рег.i}, \quad \sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.14)$$

где  $\underline{t}_{рег.i}$ ,  $\bar{t}_{рег.i}$ ,  $\bar{\sigma}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Как и в одномерном случае, решение задачи 9.2.1 опирается на уравнение качества (уравнение желаемой модели замкнутой системы). Для его описания запишем (9.2.1) в форме «вход-выход»

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u} + M(s)\mathbf{f}. \quad (9.2.15)$$

Это уравнение нетрудно получить на основе процедуры 9.П.2, если ввести вектор  $\mathbf{u}^{(1)} = [\mathbf{u}', \mathbf{f}']'$  и записать (9.2.1) как

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}. \quad (9.2.16)$$

Для объектов первого вида

$$D(s)\mathbf{z} = B(s)\mathbf{u} + M(s)\mathbf{f}, \quad M(s) = B(s). \quad (9.2.17)$$

Объекты второго вида описываются (9.2.15) при  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ .

Уравнением качества многомерных систем будем называть уравнение

$$\tilde{\Psi}(s)\mathbf{z} = M(s)\mathbf{f}, \quad (9.2.18)$$

в котором полиномиальная матрица

$$\tilde{\Psi}(s) = \tilde{\Psi}^{[\tilde{\alpha}]} s^{\tilde{\alpha}} + \tilde{\Psi}^{[\tilde{\alpha}-1]} s^{\tilde{\alpha}-1} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \quad (9.2.19)$$

такова, что выполняются требования (9.2.13), (9.2.14) к точности и качеству.

Рассмотрим случай, когда нетрудно построить уравнение качества.

Определение 9.2.1. Объект (9.2.1) называется *устойчивым по возмущению*, если корни полинома  $\det M(s)$  имеют отрицательные вещественные части. ■

Если объект устойчив по возмущению и размерность вектора возмущения  $\mathbf{f}$  совпадает с числом регулируемых переменных ( $\mu = m$ ), то в уравнении качества можно принять

$$\tilde{\Psi}(s) = M(s)\tilde{\tilde{\Psi}}(s), \quad (9.2.20)$$

где полиномиальная матрица  $\tilde{\tilde{\Psi}}(s)$  такова, что решения уравнения

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(s)\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (9.2.21)$$

удовлетворяют требованиям (9.2.13), (9.2.14).

Примем

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(s) = HT(s), \quad (9.2.22)$$



где  $H = \text{diag} [ h_{11} \quad h_{22} \quad \dots \quad h_{mm} ]$ ,  $T(s) = \text{diag} [ t_{11}(s) \quad t_{22}(s) \quad \dots \quad t_{mm}(s) ]$ .

Тогда

$$z_i(s) = \frac{f_i(s)}{h_{ii}t_{ii}(s)} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.23)$$

Определим числа  $h_{ii}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и полиномы  $t_{ii}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Для ступенчатых возмущений (когда  $f_i(s) = \frac{\bar{f}_i}{s}$ ) примем

$$h_{ii} \geq \frac{\bar{f}_i}{z_{ycm.i}^*}, \quad (9.2.24)$$

$$t_{ii}(s) = (\tau_i s + 1) \left( \frac{t_{pez.i}}{3} \leq \tau_i \leq \frac{\bar{t}_{pez.i}}{3} \right) \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.25)$$

Тогда оригинал изображения (9.2.23) имеет вид

$$z_i(t) = z_{ycm.i}^* \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \quad i = \overline{1, m},$$

и, следовательно, удовлетворяются требования (9.2.13), (9.2.14). Для гармонических внешних возмущений следует заменить в (9.2.24) числа  $\bar{f}_i$  на  $f_{zapm.i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ), а при неопределённых —  $f_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Заметим, что для формирования полиномов  $t_{ii}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) можно использовать процедуру 3.2.2 построения уравнения качества одномерных систем. Кроме того, когда размерность вектора возмущения меньше  $m$ , то можно представить  $M\mathbf{f}$  как  $M^{(1)}\mathbf{f}^{(1)}$ , где  $\mathbf{f}^{(1)}(t)$  —  $m$ -мерный вектор.

Если объект (9.2.1) не является устойчивым по возмущению (полином  $\det m(s)$  не гурвицев), то для построения уравнения качества используется процедура, приведённая в 9.П.4.

Эта процедура обеспечивает выполнение неравенств

$$|z_i(t)| \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad t \geq t_0, \quad (9.2.26)$$

где  $z_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) — заданные числа.

### 9.2.3. Структурное модальное управление

Найдём связь вектора регулируемых переменных с вектором внешних возмущений в системе (9.2.1), (9.2.2) с объектом второго вида. Для этого запишем уравнения системы в форме «вход-выход»

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u} + M(s)\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad (9.2.27)$$

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y}. \quad (9.2.28)$$

Найдём зависимость векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{f}$ . С учётом (9.2.27) получим

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)D^{-1}(s)B(s)\mathbf{u} + R(s)D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f},$$

или

$$\mathbf{u} = [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)]^{-1} R(s)D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f}. \quad (9.2.29)$$

Подставим это выражение в (9.2.27), и тогда искомая связь имеет вид

$$\mathbf{y} = D^{-1}(s) \left\{ B(s) [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)]^{-1} R(s)D^{-1}(s) + E_m \right\} M(s)\mathbf{f}. \quad (9.2.30)$$

Пусть матрицы регулятора  $G(s)$  и  $R(s)$  удовлетворяют тождеству

$$G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s) = \tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s). \quad (9.2.31)$$

Очевидно, что это тождество разрешается для матриц

$$G(s) = B(s), \quad R(s) = D(s) - \tilde{\Psi}(s), \quad (9.2.32)$$

которые будем называть *матрицами структурного модального управления*.

Подставим (9.2.31) в (9.2.30) и получим

$$\mathbf{y} = D^{-1}(s) [D(s)\tilde{\Psi}^{-1}(s)R(s)D^{-1}(s) + E_m] M(s)\mathbf{f} = [\tilde{\Psi}^{-1}(s)R(s) + E_m] D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f}.$$

Учтём второе из решений (9.2.32), и тогда

$$\mathbf{y} = \tilde{\Psi}^{-1}(s)M(s)\mathbf{f}. \quad (9.2.33)$$

Это выражение совпадает (так как  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ ) с уравнением качества (9.2.18). По построению матрицы  $\tilde{\Psi}(s)$  процессы в системе (9.2.27), (9.2.28) с матрицами (9.2.32) удовлетворяют требованиям задачи 9.2.1, когда объект устойчив по возмущению. Если объект неустойчив по возмущению, то построение матрицы  $\tilde{\Psi}(s)$  обеспечивает выполнения требований к точности (9.2.26).

Исследуем устойчивость системы со структурным модальным управлением.

Подставим в выражение (9.2.27) характеристического полинома системы (9.2.27), (9.2.28) тождество (9.2.31) и получим

$$d^u(s) = \det D(s) \det [\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s)] = \det \tilde{\Psi}(s) \det B(s). \quad (9.2.34)$$

Очевидно, что для асимптотической устойчивости системы со структурным модальным регулятором

$$B(s)\mathbf{u} = [D(s) - \tilde{\Psi}(s)]\mathbf{y} \quad (9.2.35)$$

необходимо и достаточно, чтобы полином  $\det B(s)$  был гурвицевым. Последнее удобно описывать с помощью следующего понятия.

Определение 9.2.2. Объект (9.1.1) называется устойчивым по управлению, если корни полинома  $\det B(s)$  имеют отрицательные вещественные части. ■

Итак, регулятор (9.2.35) решает задачу 9.2.1 для объектов, устойчивых по управлению.

Исследуем единственность решения.

Утверждение 9.2.1. Матрицы (9.2.32) – единственное решение тождества (9.2.31). ■

Доказательство утверждения приведено в 9.Д.2.

#### 9.2.4. Процедура синтеза регулятора

Для реализуемости регулятора (9.2.35) должно выполняться условие (9.1.66)

$$\partial_{r_i}[B(s)] < \partial_{r_i}[D(s) - \tilde{\Psi}(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.36)$$

Наложим на матрицу  $\tilde{\Psi}(s)$  ограничение

$$\Gamma_r[\tilde{\Psi}(s)] = \Gamma_r[D(s)]. \quad (9.2.37)$$

Тогда

$$\partial_{r_i}[D(s) - \tilde{\Psi}(s)] = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m},$$

и условие (9.2.36) примет вид

$$\partial_{r_i}[B(s)] < \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.38)$$

Если оно нарушается, необходимо изменить правую часть тождества (9.2.31).

В связи с этим преобразуем это тождество. Заметим вначале, что по построению формы «вход-выход» и канонической формы Лагранжа

$$D^{-1}(s)B(s) = N(s)P^{-1}(s) = D(Es - A)^{-1}B, \quad (9.2.39)$$

и поэтому (9.2.31) можно записать в виде

$$G(s) - R(s)N(s)P^{-1}(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s)P^{-1}(s), \quad (9.2.40)$$

или, после умножения справа на матрицу  $P(s)$ , как

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s). \quad (9.2.41)$$

Матрицы (9.2.32) разрешают это тождество. Действительно, после их подстановки получим

$$B(s)P(s) - [D(s) - \tilde{\Psi}(s)]N(s) = \tilde{\Psi}(s)N(s),$$

или

$$B(s)P(s) - D(s)N(s) = 0.$$

Последнее выполняется в силу (9.2.39).

Введём в рассмотрение матричный полином

$$\mathcal{E}^0(s) = \text{diag} \left[ \varepsilon_1^0(s) \quad \varepsilon_2^0(s) \quad \cdots \quad \varepsilon_m^0(s) \right], \quad (9.2.42)$$

где

$$\varepsilon_i^0(s) = (\varepsilon_i^0 s + 1)^{\alpha_i} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.2.43)$$

в которых  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – достаточно малые положительные числа.

Сформируем тождество

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s), \quad (9.2.44)$$

которое отличается от (9.2.41) матрицей  $\mathcal{E}^0(s)$ .

Матрицы, разрешающие (9.2.44), будем искать в виде

$$G(s) = [\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)]B(s), \quad R(s) = D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s), \quad (9.2.45)$$

где  $O^E(s)$  и  $O^R(s)$  – некоторые полиномиальные матрицы.

Подставим (9.2.45) в (9.2.44) и получим, после умножения справа на  $P^{-1}(s)$

$$[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)]B(s) - [D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s)]N(s)P^{-1}(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s)P^{-1}(s). \quad (9.2.46)$$

Используем равенства (9.2.39) и приходим к тождеству

$$[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)]B(s) - [D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s)]D^{-1}(s)B(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s),$$

которое после сокращения на  $B(s)$  и умножения справа на  $D(s)$  принимает вид

$$[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)]D(s) - [D(s) - \tilde{\Psi}(s) + O^R(s)] = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s),$$

или

$$O^E(s)D(s) - O^R(s) = -[\mathcal{E}^0(s) - E_m] \cdot [D(s) - \tilde{\Psi}(s)]. \quad (9.2.47)$$

Найдём условия существования матриц  $O^E(s)$  и  $O^R(s)$ , разрешающих это тождество.

Введём обозначения

$$P(s) = \check{P}(s) = D(s), \quad N(s) = \check{N}(s) = E_m, \quad (9.2.48)$$

$$\Delta(s) = \check{\Delta}(s) = -[\mathcal{E}^0(s) - E_m] \cdot [D(s) - \tilde{\Psi}(s)], \quad (9.2.49)$$

и запишем (9.2.47) в форме матричного модального тождества (9.1.26)

$$O^E(s)\check{P}(s) - O^R(s)\check{N}(s) = \check{\Delta}(s). \quad (9.2.50)$$

Для существования решения этого тождества достаточно, чтобы полиномиальные матрицы  $\check{P}(s)$  и  $\check{N}(s)$  обладали свойством 9.1.1, а элиминатная матрица  $\check{M}_{\varepsilon\check{\mu}}$ ,

сформированная для  $\check{P}(s)$  и  $\check{N}(s)$ , имела ранг  $n + m\check{\mu}$ . Кроме того, для  $\check{D}(s)$  должно выполняться условие (9.1.41)

$$\partial_{c_j} \left\{ \left[ \mathcal{E}^0(s) - E_m \right] \cdot \left[ D(s) - \check{\Psi}(s) \right] \right\} \leq \bar{\nu}_j + \check{\mu} - 1. \quad (9.2.51)$$

Пусть существуют матричные полиномы  $O^E(s)$  и  $O^R(s)$ , разрешающие тождество (9.2.50).

Матрицы коэффициентов в этих полиномах можно сделать сколь угодно малыми выбором достаточно малых чисел  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) в полиноме  $\mathcal{E}^0(s)$ .

Действительно, полином  $\mathcal{E}^0(s)$  имеет структуру

$$\mathcal{E}^0(s) = E_m + \mathcal{E}^{01}s + \mathcal{E}^{02}s^2 + \dots, \quad (9.2.52)$$

где  $\mathcal{E}^{01} = \text{diag} \left[ \alpha_1 \varepsilon_1^0 \quad \alpha_2 \varepsilon_2^0 \quad \dots \quad \alpha_m \varepsilon_m^0 \right]$ ,  $\mathcal{E}^{02} = \text{diag} \left[ \alpha_1^{(2)} (\varepsilon_1^0)^2 \quad \alpha_2^{(2)} (\varepsilon_2^0)^2 \quad \dots \quad \alpha_m^{(2)} (\varepsilon_m^0)^2 \right]$ ,  $\alpha_i^{(2)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – числа, зависящие от  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Из этой структуры следует, что разность  $\mathcal{E}^0(s) - E_m$  содержит матрицы, исчезающие вместе с числами  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Так как элиминантная матрица  $\check{M}_{e\check{\mu}}$  не зависит от этих чисел, то результат решения тождества (9.2.50) также будет представлять собой исчезающие полиномиальные матрицы.

Пренебрежём матрицей  $O^R(s)$  в выражении (9.2.45) для  $R(s)$  и запишем уравнение регулятора как

$$\left[ \mathcal{E}^0(s) + O^E(s) \right] B(s) \mathbf{u} = \left[ D(s) - \check{\Psi}(s) \right] \mathbf{y}. \quad (9.2.53)$$

Условие его реализуемости (при ограничении (9.2.37)) имеет вид

$$\partial_{r_i} \left\{ \left[ \mathcal{E}^0(s) + O^E(s) \right] B(s) \right\} \geq \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.54)$$

Резюмируем изложенное как последовательность решения задачи 9.2.1.

**Процедура 9.2.1. (Процедура аналитического синтеза регуляторов для объектов второго вида)** состоит из операций:

**Операция 1.** Привести уравнение объекта (9.2.1) к форме «вход-выход» (9.2.15) и сформировать полиномиальную матрицу  $\check{\Psi}(s)$  уравнения качества (9.2.18). Эта матрица должна удовлетворять условию (9.2.37).

**Операция 2.** Сформировать регулятор (9.2.35). Если выполняется условие реализуемости (9.2.38), то перейти к операции 7, если оно нарушается – то к операции 3.

**Операция 3.** Проверить столбцовую правильность матрицы  $\check{P}(s) = D(s)$ . (Остальные признаки свойства 9.1.1 выполняются автоматически, так как  $\partial_{c_j}[D(s)] \geq 1$ , а  $\partial_{c_j}[\check{N}(s)] = \partial_{c_j}[E_m] = 0$  ( $j = \overline{1, m}$ )), построить элиминантную матрицу  $\check{M}_{e\check{\mu}}$  и убедиться, что

$$\text{rank } \check{M}_{e\check{\mu}} = n + m\check{\mu}. \quad (9.2.55)$$

**Операция 4.** Построить полином  $\mathcal{E}^0(s)$  по формуле (9.2.42). Его степени  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) должны удовлетворять неравенству (9.2.51), а также соотношению

$$\partial_{r_i} [\mathcal{E}^0(s)B(s)] \geq \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.2.56)$$

которого обычно достаточно для выполнения условия реализуемости (9.2.54).

**Операция 5.** Решить, используя процедуру 9.1.1, тождество (9.2.50) и найти полиномиальные матрицы  $O^E(s)$  и  $O^R(s)$ . Убедиться, что коэффициенты этих матриц достаточно малы. В противном случае вернуться к операции 4 и уменьшить числа  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

**Операция 6.** Сформировать уравнение (9.2.53) регулятора. Проверить выполнение условия (9.2.54). Если оно нарушается, вернуться к операции 4 и уточнить числа  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

**Операция 7.** Привести уравнение регуляторе к форме Коши (9.2.1). ■

### 9.2.5. Альтернативная процедура синтеза

Возможен другой путь решения задачи 9.2.1. Он основан на разрешении тождества (9.2.44), правая часть которого должна удовлетворять условию (9.1.41)

$$\partial_{c_i} [\mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)N(s)] \leq \bar{\nu}_i + \mu - 1. \quad (9.2.57)$$

Хотя тождество (9.2.44) и процедура его решения не содержат матрицы  $D(s)$ , нужно проверять её столбцовую правильность и условие (9.2.55). Это связано с тем, что этих условий достаточно для обеспечения малости матриц в  $O^E(s)$  и  $O^R(s)$  при малых  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Процедура 9.2.2. (Второй вариант процедуры 9.2.1) состоит из операций:

**Операция 1.** Совпадает с операцией 1 процедуры 9.2.1.

**Операция 2.** Построить элиминантную матрицу  $M_{e\mu}$  для  $P(s)$  и  $N(s)$  и найти индекс элиминантной матрицы  $\check{\mu}$ .

**Операция 3.** Построить полином  $\mathcal{E}^0(s)$  по формуле (9.2.42). Его степени  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) должны удовлетворять неравенствам (9.2.56), (9.2.57). Если эти неравенства противоречивы, то уточнить степени строк и столбцов матрицы  $\tilde{\Psi}(s)$  уравнения качества.

**Операция 4.** Совпадает с операцией 3 процедуры 9.2.1.

**Операция 5.** Решить, используя процедуру 9.1.1, тождество (9.2.44) и найти матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$ . Сравнить эти матрицы с матрицами  $\mathcal{E}^0(s) \cdot B(s)$  и  $D(s) - \tilde{\Psi}(s)$  соответственно. Убедиться, что эти матрицы различаются несущественно. В противном случае вернуться к операции 3 и уменьшить числа  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

**Операции 6 и 7.** Совпадают с одноимёнными операциями процедуры 9.2.1. ■

Исследуем точность и качество системы с построенным регулятором (9.2.53). Найдём связь векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{f}$ . Для этого подставим в выражение (9.2.30) тождество (9.2.44), которое запишем с учётом (9.2.39) в виде

$$G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s) = \mathcal{E}^0(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s). \quad (9.2.58)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= D^{-1}(s) \left\{ D(s)\tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} R(s)D^{-1}(s) + E_m \right\} M(s)\mathbf{f} = \\ &= \left\{ \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} R(s) + E_m \right\} D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f} = \\ &= \left\{ \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} [D(s) - \tilde{\Psi}(s)] + E_m \right\} D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (9.2.59)$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} [D(s) - \tilde{\Psi}(s)] + \tilde{\Psi}^{-1}(s)E_m\tilde{\Psi}(s) = \\ &= -\tilde{\Psi}^{-1}(s) \left\{ [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} - E_m \right\} \tilde{\Psi}(s) + \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} D(s). \end{aligned}$$

Пренебрежём первым слагаемым в правой части этого равенства при достаточно малых числах  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Получим выражение

$$\mathbf{y} \approx \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} M(s)\mathbf{f}, \quad (9.2.60)$$

которое отличается от (9.2.33) полиномиальной матрицей  $\mathcal{E}^0(s)$  с малыми коэффициентами.

**Пример 9.2.1.** Рассмотрим датчик угловой скорости в процессе измерения угловой скорости. В этом случае он описывается уравнениями, аналогичными уравнениям (9.1.49)

$$a\ddot{\alpha} + h\dot{\beta} = m_{z_1} + m_2, \quad r\ddot{\beta} - h\dot{\alpha} = m_x + m_1, \quad (9.2.61)$$

где  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$  – моменты, пропорциональные измеряемым угловым скоростям, трактуемые далее как внешние возмущения.

Введём безразмерные переменные

$$y_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad (9.2.62)$$

где  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$  рад, сократим (9.2.61) на 1 ньютонметр и обозначим

$$\begin{aligned} d_{12}^{[1]} &= -\frac{h}{r}, & d_{21}^{[1]} &= \frac{h}{a}, & b_{11}^{[0]} &= \frac{1}{r}, & b_{22}^{[0]} &= \frac{1}{a}, \\ m_x &= u_1, & m_{z_1} &= u_2, & m_1 &= f_1, & m_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (9.2.63)$$

и запишем уравнения (9.2.61) в форме «вход-выход»

$$\begin{pmatrix} s^2 & d_{12}^{[1]}s \\ d_{21}^{[1]}s & s^2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (9.2.64)$$

Задача состоит в нахождении такого регулятора (9.2.53), чтобы система (9.2.64), (9.2.53) при действии ступенчатых внешних возмущений

$$f_i(t) = \begin{cases} \bar{f}_i & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, 2},$$

имела установившиеся ошибки

$$y_{уст.i} \leq y_{уст.i}^* \quad (y_i = z_i) \quad i = \overline{1, 2}, \quad (9.2.65)$$

а её время регулирования при апериодическом переходном процессе удовлетворяло условию

$$t_{рег.i} = \bar{t}_{рег.i} \quad i = \overline{1, 2}, \quad (9.2.66)$$

где  $\bar{f}_i$ ,  $y_{уст.i}^*$ ,  $\bar{t}_{рег.i}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ) – заданные числа.

Для решения этой задачи используем процедуру 9.2.1.

**Операция 1.** Уравнения объекта (9.2.61) уже приведены к форме «вход-выход»

(9.2.64), и поэтому переходим к построению уравнения качества. Объект (9.2.64) устойчив по возмущению ( $\det M(s) = \det B(s) = b_{11}^{[0]}b_{22}^{[0]}$ ), и поэтому в соответствии с (9.2.20), (9.2.22) запишем

$$M(s)\tilde{\Psi}(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_{11}(\tau_1 s + 1) & 0 \\ 0 & h_{22}(\tau_2 s + 1) \end{pmatrix}, \quad (9.2.67)$$

где

$$h_{ii} = \frac{\bar{f}_i}{y_{уст.i}^*}, \quad \tau_i = \frac{\bar{t}_{рег.i}}{3} \quad i = \overline{1, 2}. \quad (9.2.68)$$

Эта матрица не удовлетворяет условию (9.2.37), поэтому сформируем

$$\tilde{\Psi}(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]}h_{11}(\tau_1 s + 1)(T_1 s + 1) & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]}h_{22}(\tau_2 s + 1)(T_2 s + 1) \end{pmatrix},$$

где

$$T_i = \frac{1}{b_{ii}^{[0]}h_{ii}\tau_i} \quad i = \overline{1, 2}.$$



При этом постоянные времени  $T_i$  должны быть несоизмеримо меньше чисел  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ). Это можно достичь, выбирая

$$h_{ii} \geq \frac{\bar{f}_i}{y_{yct.i}^*} \quad i = \overline{1, 2}.$$

**Операция 2.** Индекс элиминантной матрицы объекта (9.2.61)  $\check{\mu} = 2$ . Он был определён в примере 9.1.4.

**Операция 3.** Построим полином  $\mathcal{E}^0(s)$ . Заметим, что в рассматриваемом случае

$$N(s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} 1/r & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \nu_1 = \nu_2 = 2, \\ \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = 2. \end{matrix}$$

Полином  $\mathcal{E}^0(s)$ , удовлетворяющий условиям (9.2.56), (9.2.57), имеет вид

$$\mathcal{E}^0(s) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 s + 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^0 s + 1 \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon_i^0 \ll \tau_i$  ( $i = \overline{1, 2}$ ).

**Операция 4.** Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} s^2 & d_{12}^{[1]} s \\ d_{21}^{[1]} s & s^2 \end{pmatrix}$$

столбцово-правильная матрица, а  $\check{\mu} = \check{\check{\mu}} = 2$  и ранг  $\check{M}_{e\check{\mu}} = 8$ .

**Операция 5.** В тождестве (9.2.44) матрица

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} b_{11}^{[0]} h_{11} (\tau_1 s + 1) (T_1 s + 1) (\varepsilon_1^0 s + 1) & 0 \\ 0 & b_{22}^{[0]} h_{22} (\tau_2 s + 1) (T_2 s + 1) (\varepsilon_1^0 s + 1) \end{pmatrix},$$

а матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$  имеют вид (9.1.54), и поэтому эта операция сводится к операции 3 примера 9.1.4 и искомые матрицы  $G^{[0]}$ ,  $G^{[1]}$ ,  $R^{[0]}$ ,  $R^{[1]}$  регулятора (9.1.58) имеют вид (9.1.60).

■

### 9.2.6. Задача слежения

Рассмотрим следящую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + M\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = L\mathbf{x}; \quad (9.2.69)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y} + B_p^n \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}, \quad (9.2.70)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  –  $\varkappa$ -мерный вектор задающих воздействий,  $B_p^n$  – матрица чисел размеров  $n_p \times \varkappa$ .

Желаемые значения регулируемого вектора  $\mathbf{z}(t)$  – цель управления – описываются  $m$ -мерной вектор-функцией  $\mathbf{z}_{жс}(t)$ . Вектор  $\mathbf{z}_{жс}(t)$  задается уравнениями желаемой модели системы

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m \mathbf{x}_m + B_m \mathbf{v}, \quad \mathbf{z}_{жс} = L_m \mathbf{x}_m, \quad (9.2.71)$$

где  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $L_m$  – заданные матрицы чисел размеров  $n_m \times n_m$ ,  $n_m \times \varkappa$ ,  $m \times n_m$  соответственно.

Во многих случаях задающее и желаемое движения совпадают

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{z}_{жс}(t). \quad (9.2.72)$$

Объём сведений о задающих воздействиях может быть различным: они могут быть известны априори, но неизмеряемы, либо, наоборот, – неизвестны заранее, но измеряемы в процессе работы системы.

**Задача 9.2.2.** (Задача синтеза следящих систем). При известных параметрах уравнений объекта (9.2.69) и уравнений (9.2.71) [либо (9.2.72)] связи цели управления с задающим воздействием найти уравнения (9.2.70) регулятора такие, чтобы ошибки слежения

$$|z_i(t) - z_{жс.i}(t)| \leq \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad t \geq t_{рег}, \quad (9.2.73)$$

где  $\varepsilon_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Уточним эту задачу для объектов второго вида. Запишем уравнения (9.2.69), (9.2.70) в форме «вход-выход»

$$D(s)\mathbf{y} = B(s)\mathbf{u} + M(s)\mathbf{f}, \quad (\mathbf{z} = \mathbf{y}), \quad (9.2.74)$$

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y} + R^n(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.75)$$

В этой форме уравнения (9.2.71) желаемой модели примут вид

$$\Psi_m(s)\mathbf{y}_{жс} = L_m(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.76)$$

**Задача 9.2.3.** (Задача синтеза следящих систем с объектами второго вида) При заданных параметрах объекта (9.2.74) найти регулятор (9.2.75) такой, чтобы ошибки слежения

$$|y_i(t) - y_{жс.i}(t)| \leq \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad t \geq t_{рег}. \quad (9.2.77)$$

Заметим, что при  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}_{жс}(t)$  задача слежения сводится к задаче регулирования. Действительно, введём вектор ошибок слежения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{жс}(t) \quad (9.2.78)$$

и положим в (9.2.75)

$$R^n(s) = -R(s), \quad (9.2.79)$$

тогда систему (9.2.74), (9.2.75) можно записать в виде

$$D(s)\boldsymbol{\varepsilon}^f = B(s)\mathbf{u} + M(s)\mathbf{f} - D(s)\mathbf{y}_{\text{жс}}, \quad G(s)\mathbf{u} = R(s)\boldsymbol{\varepsilon}^f. \quad (9.2.80)$$

Вводя вектор  $\tilde{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}', \mathbf{y}'_{\text{жс}}]'$  и матрицу  $\tilde{M}(s) = [M'(s), -D'(s)]'$ , приходим к уравнениям (9.2.27), (9.2.28) с точностью до обозначения  $\boldsymbol{\varepsilon}^f = \mathbf{y}$ . Требования к точности и качеству системы регулирования (9.2.80) будем формулировать в обобщённой форме (9.2.77):  $|\varepsilon_i^f| \leq \varepsilon_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $t \geq t_0$ .

### 9.2.7. Построение следящих систем при $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$

Приведём другой путь решения задачи 9.2.3 при  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$ , не сводящий её к задаче регулирования.

Найдём вначале связь вектора  $\mathbf{y}$  с вектором  $\mathbf{v}$ .

При  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  запишем аналогично (9.2.29)

$$\mathbf{u} = [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)]^{-1} R^n(s)\mathbf{v},$$

подставим это выражение в (9.2.74) и получим

$$\mathbf{y}^v = D^{-1}(s)B(s) [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)]^{-1} R^n(s)\mathbf{v}, \quad (9.2.81)$$

Таким образом, выход объекта

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^v + \mathbf{y}^f,$$

где  $\mathbf{y}^f$  – реакция системы на внешнее возмущение, определяемая выражением (9.2.30)

$$\mathbf{y}^f = D^{-1}(s) \left\{ B(s) [G(s) - R(s)D^{-1}(s)B(s)]^{-1} R(s)D^{-1}(s) + E_m \right\} M(s)\mathbf{f}. \quad (9.2.82)$$

Пусть матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора (9.2.75) получены в результате процедуры 9.2.2. Они удовлетворяют равенству (9.2.58), подставляя которое в (9.2.81), получим

$$\mathbf{y}^v = \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} R^n(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.83)$$

При

$$R^n(s) = \tilde{\Psi}(s) \quad (9.2.84)$$

ошибка слежения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^f = \mathbf{y}^v - \mathbf{y}_{\text{жс}} + \mathbf{y}^f = & \tilde{\Psi}^{-1}(s) \left\{ [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} - E_m \right\} \tilde{\Psi}(s)\mathbf{y}_{\text{жс}} - \\ & - \tilde{\Psi}^{-1}(s) \left\{ [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} - E_m \right\} \tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)M(s)\mathbf{f} + \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} M(s)\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Выберем коэффициенты  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, m}$ ) полиномиальной матрицы  $\mathcal{E}^0(s)$  достаточно малыми и получим приближенное выражение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^f \approx \tilde{\Psi}^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} M(s) \mathbf{f}, \quad (9.2.85)$$

из которого следует, что выбором  $\tilde{\Psi}(s)$  всегда можно выполнить требования (9.2.77) к точности слежения.

Таким образом, искомый регулятор имеет вид

$$[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)] B(s) \mathbf{u} = [D(s) - \tilde{\Psi}(s)] \mathbf{y} + \tilde{\Psi}(s) \mathbf{y}_{\text{жс}}. \quad (9.2.86)$$

Условие его реализуемости

$$\partial_{ri} \{ [\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)] B(s) \} \geq \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.2.87)$$

отличается от условия (9.2.54), так как в соответствии с ограничением (9.2.37)

$$\partial_{ri} [D(s) - \tilde{\Psi}(s)] \leq \partial_{ri} \tilde{\Psi}(s) - 1 \quad i = \overline{1, m}.$$

Изложенное является развитием процедуры 3.3.1 на многомерный случай.

### 9.2.8. Слежение при $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$

Пусть  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$  связаны уравнением (9.2.76) желаемой модели системы.

Положим в регуляторе

$$[\mathcal{E}^0(s) + O^E(s)] B(s) \mathbf{u} = [D(s) - \tilde{\Psi}(s)] \mathbf{y} + R^n(s) \mathbf{y}_{\text{жс}} \quad (9.2.88)$$

матрицы

$$\tilde{\Psi}(s) = \tilde{\Psi}_m(s), \quad R^n(s) = L_m(s). \quad (9.2.89)$$

Используем (9.2.83) и получим уравнение

$$\mathcal{E}^0(s) \tilde{\Psi}_m(s) \mathbf{y}^v = L_m(s) \mathbf{v}, \quad (9.2.90)$$

отличающееся от желаемой модели системы лишь малым оператором  $\mathcal{E}^0(s)$ , и поэтому  $\mathbf{y}^v(t) \approx \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$ .

Ошибка регулирования, определяемая приближённым выражением (9.2.60), имеет вид

$$\mathbf{y}^f \approx \tilde{\Psi}_m^{-1}(s) [\mathcal{E}^0(s)]^{-1} M(s) \mathbf{f}. \quad (9.2.91)$$

Установившаяся ошибка при ступенчатом внешнем возмущении

$$\mathbf{y}_{\text{уст}}^f = (\tilde{\Psi}_m^{[0]})^{-1} M^{[0]} \bar{\mathbf{f}}. \quad (9.2.92)$$

Если компоненты этого вектора удовлетворяют условию

$$|\mathbf{y}_{\text{уст}.i}^f| \leq \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.2.93)$$

то задача 9.2.3 решена при достаточно малых параметрах полиномиальной матрицы  $\mathcal{E}^0(s)$  и  $t > t_{pez}$ .

Если матрица  $\Psi_m(s)$  желаемой модели системы такова, что не выполняется требование (9.2.92) к точности, то аналогично одномерному случаю сформируем уравнение

$$\left[ E_m s + \left( \Psi_m^{[0]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[0]} \right] \Psi_m(s) \mathbf{y}_{жс} = \left[ E_m s + \left( \Psi_m^{[0]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[0]} \right] L_m(s) \mathbf{v},$$

эквивалентное уравнению (9.2.76) желаемой модели, и примем в регуляторе (9.2.86)

$$\bar{\Psi}(s) = \left[ E_m s + \left( \Psi_m^{[0]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[0]} \right] \Psi_m(s), \quad R^n(s) = \left[ E_m s + \left( \Psi_m^{[0]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[0]} \right] L_m(s). \quad (9.2.94)$$

Тогда при ступенчатом внешнем возмущении

$$\mathbf{y}_{y_{cm}}^f = \left( \tilde{\Psi}^{[0]} \right)^{-1} M^{[0]} \bar{\mathbf{f}} \quad (9.2.95)$$

требование к точности (9.2.93) выполняется при соответствующем выборе матрицы  $\tilde{\Psi}^{[0]}$ .

Соотношения (9.2.89), (9.2.94) накладывают ограничения на уравнения желаемой модели, связанные с существованием и реализуемостью регулятора (9.2.88).

### 9.2.9. Построение следящих систем при $\mathbf{f}(t) = 0$

При отсутствии внешних возмущений можно решить задачу 9.2.2, в которой  $r \neq m$ . Действительно, запишем уравнения объекта (9.2.69) в канонической форме Лагранжа

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad \mathbf{z} = L(s)\mathbf{y}. \quad (9.2.96)$$

Уравнение регулятора будем искать по-прежнему в форме (9.2.75). Задающее воздействие связано с желаемой вектор-функцией  $\mathbf{z}_{жс}(t)$  уравнением

$$\bar{\Psi}_m(s)\mathbf{z}_{жс} = L_m(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.97)$$

Найдём связь векторов  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{v}$  в системе (9.2.96), (9.2.75). Для этого умножим первое из уравнений (9.2.96) на  $G(s)$  и с учётом (9.2.75) получим

$$[G(s)P(s) - R(s)N(s)]\mathbf{q} = R^n(s)\mathbf{v},$$

и следовательно,

$$\mathbf{z} = L(s)N(s)[G(s)P(s) - R(s)N(s)]^{-1}R^n(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.98)$$

Матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора будем определять из тождества

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \bar{\Psi}_m(s)L_m(s)N(s) \quad (9.2.99)$$

и положим

$$R^n(s) = L_m(s). \quad (9.2.100)$$

При этих условиях из (9.2.98) следует

$$\mathbf{z} = \bar{\Psi}_m^{-1}(s)L_m(s)\mathbf{v}.$$

### 9.2.10. Компенсационная схема\*

Изложим ещё один подход к построению следящих систем при  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  и  $r \neq m$ . Регулятор для объекта (9.2.96) будем формировать на основе (9.1.72)

$$Q(s)\mathbf{u} = H^{(1)}(s)\mathbf{y} + H^{(2)}(s)\mathbf{u} + R^n(s)\mathbf{v}, \quad (9.2.101)$$

где матрицы  $H^{(1)}(s)$ ,  $H^{(2)}(s)$  находятся из тождества (9.1.76), а гурвицева матрица  $Q(s)$  определяется выражением (9.1.81).

Построим матрицу связи векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{v}$ . Для этого исключим в уравнении (9.2.101) регулятора вектор  $\mathbf{u}$  с помощью уравнений объекта и получим

$$Q(s)\mathbf{u} = [H^{(1)}(s)N(s) + H^{(2)}(s)P(s)]\mathbf{q} + R^n(s)\mathbf{v}.$$

Заменяем в этом выражении  $\mathbf{u}$  на  $P(s)\mathbf{q}$ . Найдём вектор  $\mathbf{q}$  и подставим его во второе из уравнений объекта (9.2.96). Тогда

$$\mathbf{y} = N(s) [Q(s)P(s) - H^{(1)}(s)N(s) - H^{(2)}(s)P(s)]^{-1} R^n(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.102)$$

С учётом (9.1.76) запишем

$$\mathbf{y} = N(s)[P(s) - F(s)]^{-1}Q^{-1}(s)R^n(s)\mathbf{v}. \quad (9.2.103)$$

Примем

$$R^n(s) = Q(s)R^v, \quad (9.2.104)$$

где  $R^v$  – некоторая матрица чисел, и получим

$$\mathbf{y} = N(s)[P(s) - F(s)]^{-1}R^v\mathbf{v}. \quad (9.2.105)$$

Выбором полиномиальной матрицы  $F(s)$  и матрицы  $R^v$  можно приблизить связь векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{v}$  к матрице желаемой модели.

## 9.3. Синтез на базе процедур АКОР

### 9.3.1. Процедура АКОР и условие оптимальности в частотной форме

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (9.3.1)$$

все переменные состояния которого доступны измерению.

Задача 9.3.1. (Задача АКОР) Найти матрицу  $C$  регулятора

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (9.3.2)$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (9.3.1), (9.3.2), возбуждённых произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt, \quad (9.3.3)$$

в котором  $Q$  – заданная положительно-определённая матрица. ■

Решение этой задачи АКОР, отличающейся от задачи 4.1.1 лишь векторным управлением, заключается в следующем.

Процедура 9.3.1. (процедура АКОР). Искомая матрица

$$C = -PB, \quad (9.3.4)$$

где положительно-определённая матрица  $P$  является решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0, \quad (9.3.5)$$

которое (решение  $P > 0$ ) находится с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)'}P^{(\alpha+1)} = -Q - C^{(\alpha)}C^{(\alpha)'} \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (9.3.6)$$

где

$$C^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}B, \quad (9.3.7)$$

$$A^{(\alpha)} = A + BC^{(\alpha)'}. \quad (9.3.8)$$

Если собственные числа  $-\lambda_i [A^{(0)}]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – матрицы  $A^{(0)} = A + BC^{(0)'}$  таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i [A^{(0)}] < 0 \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.3.9)$$

то последовательность матриц  $P^{(\alpha)}$  обладает свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P^{(\alpha)} = P. \quad (9.3.10)$$

Доказательство свойства 9.3.10 приведено в 4.Д.1.

Положительно-определённость матрицы  $Q$  в задаче 9.3.1 можно, без изменения процедуры её решения, ослабить, предполагая  $Q$  неотрицательно-определённой, удовлетворяющей условию (4.1.16).

Ниже широко используется условие оптимальности в частотной форме. Для его вывода прибавим и вычтем из левой части (9.3.5) матрицу  $sP$  и умножим результат слева на  $B'(-Es - A)^{-1'}$ , а справа – на  $(Es - A)^{-1}B$ . Получим

$$\begin{aligned} & B'(-Es - A)^{-1'}[-PA + Ps - A'P - sP' + PBB'P - Q](Es - A)^{-1}B = \\ & = B'(-Es - A)^{-1'}PB + B'P(Es - A)^{-1}B + \\ & + B'(-Es - A)^{-1'}PBB'P(Es - A)^{-1}B - B'(-Es - A)^{-1'}H'H(Es - A)^{-1}B = 0, \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

где  $H'H = Q$ .

Введём обозначения

$$H(s) = H(Es - A)^{-1}B = HB(s), \quad (9.3.12)$$

$$W^{(1)}(s) = -C'(Es - A)^{-1}B = -C'B(s), \quad (9.3.13)$$

где  $W^{(1)}(s)$  – передаточная матрица разомкнутой системы (9.3.1), (9.3.2), а

$$B(s) = (Es - A)^{-1}B. \quad (9.3.14)$$

С учётом этих обозначений, тождество (9.3.11) принимает вид

$$W^{(1)}(-s) + W^{(1)}(s) + W^{(1)'(-s)}W^{(1)}(s) = H'(-s)H(s). \quad (9.3.15)$$

Прибавим к обеим частям этого выражения единичную матрицу и получим окончательно

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-s) \right]' \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right] = E_m + H'(-s)H(s). \quad (9.3.16)$$

Это тождество при  $s = j\omega$  ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ) и является *условием оптимальности* закона управления (9.3.2) в частотной форме. При  $m = 1$  оно совпадает с (4.2.9).

### 9.3.2. Точность при ступенчатых внешних возмущениях

Пусть система (9.3.1), (9.3.2) оптимальна в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left( z'Q^{(0)}z + u'u \right) dt, \quad (9.3.17)$$

где  $z(t)$  –  $m$ -мерный вектор регулируемых переменных ( $z = Lx$ ), а

$$Q^{(0)} = \text{diag} \left[ q_{11}^{(0)} \quad q_{22}^{(0)} \quad \cdots \quad q_{mm}^{(0)} \right]. \quad (9.3.18)$$

Пусть на объект действует внешнее возмущение, приложенное в местах приложения управления. Такой объект описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + B(u + f), \quad z = Lx. \quad (9.3.19)$$

Исследуем точность этой оптимальной системы. Установим вначале связь векторов  $z$  и  $f$ . Эта связь имеет вид

$$z(s) = LB(s) \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} f(s). \quad (9.3.20)$$

Действительно, преобразуя (9.3.19) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$z(s) = L(Es - A)^{-1}B(u + f). \quad (9.3.21)$$



Исключим из этого выражения сумму  $\mathbf{u} + \mathbf{f}$ . Запишем  $\mathbf{u} = C'\mathbf{x} = C'(Es - A)^{-1} \times B(\mathbf{u} + \mathbf{f})$ . Прибавим к обеим частям вектор  $\mathbf{f}$  и получим соотношение

$$\mathbf{u} + \mathbf{f} = [E_m + W^{(1)}(s)]^{-1} \mathbf{f}, \quad (9.3.22)$$

подставляя которое в (9.3.21), убеждаемся в справедливости связи (9.3.20).

Запишем эту связь в иной форме

$$[E_m + W^{(1)}(s)] \cdot [LB(s)]^{-1} \mathbf{z}(s) = \mathbf{f}(s).$$

Отсюда

$$\mathbf{z}'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [E_m + W^{(1)}(-s)]' [E_m + W^{(1)}(s)] [LB(s)]^{-1} \mathbf{z}(s) = \mathbf{f}'(-s)\mathbf{f}(s). \quad (9.3.23)$$

Теперь воспользуемся условием оптимальности в частотной форме и запишем (9.3.23) как

$$\mathbf{z}'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [E_m + B'(-s)L'Q^{(0)}LB(s)] [LB(s)]^{-1} \mathbf{z}(s) = \mathbf{f}'(-s)\mathbf{f}(s), \quad (9.3.24)$$

или

$$\mathbf{z}'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [LB(s)]^{-1} \mathbf{z}(s) + \mathbf{z}'(-s)Q^{(0)}\mathbf{z}(s) = \mathbf{f}'(-s)\mathbf{f}(s). \quad (9.3.25)$$

Заметим, что с учётом (9.3.21) можно записать последнее выражение в виде

$$[\mathbf{u}(-s) + \mathbf{f}(-s)]' [\mathbf{u}(s) + \mathbf{f}(s)] + \mathbf{z}'(-s)Q^{(0)}\mathbf{z}(s) = \mathbf{f}'(-s)\mathbf{f}(s). \quad (9.3.26)$$

Пусть  $\mathbf{f}(t)$  – ступенчатое внешнее возмущение (9.2.3). В соответствии с теоремой о конечном значении оригинала умножим (9.3.26) на  $-s^2$ , найдём предел при  $s \rightarrow \infty$  и получим

$$(\mathbf{u}_{cm} + \bar{\mathbf{f}})' (\mathbf{u}_{cm} + \bar{\mathbf{f}}) + \mathbf{z}'_{cm} Q^{(0)} \mathbf{z}_{cm} = \bar{\mathbf{f}}' \bar{\mathbf{f}}. \quad (9.3.27)$$

Так как  $(\mathbf{u}_{cm} + \bar{\mathbf{f}})' (\mathbf{u}_{cm} + \bar{\mathbf{f}}) \geq 0$ , то  $\mathbf{z}'_{cm} Q^{(0)} \mathbf{z}_{cm} = \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} z_{cm,i}^2 \leq \bar{\mathbf{f}}' \bar{\mathbf{f}}$ , и таким образом доказано следующее свойство.

Свойство 9.3.1. Статические ошибки системы (9.3.19), (9.3.2) регулятор, (9.3.2) которой получен в результате решения задачи о минимуме функционала (9.3.17) на решениях системы (9.3.1), (9.3.2), удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} z_{cm,i}^2 \leq \bar{\mathbf{f}}' \bar{\mathbf{f}}. \quad (9.3.28)$$

■

Это свойство позволяет решить следующую задачу синтеза регуляторов по заданной точности.

**Задача 9.3.2.** Для объекта (9.3.19) найти регулятор (9.3.2) такой, чтобы система (9.3.19), (9.3.2) удовлетворяла при ступенчатых внешних возмущениях требованиям к точности

$$|z_{cm,i}| \leq z_{cm,i}^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.29)$$

где  $z_{cm,i}^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Для её решения определим коэффициенты матрицы  $Q^{(0)}$  в функционале (9.3.17) из неравенства

$$q_{ii}^{(0)} \geq \frac{\bar{f}'\bar{f}}{z_{cm,i}^{*2}} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.30)$$

В этом случае из неравенства (9.3.28) следует, что

$$z_{cm,i}^2 \leq z_{cm,i}^{*2} \quad i = \overline{1, m}.$$

Используем процедуру 9.3.1 при

$$Q = L'Q^{(0)}L \quad (9.3.31)$$

и находим матрицу  $C'$ , разрешающую задачу 9.3.2.

### 9.3.3. Точность при гармонических воздействиях

Рассмотрим теперь случай, когда система (9.3.1), (9.3.2), оптимальная в смысле функционала (9.3.17), находится под воздействием гармонического возмущения (9.2.4). Пусть для простоты это одночастотное воздействие  $\omega_i^f = \omega^f$  ( $i = \overline{1, \mu}$ ).

В установившемся режиме амплитуда вынужденных колебаний

$$z_{zarp,m,i} = \left| \left[ LB(j\omega^f) \{E_m + W^{(1)}(j\omega^f)\}^{-1} \mathbf{f}_{zarp,m} \right]_i \right| \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.32)$$

где, как и ранее  $[\psi]_i$  –  $i$ -я компонента вектора  $\psi$ .

Введём комплексные вектора

$$\mathbf{z}^+ = LB(j\omega^f) [E_m + W^{(1)}(j\omega^f)]^{-1} \mathbf{f}_{zarp,m} e^{j\omega^f t}, \quad (9.3.33)$$

$$\mathbf{z}^- = LB(-j\omega^f) [E_m + W^{(1)}(-j\omega^f)]^{-1} \mathbf{f}_{zarp,m} e^{-j\omega^f t}. \quad (9.3.34)$$

Они описывают реакции системы (9.3.19), (9.3.2) на «возмущения»  $\mathbf{f}^+(t) = \mathbf{f}_{zarp,m} e^{j\omega^f t}$  и  $\mathbf{f}^-(t) = \mathbf{f}_{zarp,m} e^{-j\omega^f t}$  соответственно.

Аналогично (9.3.23) запишем

$$\mathbf{z}^{-'} [LB(-j\omega^f)]^{-1'} [E_m + W^{(1)}(-j\omega^f)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega^f)] [LB(j\omega^f)]^{-1} \mathbf{z}^+ = \mathbf{f}'_{zarp,m} \mathbf{f}_{zarp,m}. \quad (9.3.35)$$

Используем тождество (9.3.16) при  $s = j\omega^f$  и найдём, что

$$\mathbf{z}^{-'} [LB(-j\omega^f)]^{-1'} [LB(j\omega^f)]^{-1} \mathbf{z}^+ + \mathbf{z}^{-'} Q^{(0)} \mathbf{z}^+ = \mathbf{f}'_{zarp,m} \mathbf{f}_{zarp,m}. \quad (9.3.36)$$

По построению, вектора  $\mathbf{z}^-$  и  $\mathbf{z}^+$  – комплексно сопряжённые, и поэтому

$$\mathbf{z}^{-'}[LB(-j\omega^f)]^{-1'}[LB(j\omega^f)]^{-1}\mathbf{z}^+ \geq 0. \quad (9.3.37)$$

Кроме того, они обладают следующим свойством

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{-'}Q^{(0)}\mathbf{z}^+ &= \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} z_i^- z_i^+ = \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} \left[ LB(-j\omega^f) \{E_m + W^{(1)}(-j\omega^f)\}^{-1} \mathbf{f}_{\text{гарм}} \right]_i \cdot \\ &\cdot \left[ LB(j\omega^f) \{E_m + W^{(1)}(j\omega^f)\}^{-1} \mathbf{f}_{\text{гарм}} \right]_i = \sum_{i=0}^m q_{ii}^{(0)} z_{\text{гарм},i}^2. \end{aligned} \quad (9.3.38)$$

Используем неравенство (9.3.37) и свойство (9.3.38) получим из (9.3.36) соотношение

$$\sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} z_{\text{гарм},i}^2 \leq \mathbf{f}'_{\text{гарм}} \mathbf{f}_{\text{гарм}}, \quad (9.3.39)$$

которое выражает следующее свойство оптимальных систем при гармонических воздействиях.

**Свойство 9.3.2.** Амплитуда установившихся вынужденных колебаний объекта (9.3.19), при  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{гарм}} \sin \omega^f t$  с регулятором (9.3.2), полученным в результате решения задачи о минимуме функционала (9.3.17) на решениях системы (9.3.1), (9.3.2), удовлетворяют неравенству (9.3.39). ■

Это свойство позволяет решить задачу 9.3.2 синтеза регулятора (9.3.2) для объекта (9.3.19) при гармонических возмущениях и требованиях к точности

$$z_{\text{гарм},i} \leq z_{\text{гарм},i}^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.40)$$

где  $z_{\text{гарм},i}^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа.

Действительно, если принять

$$q_{ii}^{(0)} \geq \frac{\mathbf{f}'_{\text{гарм}} \mathbf{f}_{\text{гарм}}}{z_{\text{гарм},i}^{*2}} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.41)$$

то, используя процедуру 9.3.1, получим матрицу  $C$ , при которой выполняются требования (9.3.40) к точности.

### 9.3.4. Синтез на основе АКОР по критерию обобщённой работы

Пусть объект (9.3.1) – асимптотически устойчив, а матрица регулятора (9.3.2)

$$C = -P^{(1)}B, \quad (9.3.42)$$

где  $P^{(1)}$  – положительно-определённая матрица, получаемая на первом шаге ( $\alpha = 1$ ) итерационной процедуры 9.3.1.

Это означает, что матрица  $P^{(1)}$  является решением уравнения Ляпунова (9.3.6)

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} = -Q. \quad (9.3.43)$$

Решение этого уравнения и вычисление матрицы  $C$  составляют процедуру АКОР по критерию обобщённой работы. Она является развитием процедуры 4.1.2 на случай векторного управления.

Условие оптимальности по критерию обобщённой работы в частотной форме имеет вид

$$W^{(1)'(-s)} + W^{(1)}(s) = H'(-s)H(s), \quad s = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (9.3.44)$$

Это тождество нетрудно получить, повторяя преобразования (9.3.11)–(9.3.15).

Исследуем точность системы (9.3.19), (9.3.2), регулятор которой получен из выражений (9.3.42), (9.3.43) при  $Q = L'Q^{(0)}L$ . Для этого запишем тождество (9.3.23) в виде

$$\begin{aligned} & z'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [W^{(1)'(-s)} + W^{(1)}(s)] [LB(s)]^{-1} z(s) = \\ & = f'(-s)f(s) - z'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [E_m + W^{(1)'(-s)}W^{(1)}(s)] [LB(s)]^{-1} z(s). \end{aligned} \quad (9.3.45)$$

Используем условие оптимальности и запишем

$$\begin{aligned} & z'(-s)Q^{(0)}z(s) = f'(-s)f(s) - \\ & - z'(-s)[LB(-s)]^{-1'} [E_m + W^{(1)'(-s)}W^{(1)}(s)] [LB(s)]^{-1} z(s). \end{aligned} \quad (9.3.46)$$

Пусть  $f(t)$  – ступенчатое внешнее возмущение. Тогда из этого выражения следует аналогично (9.3.27)

$$z'_{cm}Q^{(0)}z_{cm} + (u_{cm} + f)'W^{(1)'(0)}W^{(1)}(0)(u_{cm} + f) = \bar{f}'\bar{f}. \quad (9.3.47)$$

Учитывая неотрицательность второго слагаемого приходим, к неравенству (9.3.28).

Если  $f(t)$  – гармоническое воздействие, то нетрудно убедиться в справедливости неравенства (9.3.39).

Таким образом, задача 9.3.1 может быть решена на основе процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, если матрицу  $Q$  в (9.3.49) сформировать в соответствии с (9.3.30), (9.3.31). При гармонических воздействиях неравенства (9.3.30) заменяются на (9.3.41).

### 9.3.5. Учёт требований к качеству

Усложним задачу 9.3.2 требованием (9.2.14) к качеству переходных процессов. Тогда она совпадёт с задачей 9.2.1. Для её решения исследуем систему (9.3.1), (9.3.2), регулятор которой получен в результате минимизации функционала

$$J = \int_0^{\infty} (z'Q^{(0)}z + \dot{z}'Q^{(1)}\dot{z} + u'u) dt, \quad (9.3.48)$$

где

$$Q^{(1)} = \text{diag} \left( \tau_1^2 q_{11}^{(0)} \quad \tau_2^2 q_{22}^{(0)} \quad \dots \quad \tau_m^2 q_{mm}^{(0)} \right). \quad (9.3.49)$$

В развёрнутой форме он имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} (z_i^2 + \tau_i^2 \dot{z}_i^2) + \sum_{i=1}^m u_i^2 \right] dt. \quad (9.3.50)$$

Заметим, что экстремальями (минималями) функционала

$$J = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} (z_i^2 + \tau_i^2 \dot{z}_i^2) dt \quad (9.3.51)$$

служат кривые  $z_i(t) = z_i(t_0)e^{-t/\tau_i}$  ( $i = \overline{1, m}$ ), которые являются решениями уравнения качества (9.2.18) при  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  и структуре  $\tilde{\Psi}(s)$ , определяемой выражениями (9.2.22)-(9.2.25).

Приведём (9.3.50) к стандартной форме (9.3.3). Учтём, что

$$\dot{\mathbf{z}} = L\dot{\mathbf{x}} = LA\mathbf{x} + LB\mathbf{u},$$

и запишем (9.3.48) как

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \mathbf{x}' (L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA) \mathbf{x} + \mathbf{x}' A'L'Q^{(1)}LB\mathbf{u} + \mathbf{u}' B'L'Q^{(1)}LA\mathbf{x} + \mathbf{u}' (E_m + B'L'Q^{(1)}LB) \mathbf{u} \right] dt, \quad (9.3.52)$$

Этот функционал содержит произведения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ , и, кроме того, матрица при произведении управлений является недиагональной. Это может привести (см. п. 4.5.2, п. 10.3.3) к малым запасам устойчивости оптимальной системы. В связи с этим наложим дополнительное ограничение на свойства объекта (9.3.1)

$$LB = 0. \quad (9.3.53)$$

При выполнении этого равенства функционал (9.3.52) примет вид

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \mathbf{x}' (L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA) \mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u} \right] dt. \quad (9.3.54)$$

Условие оптимальности (9.3.16) запишем как

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-s) \right]' \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right] = E_m + \mathcal{B}'(-s) (L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA) \mathcal{B}(s). \quad (9.3.55)$$

Распишем подробнее его правую часть. С учётом соотношения  $A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E$  получим

$$\begin{aligned} E_m + B'(-Es - A)^{-1}L'Q^{(0)}L(Es - A)^{-1}B + B'(-Es - A)^{-1}A'L'Q^{(1)}LA(Es - A)^{-1}B = \\ = E_m + [LB(-s)]'Q^{(0)}[LB(s)] - s^2[LB(-s)]'Q^{(1)}[LB(s)]. \end{aligned}$$

Таким образом, (9.3.55) примет вид

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-s) \right]' \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right] = E_m + [LB(-s)]' [Q^{(0)} - s^2 Q^{(1)}] [LB(s)]. \quad (9.3.56)$$

При достаточно больших значениях  $q_{ii}^{(0)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) одним из решений этого уравнения является

$$W^{(1)}(s) \approx H^{(0)}(Ts + E_m)[LB(s)], \quad (9.3.57)$$

где

$$H^{(0)'} H^{(0)} = Q^{(0)}, \quad T = \text{diag} \left( \tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_m \right). \quad (9.3.58)$$

Действительно, подставляя (9.3.57) в (9.3.56), найдём, что правая и левая части (9.3.56) отличаются суммой матриц  $W^{(1)'(-s)}$  и  $W^{(1)}(s)$ , которой можно пренебречь по сравнению с произведением  $W^{(1)'(-s)}W^{(1)}(s)$ , если  $q_{ii}^{(0)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) достаточно велики.

Подставляя (9.3.57) в (9.3.20) и пренебрегая в (9.3.20) единичной матрицей, получим

$$z(s) \approx (Ts + E_m)^{-1} \left[ H^{(0)} \right]^{-1} f(s). \quad (9.3.59)$$

В развёрнутой форме это соотношение имеет вид (9.2.23)

$$z_i(s) \approx \frac{f_i(s)}{\sqrt{q_{ii}^{(0)}}(\tau_i s + 1)} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.60)$$

Отсюда следует, что движение системы (9.3.19), (9.3.2), оптимальной при  $f = 0$ , в смысле функционала (9.3.48) близко к движению  $m$  автономных (несвязанных) систем.

Резюмируем изложенное как процедуру решения задачи 9.2.1.

**Процедура 9.3.2 (процедура аналитического синтеза регуляторов по заданным точности и качеству).**

**Операция 1.** Проверить ограничение (9.3.53) и сформировать матрицу

$$Q = L'Q^{(0)}L + A'L'Q^{(1)}LA, \quad (9.3.61)$$

в которой  $Q^{(0)}$  определяется неравенствами (9.3.30) либо (9.3.41), а матрица  $Q^{(1)}$  – на основе (9.3.49), где

$$\tau_i = \frac{\bar{t}_{peg.i}}{3} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.62)$$

**Операция 2.** Использовать процедуру 9.3.1 и найти матрицу  $C'$  регулятора 9.3.2.

**Операция 3.** Вычислить передаточную матрицу  $W^{(1)}(s)$  и проверить выполнение условия (9.3.57) либо решить уравнения системы (9.3.19), (9.3.2) и убедиться в выполнении требований к точности и качеству.

■

Необходимость операции 3 вызвана тем, что пока не доказана единственность решения матричного тождества (9.3.56) в виде (9.3.57).

Приведём теперь пример, подтверждающий правдоподобность приведённых рассуждений о качестве оптимальных систем.

Пример 9.3.1. Рассмотрим уравнения возмущённого продольного движения вертолета в строю.

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{v}_x &= -0.031 \Delta v_x + 0.003 \Delta v_y - 3.4 \Delta \omega_z - 9.8 \Delta v - 1.04 \Delta \varphi - 15. \Delta \alpha, \\
 \Delta \dot{v}_y &= 0.049 \Delta v_x - 0.62 \Delta v_y - 0.7 \Delta \omega_z - 74 \Delta \varphi - 47 \Delta \alpha, \\
 \Delta \dot{\omega}_z &= -0.77 \cdot 10^{-3} \Delta v_x - 0.47 \cdot 10^{-2} \Delta v_y - 0.32 \Delta \omega_z - \Delta \varphi - 3.3 \Delta \alpha, \\
 \Delta \dot{x} &= \Delta v_x, \\
 \Delta \dot{y} &= \Delta v_y, \\
 \Delta \dot{v} &= \Delta \omega_z,
 \end{aligned} \tag{9.3.63}$$

где  $\Delta \omega_z$ ,  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  – угловая скорость, скорости по осям  $x$  и  $y$ , угол тангажа, дистанция и высота относительно ведущего вертолета соответственно,  $\Delta \varphi$  – общий шаг несущего винта,  $\Delta \alpha$  – угол продольного отклонения автомата перекоса относительно фюзеляжа.

Измерительные приборы (гировертикаль, датчик угловой скорости, датчик высоты полета, устройство измерения дальности и пеленга до ведущего вертолета) доставляют информацию о всех переменных состояния вертолета.

Регулируемыми переменными являются

$$z_1 = \Delta x, \quad z_2 = \Delta y. \tag{9.3.64}$$

Требуется найти параметры регулятора (автопилота совместного движения вертолетов), обеспечивающего при действии на вертолёт ступенчатых внешних возмущений (порывы ветра)

$$f_1(t) = f_2(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0, \end{cases} \tag{9.3.65}$$

следующие показатели качества и точности:

*Вариант 1.* Время регулирования по координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$

$$t_{рег.1} \approx 30 \text{ с}, \quad t_{рег.2} \approx 10 \text{ с}, \tag{9.3.66}$$

при этом статические ошибки должны удовлетворять ограничениям

$$|\Delta x_{cm}| \leq 0.33 \text{ м}, \quad |\Delta y_{cm}| \leq 0.33 \text{ м}. \tag{9.3.67}$$

*Вариант 2.* Время регулирования по координатам  $\Delta x$  и  $\Delta y$

$$t_{рег.1} \approx 10 \text{ с}, \quad t_{рег.2} \approx 30 \text{ с}, \tag{9.3.68}$$

а требования к точности совпадают с (9.3.67).

В соответствии с (9.3.50) строим функционал оптимизации

$$J = \int_0^{\infty} \left[ q_{11}^{(1)} (\Delta x^2 + \tau_1^2 \Delta \dot{x}^2) + q_{22}^{(1)} (\Delta y^2 + \tau_2^2 \Delta \dot{y}^2) + \Delta \varphi^2 \Delta \varkappa^2 \right] dt, \quad (9.3.69)$$

где

$$q_{11}^{(1)} = q_{22}^{(1)} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1, \quad (9.3.70)$$

а величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  для вариантов 1 и 2 (9.3.71)

$$\begin{array}{ll} \text{Вариант 1:} & \tau_1 = 10, \quad \tau_2 = 3.33. \\ \text{Вариант 2:} & \tau_1 = 3.33, \quad \tau_2 = 10. \end{array} \quad (9.3.72)$$

Решая задачу АКОР, получим регуляторы для первого и второго вариантов соответственно

$$\begin{cases} \Delta \varphi = -0.87 \cdot 10^{-2} \Delta v_x + \Delta v_y - 5.83 \Delta \omega_z - 0.59 \cdot 10^{-2} \Delta x + 0.316 \Delta y - 6.76 \Delta v, \\ \Delta \varkappa = -3.45 \Delta v_x - 0.574 \Delta v_y + 35.6 \Delta \omega_z - 0.301 \Delta x - 0.55 \Delta y + 42.3 \Delta v, \end{cases} \quad (9.3.73)$$

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0.655 \Delta v_x + 2.8 \Delta v_y - 6.81 \Delta \omega_z + 0.146 \Delta x + 0.281 \Delta y - 7.93 \Delta v, \\ \Delta \varkappa = -1.24 \Delta v_x + 1.46 \Delta v_y + 12.3 \Delta \omega_z - 0.281 \Delta x + 0.146 \Delta y + 14.4 \Delta v. \end{cases} \quad (9.3.74)$$

На рис. 9.3.1 и 9.3.2 приведены графики переходных процессов для второго и первого вариантов. Из них следует, что времена переходных процессов и точность близки к требуемым. ■

### 9.3.6. Следящие системы

Уравнения регулятора (9.2.70) принимают в задаче 9.2.2 синтеза следящих систем с объектами (9.3.19) вид

$$\mathbf{u} = C' \mathbf{x} + K \mathbf{v}, \quad (9.3.75)$$

где  $K$  – искомая матрица размеров  $m \times m$ .

Найдём эту матрицу при  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{z}_{\text{ж}}(t)$  исходя из требований (9.2.73) к ошибкам слежения.

Связь вектора регулируемых переменных с вектором задающих воздействий следует непосредственно из (9.3.20)

$$\mathbf{z}(s) = L\mathcal{B}(s) \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} [\mathbf{f}(s) + K \mathbf{v}(s)]. \quad (9.3.76)$$

Если матрица  $C'$  регулятора (9.3.75) получена с помощью процедуры 9.3.2, то, используя приближённое соотношение (9.3.57), получим

$$\mathbf{z}(s) \approx (Ts + E_m)^{-1} \left[ H^{(0)} \right]^{-1} [\mathbf{f}(s) + K \mathbf{v}(s)]. \quad (9.3.77)$$



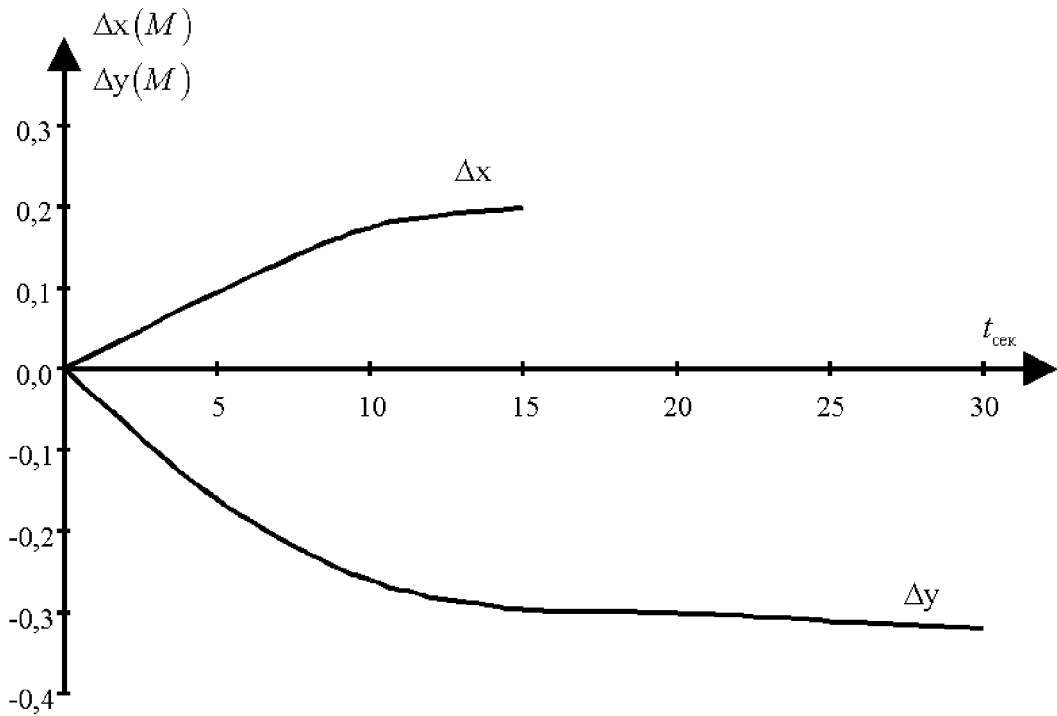


Рис. 9.3.1

Примем

$$K = H^{(0)}. \quad (9.3.78)$$

Тогда составляющие, вызванные задающим воздействием, описываются как

$$z_i(s) \approx \frac{v_i(s)}{\tau_i s + 1} = \frac{z_{жс.i}(s)}{\tau_i s + 1} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.79)$$

Это означает, что при достаточно малых  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) процедура 9.3.2 и выражение (9.3.78) обеспечивают требования (9.2.73) к точности слежения.

Пусть  $v(t) \neq z_{жс}(t)$ . В этом случае дополним уравнения регулятора (9.3.75) уравнением (9.2.71) желаемой модели системы и получим при условии (9.3.78) искомый регулятор

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m v, \quad z_{жс} = L_m x_m, \quad u = C' x + K z_{жс}. \quad (9.3.80)$$

Действительно, вектор составляющих  $z(s)$ , вызванных задающим воздействием, записывается, аналогично (9.3.77),

$$z(s) \approx (Ts + E_m)^{-1} [H^{(0)}]^{-1} K z_{жс}(s).$$

Отсюда, при условии (9.3.78), получим

$$z(s) \approx (Ts + E_m)^{-1} \Psi_m^{-1}(s) L_m(s) v, \quad (9.3.81)$$

где

$$\Psi_m^{-1}(s) L_m(s) = L_m (Es - A_m)^{-1} B_m. \quad (9.3.82)$$

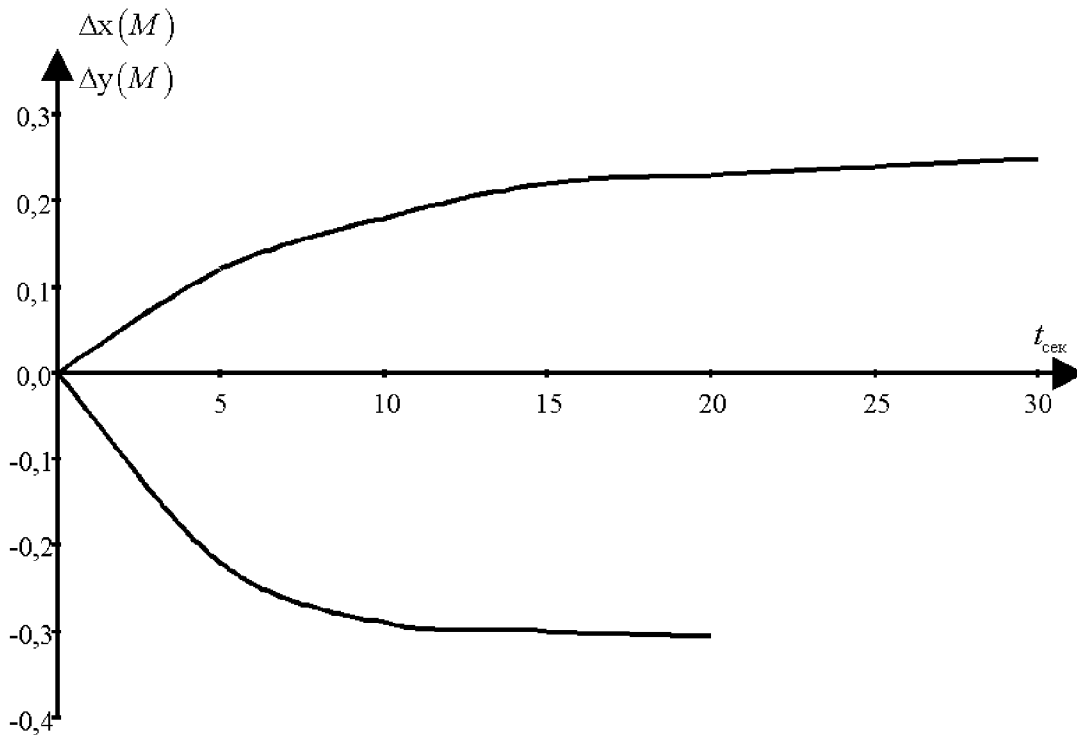


Рис. 9.3.2

### 9.3.7. Объект второго вида

Опишем применение процедуры АКОР для решения задачи 9.2.1 с объектами второго вида.

Рассмотрим устойчивый по управлению объект (9.2.15) приведённый к столбцово-правильной форме «вход-выход», описанный в п. 9.П.2.4

$$\tilde{D}(s)\mathbf{y} = \tilde{B}(s)\mathbf{u}. \quad (9.3.83)$$

Введем «новое» управление

$$\mathbf{u}^* = [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{B}(s)\mathbf{u}, \quad (9.3.84)$$

при котором уравнение (9.3.83) примет вид

$$\tilde{D}(s)\mathbf{y} = \tilde{B}^{(0)}\mathbf{u}^*. \quad (9.3.85)$$

Используем матрицу (9.2.19) уравнения качества и сформируем функционал

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ [\tilde{\Psi}^{[\infty]} \mathbf{y}^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]} \mathbf{y}]' [\tilde{\Psi}^{[\infty]} \mathbf{y}^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]} \mathbf{y}] \lambda^2 + \mathbf{u}^{*'} \mathbf{u}^* \right\} dt, \quad (9.3.86)$$

в котором  $\lambda$  – некоторое число, а матрицы  $\tilde{\Psi}^{[i]}$  ( $i = \overline{0, \infty}$ ) обладают следующими свойствами: полиномиальная матрица  $\tilde{\Psi}(s)$  вида (9.2.19) – столбцово-правильная и

может быть представлена в виде

$$\tilde{\Psi}(s) = \begin{pmatrix} s^{\varkappa_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\varkappa_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\varkappa_m} \end{pmatrix} \cdot \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} - \tilde{A}_y S(s), \quad (9.3.87)$$

где  $\varkappa = \max\{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m\}$ ,

$$S(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & \dots & s^{\varkappa_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & s^{\varkappa_2-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{\varkappa_m-1} \end{pmatrix}', \quad (9.3.88)$$

а  $\tilde{A}_y$  – матрица чисел размеров  $m \times \left(\sum_{i=1}^m \varkappa_i\right)$ , при этом

$$\varkappa_i = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.89)$$

Заметим, что, по построению, матрица  $\tilde{D}(s)$  обладает теми же свойствами, если заменить  $\varkappa_i$  на  $\bar{\nu}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), и поэтому уравнения объекта (9.3.85) и функционал (9.3.86) легко записать в стандартной форме (9.3.1), (9.3.3). Действительно, введём переменные

$$\begin{aligned} \check{x}_1 &= y_1, & \check{x}_2 &= \dot{y}_1, & \dots, & \check{x}_{\bar{\nu}_1} &= y_1^{(\bar{\nu}_1-1)}; \\ \check{x}_{\bar{\nu}_1+1} &= y_2, & \check{x}_{\bar{\nu}_1+2} &= \dot{y}_2, & \dots, & \check{x}_{\bar{\nu}_1+\bar{\nu}_2} &= y_2^{(\bar{\nu}_2-1)}; \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \check{x}_{n-\bar{\nu}_m+1} &= y_m, & \check{x}_{n-\bar{\nu}_m+2} &= \dot{y}_m, & \dots, & \check{x}_n &= y_m^{(\bar{\nu}_m-1)}, \end{aligned} \quad (9.3.90)$$

и запишем уравнение объекта

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}u^* \quad (9.3.91)$$

и функционал

$$J = \int_0^\infty (\lambda^2 \check{x}' \check{H}' \check{H} \check{x} + u^{*'} u^*) dt, \quad (9.3.92)$$

где  $\check{A}$ ,  $\check{B}$  и  $\check{H}$  – специфические матрицы, составленные из элементов матриц  $\tilde{D}(s)$ ,  $\tilde{B}^{(0)}$  и  $\tilde{\Psi}(s)$  соответственно.

Используем процедуру 9.3.1 (АКОР), получим

$$u^* = \check{C}' \check{x}, \quad (9.3.93)$$

или, с учётом обозначений (9.3.90)

$$u^* = C(s)y. \quad (9.3.94)$$

Отсюда, на основе (9.3.84), получим уравнение искомого регулятора

$$\left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \mathbf{u} = C(s) \mathbf{y}. \quad (9.3.95)$$

Исследуем свойства системы (9.3.85), (9.3.94), оптимальной в смысле функционала (9.3.86), в зависимости от параметра  $\lambda^2$ .

Далее ограничимся случаем, когда степени  $\bar{\nu}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) строк матрицы  $\tilde{D}(s)$  равны между собой

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = \dots = \bar{\nu}_m = \bar{\nu}. \quad (9.3.96)$$

Это означает, что  $\frac{n}{m} = \bar{\nu}$  – целое число. Если это не так, то можно дополнить уравнения (9.3.1) некоторой подсистемой уравнений первого порядка с малым параметром при производных так, чтобы  $n$  нацело делилось на  $m$ .

Утверждение 9.3.1. Если выполняются условия (9.3.96), (9.3.89), а матрицы  $\tilde{\Psi}^{(\infty)}$  и  $\tilde{\Psi}^{(\infty-1)}$  уравнения качества (9.3.87) выбраны из условий

$$\tilde{\Psi}^{(\infty)'} \tilde{D}^{(\infty+1)} - \tilde{D}^{(\infty+1)'} \tilde{\Psi}^{(\infty)} = 0, \quad (9.3.97)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{D}^{(\infty)'} \tilde{D}^{(\infty+1)} - \tilde{D}^{(\infty+1)'} \tilde{D}^{(\infty)} = \\ & = \left\{ \tilde{D}^{(\infty+1)} \left[ \tilde{\Psi}^{(\infty)} \right]^{-1} \tilde{\Psi}^{(\infty-1)} \right\}' \tilde{D}^{(\infty+1)} - \tilde{D}^{(\infty+1)'} \left\{ \tilde{D}^{(\infty+1)} \left[ \tilde{\Psi}^{(\infty)} \right]^{-1} \tilde{\Psi}^{(\infty-1)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.3.98)$$

в которых

$$\tilde{D}^{(\infty+1)} = \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}^{(\infty+1)} = \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}^{(\bar{\nu})}, \quad \tilde{D}^{(\infty)} = \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}^{(\infty)} = \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}^{(\bar{\nu}-1)}, \quad (9.3.99)$$

то движение оптимальной системы (9.3.85), (9.3.94) описывается при достаточно больших значениях  $\lambda^2$  уравнением

$$\left\{ \tilde{D}^{(\infty+1)} \left[ \tilde{\Psi}^{(\infty)} \right]^{-1} \lambda^{-1} s + E_m \right\} \tilde{\Psi}(s) \mathbf{y} = 0. \quad (9.3.100)$$

■

Обоснование утверждения приведено в 9.Д.3.

Исключим вектор  $\mathbf{u}^*$  из (9.3.85) с помощью (9.3.94) и получим уравнение

$$\left[ \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)} C(s) \right] \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

сравнивая которое с (9.3.100), заключаем, что

$$\left[ E_m \lambda^{-1} s + E_m \right] \tilde{\Psi}(s) = \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)} C(s). \quad (9.3.101)$$

При внешних возмущениях объект (9.3.83) принимает вид (9.2.15) и движение оптимальной системы описывается с учётом (9.3.97) уравнением

$$\left[ E_m \lambda^{-1} s + E_m \right] \tilde{\Psi}(s) \mathbf{y} = M(s) \mathbf{f}, \quad (9.3.102)$$

решения которого будут (при соответствующем выборе  $\lambda$ ) сколь угодно близки к решениям уравнения качества (9.2.18).

### 9.3.8. Реализуемый регулятор

Для реализуемости регулятора (9.3.5) должно выполняться условие

$$\partial_{ri} \left\{ \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \right\} \geq \partial_{ri} [C(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.103)$$

При нарушении этого условия заменим (9.3.92) функционалом

$$J = \int_0^{\infty} \left( \lambda^2 \dot{\tilde{x}}' \check{H}' \check{H} \dot{\tilde{x}} + \mathbf{u}^{*'} \mathbf{u}^* + \varepsilon_1^2 \dot{\mathbf{u}}^{*'} \dot{\mathbf{u}}^* + \dots + \varepsilon_{\psi}^2 \mathbf{u}^{(\psi)*'} \mathbf{u}^{(\psi)*} \right) dt, \quad (9.3.104)$$

в котором  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) – достаточно малые числа.

Их можно определять на основе рекомендации 4.4.1, заменив в формуле (4.4.46)  $\bar{\omega}_{ср}$  на  $\bar{\omega}_{ср.об}$ , где  $\bar{\omega}_{ср.об}$  – прогнозируемая обобщенная частота среза системы (9.3.91), (9.3.93).

Понятие обобщенной частоты среза и прогнозируемой частоты среза будет введено в следующей главе. Таким образом, (4.4.46) принимает вид

$$\varepsilon^0 = \frac{\sqrt{\psi}}{(5 \div 10) \bar{\omega}_{ср.об}}, \quad (9.3.105)$$

а числа  $\varepsilon_i$  определяются, как и ранее,

$$\varepsilon_i = \frac{c_{\psi}^i}{\psi^i} (\varepsilon^0)^{2i} \quad i = \overline{1, \psi}, \quad (9.3.106)$$

где  $c_{\psi}^i$  – число сочетаний  $\psi$  элементов по  $i$ .

Решение задачи о минимуме функционала (9.3.104) на связях (9.3.85) сводится к процедуре 9.3.1 АКОР. Действительно, если ввести дополнительно к (9.3.90)  $m$ -мерные вектора

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \dot{\mathbf{u}}^*, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(\psi-1)} = \mathbf{u}^{(\psi-1)*}; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \varepsilon_{\psi} \mathbf{u}^{(\psi)*}, \quad (9.3.107)$$

то получим аналогичные (4.1.57), (4.1.55) уравнения объекта и функционал в стандартной форме (9.3.1), (9.3.2).

В результате процедуры 9.3.1 найдём, с учётом обозначений (9.3.107), регулятор

$$\left( \mathcal{E}^{[\psi]} s^{\psi} + \dots + \mathcal{E}^{[1]} s + \mathcal{E}^{[0]} \right) \mathbf{u}^* = C' \check{\mathbf{x}}, \quad (9.3.108)$$

где  $\mathcal{E}^{[i]}$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) – матрицы чисел, для которых справедливо аналогичное (4.4.43), (4.4.44) свойство

$$\mathcal{E}^{[i]} \approx E_m \varepsilon_i^0 \quad i = \overline{1, \psi}, \quad \mathcal{E}^{[0]} \approx E_m, \quad (9.3.109)$$

где  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) – коэффициенты полинома  $\varepsilon^0(s) = 1 + \varepsilon_1^0 s + \dots + \varepsilon_{\psi}^0 s^{\psi}$ , определяемого из тождества

$$\varepsilon^0(-s) \varepsilon^0(s) = 1 - \varepsilon_1^2 s^2 + \dots + (-1)^{\psi} \varepsilon_{\psi}^2 s^{2\psi}. \quad (9.3.110)$$

Учтём обозначения (9.3.84), (9.3.90) и запишем (9.3.108) в виде

$$\mathcal{E}(s) \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \mathbf{u} = C(s) \mathbf{y}. \quad (9.3.111)$$

Этот результат реализуем, так как всегда можно выбрать число ( $\psi$ ) производных в функционале (9.3.104), чтобы выполнялось условие

$$\partial_{r_i} \left\{ \mathcal{E}(s) \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \right\} \geq \partial_{r_i} [C(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.112)$$

При внешних возмущениях нетрудно получить на основе (9.2.15), (9.3.107) выражение ошибки стабилизации

$$\mathbf{y} = \left[ \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)} \mathcal{E}^{-1}(s) C(s) \right]^{-1} \tilde{M}(s) \mathbf{f}, \quad (9.3.113)$$

которое совпадает с (9.3.100) при  $\mathcal{E}(s) = E_m$ .

### 9.3.9. Следящие системы с объектами второго вида при $\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$

Уравнения (9.2.74), (9.2.75) следящей системы с регулятором (9.3.111) принимают вид

$$\tilde{D}(s) \mathbf{y} = \tilde{B}(s) \mathbf{u} + \tilde{M}(s) \mathbf{f}, \quad (9.3.114)$$

$$\mathcal{E}(s) \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \mathbf{u} = C(s) \mathbf{y} + R^n(s) \mathbf{y}_{\text{жс}}, \quad (9.3.115)$$

где  $R^n(s)$  – полиномиальная матрица, которую будем определять из допустимой ошибки слежения (9.2.77).

Примем

$$R^n(s) = \mathcal{E}(s) \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}(s) - C(s). \quad (9.3.116)$$

Исключим из системы (9.3.114), (9.3.115) вектор  $\mathbf{u}$ . Для этого представим первое из этих уравнений в виде

$$\tilde{D}(s) \mathbf{y} = \tilde{B}^{(0)} \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{B}(s) \mathbf{u} + \tilde{M}(s) \mathbf{f}.$$

С учётом второго уравнения системы и выражения для  $R^n(s)$  получим

$$\tilde{D}(s) \mathbf{y} = \tilde{B}^{(0)} \mathcal{E}^{-1}(s) \left\{ C(s) \mathbf{y} - C(s) \mathbf{y}_{\text{жс}} + \mathcal{E}(s) \left[ \tilde{B}^{(0)} \right]^{-1} \tilde{D}(s) \mathbf{y}_{\text{жс}} \right\} + \tilde{M}(s) \mathbf{f}. \quad (9.3.117)$$

Отсюда следует уравнение вида (9.3.113) для ошибки  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$ :

$$\left[ \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)} \mathcal{E}^{-1}(s) C(s) \right] \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{M}(s) \mathbf{f}. \quad (9.3.118)$$

Это означает, что если оператор слежения  $R^n(s)$  определён выражением (9.3.116), то ошибка слежения совпадает с погрешностью регулирования.

Регулятор (9.3.115) с оператором (9.3.16) не реализуем. Поэтому рассмотрим близкий к нему реализуемый регулятор

$$O(s)\mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{B}(s)\mathbf{u} = C(s)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{жк}) + \mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{D}(s)\mathbf{y}_{жк}, \quad (9.3.119)$$

который отличается от (9.3.115) полиномиальной матрицей

$$O(s) = \text{diag} \left[ o_1(s) \quad o_2(s) \quad \cdots \quad o_m(s) \right], \quad (9.3.120)$$

где

$$o_i(s) = (1 + o_i s)^{\beta_i} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.121)$$

$o_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – достаточно малые числа, удовлетворяющие условиям

$$o_i < \varepsilon_i^0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.3.122)$$

а степени  $\beta_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) находятся из условия реализуемости регулятора (9.3.119)

$$\partial_{r_i} \left\{ O(s)\mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{B}(s) \right\} \geq \partial_{r_i} \left\{ \mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{D}(s) \right\} \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.3.123)$$

Найдём ошибку слежения с таким регулятором. Аналогично (9.3.117) запишем

$$\tilde{D}(s)\mathbf{y} = \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s) \left\{ C(s)\mathbf{y} - C(s)\mathbf{y}_{жк} + \mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{D}(s)\mathbf{y}_{жк} \right\} + \tilde{M}(s)\mathbf{f}. \quad (9.3.124)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \left[ \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)C(s) \right] \boldsymbol{\varepsilon} = \\ & = \left\{ \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} \tilde{D}(s) - \tilde{D}(s) \right\} \mathbf{y}_{жк} + \tilde{M}(s)\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (9.3.125)$$

Ошибка слежения содержит теперь две составляющие: погрешность стабилизации  $\mathbf{y}^f$ , близкую к решению уравнения (9.3.18), и ошибку слежения при  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\tilde{L}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} - E_m \right\} \tilde{D}(s)\mathbf{y}_{жк}, \quad (9.3.126)$$

где  $\tilde{L}(s) = \left[ \tilde{D}(s) - \tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)C(s) \right]$ .

Первое слагаемое в фигурных скобках можно представить как

$$\tilde{B}^{(0)}\mathcal{E}^{-1}(s)O^{-1}(s)\mathcal{E}(s) [\tilde{B}^{(0)}]^{-1} = E_m + OK(s),$$

где  $O = \text{diag} \left( o_1 \quad o_2 \quad \cdots \quad o_m \right)$ ,  $K(s)$  – некоторая полиномиальная матрица.

Подставляя это выражение в (9.3.126), заключаем, что ошибка

$$\tilde{L}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = OK(s)\tilde{D}(s)\mathbf{y}_{жк} \quad (9.3.127)$$

может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малых чисел

$o_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Приложения к главе 9

9.П. Приложения

9.П.1. Приведение уравнений объекта к канонической форме Лагранжа

9.П.1.1. Каноническая форма управляемости

Пусть задан полностью управляемый многомерный объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{9.П.1}$$

где  $A$  и  $B$  – известные матрицы чисел размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно. Матрица  $B$  имеет ранг  $m$ .

Полная управляемость объекта (9.П.1) означает, что

$$\text{rank } K_y = n, \tag{9.П.2}$$

где матрица управляемости

$$K_y = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}. \tag{9.П.3}$$

Определение 9.П.1. Объект (9.П.1) в канонической форме управляемости имеет вид

$$\dot{x} = \check{A}\check{x} + \check{B}u, \tag{9.П.4}$$

где

$$\check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad \check{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.П.5}$$



Матрица  $\check{A}$  представляет собой блочную матрицу, в которой диагональные блоки  $\check{A}_{ii}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) имеют размеры  $\nu_i \times \nu_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Каждый из диагональных блоков содержит единичную матрицу размеров  $(\nu_i - 1) \times (\nu_i - 1)$  ( $i = \overline{1, m}$ ), нулевой первый столбец и, вообще говоря, отличные от нуля элементы, показанные символом «\*».

Недиагональные блоки  $\check{A}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) этой матрицы состоят из нулей за исключением, может быть, последней строки.

Матрица  $\check{B}$  состоит из блоков размеров  $\nu_i \times m$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Элементы блоков состоят из нулей, кроме последней строки. При этом первые  $i - 1$  ( $i = \overline{1, m}$ ) элементов этих строк также равны нулю, а  $i$ -элементы ( $i = \overline{1, m}$ ) – единице. ■

Числа  $\nu_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), определяющие размеры блоков матриц  $\check{A}$  и  $\check{B}$ , называются *индексами управляемости*.

Процедура 9.П.1.а. Определение индексов управляемости состоит из операций:

**Операция 1.** Сформируем матрицу управляемости (9.П.3)

$$K_y = \left( \mathbf{b}^{(1)} \mathbf{b}^{(2)} \dots \mathbf{b}^{(m)} \mid A\mathbf{b}^{(1)} A\mathbf{b}^{(2)} \dots A\mathbf{b}^{(m)} \mid \dots \mid A^{n-1}\mathbf{b}^{(1)} A^{n-1}\mathbf{b}^{(2)} \dots A^{n-1}\mathbf{b}^{(m)} \right), \quad (9.П.6)$$

где  $\mathbf{b}^{(i)}$  –  $i$ -тый столбец матрицы  $B$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

**Операция 2.** Выберем из  $n \times m$  столбцов этой матрицы  $n$  линейно независимых (такие столбцы матрицы  $K_y$  существуют в силу полной управляемости объекта). Для этого будем перебирать столбцы  $\mathbf{b}^{(1)}, A\mathbf{b}^{(1)}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}^{(1)}$  до тех пор, пока вектор  $A^{\nu_1}\mathbf{b}^{(1)}$  не будет выражаться в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{b}^{(1)}, A\mathbf{b}^{(1)}, \dots, A^{\nu_1-1}\mathbf{b}^{(1)}$ . Будем полагать  $\nu_1 < n$ . В противном случае (когда  $\nu_1 = n$ ) объект (9.П.1) полностью управляем первой компонентой вектора  $\mathbf{u}$ .

**Операция 3.** Присоединим к полученному набору  $\nu_1$  векторов столбцы  $\mathbf{b}^{(2)}, A\mathbf{b}^{(2)}, \dots, A^{\nu_2-1}\mathbf{b}^{(2)}$ . При этом число  $\nu_2$  таково, что вектор  $A^{\nu_2}\mathbf{b}^{(2)}$  выражается как линейная комбинация векторов  $\mathbf{b}^{(1)}, A\mathbf{b}^{(1)}, \dots, A^{\nu_1-1}\mathbf{b}^{(1)}; \mathbf{b}^{(2)}, A\mathbf{b}^{(2)}, \dots, A^{\nu_2-1}\mathbf{b}^{(2)}$ . Пусть  $\nu_1 + \nu_2 < n$ . В противном случае (когда  $\nu_1 + \nu_2 = n$ ) объект полностью управляем первыми двумя компонентами вектора  $\mathbf{u}$ .

**Операция 4.** Присоединим к построенному набору  $\nu_1 + \nu_2$  линейно независимых векторов столбцы  $\mathbf{b}^{(3)}, A\mathbf{b}^{(3)}, \dots, A^{\nu_3-1}\mathbf{b}^{(3)}$  и т.д. до тех пор, пока не получим квадратную матрицу

$$L = \left( \mathbf{b}^{(1)} A\mathbf{b}^{(1)} \dots A^{\nu_1-1}\mathbf{b}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(2)} A\mathbf{b}^{(2)} \dots A^{\nu_2-1}\mathbf{b}^{(2)} \mid \dots \mid \mathbf{b}^{(m)} A\mathbf{b}^{(m)} \dots A^{\nu_m-1}\mathbf{b}^{(m)} \right), \quad (9.П.7)$$

обладающую свойством  $\det L \neq 0$ . (9.П.8)

Заметим, что

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = n. \quad (9.П.9)$$

■

Примечание 9.П.1. Для сокращения перебора столбцов матрицы управляемости (9.П.6) несколько видоизменим вторую операцию. Включим  $m$  столбцов матрицы  $B$  в матрицу  $L$ , так как эти столбцы линейно независимы (матрица  $B$  имеет ранг  $m$ ). Остальные  $n - m$  столбцов матрицы  $L$  будем находить в соответствии с операциями 2, 3 и 4, заменив в них вектор  $\mathbf{b}^{(1)}$  на матрицу  $B$ . ■

### 9.П.1.2. Построение матриц канонической формы

Установим теперь связь матриц  $A$  и  $B$  объекта (9.П.1) с матрицами  $\check{A}$  и  $\check{B}$  его описания в канонической форме управляемости. Для этого введём числа

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k \nu_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.П.10)$$

найдем вектора  $\tilde{q}_k$  ( $i = \overline{1, m}$ ), являющиеся  $\sigma_k$  ( $i = \overline{1, m}$ ) строками матрицы  $L^{-1}$ , и сформируем матрицу

$$Q = \left[ \tilde{q}'_1 (\tilde{q}_1 A)' \dots (\tilde{q}_1 A^{(\nu_1-1)})' \mid \tilde{q}'_2 (\tilde{q}_2 A)' \dots (\tilde{q}_2 A^{(\nu_2-1)})' \mid \dots \mid \tilde{q}'_m (\tilde{q}_m A)' \dots (\tilde{q}_m A^{(\nu_m-1)})' \right]'. \quad (9.П.11)$$

Утверждение 9.П.1. Неособая матрица  $Q$ , определяемая выражением (9.П.11), является матрицей преобразования

$$\check{\mathbf{x}} = Q\mathbf{x} \quad (9.П.12)$$

уравнения (9.П.1) к канонической форме (9.П.4), и, следовательно, матрицы  $\check{A}$  и  $\check{B}$  связаны с матрицами  $A$  и  $B$  соотношениями

$$\check{A} = QAQ^{-1}, \quad \check{B} = QB. \quad (9.П.13)$$

Опуская доказательство этого утверждения, сравним выражения (9.П.13) с соотношениями (3.4.9), полученными при  $m = 1$ . Нетрудно видеть, что  $Q = T$ . Отличие выражений матриц  $Q$  и  $T$  состоит в том, что при построении  $Q$  не используются коэффициенты характеристического полинома объекта, необходимые для формирования матрицы  $T = \check{K}K^{-1}$ .

Пример 9.П.1. Преобразуем уравнения (3.4.14), (3.4.15) к канонической форме.

В рассматриваемом случае

$$K_y = L = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 6 & 39 \end{pmatrix}, \quad (9.П.14)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 39 & -17 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{93}, \text{ и следовательно } \tilde{q}_1 = \begin{bmatrix} -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{93}, \quad \tilde{q}_1 A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{93}.$$

Таким образом, матрица

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_1 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{93} \quad (9.П.15)$$

совпадает с матрицей  $T$ , определяемой выражением (3.4.17). ■

Пример 9.П.2. Преобразуем к канонической форме управляемости систему (9.П.1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.П.16)$$

Нетрудно проверить, что матрица  $L$  имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} & \mathbf{b}^{(2)} & A\mathbf{b}^{(2)} & A^2\mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (9.П.17)$$

и, следовательно, в рассматриваемом случае

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 3; \quad \sigma_1 = \nu_1 = 1, \quad \sigma_2 = \nu_1 + \nu_2 = n = 4.$$

Для построения матрицы преобразования  $Q$  вычислим первую и четвертую строки матрицы  $L^{-1}$

$$\tilde{\mathbf{q}}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ -2], \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 1].$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_2 \\ \tilde{\mathbf{q}}_2 A \\ \tilde{\mathbf{q}}_2 A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$\check{A} = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \check{B} = QB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.П.18)$$

■

9.П.1.3. Структурная теорема

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Dx + Fu. \quad (9.П.19)$$

Его передаточная матрица

$$W(s) = D(Es - A)^{-1}B + F. \quad (9.П.20)$$

Используем неособое преобразование (9.П.12) и запишем (9.П.19) в виде

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}u, \quad y = \check{D}\check{x} + Fu, \quad (9.П.21)$$

где

$$\check{D} = DQ^{-1}. \quad (9.П.22)$$

Преобразование (9.П.12) не изменяет передаточной матрицы объекта. Действительно,

$$W(s) = D(Es - A)^{-1}B + F = DQ^{-1}(Es - QAQ^{-1})^{-1}QB + F = \check{D}(Es - \check{A})^{-1}\check{B} + F. \quad (9.П.23)$$

Выразим передаточную матрицу объекта через нетривиальные строки матриц  $\check{A}$  и  $\check{B}$ . Для этого образуем матрицы  $A_y$  и  $B_y$ , составив их из  $\sigma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) строк матриц  $\check{A}$  и  $\check{B}$ . Нетрудно заметить, что  $B_y$  – правая верхняя треугольная матрица с единицами по диагонали

$$B_y = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, введём в рассмотрение матрицу

$$S(s) = \left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & s & \dots & s^{\nu_1-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s & \dots & s^{\nu_2-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & s & \dots & s^{\nu_m-1} \end{array} \right)'. \quad (9.П.24)$$

Теорема 9.П.1. (Структурная теорема) Если объект (9.П.19) полностью управляем, а матрица  $B$  имеет ранг  $m$ , то его передаточная матрица (9.П.20) может быть преобразована как

$$W(s) = \check{D}S(s)T^{-1}(s)B_y + F = [\check{D}S(s) + FB_y^{-1}T(s)] [B_y^{-1}T(s)]^{-1}, \quad (9.П.25)$$

где

$$T(s) = \begin{pmatrix} s^{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\nu_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\nu_m} \end{pmatrix} - A_y S(s). \quad (9.П.26)$$

**Доказательство.** Сравнивая (9.П.23) с (9.П.25), заключаем, что для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\tilde{D} (Es - \check{A})^{-1} \check{B} = \tilde{D} S(s) T^{-1}(s) B_y.$$

Для этого достаточно убедиться в выполнении тождества

$$(Es - \check{A})^{-1} \check{B} = S(s) [B_y^{-1} T(s)]^{-1},$$

которое эквивалентно соотношению

$$(Es - \check{A}) S(s) = \check{B} B_y^{-1} T(s). \quad (9.П.27)$$

Последнее сразу следует из определений матриц  $S(s)$ ,  $B_y$  и  $T(s)$  и доказывается непосредственной подстановкой этих матриц в (9.П.27).

Убедимся в справедливости (9.П.27) в частном случае, когда  $n = 5$ ,  $m = 2$ ,  $\nu_1 = 2$ ,  $\nu_2 = 3$ . Для этого случая

$$Es - \check{A} = \left( \begin{array}{cc|ccc} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\check{a}_{21} & s - \check{a}_{22} & -\check{a}_{23} & -\check{a}_{24} & -\check{a}_{25} \\ \hline 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ -\check{a}_{51} & -\check{a}_{52} & -\check{a}_{53} & -\check{a}_{54} & s - \check{a}_{55} \end{array} \right), \quad S(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}, \quad \check{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \check{b}_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_y = \begin{pmatrix} 1 & \check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \check{a}_{22}s - \check{a}_{21} & -\check{a}_{25}s^2 - \check{a}_{24}s - \check{a}_{23} \\ -\check{a}_{52}s - \check{a}_{51} & s^3 - \check{a}_{55}s^2 - \check{a}_{54}s - \check{a}_{53} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$(Es - \check{A}) S(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2 - \check{a}_{22}s - \check{a}_{21} & -\check{a}_{25}s^2 - \check{a}_{24}s - \check{a}_{23} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\check{a}_{52}s - \check{a}_{51} & s^3 - \check{a}_{55}s^2 - \check{a}_{54}s - \check{a}_{53} \end{pmatrix},$$

$$\check{B} B_y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \check{b}_{22} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\check{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

умножая  $\check{B}B_y^{-1}$  на  $T(s)$ , получим  $(Es - \check{A})S(s)$ .

#### 9.П.1.4. Процедура приведения

Важным практическим результатом структурной теоремы является возможность представления передаточной матрицы объекта как произведения  $r \times m$  полиномиальной матрицы

$$N(s) = \check{D}S(s) + FB_y^{-1}T(s), \quad (9.П.28)$$

и матрицы, обратной полиномиальной матрице

$$P(s) = B_y^{-1}T(s), \quad (9.П.29)$$

размеров  $m \times m$ .

Действительно, из выражения (9.П.25) и обозначений (9.П.28), (9.П.29) следует, что

$$W(s) = N(s)P^{-1}(s). \quad (9.П.30)$$

Уравнение объекта, имеющего такую передаточную матрицу, имеет вид (9.1.13)

$$P(s)q = u, \quad y = N(s)q. \quad (9.П.31)$$

Опишем алгоритм перехода от уравнений (9.П.19) к уравнениям (9.П.31).

**Процедура 9.П.1 (процедура приведения уравнений в форме Коши к канонической форме Лагранжа)** состоит из операций:

**Операция 1.** Найти индексы управляемости  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ , используя процедуру 9.П.1.

**Операция 2.** Построить в соответствии с (9.П.11) матрицу преобразования  $Q$  и вычислить по формулам (9.П.13), (9.П.22) матрицы  $\check{A}$ ,  $\check{B}$  и  $\check{D}$ .

**Операция 3.** Сформировать из нетривиальных строк матриц  $\check{A}$  и  $\check{B}$  матрицы  $A_y$  и  $B_y$ , а также матрицу  $S(s)$ .

**Операция 4.** Определить на основе (9.П.26) матрицу  $T(s)$  и вычислить по формулам (9.П.28), (9.П.29) искомые матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$ .

■

**Пример 9.П.2.** Рассмотрим полностью управляемый объект (9.П.19) с параметрами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.П.32)$$

Нетрудно проверить, что рассматриваемый объект с одним входом полностью управляем.

**Операция 1.** Находим индекс управляемости  $\nu_1 = n = 3$ .

**Операция 2.** Строим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и находим

$$QAQ^{-1} = \check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad QB = \check{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad DQ^{-1} = \check{D} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Операция 3.** Формируем

$$A_y = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_y = 1, \quad S(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \end{pmatrix}'.$$

**Операция 4.** Определяем

$$T(s) = s^3 - A_y S(s) = s^3 - s^2 - 9s + 9 = (s - 1)(s + 3)(s - 3),$$

и вычисляем

$$\begin{aligned} P(s) = T(s), \quad N(s) &= \begin{pmatrix} -s^2 + 4s + 5 \\ s^2 - 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s^3 - s^2 - 9s + 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -s^2 + 4s + 5 \\ s^3 - 9s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s + 1)(-s + 5) \\ s(s + 3)(s - 3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.П.33)$$

Передаточная матрица объекта

$$\begin{aligned} W(s) = N(s)P^{-1}(s) &= \begin{pmatrix} (s + 1)(-s + 5) \\ s(s + 3)(s - 3) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s - 1)(s + 3)(s - 3)} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(s + 1)(-s + 5)}{(s - 1)(s + 3)(s - 3)} \\ \frac{s}{s - 1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.П.34)$$

■

### 9.П.1.5. Свойства матриц канонической формы

Из выражений (9.П.29), (9.П.26) следует, что матрица  $P(s)$  – столбцово-правильная. Действительно,

$$\Gamma_c[P(s)] = B_y^{-1},$$

и поэтому

$$\det \Gamma_c[P(s)] = 1 \neq 0. \quad (9.П.35)$$

Последнее означает, в соответствии с определением 9.1.2, что  $P(s)$  – столбцово-правильная.

Сравним теперь матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$ . Из выражений (9.П.28), (9.П.29) следует, что степень каждого столбца  $N_{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) матрицы  $N(s)$  меньше или равна степени соответствующего столбца  $P_{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) матрицы  $P(s)$

$$\partial_{ci}[N(s)] \leq \partial_{ci}[P(s)] \quad i = \overline{1, m}. \quad (9.П.36)$$

## 9.П.2. Приведение уравнений объекта к форме «ВХОД-ВЫХОД»

### 9.П.2.1. Каноническая форма наблюдаемости

Пусть задан полностью наблюдаемый объект управления

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Dx, \quad (9.П.37)$$

где  $A$  и  $D$  – матрицы чисел размеров  $n \times n$  и  $r \times n$  соответственно. Матрица  $D$  имеет ранг  $r$ .

Полная наблюдаемость объекта (9.П.37) означает, что

$$\text{rank } K_n = n, \quad (9.П.38)$$

где матрица наблюдаемости

$$K_n = \begin{pmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (9.П.39)$$

Определение 9.П.2. Объект (9.П.37) в канонической форме наблюдаемости имеет вид

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x}, \quad y = \check{D}\check{x}, \quad (9.П.40)$$



где

$$\check{A} = \left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 1 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array} \right), \quad (9.П.41)$$

$$\check{D} = \left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (9.П.42)$$

Матрица  $\check{A}$  – это блочная матрица. Ее диагональные блоки  $\check{A}_{ii}$  ( $i = \overline{1, r}$ ) имеют размеры  $\bar{\nu}_i \times \bar{\nu}_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ), содержащие единичные матрицы размеров  $(\bar{\nu}_i - 1) \times (\bar{\nu}_i - 1)$ , нулевые первые строки и, вообще говоря, отличные от нуля элементы последних столбцов, отмеченные символом «\*». Нondiagonalные блоки  $\check{A}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, r}$ ) ( $i \neq j$ ) этой матрицы состоят из нулей, за исключением их последнего столбца. Матрица  $\check{D}$  состоит из аналогичных блоков размеров  $r \times \bar{\nu}_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ). При этом  $i - 1$  ( $i = \overline{1, r}$ ) элементов последних столбцов  $i$ -тых блоков равны нулю, а  $i$ -е элементы этих столбцов – единице. ■

Числа  $\bar{\nu}_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) называются *индексами наблюдаемости*.

### 9.П.2.2. Дуальные системы и построение матриц канонической формы

Запишем матрицу наблюдаемости (9.П.39) в виде

$$K_n = \left[ D' \quad (DA)' \quad \dots \quad (DA^{n-1})' \right]',$$

или

$$K_n = \left[ D' \quad A'D' \quad \dots \quad (A^{n-1})' D' \right]. \quad (9.П.43)$$

Сравним эту матрицу с матрицей управляемости (9.П.3). Нетрудно видеть, что они совпадают при условии, что

$$B = \bar{B} = D', \quad A = \bar{A} = A'. \quad (9.П.44)$$

Определение 9.П.4. Система

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u}, \quad (9.П.45)$$

где  $\bar{A} = A'$ ,  $\bar{B} = D'$ , называется дуальной (двойственной) системой для системы (9.П.37). ■

Из построения дуальной системы следует утверждение.

Утверждение 9.П.2. Если дуальная система полностью управляема, то исходная система (9.П.37) полностью наблюдаема. ■

Используем это утверждение и применим процедуру 9.П.1 для определения индексов наблюдаемости  $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_r$ . Для этого положим в операциях этой процедуры  $A = \bar{A}$  и  $B = \bar{B}$  (где  $\bar{A} = A'$ ,  $\bar{B} = D'$ ).

Для построения матриц  $\check{A}$  и  $\check{D}$  канонической формы наблюдаемости (9.П.40) используем матрицу

$$\bar{L} = \left[ \bar{b}^{(1)} \quad \bar{A}\bar{b}^{(1)} \quad \dots \quad \bar{A}^{\bar{\nu}_1-1}\bar{b}^{(1)} \mid \bar{b}^{(2)} \quad \bar{A}\bar{b}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{A}^{\bar{\nu}_2-1}\bar{b}^{(2)} \mid \dots \mid \bar{b}^{(r)} \quad \bar{A}\bar{b}^{(r)} \quad \dots \quad \bar{A}^{\bar{\nu}_r-1}\bar{b}^{(r)} \right] \quad (9.П.46)$$

и найдём матрицу

$$\bar{Q} = \left[ \bar{q}'_1 \left( \bar{q}_1 \bar{A} \right)' \dots \left( \bar{q}_1 \bar{A}^{\bar{\nu}_1-1} \right)' \mid \bar{q}'_2 \left( \bar{q}_2 \bar{A} \right)' \dots \left( \bar{q}_2 \bar{A}^{\bar{\nu}_2-1} \right)' \mid \dots \mid \bar{q}'_r \left( \bar{q}_r \bar{A} \right)' \dots \left( \bar{q}_r \bar{A}^{\bar{\nu}_r-1} \right)' \right], \quad (9.П.47)$$

где  $\bar{q}_1$  является  $\bar{\nu}_1$ -строкой матрицы  $\bar{L}^{-1}$ ,  $\bar{q}_2$  —  $(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)$ -строкой матрицы  $\bar{L}^{-1}$ , и т.д.

На основе утверждений 9.П.1 и 9.П.2 заключаем, что искомые матрицы

$$\check{A} = \left( \bar{Q} \bar{A} \bar{Q}^{-1} \right)', \quad \check{D} = \left( \bar{Q} \bar{B} \right)', \quad (9.П.48)$$

или

$$\check{A} = \left( \bar{Q} A' \bar{Q}^{-1} \right)' = \bar{Q}^{-1'} A \bar{Q}', \quad (9.П.49)$$

$$\check{D} = D \bar{Q}'. \quad (9.П.50)$$

### 9.П.2.3. Процедура приведения

Пусть объект управления описывается уравнениями (9.П.19)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Dx + Fu.$$

Введём новый вектор состояния

$$\check{x} = \bar{Q}^{-1'} x \quad (x = \bar{Q}' \check{x}) \quad (9.П.51)$$

и получим из этих уравнений

$$\dot{\check{x}} = \bar{Q}^{-1'} A \bar{Q}' \check{x} + \bar{Q}^{-1'} B u, \quad y = D \bar{Q}' \check{x},$$

или

$$\dot{\check{x}} = \check{A} \check{x} + \check{B} u, \quad y = \check{D} \check{x},$$

где

$$\check{B} = \bar{Q}^{-1'} B. \quad (9.П.52)$$

Как и в случае формы управляемости, определим  $(n \times r)$  матрицу  $A_n$ , составленную из нетривиальных столбцов матрицы  $\check{A}$ . Это столбцы матрицы  $\check{A}$  с номерами  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\nu}_1, \bar{\sigma}_2 = \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\sigma}_r = \sum_{i=1}^r \bar{\nu}_i$ .

Аналогично построим матрицу

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.П.53)$$

Введём матрицу

$$\bar{S}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & \dots & s^{\bar{\nu}_1-1} & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| & \dots & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left| \begin{array}{cccc} 1 & s & \dots & s^{\bar{\nu}_2-1} \end{array} \right| & \dots & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \left| \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right| & \dots & \left| \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right| \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| & \dots & \left| \begin{array}{cccc} 1 & s & \dots & s^{\bar{\nu}_r-1} \end{array} \right| \end{pmatrix} \quad (9.П.54)$$

и сформируем дуальную («наблюдаемую версию») структурную теорему: если объект (9.П.19) полностью наблюдаем, а матрица  $D$  имеет ранг  $r$ , то его передаточная матрица может быть представлена как

$$W(s) = D_n \bar{T}^{-1}(s) \bar{S}(s) \check{B} + F = [\bar{T}(s) D_n^{-1}]^{-1} [\bar{S}(s) \check{B} + \bar{T}(s) D_n^{-1} F], \quad (9.П.55)$$

где

$$\bar{T}(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{\nu}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\bar{\nu}_r} \end{pmatrix} - \bar{S}(s) A_n. \quad (9.П.56)$$

Доказательство выражения (9.П.55) повторяет доказательство структурной теоремы 9.П.1.

Запишем передаточную матрицу (9.П.55) в виде

$$W(s) = D^{-1}(s)B(s), \quad (9.П.57)$$

где полиномиальная матрица размеров  $r \times r$

$$D(s) = \bar{T}(s)D_n^{-1}, \quad (9.П.58)$$

а

$$B(s) = \bar{S}(s)\check{B} + \bar{T}(s)D_n^{-1}F \quad (9.П.59)$$

– полиномиальная матрица размеров  $r \times m$ .

Из выражений (9.П.56), (9.П.58) следует, что матрица  $D(s)$  – строчно-правильная, так как  $\Gamma_r[D(s)] = D_n^{-1}$ , а  $\det D_n^{-1} = 1$ .

Сравнивая матрицы  $D(s)$  и  $B(s)$ , заключаем, что степень каждой строки  $B^{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, r}$ ) матрицы  $B(s)$  меньше или равна степени соответствующей строки  $D^{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, r}$ ) матрицы  $D(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] \leq \partial_{ri}[D(s)] \quad i = \overline{1, r}. \quad (9.П.60)$$

**Процедура 9.П.2. (процедура приведения уравнений в форме Коши к форме «вход-выход»)** состоит из операций:

**Операция 1.** Найти индексы наблюдаемости  $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_r$ , используя процедуру 9.П.1 при  $A = \bar{A}$ , ( $\bar{A} = A'$ ),  $B = \bar{B}$ , ( $\bar{B} = D'$ ).

**Операция 2.** Построить в соответствии с (9.П.47) матрицу преобразования  $\bar{Q}$  и вычислить по формулам (9.П.49), (9.П.50), (9.П.52) матрицы  $\check{A}$ ,  $\check{D}$  и  $\check{B}$ .

**Операция 3.** Сформировать из нетривиальных строк матриц  $\check{A}$  и  $\check{D}$  матрицы  $A_n$  и  $D_n$ , а также матрицу  $\bar{S}(s)$ .

**Операция 4.** Определить на основе (9.П.56) матрицу  $\bar{T}(s)$  и вычислить по формулам (9.П.58), (9.П.59) искомые матрицы  $D(s)$  и  $B(s)$ .

■

**Пример 9.П.3.** Продолжим исследование объекта (9.П.19) с параметрами (9.П.32), рассмотренного в примере 9.П.2. Приведём уравнения этого объекта к форме «вход-выход».

Нетрудно проверить, что он полностью наблюдаем, а матрица преобразования

$$\bar{Q}^{-1'} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда находим

$$\bar{Q}^{-1'}A\bar{Q}' = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^{-1'}B = \tilde{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D\bar{Q}' = \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что  $r = 2$ ,  $\bar{\nu}_1 = 2$ ,  $\bar{\nu}_2 = 1$ ,  $\bar{\sigma}_1 = 2$  и  $\bar{\sigma}_2 = 3 = n$ . Далее,

$$A_n = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{S}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определяем

$$\bar{T}(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \bar{S}(s)A_n = \begin{pmatrix} s^2 - 9 & -8 \\ 0 & s - 1 \end{pmatrix}$$

и находим

$$D(s) = \bar{T}(s)$$

и

$$B(s) = \bar{S}(s)\tilde{B} + \bar{T}(s)D_n^{-1}F = \begin{bmatrix} 3 - s \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - 5 \\ s \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что передаточная матрица  $W(s) = D^{-1}(s)B(s)$  совпадает с передаточной матрицей (9.П.34). ■

#### 9.П.2.4. Столбцово-правильная форма «вход-выход»

Уравнение (9.1.11), получаемое в результате процедуры 9.П.2 содержит строчно-правильную матрицу  $D(s)$ .

Опишем приведение уравнений (9.П.19) при  $F = 0$  к форме «вход-выход»

$$\tilde{D}(s)\mathbf{y} = \tilde{B}(s)\mathbf{u},$$

в которой полиномиальная матрица  $\tilde{D}(s)$  – столбцово-правильная.

Пусть известны индексы наблюдаемости объекта (9.П.19)  $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_r$ . Продифференцируем второе из соотношений (9.П.19) с учётом первого из них,  $\gamma$  раз, где  $\gamma = \max\{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_r\} - 1$ . Получим систему (9.Д.1), на основе которой сформируем связь (9.Д.2) вектора состояния  $\mathbf{x}$  с векторами управления и измеряемых переменных

$$\mathbf{x} = \Gamma^{-1}S_{eo}(s)\mathbf{y} - \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i \right) \mathbf{u} = \Phi(s)\mathbf{y} + \tilde{F}(s)\mathbf{u},$$

где

$$S_{eo}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^{\bar{\nu}_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2-1} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\bar{\nu}_r-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \Phi(s) &= \Gamma^{-1} S_{eo}(s), \\ \tilde{F}(s) &= -\Gamma^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i \right), \end{aligned}$$

а выражения для матриц  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ , ...,  $\Gamma_{\gamma-1}$  приведены в п. 9.Д.1.

Выберем из системы (9.Д.1) следующие  $r$  уравнений

$$s^{\bar{\nu}_i} \mathbf{y}_i = \left[ DA^{\bar{\nu}_i} \mathbf{x} + \sum_{j=0}^{\bar{\nu}_i-1} DA^{\bar{\nu}_i-1-j} B s^j \mathbf{u} \right]^{[i]} \quad i = \overline{1, r},$$

где, как и ранее,  $[\cdot]^{[i]}$  –  $i$ -тая строка матрицы в скобках, и подставим в них выражение для вектора  $\mathbf{x}$ . Тогда получим уравнение в форме «вход-выход», в котором

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} [Es^{\bar{\nu}_1} - DA^{\bar{\nu}_1} \Phi(s)]^{[1]} \\ [Es^{\bar{\nu}_2} - DA^{\bar{\nu}_2} \Phi(s)]^{[2]} \\ \vdots \\ [Es^{\bar{\nu}_r} - DA^{\bar{\nu}_r} \Phi(s)]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(s) = \begin{pmatrix} \left[ DA^{\bar{\nu}_1} \tilde{F}(s) + \sum_{j=0}^{m_1-1} DA^{\bar{\nu}_1-1-j} B s^j \right]^{[1]} \\ \left[ DA^{\bar{\nu}_2} \tilde{F}(s) + \sum_{j=0}^{m_2-1} DA^{\bar{\nu}_2-1-j} B s^j \right]^{[2]} \\ \vdots \\ \left[ DA^{\bar{\nu}_r} \tilde{F}(s) + \sum_{j=0}^{m_r-1} DA^{\bar{\nu}_r-1-j} B s^j \right]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что матрица  $\tilde{D}(s)$  – столбцово-правильная.

Для этого представим

$$\tilde{D}(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{\nu}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\bar{\nu}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\bar{\nu}_r} \end{pmatrix} - M(s),$$

где

$$M(s) = \begin{pmatrix} [L^{(1)}S_{eo}(s)]^{[1]} \\ [L^{(2)}S_{eo}(s)]^{[2]} \\ \vdots \\ [L^{(r)}S_{eo}(s)]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $L^{(i)} = DA^{\bar{\nu}_i} \Gamma^{-1}$  ( $i = \overline{1, r}$ ).

Запишем

$$M(s) = \tilde{L}S_{eo}(s),$$

где

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} [L^{(1)}]^{[1]} \\ [L^{(2)}]^{[2]} \\ \vdots \\ [L^{(r)}]^{[r]} \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения следует, что

$$\partial_{ci}[M(s)] \leq \partial_{ci}[S_{eo}(s)] = \bar{\nu}_i - 1 \quad i = \overline{1, r}.$$

Возвращаясь к матрице  $\tilde{D}(s)$ , получим, с учётом последнего,

$$\partial_{ci}[\tilde{D}(s)] = \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1, r},$$

и при этом

$$\Gamma_c[\tilde{D}(s)] = E_r.$$

### 9.П.3. Преобразование уравнений к форме Коши

#### 9.П.3.1. Существо подхода

Рассмотрим объект, уравнения которого в форме Лагранжа имеют вид

$$P(s)z = Q(s)u, \quad (9.П.61)$$

$$y = N(s)z + F(s)u, \quad (9.П.62)$$

где  $z(t)$  –  $q$ -мерный вектор неполного (частичного) состояния объекта;  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $N(s)$  и  $F(s)$  – полиномиальные матрицы размеров  $q \times q$ ,  $q \times m$ ,  $r \times q$  и  $r \times m$  соответственно.

Частным случаем этих уравнений служит каноническая форма Лагранжа, в которой  $q = m$ ,  $Q(s) = E$ ,  $F(s) = 0$ .

Задача состоит в преобразовании этих уравнений к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (9.П.63)$$

$$\mathbf{y} = D\mathbf{x} + L(s)\mathbf{u}, \quad (9.П.64)$$

где  $L(s)$  - полиномиальная матрица размеров  $r \times m$ .

Из уравнений Лагранжа выделим частный случай, когда полиномиальные матрицы в (9.П.61), (9.П.62) обладают следующими свойствами:

**1-е свойство:** Матрица  $P(s)$  - строчно-правильная. Это означает, что

$$\det \Gamma_r[P(s)] \neq 0. \quad (9.П.65)$$

**2-е свойство:** Матрица коэффициентов при наивысших степенях в строках  $P(s)$  - единичная

$$\Gamma_r = E_q. \quad (9.П.66)$$

**3-е свойство:** Степень каждой строки  $P^{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, q}$ ) матрицы  $P(s)$  больше степени соответствующей строки  $Q^{[i]}(s)$  ( $i = \overline{1, q}$ ) матрицы  $Q(s)$

$$\partial_{r_i}[P(s)] > \partial_{r_i}[Q(s)]. \quad (9.П.67)$$

Уравнения, обладающие такими свойствами, будем называть *приводимыми уравнениями Лагранжа* и записывать

$$P_0(s)\bar{\mathbf{z}}_0 = \bar{Q}_0(s)\mathbf{u}, \quad (9.П.68)$$

$$\mathbf{y} = N_0(s)\bar{\mathbf{z}}_0 + T(s)\mathbf{u}, \quad (9.П.69)$$

где матрицы  $P_0(s)$  и  $\bar{Q}_0(s)$  обладают свойствами (9.П.65)-(9.П.67).

Уравнения (9.П.68), (9.П.69) легко приводятся, как показано ниже, к форме Кошиб и поэтому процедура перехода от исходных уравнений (9.П.61), (9.П.62) к этой форме состоит из двух частей: преобразования исходных уравнений к приводимым уравнениям и преобразования последних к форме Коши.

### 9.П.3.2. Преобразование приводимых уравнений

Процедура 9.П.3 перехода от уравнений (9.П.68), (9.П.69) к уравнениям (9.П.63), (9.П.64) в определённом смысле обратна процедуре 9.П.2 и состоит из следующих операций:

**Операция 1.** Запишем  $q \times q$  матрицу  $P_0(s)$  как

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^{\bar{p}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\bar{p}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\bar{p}_q} \end{pmatrix} = \tilde{S}(s)\tilde{L}, \quad (9.П.70)$$



где  $\bar{\nu}_i \geq 1$  ( $i = \overline{1, q}$ ),  $\tilde{L}$  – матрица чисел размеров  $n \times q$ , а полиномиальная  $q \times n$  матрица

$$\tilde{S}(s) = \left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc|cccc} 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_2-1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s & \cdots & s^{\bar{\nu}_q-1} & 0 \end{array} \right). \quad (9.П.71)$$

Определим из равенства (9.П.70) матрицу  $\tilde{L}$  и сформируем искомую матрицу  $A$ , заменяя в  $n \times n$  матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.П.72)$$

столбцы с номерами  $\bar{\sigma}_k$  ( $k = \overline{1, q}$ ) ( $\bar{\sigma}_k = \sum_{i=1}^k \bar{\nu}_i$ ) соответствующими столбцами  $\tilde{L}_{[1]}$ ,  $\tilde{L}_{[2]}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{L}_{[q]}$  матрицы  $\tilde{L}$ .

**Операция 2.** Находим из равенства

$$\bar{Q}_0(s) = \tilde{S}(s)\tilde{B} \quad (9.П.73)$$

матрицу  $\tilde{B}$  размеров  $n \times m$  и полагаем

$$B = \tilde{B}. \quad (9.П.74)$$

**Операция 3.** Формируем матрицу  $\bar{D}$  размеров  $r \times n$  путём подстановки в нулевую  $r \times n$  матрицу вместо столбцов с номерами  $\bar{\sigma}_k$  ( $k = \overline{1, q}$ ) соответствующих столбцов единичной матрицы  $E_q$ . Эта матрица связывает вектора  $\bar{z}_0$  и  $x$

$$\bar{z}_0 = \bar{D}x. \quad (9.П.75)$$

**Операция 4.** Подставим последнее выражение в (9.П.69) и получим, исключая производные  $x(t)$ , с помощью (9.П.63)

$$y = N_0(s)\bar{z}_0 + \bar{F}(s)u = N_0(s)\bar{D}x + \bar{F}(s)u = Dx + L_0(s)u. \quad (9.П.76)$$

Пример 9.П.4. Рассмотрим объект, описываемый полиномами

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^2+6 & 0 \\ 2s+3 & s^2+3s+1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_0(s) = \begin{pmatrix} 1 & s+3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(s) = 0. \quad (9.П.77)$$

Операция 1.

$$P_0(s) = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & s \end{pmatrix}}_{\tilde{S}(s)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{\tilde{L}}. \quad (9.П.78)$$

Операции 2 и 3.

$$\bar{Q}_0(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & s \end{pmatrix}}_{\tilde{S}(s)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}}, \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

### 9.П.3.3. Преобразование уравнений к приводимой форме

Пусть матрицы  $P(s)$  и  $Q(s)$  уравнения (9.П.61) не обладают свойствами (9.П.65)-(9.П.67). Преобразование таких матриц к матрицам  $P_0(s)$  и  $\bar{Q}_0(s)$  состоит из процедуры построения матрицы  $U_L(s)$  такой, чтобы матрица  $U_L(s)P(s)$  была строчно-правильной, операции преобразования матрицы  $\Gamma_r[P(s)]$  в единичную и процедуры выделения из матрицы  $Q(s)$  некоторой матрицы  $\bar{Q}_0(s)$  так, чтобы  $P(s)$  и  $\bar{Q}_0(s)$  обладали свойствами (9.П.67).

Построение матрицы  $U_L(s)$ , обеспечивающей достижение свойства (9.П.75), является сложной задачей, решение которой приводится в следующем подразделе. Поэтому допустим пока, что такая матрица найдена. После умножения на неё уравнения (9.П.61) слева получим

$$U_L(s)P(s)\mathbf{z} = U_L(s)Q(s)\mathbf{u}. \quad (9.П.79)$$

Если  $\Gamma_r[U_L(s)P(s)] \neq E_q$ , то введём вектор

$$\mathbf{z}_0 = \Gamma_r \mathbf{z}, \quad (9.П.80)$$

подставим его в (9.П.79) и запишем это уравнение как

$$P_0(s)\mathbf{z}_0 = Q_0(s)\mathbf{u}, \quad (9.П.81)$$

где

$$P_0(s) = U_L(s)P(s)\Gamma_r^{-1}, \quad Q_0(s) = U_L(s)Q(s). \quad (9.П.82)$$

Переходя к процедуре, обеспечивающей свойство (9.П.67), введём понятие строго правильных матриц.

Определение 9.П.3. Передаточная матрица  $W(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$  называется строго правильной, если степени полиномов числителей всех её элементов  $w_{ij}(s)$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ) ниже степеней знаменателей этих элементов. Если степень числителя хотя бы одного из элементов равна степени знаменателя этого элемента, то передаточная матрица называется правильной. ■

Если передаточная матрица  $W(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$  не является строго правильной, то нарушается условие (9.П.67). В связи с этим выделим строго правильную часть  $W(s)$ .

Процедура 9.П.4. представления передаточной матрицы как

$$W(s) = P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s) \quad (9.П.83)$$

(где  $P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s)$  – строго-правильная передаточная матрица) состоит из операций:

**Операция 1.** Выразим каждый элемент  $w_{ij}(s) = \frac{\tilde{q}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)}$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ) матрицы  $W(s)$  как

$$w_{ij}(s) = \frac{\hat{r}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)} + h_{ij}(s) \quad i = \overline{1, q} \quad j = \overline{1, m},$$

где  $h_{ij}(s)$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ) – полиномы (среди которых могут быть и равные нулю), а  $\deg \hat{r}_{ij}(s) < \deg \tilde{p}_{ij}(s)$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ).

Таким образом,

$$w_{ij}(s) = \bar{w}_{ij}(s) + h_{ij}(s) \quad i = \overline{1, q} \quad j = \overline{1, m},$$

где  $\bar{w}_{ij}(s) = \frac{\hat{r}_{ij}(s)}{\tilde{p}_{ij}(s)}$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ) – строго правильные передаточные функции.

**Операция 2.** Составим из полиномов  $h_{ij}(s)$  ( $i = \overline{1, q}, j = \overline{1, m}$ ) матрицу  $H(s)$  и найдём из тождества

$$P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s) = P_0^{-1}(s)Q_0(s)$$

матрицу

$$\bar{Q}_0(s) = Q_0(s) - P_0(s)H(s). \quad (9.П.84)$$

Уравнение (9.П.81) можно записать с учётом последнего выражения в виде

$$z_0 = P_0^{-1}(s)Q_0(s)u = [P_0^{-1}(s)\bar{Q}_0(s) + H(s)]u.$$

Введём вектор

$$\bar{z}_0 = z_0 - H(s)u \quad (9.П.85)$$

и получим

$$P_0(s)\bar{z}_0 = \bar{Q}_0(s)\mathbf{u}. \quad (9.П.86)$$

Рассмотрим выражение (9.П.62) для измеряемого вектора.

Учтём преобразования (9.П.85) и (9.П.80) и получим

$$\mathbf{y} = N(s)\mathbf{z} + F(s)\mathbf{u} = N(s)\Gamma_r^{-1}\mathbf{z}_0 + F(s)\mathbf{u} = N_0(s)\mathbf{z}_0 + F(s)\mathbf{u} = N_0(s)\bar{z}_0 + T(s)\mathbf{u}, \quad (9.П.87)$$

где

$$N_0(s) = N(s)\Gamma_r^{-1}, \quad T(s) = N_0(s)H(s) + F(s). \quad (9.П.88)$$

Таким образом, уравнения (9.П.86), (9.П.87) совпадают с приводимыми уравнениями (9.П.68), (9.П.69).

#### 9.П.3.4. Построение матрицы $U_L(s)$

Матрица  $U_L(s)$ , обеспечивающая строчную правильность произведения  $U_L(s)P(s)$  в (9.П.79), должна иметь определитель, равный ненулевому действительному числу (такие матрицы  $U_L(s)$  называются *унимодулярными матрицами*). Это требование необходимо, так как в противном случае повышается порядок характеристического полинома объекта (9.П.79).

**Теорема 9.П.2.** Для всякой неособой матрицы  $P(s)$  всегда можно указать унимодулярную матрицу  $U_R(s)$   $[U_L(s)]$ , которая приводит  $P(s)$  к столбцово-правильной форме (строчно-правильной форме)  $[P(s)U_R(s)$  – столбцово-правильная матрица,  $U_L(s)P(s)$  – строчно-правильная]. ■

**Доказательство.** Приведём конструктивное доказательство теоремы, выражающее процедуру построения  $U_R(s)$ . Пусть  $P(s)$  не является столбцово-правильной матрицей. Это означает, что  $\Gamma_c[P(s)] = 0$ . Введём в рассмотрение матрицу

$$P^c(s) = \Gamma_c \cdot \text{diag} \left( s^{\partial_{c1}} \quad s^{\partial_{c2}} \quad \dots \quad s^{\partial_{cq}} \right), \quad (9.П.89)$$

где  $\partial_{ci}$  ( $i = \overline{1, q}$ ) – степень  $i$ -того столбца матрицы  $P(s)$ .

Так как

$$\det P^c(s) = (\det \Gamma_c) s^p = 0 \quad \left( p = \sum_{i=1}^q \partial_{ci} \right),$$

то столбцы  $P_{[i]}^c(s)$  ( $i = \overline{1, q}$ ) матрицы  $P^c(s)$  линейно-зависимы, и поэтому существуют одночлены  $\alpha_i(s)$  ( $i = \overline{1, q}$ ), при которых

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i(s) P_{[i]}^c(s) = 0 \quad (9.П.90)$$

для двух или более отличных от нуля  $\alpha_i(s)$  ( $i = \overline{1, q}$ ).

По крайней мере, один из этих одночленов может быть сделан равным единице делением (9.П.90) на одночлен  $\alpha_k(s)$  наиминизшей степени.

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^q \frac{\alpha_i(s)}{\alpha_k(s)} P_{[i]}^c(s) = \sum_{i=1}^q \tilde{\alpha}_i(s) P_{[i]}^c(s) = 0,$$

где  $\tilde{\alpha}_k(s) = 1$ .

Теперь сформируем унимодулярную матрицу

$$U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \tilde{\alpha}_2(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_{k+1}(s) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\alpha}_q(s) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что  $k$ -тый столбец матрицы  $P^c(s)U_R^{(1)}(s)$  равен нулю, а матрица  $P^{(1)}(s) = P(s)U_R^{(1)}(s)$  совпадает с  $P(s)$ , за исключением  $k$ -того столбца, степень которого в матрице  $P^{(1)}(s)$  меньше, чем в матрице  $P(s)$ .

Рассмотрим теперь матрицу  $P^{(1)c}(s)$ . Её определитель

$$\det P^{(1)c}(s) = \left( \det \Gamma_c^{(1)} \right) s^{p_1} \left( p_1 < p = \sum_{i=1}^q \partial_{ci} \right).$$

Если  $\det \Gamma_c^{(1)} \neq 0$ , то  $U_R^{(1)}(s)$  – искомая матрица и  $P^{(1)}(s)$  – столбцово-правильная. При  $\det \Gamma_c^{(1)} = 0$  повторяем описанную процедуру и находим  $U_R^{(2)}(s)$  и т.д. до тех пор, пока не получим, на  $j$ -том шаге процедуры,  $\det \Gamma_c^{(j)} \neq 0$ . Тогда  $U_R = \prod_{i=1}^j U_R^{(i)}(s)$  – искомая унимодулярная матрица.

Доказательство второй части теоремы о существовании матрицы  $U_L(s)$  аналогично.

Для непосредственного использования описанного алгоритма будем приводить матрицу  $\bar{P}(s) = P'(s)$  к столбцово-правильной форме. Тогда матрица  $\hat{P}(s) = [P'(s)U_R(s)]' = U_R'(s)P(s) = U_L(s)P(s)$  – строчно-правильная.

Таким образом, искомая матрица

$$U_L(s) = U_R'(s),$$

где  $U_R(s)$  – унимодулярная матрица, приводящая  $P'(s)$  к столбцово-правильной форме.

Пример 9.П.5. Рассмотрим объект с матрицей

$$P(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 3s + 1 & 2s + 3 \\ s^3 + 3s^2 + s & 3s^2 + 3s + 6 \end{pmatrix}.$$

Формируем матрицу

$$\bar{P}(s) = P'(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 3s + 1 & s^3 + 3s^2 + s \\ 2s + 3 & 3s^2 + 3s + 6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma_c [\bar{P}(s)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \Gamma_c = 0,$$

$$\bar{P}^c(s) = \begin{pmatrix} s^2 & s^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{[1]}^c(s) = \begin{pmatrix} s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{[2=r]}^c(s) = \begin{pmatrix} s^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полиномы  $\alpha_1(s)$  и  $\alpha_2(s)$ , при которых  $\alpha_1(s)\bar{P}_{[1]}^c(s) + \alpha_2(s)\bar{P}_{[2]}^c(s) = 0$ , имеют вид  $\alpha_1(s) = -s$ ,  $\alpha_2(s) = 1$ , и, следовательно,

$$U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\bar{P}(s)U_R^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 3s + 1 & 0 \\ 2s + 3 & s^2 + 6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_c [\bar{P}(s)U_R^{(1)}(s)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и, таким образом, искомая матрица

$$U_L(s) = U_R^{(1)'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$U_L(s)P(s) = \begin{pmatrix} s^2 + 3s + 1 & 2s + 3 \\ 0 & s^2 + 6 \end{pmatrix}$$

– строчно-правильная. ■

## 9.П.4. Построение уравнения качества

### 9.П.4.1. Постановка задачи

Запишем уравнение качества (9.2.18) в развёрнутой форме

$$\sum_{k=1}^m \tilde{\psi}_{ik}(s)z_k = \sum_{k=1}^m m_{ik}(s)f_k \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.П.91)$$

где  $f_k(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – произвольные ограниченные функции

$$|f_k(t)| \leq f_k^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.П.92)$$

а  $m_{ik}(s)$  ( $i, k = \overline{1, m}$ ) – заданные полиномы.

Задача 9.П.1. Определить коэффициенты полиномов  $\tilde{\psi}_{ik}(s)$  ( $i, k = \overline{1, m}$ ) уравнения (9.П.91) такие, чтобы при наиболее неблагоприятных внешних возмущениях из множества (9.П.92) удовлетворялись требования к точности

$$|z_i(t)| \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (9.П.93)$$

где  $z_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Для решения задачи положим часть искомым полиномов

$$\tilde{\psi}_{ik}(s) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq i, \quad (9.П.94)$$

и покажем, что в этом случае решение задачи 9.П.1 сводится к решению задачи 3.П.1 для одномерных систем. При условии (9.П.94) уравнения (9.П.91) примут вид

$$\tilde{\psi}_{ii}(s)z_i = \sum_{k=1}^m m_{ik}(s)f_k \quad i = \overline{1, m},$$

или в развёрнутой форме

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i]} s^{\bar{\nu}_i} + \tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i-1]} s^{\bar{\nu}_i-1} + \dots + \tilde{\psi}_{ii}^{[1]} s + \tilde{\psi}_{ii}^{[0]} \right) z_i = & \left( m_{i1}^{[\alpha_1]} s^{\alpha_1} + \dots + m_{i1}^{[1]} s + m_{i1}^{[0]} \right) f_1 + \\ & + \left( m_{i2}^{[\alpha_2]} s^{\alpha_2} + \dots + m_{i2}^{[1]} s + m_{i2}^{[0]} \right) f_2 + \dots + \\ & + \left( m_{im}^{[\alpha_m]} s^{\alpha_m} + \dots + m_{im}^{[1]} s + m_{im}^{[0]} \right) f_m. \end{aligned} \quad (9.П.95)$$

На основе свойства суперпозиции запишем

$$z_i = z_{i1} + z_{i2} + \dots + z_{im} \quad i = \overline{1, m},$$

где  $z_{ik}(t)$  ( $i, k = \overline{1, m}$ ) – решения уравнений

$$\left( \tilde{\psi}_{ii}^{[\bar{\nu}_i]} s^{\bar{\nu}_i} + \dots + \tilde{\psi}_{ii}^{[1]} s + \tilde{\psi}_{ii}^{[0]} \right) z_{ik} = \left( m_{ik}^{[\alpha_k]} s^{\alpha_k} + \dots + m_{ik}^{[1]} s + m_{ik}^{[0]} \right) f_k \quad i, k = \overline{1, m}. \quad (9.П.96)$$

Эти уравнения по форме совпадают с уравнением (3.П.75) для одномерных систем, и поэтому для их решений справедлива оценка (3.П.83), которая принимает вид

$$\begin{aligned} & |z_{ik \max}(\infty)| \leq \\ & \leq \frac{f_k^* |m_{ik}^{[0]}|}{\tilde{\psi}_{ii}^{[0]}} \left[ 2^{\alpha_k} \frac{|m_{ik}^{[\alpha_k]}|}{|m_{ik}^{[0]}|} \prod_{j=1}^{\alpha_k} |s_j^{(i)}| + \dots + 2^2 \frac{|m_{ik}^{[2]}|}{|m_{ik}^{[0]}|} |s_1^{(i)} s_2^{(i)}| + 2 \frac{|m_{ik}^{[1]}|}{|m_{ik}^{[0]}|} |s_1^{(i)}| + 1 \right] \end{aligned} \quad (9.П.97)$$

$i, k = \overline{1, m},$

где  $s_j^{(i)}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, \bar{\nu}_i}$ ) – корни полиномов  $\tilde{\psi}_{ii}(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Определим эти корни из условий (9.П.93)

$$\sum_{k=1}^m z_{ik \max}(\infty) \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (9.П.98)$$





Выберем из этой системы  $r \times (\gamma + 1)$  уравнений систему из  $n$  уравнений, составив её из  $\bar{\nu}_1$  первых уравнений подсистем (9.Д.1.И), (9.Д.1.П), ..., (9.Д.1.γ+I),  $\bar{\nu}_2$  вторых уравнений этих же подсистем, затем из  $\bar{\nu}_3$  уравнений и т.д. до  $\bar{\nu}_r$  уравнений этих подсистем.

Сформированная таким образом система имеет вид

$$\Gamma \mathbf{x} = S_{eo}(s) \mathbf{y} - \left( \sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i \right) \mathbf{u}, \quad (9.Д.2)$$

где  $S_{eo}(s)$  – это матрица  $S_{ek}(s)$  при  $k = 0$ , а матрицы чисел  $\Gamma$  (размера  $n \times n$ ) и  $\Gamma_i$  ( $i = \overline{0, \gamma-1}$ ) (размера  $n \times m$ ) определяются по формулам

$$\Gamma = \begin{pmatrix} [D]^{[1]} \\ [DA]^{[1]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-1}]^{[1]} \\ \hline [D]^{[2]} \\ [DA]^{[2]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-1}]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ [D]^{[r]} \\ [DA]^{[r]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-1}]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ [DB]^{[1]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-2}B]^{[1]} \\ \hline 0 \\ [DB]^{[2]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-2}B]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ 0 \\ [DB]^{[r]} \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-2}B]^{[r]} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Gamma_{\gamma-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_1-1-\gamma}B]^{[1]} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_2-1-\gamma}B]^{[2]} \\ \hline \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [DA^{\bar{\nu}_r-1-\gamma}B]^{[r]} \end{pmatrix},$$

где  $[\cdot]^{[i]}$  означает  $i$ -тую строку матрицы, указанной в скобках.

Из (9.Д.2) следует выражение вектора состояния

$$\mathbf{x} = \Gamma^{-1} S_{eo}(s) \mathbf{y} + \Gamma^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\gamma-1} \Gamma_i s^i \right) \mathbf{u}, \quad (9.Д.3)$$

которое существует, так как матрица  $\Gamma$  состоит из линейно независимых строк матрицы наблюдаемости (9.П.39), и поэтому  $\det \Gamma \neq 0$ .

Объект (9.1.1), приведённый к канонической форме Лагранжа, описывается уравнениями

$$P(s) \mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s) \mathbf{q}, \quad (9.Д.4)$$

которые легко приводятся к форме Коши, если ввести переменные

$$\begin{aligned} \check{x}_1 &= q_1, & \check{x}_2 &= \dot{q}_1, & \dots, & \check{x}_{\nu_1} &= q_1^{(\nu_1-1)}; \\ \check{x}_{\nu_1+1} &= q_2, & \check{x}_{\nu_1+2} &= \dot{q}_2, & \dots, & \check{x}_{\nu_1+\nu_2} &= q_2^{(\nu_2-1)}; \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \check{x}_{n-\nu_m+1} &= q_m, & \check{x}_{n-\nu_m+2} &= \dot{q}_m, & \dots, & \check{x}_n &= q_m^{(\nu_m-1)}. \end{aligned} \quad (9.Д.5)$$

Эквивалентная (9.Д.4) система имеет вид

$$\dot{\check{x}} = \check{A}\check{x} + \check{B}u, \quad y = \check{D}\check{x}. \quad (9.Д.6)$$

Её вектор состояния – это  $m$ -мерный вектор  $q$  и его производные.

Выразим вектор  $q$  и его производные через измеряемые вектора  $y$  и  $u$  и их производные. Для этого продифференцируем (9.Д.4)  $k-1$  раз и получим систему

$$\begin{aligned} y &= N(s)q, & sy &= sN(s)q, & \dots, & & s^{k-1}y &= s^{k-1}N(s)q, \\ u &= P(s)q, & su &= sP(s)q, & \dots, & & s^{k-1}u &= s^{k-1}P(s)q, \end{aligned}$$

которую запишем в матричной форме как

$$\begin{pmatrix} N(s)q \\ sN(s)q \\ \vdots \\ s^{k-1}N(s)q \\ P(s)q \\ sP(s)q \\ \vdots \\ s^{k-1}P(s)q \end{pmatrix} = M_{ek} S_{ek} q = \begin{pmatrix} y \\ sy \\ \vdots \\ s^{k-1}y \\ u \\ su \\ \vdots \\ s^{k-1}u \end{pmatrix}. \quad (9.Д.7)$$

Система (9.Д.7) – это система  $(r+m)k$  линейных алгебраических уравнений для определения  $n+mk$  неизвестных  $q_1, \dot{q}_1, \dots, q_1^{(\nu_1+k-1)}; q_2, \dot{q}_2, \dots, q_2^{(\nu_2+k-1)}; \dots; q_m, \dot{q}_m, \dots, q_m^{(\nu_m+k-1)}$ . В числе этих неизвестных содержатся составляющие (9.Д.5) вектора пространства состояний. Этот вектор выражается (в силу полной наблюдаемости объекта) через вектора  $y$  и  $u$  и их производные. Такое выражение можно получить, решая (9.Д.7), и поэтому существует  $k \geq \frac{n}{r}$ , для которого ранг  $M_{ek} = n+mk$ .

Докажем теперь **необходимость** условий теоремы. Вначале введём некоторые определения. Назовем полиномиальную матрицу  $K(s)$  *общим правым делителем* матриц  $A(s)$  и  $L(s)$  в том и только в том случае, когда существуют матрицы  $A^{(1)}(s)$  и  $L^{(1)}(s)$  такие, что

$$A(s) = A^{(1)}(s)K(s), \quad L(s) = L^{(1)}(s)K(s). \quad (9.Д.8)$$

Если  $P(s) = Q(s)R(s)$ , то говорят, что матрица  $R(s)$  является правым делителем матрицы  $P(s)$ , а матрица  $P(s)$  кратна слева матрице  $R(s)$ .

Определение 9.Д.1. Матрица  $K(s)$  называется *наибольшим общим правым делителем* матриц  $A(s)$  и  $L(s)$  в том и только в том случае, когда а) матрица  $K(s)$  – общий правый делитель матриц  $A(s)$  и  $L(s)$ , б) матрица  $K(s)$  кратна слева каждому общему правому делителю матриц  $A(s)$  и  $L(s)$ . ■

Определение 9.Д.2. Матрицы  $A(s)$  и  $L(s)$  называются *взаимно простыми справа*, если наибольший общий правый делитель этих матриц – унимодулярная матрица (унимодулярная матрица – это полиномиальная матрица, определитель которой – неравное нулю действительное число). ■

Аналогичным образом определяются наибольший общий левый делитель и матрица взаимно простая слева.

Приведём без доказательства важное свойство матриц  $P(s)$ ,  $N(s)$  и  $D(s)$ ,  $B(s)$  описания объекта (9.1.1) в канонической форме Лагранжа и форме Коши.

Свойство 9.Д.1. Матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$  взаимно просты справа, если и только если объект полностью управляем. Матрицы  $D(s)$  и  $B(s)$  взаимно просты слева, если и только если объект полностью наблюдаем. ■

Покажем, что матрицы  $P(s)$  и  $N(s)$  взаимно просты справа, если выполняется равенство (9.1.48) теоремы.

Действительно, примем в тождестве (9.1.26)  $\Delta(s) = E_m$  и, используя процедуру 9.1.1, найдём, при условии (9.1.48), матрицы  $G^{(1)}(s)$  и  $R^{(1)}(s)$ , удовлетворяющие уравнению

$$G^{(1)}(s)P(s) - R^{(1)}(s)N(s) = E_m. \quad (9.Д.9)$$

Отсюда заключаем, что  $E_m$  – наибольший общий правый делитель матриц  $P(s)$  и  $N(s)$  и, следовательно, эти матрицы взаимно просты справа.

## 9.Д.2. Доказательство утверждения 9.2.1

Преобразуем тождество (9.2.31) к следующей эквивалентной форме

$$D(s) - B(s)G^{-1}(s)R(s) = B(s)G^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s). \quad (9.Д.10)$$

Для этого умножим (9.2.31) слева на  $G^{-1}(s)$  и получим

$$E_m - G^{-1}(s)R(s)D^{-1}(s)B(s) = G^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s)D^{-1}(s)B(s).$$

Это соотношение умножим справа на  $[D^{-1}(s)B(s)]^{-1}$ , а затем слева на  $B(s)$  и тогда приходим к (9.Д.10).

Покажем, что (9.2.31) – единственное решение (9.Д.10). Допустим противное к утверждению.

Пусть существуют полиномиальные матрицы

$$\bar{G}(s) \neq B(s) \quad \text{и} \quad \bar{R}(s) \neq D(s) - \tilde{\Psi}(s), \quad (9.Д.11)$$

так же, как и (9.2.32), удовлетворяющие тождеству (9.Д.10). Это означает, что

$$D(s) - B(s)\bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s) = B(s)\bar{G}^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s). \quad (9.Д.12)$$

Вычтем (9.Д.10) из (9.Д.12) и получим

$$B(s) \left[ G^{-1}(s)R(s) - \bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s) \right] = B(s) \left[ \bar{G}^{-1}(s) - G^{-1}(s) \right] \tilde{\Psi}(s).$$

Учитывая, что  $G(s) = B(s)$ , находим

$$R(s) - B(s)\bar{G}^{-1}(s)\bar{R}(s) = B(s)\bar{G}^{-1}(s)\tilde{\Psi}(s) - \tilde{\Psi}(s),$$

или

$$B(s)\bar{G}^{-1}(s) = \left[ R(s) + \tilde{\Psi}(s) \right] \cdot \left[ \bar{R}(s) + \tilde{\Psi}(s) \right]^{-1}.$$

Отсюда

$$\bar{G}(s) = \left[ \bar{R}(s) + \tilde{\Psi}(s) \right] \cdot \left[ R(s) + \tilde{\Psi}(s) \right]^{-1} B(s). \quad (9.Д.13)$$

Заметим, что

$$\det \left[ R(s) + \tilde{\Psi}(s) \right] = \det D(s) \neq 0. \quad (9.Д.14)$$

Кроме того,  $\det D(s) \neq \text{const}$ .

$$(9.Д.15)$$

Последнее означает, что  $\bar{G}(s)$  – матрица дробно-рациональных функций, а не полиномиальная матрица. Это противоречит предположению о существовании полиномиальных матриц  $\bar{G}(s)$  и  $\bar{R}(s)$ , удовлетворяющих (9.Д.10).

### 9.Д.3. Обоснование утверждения 9.3.1

Запишем уравнения для экстремалей функционала (9.3.86) на связях (9.3.85). Исключим в функционале вектор  $\mathbf{u}^*$  с помощью уравнений связей и получим

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ \lambda^2 \cdot \left[ \tilde{\Psi}^{[\infty]} \mathbf{y}^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]} \mathbf{y} \right]' \cdot \left[ \tilde{\Psi}^{[\infty]} \mathbf{y}^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{\Psi}^{[0]} \mathbf{y} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \tilde{D}^{[\bar{\nu}]} \mathbf{y}^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{D}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{D}^{[0]} \mathbf{y} \right]' \cdot \left[ \tilde{D}^{[\bar{\nu}]} \mathbf{y}^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{D}^{[1]} \dot{\mathbf{y}} + \tilde{D}^{[0]} \mathbf{y} \right] \right\} dt, \quad (9.Д.16)$$

где  $\bar{\nu} = \max \{ \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_m \}$ .

Уравнение Эйлера-Пуассока для безусловных экстремалей этого функционала имеет вид

$$\left\{ \lambda^2 \cdot \left[ (-1)^{\infty} \tilde{\Psi}^{[\infty]} s^{(\infty)} + \dots + (-1) \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right]' \cdot \left[ \tilde{\Psi}^{[\infty]} s^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right] + \right. \\ \left. + \left[ (-1)^{\bar{\nu}} \tilde{D}^{[\bar{\nu}]} s^{(\bar{\nu})} + \dots + (-1) \tilde{D}^{[1]} s + \tilde{D}^{[0]} \right]' \cdot \left[ \tilde{D}^{[\bar{\nu}]} s^{(\bar{\nu})} + \dots + \tilde{D}^{[1]} s + \tilde{D}^{[0]} \right] \right\} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (9.Д.17)$$

При достаточно больших значениях  $\lambda^2$  получим приближённое соотношение

$$\left\{ \lambda^2 \cdot \left[ (-1)^{\infty} \tilde{\Psi}^{[\infty]} s^{(\infty)} + \dots + (-1) \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right]' \cdot \left[ \tilde{\Psi}^{[\infty]} s^{(\infty)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right] + \right. \\ \left. + (-1)^{\infty+1} \tilde{D}^{[\infty+1]'} \tilde{D}^{[\infty+1]} s^{2(\infty+1)} + \left[ (-1)^{\infty+1} \tilde{D}^{[\infty+1]'} \tilde{D}^{[\infty]} + (-1)^{\infty} \tilde{D}^{[\infty]'} \tilde{D}^{[\infty+1]} \right] s^{2(\infty+1)} \right\} \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (9.Д.18)$$

которое можно записать в виде

$$\lambda^2 \cdot \left\{ \left[ -\tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \lambda^{-1} s + E_m \right] \cdot \left[ (-1)^{\varkappa} \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} s^{(\varkappa)} + \dots + (-1) \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right] \right\}' \cdot \left\{ \left[ \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \lambda^{-1} s + E_m \right] \cdot \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} s^{(\varkappa)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[1]} s + \tilde{\Psi}^{[0]} \right] \right\} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (9.Д.19)$$

Действительно, раскрывая в этом уравнении скобки, получим

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cdot \left\{ (-1)^{\varkappa+1} \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \lambda^{-1} s^{\varkappa+1} + (-1)^{\varkappa} \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \lambda^{-1} \right] s^{\varkappa} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]} \right\}' \cdot \\ \cdot \left\{ \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \lambda^{-1} s^{\varkappa+1} + \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \lambda^{-1} \right] s^{\varkappa} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]} \right\} \mathbf{y} = \\ = \lambda^2 \cdot \left\{ (-1)^{\varkappa+1} \tilde{D}^{[\varkappa+1]'} \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \lambda^{-2} s^{2(\varkappa+1)} + \right. \\ \left. + \left\langle (-1)^{\varkappa+1} \tilde{D}^{[\varkappa+1]'} \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \lambda^{-1} \right] \lambda^{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{\varkappa} \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \lambda^{-1} \right]' \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \lambda^{-1} \right\} \cdot \right. \\ \left. \cdot s^{2(\varkappa+1)} + \dots + \tilde{\Psi}^{[0]'} \tilde{\Psi}^{[0]} \right\} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (9.Д.20) \end{aligned}$$

Сравнивая последние выражения с (9.Д.18), заключаем, что они совпадают, если

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{[\varkappa]'} \tilde{D}^{[\varkappa+1]} - \tilde{D}^{[\varkappa+1]'} \tilde{D}^{[\varkappa]} = \\ = \left\{ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \lambda + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \right\}' \tilde{D}^{[\varkappa+1]} - \tilde{D}^{[\varkappa+1]'} \left\{ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \lambda + \tilde{D}^{[\varkappa+1]} \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \right\}. \end{aligned} \quad (9.Д.21)$$

Для того, чтобы это условие не зависело от параметра  $\lambda$ , достаточно принять

$$\tilde{\Psi}^{[\varkappa]'} \tilde{D}^{[\varkappa+1]} - \tilde{D}^{[\varkappa+1]'} \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} = 0. \quad (9.Д.22)$$

Тогда (9.Д.21) примет вид (9.3.98).

Из уравнения (9.Д.18) для экстремалей функционала (9.Д.16) следует уравнение (9.3.100) для его минималей, и, таким образом, утверждение обосновано.

Заметим, что при  $\tilde{B}^{(0)} = E_m$  условия (9.3.97), (9.3.98) принимают более простой вид. Действительно, учитывая, что, по построению  $\tilde{D}^{(\bar{\nu})} = E_m$  (и следовательно,  $\tilde{D}^{(\bar{\nu})} = E_m$ ), запишем (9.Д.22) как условие симметричности

$$\left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right)' = \left( \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right), \quad (9.Д.23)$$

а (9.3.98) примет вид

$$\tilde{D}^{[\varkappa]'} - \tilde{D}^{[\varkappa]} = \left\{ \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right]^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \right\}' - \left\{ \left[ \tilde{\Psi}^{[\varkappa]} \right]^{-1} \tilde{\Psi}^{[\varkappa-1]} \right\}. \quad (9.Д.24)$$

## Заключение к главе 9

Резюмируем изложенное в этой главе.

1. Введены две формы описания объекта и регулятора: каноническая форма Лагранжа (9.1.13), (9.1.17) и форма «вход-выход» (9.1.11), (9.1.15). Описаны в 9.П.1 и 9.П.2 способы приведения уравнений к этим формам.
2. Сформировано матричное модальное тождество (9.1.26). Получены условия его разрешимости: свойство 9.1.1, полная управляемость и полная наблюдаемость объекта (теорема 9.1.1), а также неравенство (9.1.41). Построена процедура 9.1.1 решения модального тождества и реализующая матрица (9.1.67), приводящие к модальному управлению, для которого выполняется условие реализуемости (9.1.66).
3. Для объектов, устойчивых по управлению, найдена структура (9.2.41) модального тождества, которая приводит к матрицам (9.2.32) структурного модального управления, обеспечивающим требуемую точность и качество управления при соответствующем выборе матрицы уравнения качества (9.2.18). Сформированы процедуры 9.2.1 и 9.2.2 аналитического синтеза регуляторов для объектов второго вида.
4. Установлены связи (9.3.28), (9.3.29) между значениями установившихся ошибок оптимальных систем при ступенчатых и гармонических внешних возмущениях с коэффициентами функционала оптимизации.
5. На основе этих связей и процедур АКОР построена процедура 9.3.2 аналитического синтеза регуляторов для объектов первого вида и аналогичная процедура для объектов второго вида, обеспечивающая, как показано в следующей главе, бóльшую, вообще говоря, грубость системы по сравнению с процедурами 9.2.1 и 9.2.2.
6. Разработаны алгоритмы управления в следящих системах с объектами первого и второго видов.

## Глава 10. Анализ грубости\*

Многомерность системы существенно усложняет исследование её грубости. При этом основной проблемой является формирование конструктивных критериев грубости. Для её решения возможны два направления. Первое состоит в развитии частотных показателей грубости одномерных систем на многомерный случай. Второе направление связано с разработкой критериев, характерных для многомерных систем.

После формирования критериев можно исследовать грубость систем, получаемых в результате методов пространства состояния либо процедур аналитического синтеза, изложенных в предыдущей главе.

Цель этой главы:

- формирование частотных показателей грубости, а также критериев грубости, учитывающих специфические особенности, вызванные многомерностью системы,
- анализ грубости систем, регуляторы которых получены на основе процедур АКОР, и выявление границ показателей грубости, не зависящих от параметров объекта управления и функционала оптимизации.

Такие границы были получены в главе 4 для одномерных систем. Заметим, что для таких систем, построенных на базе модального управления в главе 3, не удалось установить какие-либо инвариантные (относительно параметров объекта и желаемого характеристического полинома) показатели грубости.

Поэтому в настоящей главе не рассматриваются системы, построенные с применением модального управления.

### 10.1. Передаточные функции и матрицы многомерных систем

#### 10.1.1. Частотные передаточные матрицы

Рассмотрим многомерную асимптотически устойчивую систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x} + F_o\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (10.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_p^{(0)}, \quad (10.1.2)$$

где  $B, B_p, D, D_p, F_o, F_p$  – заданные матрицы чисел.

Пусть объект управления (10.1.1) полностью управляем и полностью наблюдаем. Тогда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} D' & A'D' & \dots & (A^{n-1})'D' \end{pmatrix} = n. \quad (10.1.3)$$

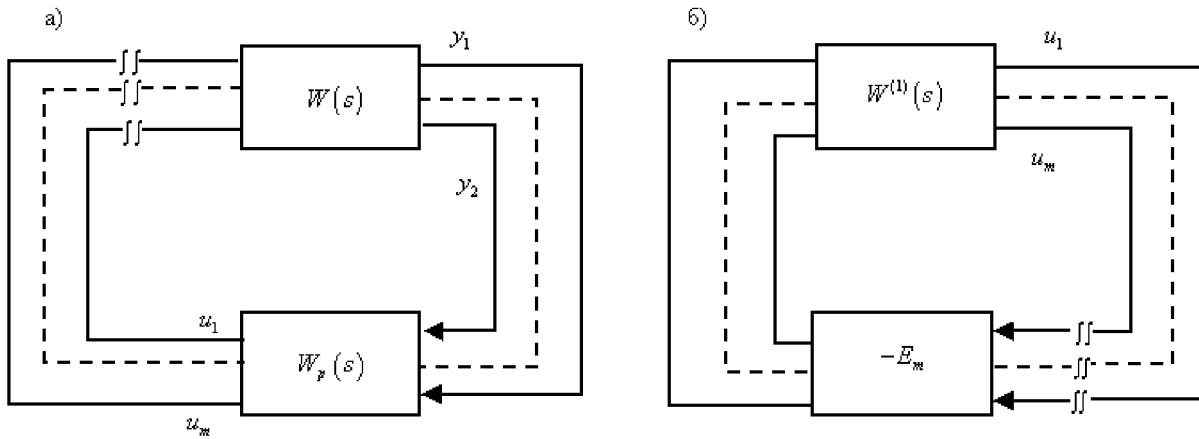


Рис. 10.1.1

Определение 10.1.1. *Передаточной матрицей* –  $W(s)$  – объекта называется матрица, связывающая изображение по Лапласу (при нулевых начальных условиях) вектора выхода –  $\mathbf{y}(s)$  – с вектором входа –  $\mathbf{u}(s)$ .

Эта матрица

$$W(s) = D(E_n s - A)^{-1} B + F_o. \quad (10.1.4)$$

Если регулятор полностью управляем вектором  $\mathbf{y}$  и полностью наблюдаем по сигналу  $\mathbf{u}$ , то его передаточная матрица

$$W_p(s) = D_p(E_{n_p} s - A_p)^{-1} B_p + F_p. \quad (10.1.5)$$

Определение 10.1.2. *Передаточная матрица системы* (10.1.1), (10.1.2), *разомкнутой по входам объекта*, называется матрица

$$W^{(1)}(s) = -W_p(s)W(s). \quad (10.1.6)$$

*Передаточной матрицей этой же системы, разомкнутой по всем входам регулятора*, называется матрица

$$W^{(2)}(s) = -W(s)W_p(s). \quad (10.1.7)$$

На рис. 10.1.1 и 10.1.2 приведены эквивалентные структурные схемы системы (10.1.1), (10.1.2), на которых волнистыми линиями показаны размыкание системы на всех входах объекта (рис. 10.1.1) либо на всех входах регулятора (рис. 10.1.2).

Определение 10.1.3. Если в (10.1.4)–(10.1.7) положить  $s = j\omega$ , то они описывают частотные передаточные матрицы объекта регулятора и разомкнутой по всем входам объекта (либо регулятора) системы соответственно.



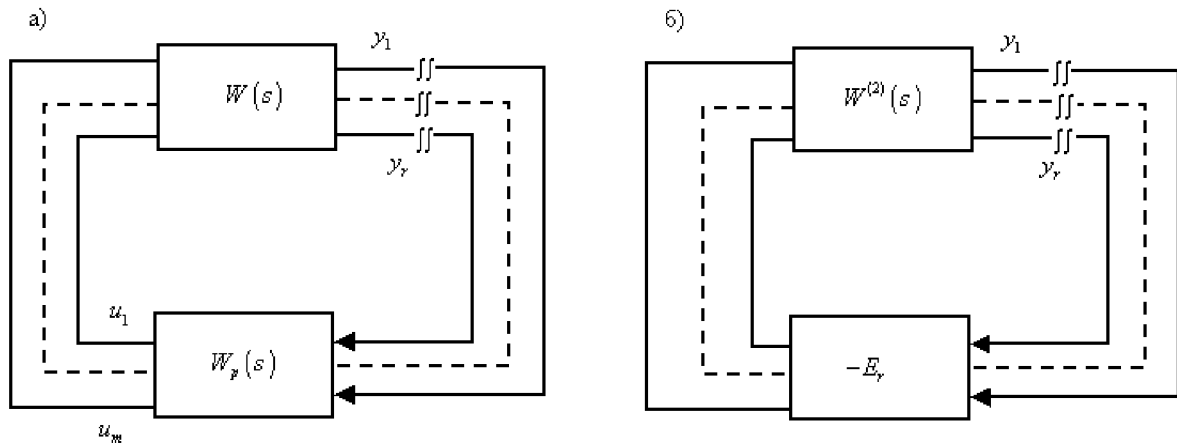


Рис. 10.1.2

Пример 10.1.1. Найдём передаточные матрицы системы, описываемой уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + 3u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad (10.1.8)$$

$$u_1 = -y_1, \quad u_2 = -y_2. \quad (10.1.9)$$

Уравнения (10.1.8) – это уравнения объекта, а (10.1.9) – регулятора, который в отличие от (10.1.2) описывается не дифференциальными, а алгебраическими уравнениями.

Передаточные матрицы объекта и регулятора

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$W_p(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.1.10)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10.1.11)$$

хотя обычно  $W^{(1)}(s) \neq W^{(2)}(s)$ . ■

Пример 10.1.2. Рассмотрим двухкомпонентный измеритель угловой скорости (9.1.49) с регулятором

$$g_2 \ddot{u}_1 + g_1 \dot{u}_1 + g_0 u_1 = r_{14} \alpha + r_{13} \dot{\alpha} + r_{12} \dot{\beta} + r_{11} \beta, \quad (10.1.12)$$

$$g_2 \ddot{u}_2 + g_1 \dot{u}_2 + g_0 u_2 = r_{24} \alpha + r_{23} \dot{\alpha} + r_{22} \dot{\beta} + r_{21} \beta. \quad (10.1.13)$$

Введём безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad x_2 = \frac{\dot{\beta}}{\dot{\beta}_0}, \quad x_3 = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_0}, \quad x_4 = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad (10.1.14)$$

где  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$  рад,  $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 1$  рад/сек, и обозначим

$$a_{23} = \frac{h}{r}\alpha_0, \quad a_{32} = -\frac{h}{a}\beta_0; \quad b_{21} = \frac{k_1}{r}, \quad b_{32} = \frac{k_1}{a}. \quad (10.1.15)$$

Тогда уравнения (9.1.49) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{23}x_3 + b_{21}u_1, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + b_{32}u_2, \quad \dot{x}_4 = x_3, \quad (10.1.16)$$

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_4. \quad (10.1.17)$$

Уравнения регулятора также можно записать в виде (10.1.2). Действительно, вводя обозначения

$$x_{p,1} = g_2u_1, \quad x_{p,3} = g_2\dot{u}_1 + g_1u_1 - r_{13}\alpha - r_{12}\beta, \quad (10.1.18)$$

$$x_{p,2} = g_2u_2, \quad x_{p,4} = g_2\dot{u}_2 + g_1u_2 - r_{23}\alpha - r_{22}\beta, \quad (10.1.19)$$

получим

$$\dot{x}_{p,1} = x_{p,3} - g_1u_1 + r_{12}\beta + r_{13}\alpha, \quad \dot{x}_{p,3} = -g_0u_1 + r_{11}\beta + r_{14}\alpha, \quad (10.1.20)$$

$$\dot{x}_{p,2} = x_{p,4} - g_1u_2 + r_{22}\beta + r_{23}\alpha, \quad \dot{x}_{p,4} = -g_0u_2 + r_{21}\beta + r_{24}\alpha. \quad (10.1.21)$$

Учитывая (10.1.14), (10.1.17), запишем уравнения регулятора в форме Коши (10.1.2)

$$\dot{x}_{p,1} = -\frac{g_1}{g_2}x_{p,1} + x_{p,3} + r_{12}y_1 + r_{13}y_2, \quad \dot{x}_{p,2} = -\frac{g_1}{g_2}x_{p,2} + x_{p,4} + r_{22}y_1 + r_{23}y_2, \quad (10.1.22)$$

$$\dot{x}_{p,3} = -\frac{g_0}{g_2}x_{p,1} + r_{11}y_1 + r_{14}y_2, \quad \dot{x}_{p,4} = -\frac{g_0}{g_2}x_{p,2} + r_{21}y_1 + r_{24}y_2, \quad (10.1.23)$$

$$u_1 = \frac{1}{g_2}x_{p,1}, \quad u_2 = \frac{1}{g_2}x_{p,2}. \quad (10.1.24)$$

Передаточная матрица объекта (10.1.16), (10.1.17)

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{32} & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2(s^2 - a_{23}a_{32})}. \quad (10.1.25)$$

Эту передаточную матрицу можно получить другим путём, если представить (10.1.16), (10.1.17) как систему из двух уравнений

$$s^2y_1 - a_{23}sy_2 = b_{21}u_1, \quad s^2y_2 - a_{32}sy_1 = b_{32}u_2. \quad (10.1.26)$$

Передаточную матрицу регулятора также легко записать на основе (10.1.12), (10.1.13)

$$W_p(s) = \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}s & r_{14} + r_{13}s \\ r_{21} + r_{24}s & r_{24} + r_{23}s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{g_2s^2 + g_1s + g_0}. \quad (10.1.27)$$

Передаточная матрица двухкомпонентного измерителя угловой скорости разомкнутого по обоим входам объекта (роторы датчиков моментов разъединены со статорами) имеет вид

$$W^{(1)}(s) = - \frac{\begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}s & r_{14} + r_{13}s \\ r_{21} + r_{24}s & r_{24} + r_{23}s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix}}{s^2 (s^2 - a_{23}a_{32}) (g_2s^2 + g_1s + g_0)}, \quad (10.1.28)$$

и передаточная матрица этой системы, разомкнутой по обоим входам регулятора (роторы датчиков углов разъединены со статорами этих датчиков)

$$W^{(2)}(s) = - \frac{\begin{pmatrix} b_{21}s^2 & a_{23}b_{32}s \\ -a_{32}b_{21}s & b_{32}s^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{11} + r_{12}s & r_{14} + r_{13}s \\ r_{21} + r_{24}s & r_{24} + r_{23}s \end{pmatrix}}{s^2 (s^2 - a_{23}a_{32}) (g_2s^2 + g_1s + g_0)}, \quad (10.1.29)$$

■

Возвращаясь к рассмотрению системы (10.1.1), (10.1.2) найдём связь между характеристическими полиномами и передаточными матрицами разомкнутой системы.

Утверждение 10.1.1. *Характеристический полином многомерной системы (10.1.1), (10.1.2)*

$$d^u(s) = d^c(s) \det [E_m + W^{(1)}(s)], \quad (10.1.30)$$

либо

$$d^u(s) = d^c(s) \det [E_r + W^{(2)}(s)], \quad (10.1.31)$$

где

$$d^c(s) = \det (E_n s - A) \cdot \det (E_{n_p} s - A_p). \quad (10.1.32)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 10.Д.1.

В одномерном случае, когда  $m = r = 1$ ,

$$W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s) = W_{paz}(s), \quad (10.1.33)$$

а выражения (10.1.30) и (10.1.31) для характеристического полинома совпадают с соотношением (2.1.11).

### 10.1.2. Обобщённая передаточная функция

В одномерном случае наряду с определением 5.1.1 передаточной функции разомкнутой системы можно ввести эквивалентное альтернативное определение. Для его построения разделим характеристический полином (3.1.3) на произведение  $d^c(s) = d(s)g(s)$ . Тогда

$$\frac{d^u(s)}{d^c(s)} = 1 + w_{paz}(s). \quad (10.1.34)$$

Определим

$$w_{раз}(s) = 1 - \frac{d^u(s)}{d^c(s)}. \quad (10.1.35)$$

Такое описание передаточной функции разомкнутой системы не связано с размерностью векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{u}$  и поэтому может быть использовано для определения обобщённой передаточной функции многомерной системы, которая в одномерном случае совпадает с передаточной функцией разомкнутой системы.

Определение 10.1.4. *Обобщённой передаточной функцией многомерной системы называется функция*

$$w_{об}(s) = \frac{d^u(s)}{d^c(s)} - 1. \quad (10.1.36)$$

Если положить  $s = j\omega$ , то полученная передаточная функция называется *обобщённой частотной передаточной функцией многомерной системы*. ■

Утверждение 10.1.2. *Обобщённая передаточная функция многомерной системы*

$$w_{об}(s) = \det [E_m + W^{(1)}(s)] - 1 \quad (10.1.37)$$

либо

$$w_{об}(s) = \det [E_r + W^{(2)}(s)] - 1. \quad (10.1.38)$$

■

Доказательство утверждения следует непосредственно из (10.1.36), (10.1.30), (10.1.31).

Используя передаточную функцию  $w_{об}(s)$ , можно судить об устойчивости многомерной системы на основе критерия Найквиста. Действительно, этот критерий позволяет установить отсутствие корней полинома  $d^u(s)$  с положительными или нулевыми вещественными частями по поведению годографа частотной передаточной функции, определяемой (10.1.36) при  $s = j\omega$ , в окрестности критической точки  $(-1, j0)$ . Это означает, что годограф функции  $w_{об}(j\omega)$  может быть применён для анализа грубости многомерной системы, если в качестве критерия грубости использовать «расстояние» годографа от критической точки.

Пример 10.1.3. Найдём передаточную функцию системы (10.1.8), (10.1.9). Используя (10.1.11), получим

$$w_{об}(s) = \det \begin{pmatrix} 1 + (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & 1 + (s+1)^{-1} \end{pmatrix} - 1 = \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2} - 1 = \frac{2s+3}{(s+1)^2}. \quad (10.1.39)$$

■

Пример 10.1.4. Передаточная функция двухкомпонентного измерителя угловой

скорости, рассмотренного в примере 10.1.2, имеет, если использовать (10.1.28), вид

$$w_{o\delta}(s) = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{-b_{21}s^2(r_{11}+r_{12}s) + a_{32}b_{21}s(r_{14}+r_{13}s)}{d(s)g(s)} & \frac{-a_{23}b_{32}s(r_{11}+r_{12}s) + b_{32}s^2(r_{14}+r_{13}s)}{d(s)g(s)} \\ \frac{-b_{21}s^2(r_{21}+r_{22}s) + a_{32}b_{21}(r_{24}+r_{23}s)}{d(s)g(s)} & 1 + \frac{-a_{23}b_{32}(r_{21}+r_{22}s) + b_{32}s^2(r_{24}+r_{23}s)}{d(s)g(s)} \end{pmatrix}, \quad (10.1.40)$$

где  $d(s) = s^2(s^2 - a_{23}a_{32})$ ,  $g(s) = g_2s^2 + g_1s + g_0$ . ■

### 10.1.3. Передаточная функция многомерной системы, разомкнутой по $\nu$ -му входу объекта

Рассмотрим вначале случай, когда все переменные состояния объекта (10.1.1) доступны непосредственному измерению ( $D = E_n$ ,  $F_o = 0$ ), и поэтому уравнение регулятора описывается не дифференциальным, а алгебраическим уравнением.

Система (10.1.1), (10.1.2) примет в этом случае вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (10.1.41)$$

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (10.1.42)$$

где  $C$  – заданная матрица чисел размеров  $n \times m$ .

Запишем систему (10.1.41), (10.1.42) в следующих эквивалентных формах

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_{-\nu}C'_{-\nu}\mathbf{x} + B_{[\nu]}\mathbf{u}_{\nu}, \quad (10.1.43)$$

$$\mathbf{u}_{\nu} = C'_{[\nu]}\mathbf{x}, \quad (10.1.44)$$

где  $(\nu = \overline{1, m})$ ;  $\mathbf{u}_{\nu}$  –  $\nu$ -тая компонента вектора  $\mathbf{u}$ ;  $B_{[\nu]}$  –  $\nu$ -тый столбец матрицы  $B$ ;  $C_{[\nu]}$  –  $\nu$ -тый столбец матрицы  $C$ ;  $B_{-\nu}$  – матрица размеров  $n \times (m-1)$ , получаемая из матрицы  $B$  после вычёркивания  $\nu$ -го столбца;  $C_{-\nu}$  – матрица, получаемая из матрицы  $C$  после вычёркивания  $\nu$ -го столбца.

«Объект» (10.1.43) – это исходный объект (10.1.41) вместе с  $(m-1)$ -ним регулятором. Другими словами, представим (10.1.41) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_{-\nu}\mathbf{u}_{-\nu} + B_{[\nu]}\mathbf{u}_{\nu} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (10.1.45)$$

$$\mathbf{u}_{-\nu} = C'_{-\nu}\mathbf{x}, \quad (10.1.46)$$

где  $\mathbf{u}_{-\nu} = (u_1 \ \cdots \ u_{\nu-1} \mid u_{\nu+1} \ \cdots \ u_m)$ , и замечаем, что (10.1.43) – это объект (10.1.41), замкнутый регулятором (10.1.46).

Таким образом, многомерной системе ставится в соответствие  $m$  одномерных, эквивалентных систем (10.1.43), (10.1.44).

Определение 10.1.5. Передаточной функцией  $w_{\nu}^{(1)}(s)$  многомерной системы, разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта, называется (взятая с обратным знаком) передаточная функция, связывающая  $\nu$ -тый выход регулятора с  $\nu$ -тым входом объекта, к которому вместо  $u_{\nu}(s)$  приложено воздействие  $f_{\nu}(s)$ .

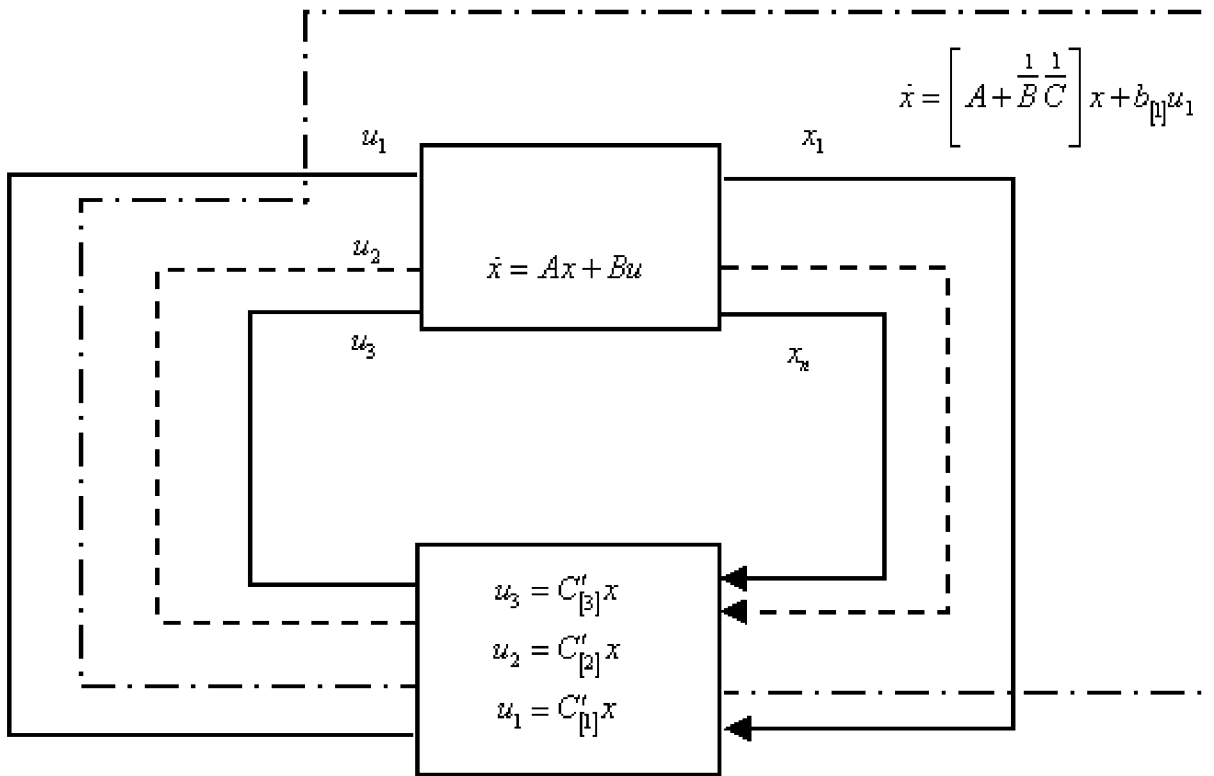


Рис. 10.1.3

Если в этой передаточной функции положить  $s = j\omega$ , то она называется частотной передаточной функцией многомерной системы, разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта. ■

Структурная схема системы (10.1.43), (10.1.44) при  $m = 3$  и  $\nu = 1$  приведена на рис. 10.1.3.

На этом рисунке штрих-пунктирной линией показан «объект» (10.1.43).

Передаточная матрица этого «объекта»

$$W^{(\nu)}(s) = (E_n s - A - B_{-\nu} C'_{-\nu})^{-1} B_{[\nu]} \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.1.47)$$

а «регулятора» (10.1.44)

$$W_p^{(\nu)}(s) = C'_{[\nu]}. \quad (10.1.48)$$

Передаточные функции многомерной системы (10.1.41), (10.1.42), разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта, имеют вид

$$W_\nu^{(1)}(s) = -C'_{[\nu]} (E_n s - A - B_{-\nu} C'_{-\nu})^{-1} B_{[\nu]} \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (10.1.49)$$

Представляя

$$w_\nu(s) = \frac{k_\nu(s)}{d_\nu(s)} \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.1.50)$$

запишем характеристический полином системы (10.1.41), (10.1.42)

$$d^u(s) = d_\nu(s) + k_\nu(s). \quad (10.1.51)$$

Примечание 10.1.1. Частотные передаточные функции  $w_\nu(j\omega)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) можно было бы применить для анализа устойчивости многомерной системы (10.1.41), (10.1.42) используя критерий Найквиста. К сожалению, пока не доказано, что, если для каждой из  $w_\nu(j\omega)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) выполняются условия устойчивости Найквиста, то система (10.1.41), (10.1.42) будет устойчивой. Одним из препятствий на пути такого доказательства является следующее обстоятельство. Объект (10.1.41) полностью управляем, однако этим свойством может не обладать хотя бы один из «объектов» (10.1.43). Это означает, что полиномы  $d_\nu(s)$  и  $k_\nu(s)$  могут иметь один или несколько одинаковых корней, которые не сказываются на протекании годографа  $w_\nu(j\omega)$ . Если указанные корни имеют положительные вещественные части, то система является неустойчивой, несмотря на то, что для  $w_\nu(j\omega)$  выполняются условия устойчивости.

Поэтому выполнение условий устойчивости Найквиста для каждой  $w_\nu(j\omega)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) является необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы (10.1.41), (10.1.42). ■

Пример 10.1.5. Запишем систему (10.1.8), (10.1.9) в следующих двух эквивалентных формах

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -2x_2, \quad u_1 = -x_1, \quad (10.1.52)$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad u_2 = -x_2. \quad (10.1.53)$$

Передаточная функция разомкнутой системы (10.1.52)

$$W_1^{(1)}(s) = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+1 & 3 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1(s)}{d_1(s)}. \quad (10.1.54)$$

Передаточная функция разомкнутой системы (10.1.53)

$$W_2^{(1)}(s) = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_2(s)}{d_2(s)}. \quad (10.1.55)$$

Таким образом, передаточные функции системы (10.1.8), (10.1.9), разомкнутой вначале по первому, а затем по второму входам объекта, совпадают. При этом «объект» системы (10.1.52) не вполне управляем, а «объект» системы (10.1.53) не вполне наблюдаем по сигналу  $u_2 = -x_2$ . Поэтому обе передаточные функции (10.1.54) и (10.1.55) содержат в числителе и знаменателе гурвицев полином  $(s+2)$ . ■

В заключение приведём содержательный пример передаточной функции многомерной системы, разомкнутой по 1-му входу объекта.

Пример 10.1.6. Рассмотрим двухкомпонентный измеритель угловой скорости, описываемый уравнениями (10.1.16), (10.1.12), (10.1.13).

Пренебрежём малыми инерционными членами в левой части уравнений (10.1.12),

(10.1.13) регулятора. Тогда эти уравнения примут вид

$$u_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4, \quad (10.1.56)$$

$$u_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4, \quad (10.1.57)$$

где

$$c_{1i} = \frac{r_{1i}}{g_0}, \quad c_{2i} = \frac{r_{2i}}{g_0} \quad (i = \overline{1,4}). \quad (10.1.58)$$

Запишем систему (10.1.16), (10.1.56), (10.1.57) в виде двух эквивалентных систем.

Первая из них

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{23}x_3 + b_{21}u_1, \quad (10.1.59)$$

$$\dot{x}_3 = b_{32}c_{21}x_1 + (b_{32}c_{22} + a_{32})x_2 + b_{32}c_{23}x_3 + b_{32}c_{24}x_4, \quad \dot{x}_4 = x_3, \quad (10.1.60)$$

$$u_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4. \quad (10.1.61)$$

Вторая

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = b_{21}c_{11}x_1 + b_{21}c_{12}x_2 + (b_{21}c_{13} + a_{23})x_3 + b_{21}c_{14}x_4, \quad (10.1.62)$$

$$\dot{x}_3 = a_{32}x_2 + b_{32}u_2, \quad \dot{x}_4 = x_3, \quad (10.1.63)$$

$$u_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4. \quad (10.1.64)$$

На основе (10.1.59)–(10.1.61) получим передаточную функцию измерителя угловой скорости, разомкнутой по первому входу (статор и ротор датчика момента 3 на рис. 9.1.1 – разъединены).

$$w_1^{(1)}(s) = -[c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14}] \times \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -a_{23} & 0 \\ -b_{32}c_{21} & -(a_{32} + b_{32}c_{22}) & s - b_{32}c_{23} & -b_{32}c_{24} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.1.65)$$

Уточним физический смысл частотной передаточной функции  $w_1(j\omega)$  – ДУСа, разомкнутого по датчику момента 3. Отсоединим датчик момента 3 от наружной рамки гироскопа и будем прикладывать к ней момент от внешнего силового устройства, изменяющийся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . При этом датчик момента 3 будет развивать гармонически изменяющийся момент. Отношение амплитуды этого момента к амплитуде момента от внешнего устройства –  $a_1(\omega)$  и сдвиг фазы –  $\varphi_1(\omega)$  – этих моментов образует  $a_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)}$ .

На основе (10.1.62)–(10.1.64) аналогично строится передаточная функция ДУСа, разомкнутого по датчику моментов 2. ■



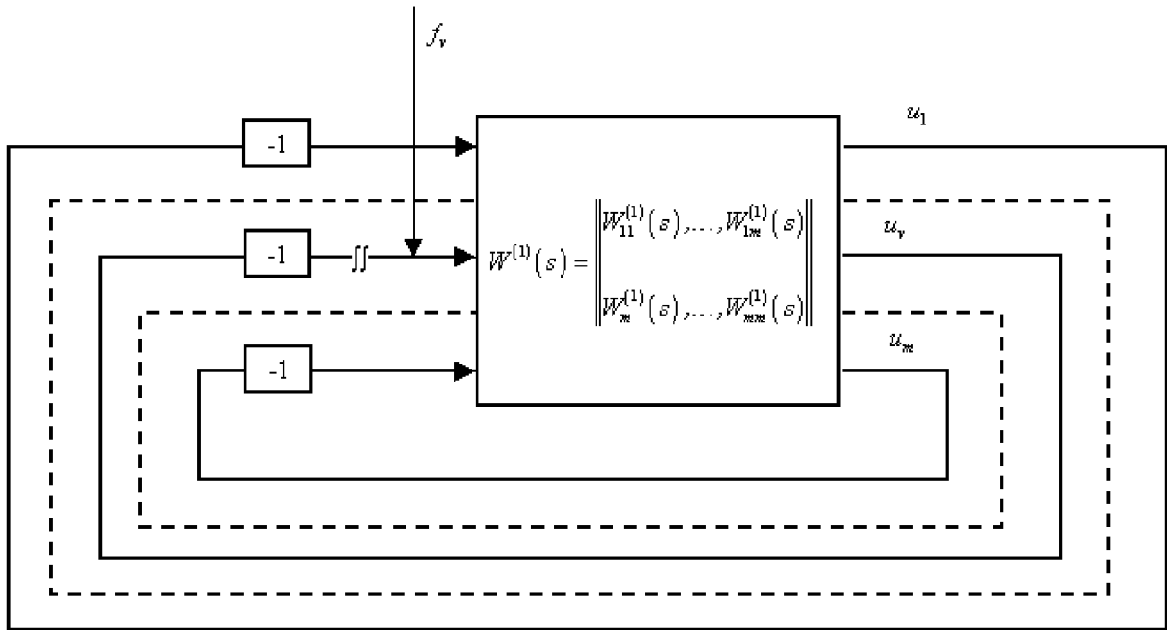


Рис. 10.1.4

**10.1.4. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта (общий случай)**

Возвращаясь к рассмотрению системы (10.1.1), (10.1.2), отметим, что определение 10.1.4 передаточной функции многомерной системы, разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта, сохраняется и в этом общем случае.

Для построения передаточной функции  $w_\nu(s)$  разомкнем систему по  $\nu$ -му входу объекта и приложим к этому входу внешнее воздействие  $f_\nu$ . Найдём связь между воздействиями и реакциями на него на  $\nu$ -ом выходе регулятора. Для этого воспользуемся передаточной матрицей  $W_{pa}^{(1)}(s)$  многомерной системы, разомкнутой по всем входам объекта.

Структурная схема разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта системы приведена на рис. 10.1.4.

Непосредственно из этой структурной схемы следует

$$u_i = - \sum_{j=1}^{\nu-1} w_{ij}^{(1)}(s)u_j + w_{i\nu}^{(1)}(s)f_\nu - \sum_{j=\nu+1}^m w_{ij}^{(1)}(s)u_j, \quad i = \overline{1, \nu-1, \nu+1, m} \quad (10.1.66)$$

$$u_\nu = - \sum_{j=1}^{\nu-1} w_{\nu j}^{(1)}(s)u_j + w_{\nu\nu}^{(1)}(s)f_\nu - \sum_{j=\nu+1}^m w_{\nu j}^{(1)}(s)u_j. \quad (10.1.67)$$

Введём обозначения

$$\left[ W^{(1)}(s) \right]_{\tilde{\nu\nu}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} w_{11}^{(1)}(s) & \cdots & w_{1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{1m}^{(1)}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{\nu-1,1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu-1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{\nu-1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu-1,m}^{(1)}(s) \\ \hline w_{\nu+1,1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu+1,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{\nu+1,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{\nu+1,m}^{(1)}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{m,\nu-1}^{(1)}(s) & w_{m,\nu+1}^{(1)}(s) & \cdots & w_{mm}^{(1)}(s) \end{array} \right), \quad (10.1.68)$$

$$\left[ W^{(1)}(s) \right]'_{[\bar{\nu}]} = \left( w_{1\nu}^{(1)}(s) \cdots w_{\nu-1,\nu}^{(1)}(s) \mid w_{\nu+1,\nu}^{(1)}(s) \cdots w_{m,\nu}^{(1)}(s) \right), \quad (10.1.69)$$

$$\left[ W^{(1)}(s) \right]^{[\bar{\nu}]} = \left( w_{\nu 1}^{(1)}(s) \cdots w_{\nu,\nu-1}^{(1)}(s) \mid w_{\nu,\nu+1}^{(1)}(s) \cdots w_{\nu,m}^{(1)}(s) \right). \quad (10.1.70)$$

Из этих обозначений следует: матрица  $\left[ W^{(1)}(s) \right]_{\tilde{\nu\nu}}$  получается из матрицы  $W^{(1)}(s)$  после вычёркивания  $\nu$ -го столбца и  $\nu$ -той строки, вектор-столбец  $\left[ W^{(1)}(s) \right]_{[\bar{\nu}]}$  – это  $\nu$ -тый столбец матрицы  $W^{(1)}(s)$ , из которого вычеркнут  $\nu$ -тый элемент; вектор-строка  $\left[ W^{(1)}(s) \right]^{[\bar{\nu}]}$  – это  $\nu$ -тая строка матрицы  $W^{(1)}(s)$ , у которой (строки) вычеркнута  $\nu$ -тая компонента.

Запишем (10.1.66), (10.1.67) в более компактной форме

$$\mathbf{u}_{-\nu} = - \left[ W^{(1)}(s) \right]_{\tilde{\nu\nu}} \mathbf{u}_{-\nu} + \left[ W^{(1)}(s) \right]_{[\bar{\nu}]} f_{\nu}, \quad (10.1.71)$$

$$u_{\nu} = - \left[ W^{(1)}(s) \right]^{[\bar{\nu}]} u_{\nu} + w_{\nu\nu}^{(1)}(s) f_{\nu}. \quad (10.1.72)$$

Из (10.1.71) получим

$$\mathbf{u}_{-\nu} = \left\{ E_{m-1} + \left[ W^{(1)}(s) \right]_{\tilde{\nu\nu}} \right\}^{-1} \left[ W^{(1)}(s) \right]_{[\bar{\nu}]} f_{\nu}. \quad (10.1.73)$$

Подставляя это выражение в (10.1.72), получим

$$u_{\nu} = w_{\nu\nu}^{(1)}(s) f_{\nu}, \quad (10.1.74)$$

где

$$w_{\nu\nu}^{(1)}(s) = w_{\nu\nu}^{(1)}(s) - \left[ W^{(1)}(s) \right]^{[\bar{\nu}]} \left\{ E_{m-1} + \left[ W^{(1)}(s) \right]_{\tilde{\nu\nu}} \right\}^{-1} \left[ W^{(1)}(s) \right]_{[\bar{\nu}]}. \quad (10.1.75)$$

и таким образом доказано следующее утверждение.

**Утверждение 10.1.3.** Передаточные функции многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта ( $\nu = \overline{1, m}$ ), имеют вид (10.1.75). ■

**Пример 10.1.6.** Запишем передаточные функции для системы с двумя управлениями. При  $m = 2$  на основе (10.1.75) получим

$$w_1^{(1)}(s) = w_{11}^{(1)}(s) - w_{12}^{(1)}(s) \left[ 1 + w_{22}^{(1)}(s) \right]^{-1} w_{21}^{(1)}(s), \quad (10.1.76)$$

$$w_2^{(1)}(s) = w_{22}^{(1)}(s) - w_{21}^{(1)}(s) \left[ 1 + w_{11}^{(1)}(s) \right]^{-1} w_{12}^{(1)}(s). \quad (10.1.77)$$

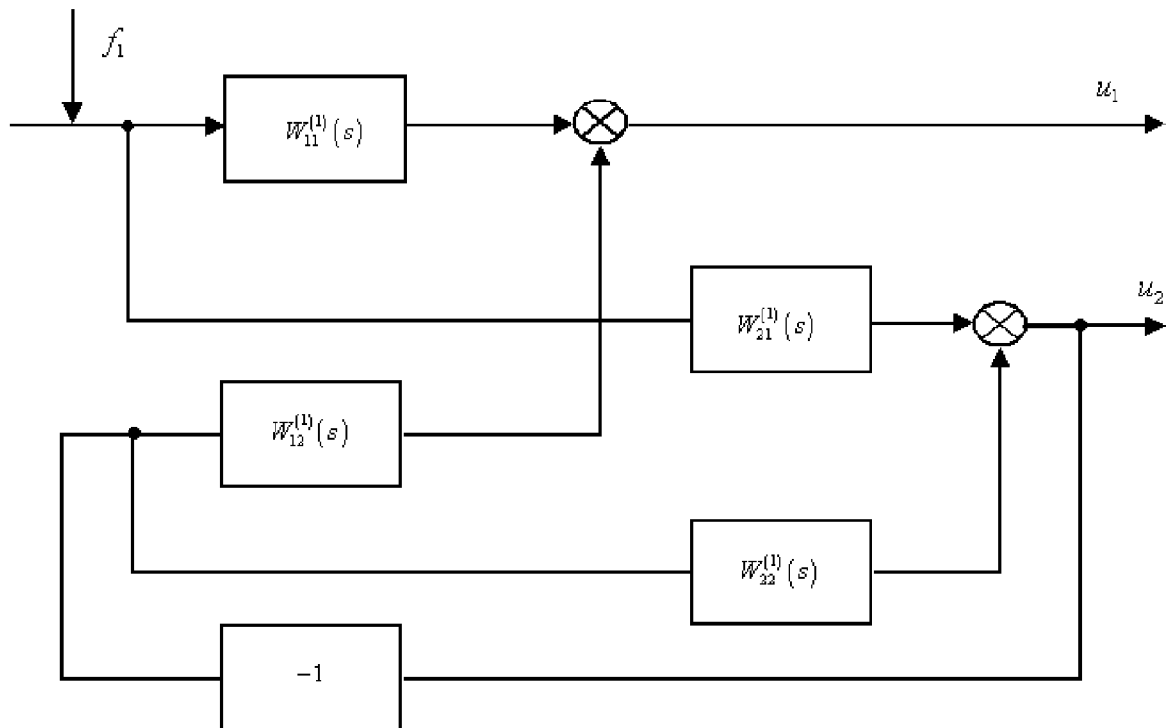


Рис. 10.1.5

Эти передаточные функции нетрудно получить, если рассмотреть структурные схемы системы с двумя управлениями, аналогичные структурной схеме, приведённой на рис. 10.1.4.

На рис. 10.1.5 приведена структурная схема, разомкнутая на первом входе объекта, а на рис. 10.1.6 – на втором его входе.

Непосредственно из рис. 10.1.5 следует, что

$$u_1 = w_{11}^{(1)}(s)f_1 - w_{12}^{(1)}(s)u_2, \quad u_2 = w_{21}^{(1)}(s)f_1 - w_{22}^{(1)}(s)u_2.$$

Из этих выражений получаем, исключая  $u_2$ , соотношение (10.1.76). Аналогично, из рис. 10.1.6  $u_1 = w_{12}^{(1)}(s)f_2 - w_{11}^{(1)}(s)u_1$ ,  $u_2 = w_{22}^{(1)}(s)f_2 - w_{21}^{(1)}(s)u_1$ , и тогда получим (10.1.77). ■

Пример 10.1.7. Рассмотрим систему (10.1.8), (10.1.9). Передаточная матрица этой системы, разомкнутой по обоим входам объекта, имеет вид (10.1.11)

$$W^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} & 3(s+1)^{-1} \\ 0 & (s+1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (10.1.76), (10.1.77), получим передаточные функции  $w_1^{(1)}(s) = (s+1)^{-1}$ ,  $w_2^{(1)}(s) = (s+1)^{-1}$ , которые совпадают с функциями (10.1.54), (10.1.55). ■

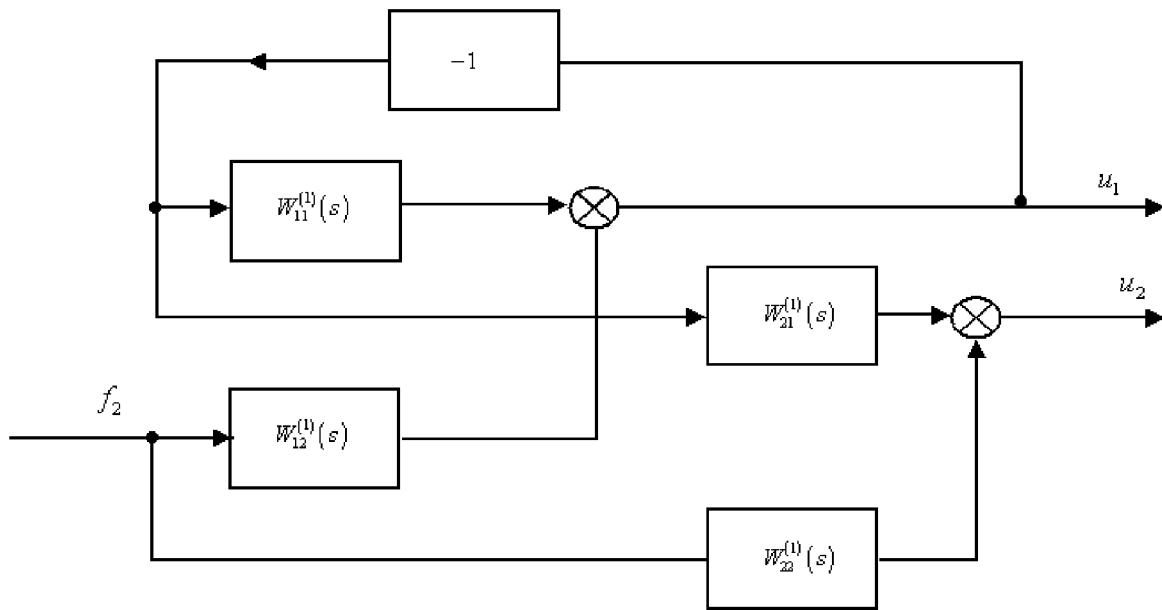


Рис. 10.1.6

Пример 10.1.8. Построим передаточные функции системы с тремя управлениями. При  $m = 3$  из (10.1.75) получим

$$w_1^{(1)}(s) = w_{11}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{12}^{(1)}(s) & w_{13}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{22}^{(1)}(s) & w_{23}^{(1)}(s) \\ w_{32}^{(1)}(s) & 1 + w_{33}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{21}^{(1)}(s) \\ w_{31}^{(1)}(s) \end{bmatrix}, \quad (10.1.78)$$

$$w_2^{(1)}(s) = w_{22}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{21}^{(1)}(s) & w_{23}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{11}^{(1)}(s) & w_{13}^{(1)}(s) \\ w_{31}^{(1)}(s) & 1 + w_{33}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{12}^{(1)}(s) \\ w_{32}^{(1)}(s) \end{bmatrix}, \quad (10.1.79)$$

$$w_3^{(1)}(s) = w_{33}^{(1)}(s) - \begin{bmatrix} w_{31}^{(1)}(s) & w_{33}^{(1)}(s) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 + w_{11}^{(1)}(s) & w_{12}^{(1)}(s) \\ w_{21}^{(1)}(s) & 1 + w_{22}^{(1)}(s) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} w_{13}^{(1)}(s) \\ w_{23}^{(1)}(s) \end{bmatrix}. \quad (10.1.80)$$

■

### 10.1.5. Передаточные функции многомерной системы, разомкнутой по $\mu$ -му входу регулятора

Определение 10.1.6. Передаточной функцией  $w_\mu^{(2)}(s)$   $\mu$ -мерной системы (10.1.1), (10.1.2), разомкнутой по  $\mu$ -му входу регулятора, называется передаточная функция, связывающая  $\mu$ -тый выход объекта  $y_\mu(s)$  с  $\mu$ -тым входом регулятора, к которому вместо  $y_\mu(s)$  приложено воздействие  $f_\mu(s)$ , взятое с обратным знаком. Если в этой передаточной функции положить  $s = j\omega$ , то она называется частотной передаточной функцией многомерной системы, разомкнутой по  $\mu$ -му входу регулятора. ■

Рассмотрим приведённую на рис. 10.1.7 структурную схему системы (10.1.1), (10.1.2), разомкнутую по  $\mu$ -му входу регулятора.

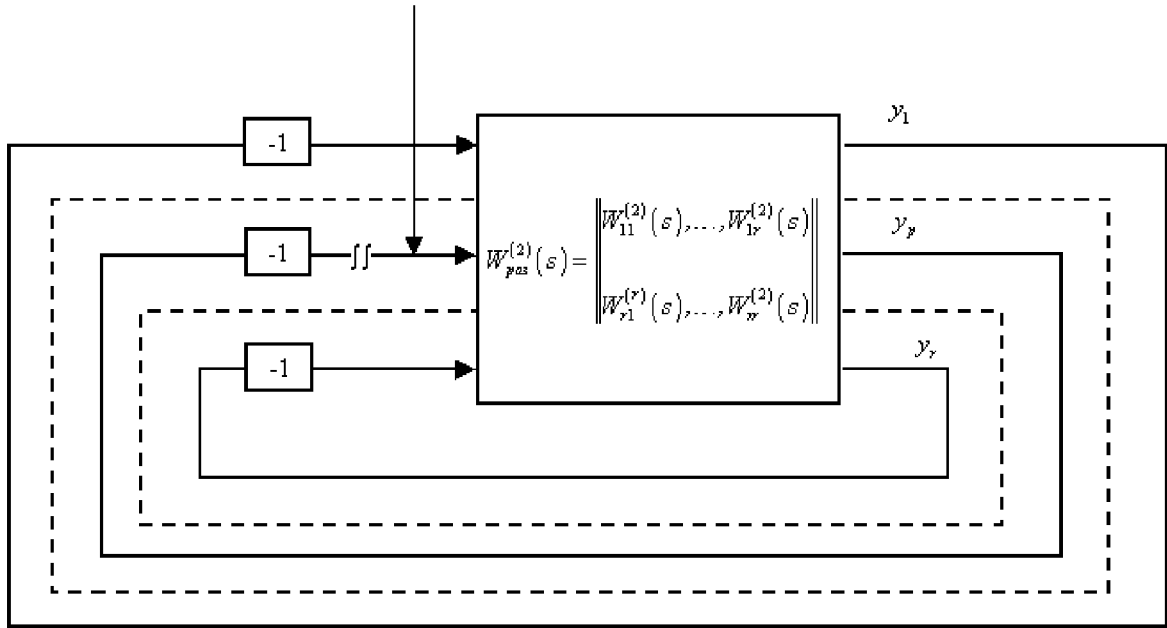


Рис. 10.1.7

Сравнивая эту схему со схемой рис. 10.1.4, замечаем их сходство, и поэтому, заменяя в преобразованиях (10.1.67)-(10.1.75)  $u$  на  $y$ , а  $m$  на  $r$ , приходим к следующему.

Утверждение 10.1.4. Передаточные функции  $w_{\mu}^{(2)}(s)$  многомерной системы (10.1.1), (10.1.2), разомкнутой по  $\mu$ -му входу регулятора, имеют вид

$$w_{\mu}^{(2)}(s) = w_{\mu\mu}^{(2)}(s) - [W^{(2)}(s)]^{[\mu]} \left\{ E_{r-1} + [W^{(2)}(s)]_{\mu\mu} \right\}^{-1} [W^{(2)}(s)]_{[\mu]}. \quad (10.1.81)$$

Пример 10.1.9. Рассмотрим систему (10.1.8), (10.1.9). Передаточная матрица этой системы, разомкнутой по всем входам регулятора, имеет вид (10.1.11). Выражение (10.1.81) при  $r = 2$  представляется (по аналогии с (10.1.76), (10.1.77)) как

$$w_1^{(2)}(s) = w_{11}^{(2)}(s) - w_{12}^{(2)}(s) [1 + w_{22}^{(2)}(s)]^{-1} w_{21}^{(2)}(s), \quad (10.1.82)$$

$$w_2^{(2)}(s) = w_{22}^{(2)}(s) - w_{21}^{(2)}(s) [1 + w_{11}^{(2)}(s)]^{-1} w_{12}^{(2)}(s). \quad (10.1.83)$$

Используя эти формулы, получим на основе (10.1.11)

$$w_1^{(2)}(s) = (s + 1)^{-1}, \quad w_2^{(2)}(s) = (s + 1)^{-1}. \quad (10.1.84)$$

## 10.2. Запасы устойчивости многомерных систем

### 10.2.1. Обобщённые запасы устойчивости

Рассмотрим асимптотически устойчивую многомерную систему (10.1.1), (10.1.2). Обобщённая передаточная функция этой системы, определяемая соотношениями

(10.1.37), (10.1.38), является аналогом передаточной функции разомкнутой системы в одномерном случае. Используя эту аналогию, определяем на основе  $w_{об}(j\omega)$  запасы по фазе и модулю и радиус запасов устойчивости, заменив в (2.П.10), (2.П.12)  $w_{раз}(j\omega)$  на  $w_{об}(j\omega)$ .

Определение 10.2.1. *Обобщённые запасы устойчивости многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) по фазе  $\varphi_{об.з}$  и модулю  $L_{об}$  имеют вид*

$$\varphi_{об.з} = \min_{\substack{\omega_{об.ср}^{(1)} \in \Omega_{об.ср}^{(1)} \\ \omega_{об.ср}^{(2)} \in \Omega_{об.ср}^{(2)}}} \left\{ 180^\circ + \arg w_{об}(j\omega_{об.ср}^{(1)}), 180^\circ - \arg w_{об}(j\omega_{об.ср}^{(2)}) \right\}, \quad (10.2.1)$$

$$L_{об} = \min_{\substack{\omega_{об.ф}^{(1)} \in \Omega_{об.ф}^{(1)} \\ \omega_{об.ф}^{(2)} \in \Omega_{об.ф}^{(2)}}} \left\{ a_{об}(\omega_{об.ф}^{(1)}), \frac{1}{a_{об}(\omega_{об.ф}^{(2)})} \right\}, \quad (10.2.2)$$

где множества  $\Omega_{об.ср} = \Omega_{об.ср}^{(1)} \cup \Omega_{об.ср}^{(2)}$  и  $\Omega_{об.ф} = \Omega_{об.ф}^{(1)} \cup \Omega_{об.ф}^{(2)} \cup \Omega_{об.ф}^{(3)}$  составляют решения уравнений

$$a_{об}(\omega_{об.ср}) = 1, \quad \text{Im } w_{об}(j\omega_{об.ф}) = 0, \quad (10.2.3)$$

в которых  $a_{об}(\omega) = \text{mod } w_{об}(j\omega)$ , а разбиение этих множеств на подмножества осуществляется на основе соотношений

$$\text{Im } w_{об}(j\omega_{ср}) < 0 \quad - \text{множество } \Omega_{об.ср}^{(1)}, \quad (10.2.4)$$

$$\text{Im } w_{об}(j\omega_{ср}) > 0 \quad - \text{множество } \Omega_{об.ср}^{(2)}, \quad (10.2.5)$$

$$\text{Re } w_{об}(j\omega) < -1 \quad - \text{множество } \Omega_{об.ф}^{(1)}, \quad (10.2.6)$$

$$-1 \leq \text{Re } w_{об}(j\omega) \leq 0 \quad - \text{множество } \Omega_{об.ф}^{(2)}, \quad (10.2.7)$$

$$\text{Re } w_{об}(j\omega) > 0 \quad - \text{множество } \Omega_{об.ф}^{(3)}. \quad (10.2.8)$$

■

Определение 10.2.2. *Обобщённым радиусом запасов устойчивости многомерных систем (10.1.1), (10.1.2) называется число*

$$r_{об} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w_{об}(j\omega)|. \quad (10.2.9)$$

■

Пример 10.2.1. Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 + \alpha u_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2. \quad (10.2.10)$$

Пусть он замкнут регуляторами

$$u_1 = -(4 + \alpha)x_1 + (1 + 3\alpha)x_2, \quad u_2 = x_1 - 3x_2. \quad (10.2.11)$$

В (10.2.10), (10.2.11)  $\alpha$  – некоторое произвольное число.

Вычислим обобщённый радиус запасов устойчивости этой системы. Нетрудно видеть, что

$$W(s) = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_p(s) = \begin{pmatrix} -(4+\alpha) & (1+3\alpha) \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Используем (10.1.6) и получим

$$W^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} (4+\alpha) & -(1+3\alpha) \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s-1} = \begin{pmatrix} (4+\alpha) & (4+\alpha)\alpha - (1+3\alpha) \\ -1 & -\alpha + 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Тогда, в соответствии с (10.1.37),

$$\begin{aligned} 1 + w_{об}(s) &= \det [E_2 + W^{(1)}(s)] = \\ &= \det \begin{pmatrix} s-1+4+\alpha & (4+\alpha)\alpha - (1+3\alpha) \\ -1 & s-1-\alpha+3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = \\ &= \det \begin{pmatrix} s+3+\alpha & \alpha^2 + \alpha - 1 \\ -1 & s+2-\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{s^2 + 5s + 5}{(s-1)^2}. \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

Нетрудно видеть, что

$$|1 + w_{об}(j\omega)|^2 = [1 + w_{об}(-j\omega)][1 + w_{об}(j\omega)] = \frac{(5 - \omega^2)^2 + 25\omega^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} \geq 1 \quad \text{для всех } \omega.$$

Это означает, в соответствии с (10.2.9), что

$$r_{об} \geq 1. \quad (10.2.13)$$

Отсюда следует также

$$\varphi_{об.з} \geq 60^\circ, \quad L_{об} \geq 2. \quad (10.2.14)$$

Покажем теперь, что несмотря на выполнение условий (10.2.13), (10.2.14) грубости по обобщённым частотным показателям, система (10.2.5), (10.2.6) обладает (при больших значениях  $\alpha$ ) малой степенью грубости.

В связи с этим заметим вначале, что обобщённая передаточная функция (10.2.12) этой системы не зависит от параметра  $\alpha$ , который сокращается при приведении подобных членов в процессе вычисления определителя.

Параметр  $\alpha$  входит как в уравнение объекта (10.2.10), так и в уравнение регулятора (10.2.11), и, следовательно, он реализуется различными физическими устройствами, а поэтому возмущения этого параметра в (10.2.10) отличаются от его возмущений в (10.2.11).

В связи с этим обозначим в (10.2.10)  $\alpha = \tilde{\alpha}$ . Исключая из (10.2.10)  $u_1$  и  $u_2$  с помощью (10.2.11), запишем уравнение этой системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - (4 + \alpha)x_1 + (1 + 3\alpha)x_2 + \tilde{\alpha}(x_1 - 3x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (x_1 - 3x_2). \end{aligned}$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + (3 + \alpha - \tilde{\alpha}) & -1 - 3\alpha + 3\tilde{\alpha} \\ -1 & s + 2 \end{pmatrix} = s^2 + (5 + \alpha - \tilde{\alpha})s + (5 - \alpha + \tilde{\alpha}). \quad (10.2.15)$$

Пусть регулятор (10.2.11) не подвержен параметрическим возмущениям и  $\alpha = 10^3$ , а параметрические возмущения объекта составляют лишь 1% от номинального значения. Другими словами,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \Delta\alpha, \quad \text{где} \quad |\Delta\alpha| \leq \frac{|\alpha|}{100}. \quad (10.2.16)$$

Как нетрудно видеть из (10.2.15), при столь малых (1%) параметрических возмущениях возможно нарушение устойчивости системы. ■

### 10.2.2. Запасы устойчивости на входе объекта и регулятора

Обратимся теперь к передаточным функциям многомерной системы, разомкнутой по  $\nu$ -му входу объекта либо  $\mu$ -му входу регулятора. Эти передаточные функции были введены после представления многомерной системы как некоторой совокупности эквивалентных ей одномерных систем.

Для каждой из этих одномерных систем можно определить запасы устойчивости и радиус запасов устойчивости.

Определение 10.2.3. *Запасы устойчивости многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) на входе объекта*

— по фазе:

$$\varphi_s^{(1)} = \min \{ \varphi_{1,s}^{(1)}, \varphi_{2,s}^{(1)}, \dots, \varphi_{m,s}^{(1)} \}, \quad (10.2.17)$$

где

$$\varphi_{\nu,s}^{(1)} = \min_{\substack{\omega_{\nu,ср}^{(1)} \in \Omega_{\nu,ср}^{(1)} \\ \omega_{\nu,ср}^{(2)} \in \Omega_{\nu,ср}^{(2)}}} \left\{ 180^\circ + \arg W_\nu(j\omega_{\nu,ср}^{(1)}), 180^\circ - \arg W_\nu(j\omega_{\nu,ср}^{(2)}) \right\} \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (10.2.18)$$

— по модулю:

$$L^{(1)} = \min \{ L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \dots, L_m^{(1)} \}, \quad (10.2.19)$$

где

$$L_\nu^{(1)} = \min_{\substack{\omega_{\nu,ф}^{(1)} \in \Omega_{\nu,ф}^{(1)} \\ \omega_{\nu,ф}^{(2)} \in \Omega_{\nu,ф}^{(2)}}} \left\{ a_\nu(\omega_{\nu,ф}^{(1)}), \frac{1}{a_\nu(\omega_{\nu,ф}^{(2)})} \right\} \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (10.2.20)$$

Множества  $\Omega_{\nu,ср}$  и  $\Omega_{\nu,ф}$  составляют решения уравнений

$$a_\nu^{(1)}(\omega_{\nu,ср}) = 1, \quad \text{Im} W_\nu^{(1)}(j\omega_{\nu,ф}) = 0 \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.21)$$



где  $a_\nu(\omega) = \text{mod } W_\nu(j\omega)$ . Разбиение этих множеств на подмножества осуществляется на основе соотношений (10.2.4)-(10.2.8), если в них заменить  $W_{\sigma}(j\omega)$  на  $W_\nu(j\omega)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ). ■

Определение 10.2.4. Запасы устойчивости многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) на входе регулятора определяются выражениями: по фазе – (10.2.17), (10.2.18); по модулю – (10.2.19), (10.2.20), если в них заменить в  $\varphi_3^{(1)}$  и  $L^{(1)}$  верхний индекс  $^{(1)}$  на  $^{(2)}$ ,  $\nu$  на  $\mu$  и  $m$  на  $r$ . ■

Определение 10.2.5. Радиусом запасов устойчивости многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) на входе объекта называется число

$$r^{(1)} = \min \{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_m^{(1)}\}, \quad (10.2.22)$$

где

$$r_\nu^{(1)} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w_\nu^{(1)}(j\omega)| \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (10.2.23)$$

Определение 10.2.6. Радиусом запасов устойчивости многомерной системы (10.1.1), (10.1.2) на входе регулятора называется число

$$r^{(2)} = \min \{r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, \dots, r_r^{(2)}\}, \quad (10.2.24)$$

где

$$r_\mu^{(2)} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w_\mu^{(2)}(j\omega)| \quad \mu = \overline{1, r}. \quad (10.2.25)$$

Пример 10.2.2. Найдём запасы устойчивости системы (10.2.10), (10.2.11) на входе объекта.

Для этого запишем эту систему в следующей эквивалентной форме

$$\dot{x}_1 = x_1 - (4 + \alpha)x_1 + (1 + 3\alpha)x_2 + \alpha u_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \quad (10.2.26)$$

$$u_2 = x_1 - 3x_2. \quad (10.2.27)$$

Передаточная функция системы (10.2.10), (10.2.11), разомкнутой по второму входу объекта, имеет вид

$$\begin{aligned} W_2^{(1)}(s) &= - \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s + 3 + \alpha & 1 + 3\alpha \\ 0 & s - 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s - 1 & 1 + 3\alpha \\ 0 & s + 3 + \alpha \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s - 1)(s + 3 + \alpha)} = \\ &= \frac{(3 - \alpha)s + (8 + \alpha)}{(3 + \alpha) \left( \frac{1}{3 + \alpha} s + 1 \right) (s - 1)} = \frac{8 + \alpha}{3 + \alpha} \cdot \frac{\frac{3 - \alpha}{8 + \alpha} s + 1}{\left( \frac{1}{3 + \alpha} s + 1 \right) (s - 1)}. \end{aligned}$$

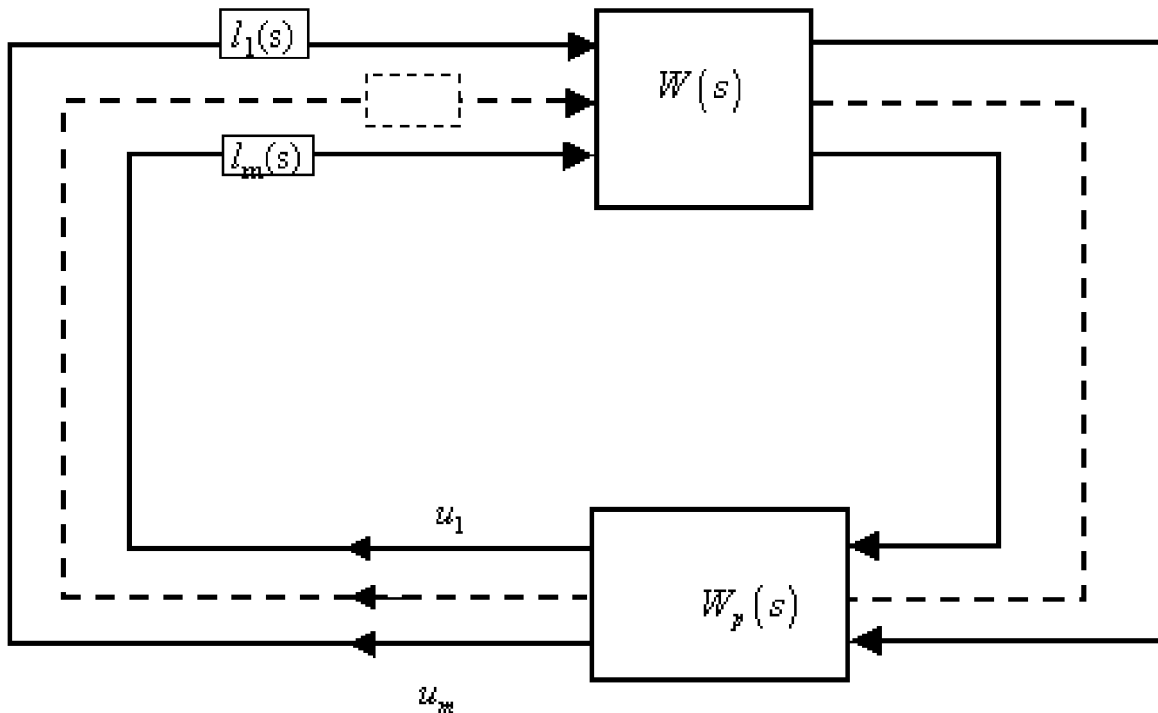


Рис. 10.2.1

Пусть  $\alpha = 10^3$ , тогда

$$w_2^{(1)}(s) \approx \frac{-s + 1}{(10^{-3}s + 1)(s - 1)} = -\frac{1}{10^{-3}s + 1}. \quad (10.2.28)$$

Отсюда следует, что

$$r_2^{(1)} \rightarrow 0, \quad \varphi_2^{(1)} \rightarrow 0, \quad L_2^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow 0. \quad (10.2.29)$$

Это означает, что (в отличие от обобщённых показателей грубости) запасы устойчивости системы (10.2.10), (10.2.11), обладающей малой степенью грубости, малы.

■

### 10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости

Рассмотрим структурную схему, приведённую на рис. 10.2.1.

Блоки с передаточными функциями  $l_\nu(s)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) описывают мультипликативное параметрическое возмущение передаточной матрицы объекта (10.1.1).

Будем рассматривать два вида передаточных функций  $l_\nu(s)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ).

Первый вид

$$l_\nu(j\omega) = l_\nu \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.30)$$

где  $l_\nu$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) – некоторые положительные числа.

Второй вид

$$l_\nu(j\omega) = e^{j\psi_\nu} \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.31)$$

где  $\psi_\nu$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) – числа.

Рассмотрим вначале случай, когда передаточные функции  $l_\nu(s)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) имеют вид (10.2.30), и найдём нижние –  $\underline{l}_\nu$  и верхние  $\bar{l}_\nu$  границы интервала  $[\underline{l}_\nu, \bar{l}_\nu]$  такие, что, если значения  $l_\nu$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) находятся внутри или на границе интервала

$$\underline{l}_\nu \leq l_\nu \leq \bar{l}_\nu \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.32)$$

то система, приведённая на рис. 10.2.1, сохраняет асимптотическую устойчивость. Если хотя бы одно из чисел  $l_\nu$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) выходит за пределы (10.2.32), то эта система становится неустойчивой.

Пусть теперь  $l_\nu(s)$  имеет вид (10.2.31). Найдём нижние –  $\underline{\psi}_\nu$  и верхние –  $\bar{\psi}_\nu$  границы интервала  $[\underline{\psi}_\nu, \bar{\psi}_\nu]$ , при которых система сохраняет свойство асимптотической устойчивости, если

$$\underline{\psi}_\nu \leq \psi_\nu \leq \bar{\psi}_\nu \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.33)$$

и становится неустойчивой, если хотя бы одно из значений  $\psi_\nu$  входит за пределы (10.2.33).

Определение 10.2.7. Многосвязным запасом устойчивости системы (10.1.1), (10.1.2) на входе объекта по фазе называется совокупность интервалов (10.2.33), а многосвязным запасом устойчивости этой системы на входе объекта по модулю называется совокупность интервалов (10.2.32). ■

К сожалению, это определение неконструктивно, так как остаётся неясным, как найти указанные в нём интервалы.

Кроме того, система (10.1.1), (10.1.2) характеризуется  $4m$  числами (являющимися границами интервалов), что затрудняет сравнение систем, различных по грубости.

Для формирования более удобного показателя грубости заметим, что интервалы (10.2.32) и (10.2.33) содержат числа  $l_\nu = 1$ ,  $\psi_\nu = 0$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ), соответствующие исходной (параметрически невозмущённой) системе (10.1.1), (10.1.2), и поэтому можно утверждать, что

$$\underline{l}_\nu < 1, \quad \bar{l}_\nu > 1; \quad \underline{\psi}_\nu < 0, \quad \bar{\psi}_\nu > 0 \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.2.34)$$

и тогда можно найти числа

$$\varphi_s^M = \min \left\{ |\underline{\psi}_1|, |\underline{\psi}_2|, \dots, |\underline{\psi}_m|; \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m \right\}, \quad (10.2.35)$$

$$L^M = \min \left\{ \frac{1}{\bar{l}_1}, \frac{1}{\bar{l}_2}, \dots, \frac{1}{\bar{l}_m}; \bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m \right\}. \quad (10.2.36)$$

Определение 10.2.8. Многосвязными запасами устойчивости системы (10.1.1), (10.1.2) на входе объекта по фазе –  $\varphi_s^M$  – по модулю –  $L^M$  – называются числа, получаемые из соотношений (10.2.35), (10.2.36). ■

Если на структурной схеме (рис. 10.2.1) перенести блоки с передаточными функциями  $l_\nu(s)$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ) со входа объекта на вход регулятора (полагая при этом  $\nu = \overline{1, r}$ ), то нетрудно ввести аналогичные определения многосвязных запасов устойчивости системы на входе регулятора.

### 10.3. Показатели грубости оптимальных систем

#### 10.3.1. Границы обобщённых показателей грубости

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (10.3.1)$$

с векторным управлением

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (10.3.2)$$

оптимальным в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u}) dt, \quad Q > 0. \quad (10.3.3)$$

Передаточная матрица системы (10.3.1), (10.3.2), разомкнутой по всем входам объекта

$$W^{(1)}(s) = -C'(Es - A)^{-1}B \quad (10.3.4)$$

удовлетворяет тождеству (9.3.16), на основе которого можно записать

$$\det [E_m + W^{(1)}(-s)] \cdot \det [E_m + W^{(1)}(s)] = \det [E_m + H'(-s)H(s)]. \quad (10.3.5)$$

Используем утверждение 10.1.2 и запишем (10.3.5) как

$$[1 + w_{o\delta}(-s)] \cdot [1 + w_{o\delta}(s)] = \det [E_m + H'(-s)H(s)]. \quad (10.3.6)$$

Обозначим

$$\psi_{o\delta}(\omega) = \det [E_m + H'(-j\omega)H(j\omega)] - 1 \quad (10.3.7)$$

и запишем условие оптимальности в частотной форме

$$[1 + w_{o\delta}(-j\omega)] \cdot [1 + w_{o\delta}(j\omega)] = 1 + \psi_{o\delta}(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.3.8)$$

Теорема 10.3.1. Обобщённые запасы устойчивости оптимальной системы (10.3.1), (10.3.2) имеют границы

$$\varphi_{об.з} \geq 60^\circ, \quad L_{об} \geq 2. \quad (10.3.9)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.2. Оно повторяет доказательство теоремы 4.2.1, если

$$\varphi_{o\delta}(\omega) \geq 0, \quad (10.3.10)$$

и поэтому вывод этого неравенства составляет основное содержание 10.Д.2.

Сопоставим выражение (10.2.9) для определения радиуса запасов устойчивости с условием оптимальности в частотной форме.

При условии (10.3.10) очевидно следующее.

Утверждение 10.3.1. Обобщённый радиус запасов устойчивости оптимальной системы (10.3.1), (10.3.2)

$$r_{o\delta} \geq 1. \quad (10.3.11)$$

■

Исследуем теперь запасы устойчивости на входе объекта.

Геометрический смысл (10.3.11), как и ранее, состоит в том, что годограф АФЧХ, соответствующий  $w_{o\delta}(s)$ , не пересекает запретного круга единичного радиуса с центром в точке  $(-1, j0)$ .

Теорема 10.3.2. Оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) обладает запасом устойчивости на входе объекта

$$\varphi_3^{(1)} \geq 60^\circ, \quad L^{(1)} \geq 2. \quad (10.3.12)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.3.

Теорема 10.3.3. Оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) имеет многосвязные запасы устойчивости на входе объекта

$$\varphi_3^{(1)M} \geq 60^\circ, \quad L^{(1)M} \geq 2. \quad (10.3.13)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.4.

### 10.3.2. Возможность малых запасов устойчивости на входе регулятора

Подведя итог изложенному выше, отметим, что система (10.3.1), (10.3.2) оптимальная в смысле функционала (10.3.3), является грубой по управлению по показателям: обобщённым запасам устойчивости, односвязным запасам устойчивости и многосвязным запасам устойчивости.

В связи с этим возникает вопрос: всегда ли эта оптимальная система является грубой по измеряемым переменным? К сожалению, ответ на этот вопрос отрицателен, о чём свидетельствует следующий пример.

Пример 10.3.1. Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 + u, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad (10.3.14)$$

$$u = 3 \cdot 10^3 y_1 - 10^3 y_2. \quad (10.3.15)$$

Уравнение (10.3.14) описывает объект управления, а (10.3.15) – регулятор.

Эта система является оптимальной в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} [101 \cdot 10^4 \cdot (3y_1 - y_2)^2 + u^2] dt. \quad (10.3.16)$$

Проверим это. Найдём для объекта (10.3.14) оптимальный, в смысле функционала (10.3.16), регулятор. Уравнение Риккати имеет в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix} = -101 \cdot 10^4 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, это уравнение разрешает матрица

$$P = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.3.18)$$

и тогда  $c_1 = 3 \cdot 10^3$ ,  $c_2 = -10^3$ . (10.3.19)

Исследуем теперь оптимальную систему (10.3.14), (10.3.15). Её передаточная функция при размыкании на входе объекта имеет вид

$$W^{(1)}(s) = - \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^3 & -10^3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10^3 s}{s^2 + 5s + 4}. \quad (10.3.20)$$

Запасы устойчивости, определённые на основе этой передаточной функции

$$\varphi_s^{(1)} > 90^\circ, \quad L^{(1)} \rightarrow \infty. \quad (10.3.21)$$

Найдём теперь передаточную функцию системы, разомкнутой на первом входе регулятора. В соответствии с определением 10.1.6 разомкнём рассматриваемую систему на первом входе регулятора и приложим к этому входу воздействие  $f_1(t)$ .

Тогда сигнал на первом выходе объекта описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2, & \dot{x}_2 &= 2x_1 + (-2 - 10^3)x_2 + 3 \cdot 10^3 f_1(t), \\ y_1 &= x_1. \end{aligned}$$

Найдём связь изображений  $y_1(s)$  и  $f_1(s)$

$$y_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s+2+10^3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \cdot f_1(s) = \frac{3 \cdot 10^3}{s^2 + (5+10^3)s + 3 \cdot 10^3 + 4}. \quad (10.3.22)$$

Тогда

$$W_1^{(2)}(s) = \frac{3 \cdot 10^3}{s^2 + (5 + 10^3)s + 3 \cdot 10^3 + 4}, \quad (10.3.23)$$

$$W_1^{(2)}(j\omega) = \frac{-3 \cdot 10^3(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)}{(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)^2 + (5 + 10^3)^2 \omega^2} + j \frac{(5 + 10^3)\omega}{(3 \cdot 10^3 + 4 - \omega^2)^2 + (5 + 10^3)^2 \omega^2}. \quad (10.3.24)$$

Отсюда заключаем, что при  $\omega = 0$ ,

$$\operatorname{Re} W_1^{(2)}(j0) = -\frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 + 4} = -0.998, \quad \operatorname{Im} W_1^{(2)}(j0) = 0, \quad (10.3.25)$$

и, следовательно, годограф АФХ, соответствующий передаточной функции (10.3.24), проходит близко к критической точке  $(-1, j0)$ . Запас по модулю при этом имеет недопустимо малое значение  $L = 1.002$ .

Рассмотрим теперь, что означают столь малые запасы устойчивости на входе регулятора.

Характеристический полином системы (10.3.14), (10.3.15) имеет вид

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + 3 & -1 \\ -3 \cdot 10^3 - 2 & s + 2 + 10^3 \end{pmatrix} = s^2 + (5 + 10^3)s + 4. \quad (10.3.26)$$

Допустим теперь, что коэффициент при  $x_1$ , в первом из уравнений объекта (10.3.14), отличается от расчётного значения  $(-3)$  на 0.3% и равен  $(-2.99)$ . Характеристический полином системы имеет в этом случае вид

$$d^u(s) = \det \begin{pmatrix} s + 2.99 & -1 \\ -3 \cdot 10^3 - 2 & s + 2 + 10^3 \end{pmatrix} = s^2 + (4.99 + 10^3)s - 6.02. \quad (10.3.27)$$

Таким образом, малые запасы устойчивости оптимальной системы (10.3.14), (10.3.15) по входу регулятора свидетельствуют о её высокой чувствительности к изменению параметра  $(-3)$  в уравнении объекта. ■

### 10.3.3. Возможность малых запасов устойчивости на входе объекта в системах оптимальных в смысле функционалов, содержащих недиагональную матрицу при управлениях

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (10.3.28)$$

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (10.3.29)$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'R\mathbf{u}] dt, \quad (10.3.30)$$

где  $Q$  и  $R$  – положительно-определённые матрицы,  $R$  – матрица общего вида, не являющаяся диагональной.

Матрица  $C$  (10.3.29) определяется в этом случае равенством

$$C = -PBR^{-1}, \quad (10.3.31)$$

где положительно-определённая матрица  $P$  служит решением уравнения

$$PA + A'P - PBR^{-1}BP + Q = 0. \quad (10.3.32)$$

Эти уравнения нетрудно получить из (9.3.4), (9.3.5). Действительно, введём новое управление

$$\bar{u} = Mu, \quad (10.3.33)$$

где

$$M'M = R. \quad (10.3.34)$$

Тогда уравнения объекта (10.3.28) и функционал (10.3.30) примут вид

$$\dot{x} = Ax + \bar{B}\bar{u}, \quad (10.3.35)$$

$$J = \int_0^{\infty} [x'Qx + \bar{u}'\bar{u}] dt, \quad (10.3.36)$$

где

$$\bar{B} = BM^{-1}. \quad (10.3.37)$$

Нетрудно видеть, что (10.3.35) и (10.3.36) совпадают с уравнением (9.3.1) и функционалом (9.3.3). Заменяем в (9.3.4) и (9.3.5)  $B$  на  $\bar{B}$ , учтём (10.3.37) и получим (10.3.31), (10.3.32).

Условие оптимальности в частотной форме принимает теперь вид

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-j\omega) \right]' R \left[ E_m + W^{(1)}(j\omega) \right] = R + H'(-j\omega)H'(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.3.38)$$

Это следует непосредственно из (9.3.11), если в нём положить на основе (10.3.31),  $PB = -CR$  и учесть уравнение (10.3.32).

Утверждение 10.3.2. Обобщённые запасы устойчивости системы (10.3.28), (10.3.29), оптимальной в смысле функционала (10.3.30),

$$\varphi_{об.з} \geq 60^\circ, \quad L_{об} \geq 2. \quad (10.3.39)$$

■

Для доказательства запишем тождество (10.3.38) как

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-s) \right]' R \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right] = M' \left[ E_m + H'_M(-s)H_M(s) \right] M, \quad (10.3.40)$$



где

$$H_M(s) = H(s)M^{-1} = H(E_m s - A)^{-1} B M^{-1}, \quad (10.3.41)$$

и получим, после сокращения на  $\det R \neq 0$ , тождество

$$\det [E_m + W^{(1)}(-s)] \det [E_m + W^{(1)}(s)] = \det [E_m + H'_M(-s)H_M(s)]. \quad (10.3.42)$$

Отсюда следует

$$[1 + w_{o\delta}(-s)] \cdot [1 + w_{o\delta}(s)] = \det [E_m + H'_M(-s)H_M(s)]. \quad (10.3.43)$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (10.3.6), и поэтому, повторяя доказательство теоремы 10.3.1, получим (10.3.39).

Исследуем теперь запасы устойчивости системы (10.3.28), (10.3.29) на входе объекта. Здесь не удаётся доказать существование границ запасов устойчивости (10.3.12). Более того, ниже приводится пример, свидетельствующий о том, что запасы устойчивости рассматриваемой оптимальной системы могут быть малыми.

Приведём некоторые эвристические соображения о причинах такого явления.

Представим систему (10.3.28), (10.3.29) в следующей эквивалентной форме вида (10.1.43), (10.1.44)

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B_{-\nu} C'_{-\nu}) \mathbf{x} + B_{[\nu]} u_\nu, \quad (10.3.44)$$

$$u_\nu = C'_{[\nu]} \mathbf{x}. \quad (10.3.45)$$

Из оптимальности управления (10.3.29) следует, что

$$C_{-\nu} = -P [B R^{-1}]_{-\nu}, \quad C_{[\nu]} = -P [B R^{-1}]_{[\nu]}. \quad (10.3.46)$$

Функционал (10.3.30) также представим, используя обозначения (10.1.68)-(10.1.70), в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u}] dt = \\ &= \int_0^\infty [\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}'_{-\nu} [R]_{\tilde{\nu\nu}} \mathbf{u}_{-\nu} + 2 (R'_{[\nu]} \mathbf{u}_{-\nu}) u_\nu + r_{\nu\nu} u_\nu^2] dt, \end{aligned} \quad (10.3.47)$$

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}' (Q + C_{-\nu} [R]_{\tilde{\nu\nu}} C'_{-\nu}) \mathbf{x} + 2 (R'_{[\nu]} C'_{-\nu} \mathbf{x}) u_\nu + r_{\nu\nu} u_\nu^2] dt. \quad (10.3.48)$$

Если в (10.3.44), (10.3.45) исключить матрицу  $C_{-\nu}$  с помощью первого из соотношений (10.3.46), то естественно ожидать (как и в случае  $R = E_m$ ), что система (10.3.44), (10.3.45) со скалярным управлением является оптимальной в смысле функционала (10.3.48). Однако этот функционал содержит произведения  $\mathbf{x}$  и  $u_\nu$ , и

поэтому (как следует из примера 4.5.1) система (10.3.44), (10.3.45) может обладать малыми запасами устойчивости.

**Пример 10.3.2.** Рассмотрим систему (10.2.10), (10.2.11), подробно изученную в примерах 10.2.1, 10.2.2, где показано, что эта система обладает малой степенью грубости, а её запасы (10.2.29) по фазе и модулю на входе объекта малы при достаточно больших значениях  $\alpha$ .

Покажем, что эта система является оптимальной в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left[ x_1^2 + x_2^2 + \frac{4}{9}u_1^2 + \frac{2}{9}(4\alpha + 5)u_1u_2 + \frac{1}{9}(4\alpha^2 + 10\alpha + 9)u_2^2 \right] dt. \quad (10.3.49)$$

Итак, пусть имеется объект (10.2.10) и требуется найти управления

$$u_1 = c_{11}x_1 + c_{21}x_2, \quad u_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2, \quad (10.3.50)$$

такие, чтобы на движениях системы (10.2.10), (10.2.50) минимизировался функционал (10.3.49). Уравнения (10.3.31), (10.3.32), разрешающие эту задачу, имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 4\alpha^2 + 10\alpha + 9 & -4\alpha - 5 \\ -4\alpha - 5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.3.51)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\alpha^2 + 10\alpha + 9 & -4\alpha - 5 \\ -4\alpha - 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10.3.52)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что разрешающая уравнение (10.3.51) матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10.3.53)$$

Подставляя эту матрицу в (10.3.52), получим управление (10.2.11). ■

#### 10.3.4. Границы запасов устойчивости систем, оптимальных по критерию обобщённой работы

Пусть матрица  $C$  в регуляторе (10.3.2) получена в результате процедуры АКОР по критерию обобщённой работы. Это означает, что

$$C = -P^{(1)}B, \quad (10.3.54)$$

где положительно-определённая матрица  $P^{(1)}$  служит решением уравнения Ляпунова (9.3.43)

$$P^{(1)}A + A'P^{(1)} = -Q. \quad (10.3.55)$$

Теорема 10.3.4. Система (10.3.1), (10.3.2), оптимальная по критерию обобщённой работы, обладает запасами устойчивости по входу объекта

$$\varphi_3^{(1)} > 90^\circ, \quad L^{(1)} \rightarrow \infty. \quad (10.3.56)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.5. Эта теорема является обобщением утверждения 4.2.3 на случай векторного управления.

Теорема 10.3.5. Многосвязные запасы устойчивости по входу системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы,

$$\varphi_3^{(1)M} > 90^\circ, \quad L^{(1)M} \rightarrow \infty. \quad (10.3.57)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 10.Д.6.

## Приложения к главе 10

### 10.П. Матрицы возвратной разности и их сингулярные значения

#### 10.П.1. Аддитивные параметрические возмущения

Пусть на входе объекта управления (10.1.1) действует вместе с управлением внешнее возмущение  $\mathbf{f}(t)$ . Тогда уравнения (10.1.1), (10.1.2) примут вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \mathbf{f}), \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x} + F_o\mathbf{u}, \quad (10.П.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad (10.П.2)$$

где  $\mathbf{f}(t)$  – неизвестный  $m$ -мерный вектор.

Найдём связь между вектором –  $\mathbf{u}$  – выхода регулятора (10.П.2) и вектором  $\mathbf{f}$ .

Преобразуя (10.П.1), (10.П.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим, учитывая (10.1.4), (10.1.5),

$$\mathbf{y} = W(s)(\mathbf{u} + \mathbf{f}), \quad \mathbf{u} = W_p(s)\mathbf{y}. \quad (10.П.3)$$

Отсюда, исключая  $\mathbf{y}(s)$ , заключаем

$$\mathbf{u} = - [E_m + W^{(1)}(s)]^{-1} W^{(1)}(s)\mathbf{f}. \quad (10.П.4)$$

На основе этого выражения нетрудно построить структурную схему системы (10.П.1), (10.П.2), которая приведена на рис. 10.П.1.

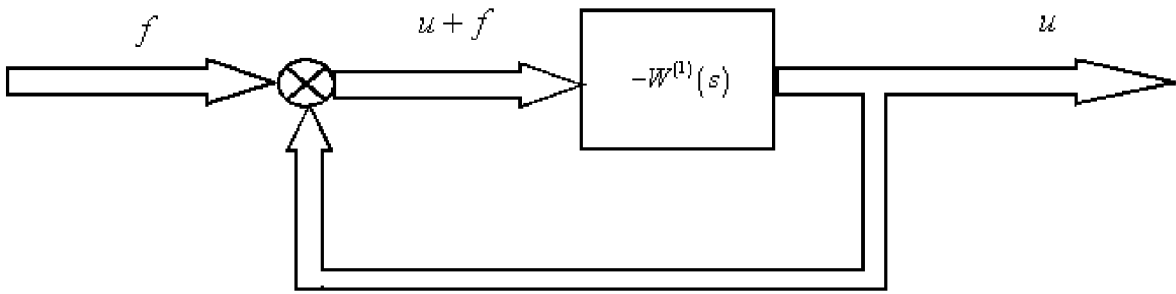


Рис. 10.П.1

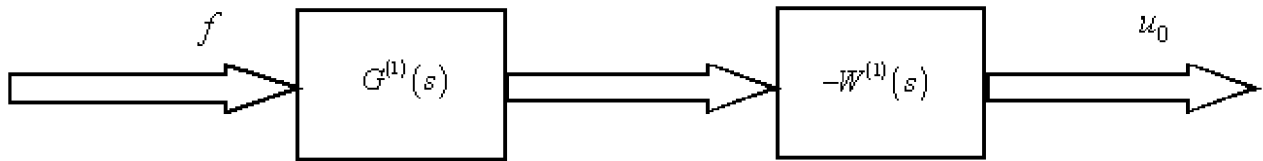


Рис. 10.П.2

Схема, приведённая на этом рисунке, содержит обратную связь. Эквивалентная ей схема без обратной связи приведена на рис. 10.П.2.

Передаточная матрица  $G(s)$  (размеров  $m \times m$ ) в этой схеме выбирается так, чтобы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0. \quad (10.П.5)$$

Очевидно, что для выполнения этого равенства необходимо, чтобы

$$G^{(1)}(s) = [E_m + W^{(1)}(s)]^{-1}. \quad (10.П.6)$$

Матрицы  $W^{(1)}(s)$  и  $G^{(1)}(s)$  определяются номинальными значениями параметров системы (10.П.1), (10.П.2).

Пусть эта система подвержена параметрическим возмущениям. Матрицы  $W^{(1)}(s)$  и  $G^{(1)}(s)$  параметрически возмущённой системы будем обозначать как  $W_\alpha^{(1)}(s)$  и  $G_\alpha^{(1)}(s)$  соответственно. Для простоты будем полагать, параметрические возмущения в блоке, реализующем  $G^{(1)}(s)$ , отсутствуют. Это означает, что

$$G_\alpha^{(1)}(s) = G^{(1)}(s). \quad (10.П.7)$$

Кроме того, пусть

$$W_\alpha^{(1)}(s) = W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s), \quad (10.П.8)$$

где  $\Delta W^{(1)}(s)$  – передаточная матрица (размеров  $m \times m$ ), определяемая параметрическими аддитивными возмущениями системы (10.П.1), (10.П.2).

Структурные схемы параметрически возмущённой замкнутой и разомкнутой систем приведены на рис. 10.П.3 и 10.П.4.

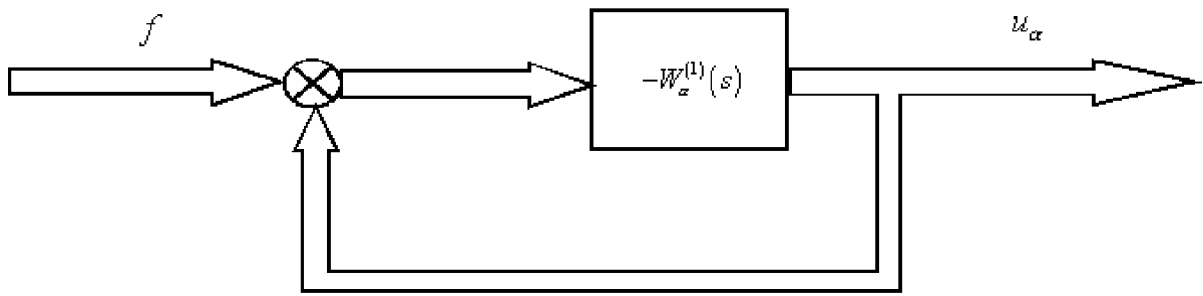


Рис. 10.П.3

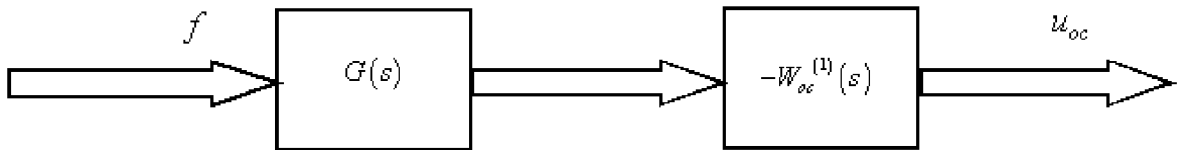


Рис. 10.П.4

Введём в рассмотрение разность векторов управлений исходной параметрически возмущённой замкнутой системы

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}. \quad (10.П.9)$$

Аналогично, разность этих векторов для разомкнутой системы

$$\mathbf{e}_0^{(1)} = \mathbf{u}_{0\alpha} - \mathbf{u}_0. \quad (10.П.10)$$

Определение 10.П.1. Замкнутая система называется менее чувствительной по управлению к параметрическим возмущениям по сравнению с разомкнутой, если

$$\int_0^\infty \mathbf{e}^{(1)'}(t) \mathbf{e}^{(1)}(t) dt \leq \int_0^\infty \mathbf{e}_0^{(1)'}(t) \mathbf{e}_0^{(1)}(t) dt. \quad (10.П.11)$$

■

## 10.П.2. Условие низкой чувствительности

Найдём условия, накладываемые на матрицу  $W^{(1)}(s)$ , при которых система (10.П.1), (10.П.2) менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая система. Для этого исследуем связь векторов  $\mathbf{e}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_0^{(1)}$ , с вектором  $\mathbf{f}$ .

Непосредственно из рис. 10.П.3 и 10.П.4 следует

$$\mathbf{u}_\alpha = - \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} W_\alpha^{(1)}(s) \mathbf{f}. \quad (10.П.12)$$

Разность

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u} = - \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} W_\alpha^{(1)}(s) \mathbf{f} + \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} W^{(1)}(s) \mathbf{f} = \\ &= - \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} \cdot \left\{ W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ E_m + W^{(1)}(s) + \Delta W^{(1)}(s) \right] \cdot \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} W^{(1)}(s) \right\} \mathbf{f} = \\ &= - \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} \cdot \left\{ \Delta W^{(1)}(s) \cdot \left[ E_m - \left( E_m + W^{(1)}(s) \right)^{-1} W^{(1)}(s) \right] \right\} \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$E_m - \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} W^{(1)}(s) = E_m + W^{(1)}(s), \quad (10.П.13)$$

в этом нетрудно убедиться, умножая (10.П.13) слева на  $E_m + W^{(1)}(s)$ , получим окончательно

$$\mathbf{e} = - \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} \Delta W^{(1)}(s) \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right] \mathbf{f}. \quad (10.П.14)$$

Рассмотрим теперь разомкнутую систему. Из рис. 10.П.4 и (10.П.6) следует

$$\mathbf{u}_{0\alpha} = -W_\alpha^{(1)}(s) G^{(1)}(s) \mathbf{f} = -W_\alpha^{(1)}(s) \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{f}. \quad (10.П.15)$$

Подчеркнём, что матрица  $G^{(1)}(s)$  строилась так, чтобы параметрические невозмущённые замкнутая и разомкнутая системы совпадали. После построения этой матрицы нужно «забыть» о её происхождении и считать, что входящая в  $G^{(1)}(s)$  матрица  $W^{(1)}(s)$  лишь формально совпадает с передаточной матрицей системы (10.П.1), (10.П.2).

Найдём теперь разность

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}_{0\alpha} - \mathbf{u}_0 = -W_\alpha^{(1)}(s) G^{(1)}(s) \mathbf{f} + W^{(1)}(s) G^{(1)}(s) \mathbf{f} = -\Delta W^{(1)}(s) \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{f}. \quad (10.П.16)$$

Сравнивая (10.П.14) с (10.П.16), заключаем, что

$$\mathbf{e} = \left[ E_m + W_\alpha^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{e}_0. \quad (10.П.17)$$

При малых параметрических возмущениях  $W_\alpha^{(1)}(s) \approx W^{(1)}(s)$ , и поэтому в (10.П.17) заменим  $W_\alpha^{(1)}(s)$  на  $W^{(1)}(s)$ .

Определение 10.П.2. Передаточная матрица

$$S^{(1)}(s) = \left[ E_m + W^{(1)}(s) \right]^{-1} \quad (10.П.18)$$

называется *оператором чувствительности по управлению*, а матрица  $E_m + W^{(1)}(s)$  называется *матрицей возвратной разности по управлению*. ■

Теорема 10.П.1. Замкнутая система менее чувствительна по управлению к параметрическим возмущениям, если её оператор чувствительности удовлетворяет условиям

$$S^{(1)'(-j\omega)}S^{(1)}(j\omega) \leq E_m, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.П.19)$$

■

**Доказательство.** Используя теорему Парсеваля (4.Д.74), запишем при условии, что  $e(s) = S(s)e_0(s)$ ,

$$\int_0^{\infty} e'(t)e(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e'(-j\omega)e(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e'_0(-j\omega)S^{(1)'(-j\omega)}S^{(1)}(j\omega)e_0(j\omega)d\omega. \quad (10.П.20)$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\infty} e'_0(t)e_0(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e'_0(-j\omega)e_0(j\omega) d\omega. \quad (10.П.21)$$

Из (10.П.20), (10.П.21) следует, что неравенство (10.П.11) выполняется, если выполняется условие (10.П.19), и таким образом теорема 10.П.1 доказана.

Отметим, что неравенство (10.П.19) – это выражение неотрицательности матрицы  $E_m - S^{(1)'(-j\omega)}S^{(1)}(j\omega)$  для всех  $\omega$ .

Используя обозначение (10.П.18), получим явный вид условия низкой чувствительности

$$[E_m + W^{(1)'(-j\omega)}] \cdot [E_m + W^{(1)}(j\omega)] \geq E_m, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.П.22)$$

В случае скалярного управления (когда  $m = 1$ ) это условие принимает вид

$$[1 + w_{paz}(-j\omega)] \cdot [1 + w_{paz}(j\omega)] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.П.23)$$

Сравнивая это неравенство с (2.2.9), получаем следствие теоремы 10.П.1.

Следствие 10.П.1. Если замкнутая система со скалярным управлением менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая система, то радиус запасов устойчивости на входе объекта такой системы не менее 1. ■

Таким образом, произведение матрицы возвратной разности на её сопряжённую служит мерой грубости системы регулирования.

### 10.П.3. Чувствительность по регулируемым переменным

Аналогично вводится понятие оператора чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по регулируемым переменным.

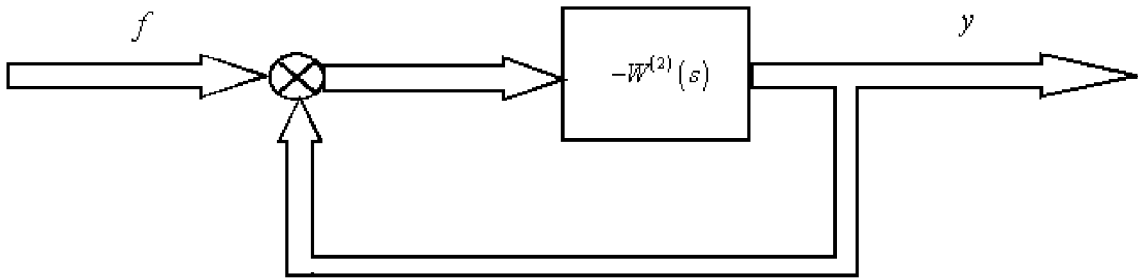


Рис. 10.П.5

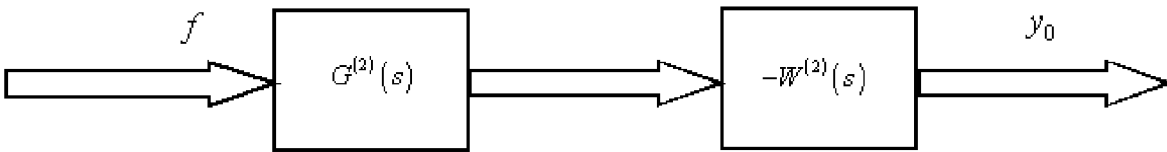


Рис. 10.П.6

Действительно, пусть на вход регулятора (10.1.2) действует вместе с вектором измеряемых переменных –  $\mathbf{y}$  – внешнее возмущение (помеха)  $\varphi$ . Уравнения (10.1.1), (10.1.2) имеют в этом случае вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{F}_o\mathbf{u}, \quad (10.П.24)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p(\mathbf{y} + \varphi), \quad \mathbf{u} = \mathbf{D}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{F}_p\mathbf{y}. \quad (10.П.25)$$

Структурная схема этой системы приведена на рис. 10.П.5.

Эквивалентная разомкнутая система приведена на рис. 10.П.6, где  $G^{(2)}(s) = E_r + W^{(2)}(s)$ .

Введём разность

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{y}_\alpha - \mathbf{y}, \quad \mathbf{e}_0^{(2)} = \mathbf{y}_{0\alpha} - \mathbf{y}_0, \quad (10.П.26)$$

где  $\mathbf{y}_\alpha$  и  $\mathbf{y}_{0\alpha}$  – выходы объекта в параметрически возмущённых замкнутой и разомкнутой системах соответственно.

Определение 10.П.3. Замкнутая система называется менее чувствительной по регулируемым переменным к параметрическим возмущениям по сравнению с разомкнутой, если

$$\int_0^\infty \mathbf{e}^{(2)'}(t)\mathbf{e}^{(2)}(t) dt \leq \int_0^\infty \mathbf{e}_0^{(2)'}(t)\mathbf{e}_0^{(2)}(t) dt. \quad (10.П.27)$$

■

Теорема 10.П.2. Замкнутая система менее чувствительна по регулируемым переменным к параметрическим возмущениям, если её оператор чувствительности по регулируемым переменным

$$S^{(2)}(s) = [E_r + W^{(2)}(s)]^{-1} \quad (10.П.28)$$



удовлетворяет условию

$$S^{(2)'(-j\omega)}S^{(2)}(j\omega) \leq E_r, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (10.П.29)$$

■

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 10.П.1.

Следствие 10.П.2. Если замкнутая система со скалярной изменяемой переменной менее чувствительна к параметрическим возмущениям, чем эквивалентная ей разомкнутая, то радиус запасов устойчивости на входе регулятора такой системы не менее 1 ( $r^{(2)} \geq 1$ ). ■

### 10.П.4. Анализ грубости на основе матриц возвратной разности

Рассмотрим подробнее соотношение (10.П.22), выражающее условие низкой чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по управлению. Оно является сокращённой (символической) формой описания неравенства Эрмитовых форм

$$\bar{z}' [E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)] z \geq \bar{z}' z \quad \forall z, \omega, \quad (10.П.30)$$

где  $z$  –  $m$ -мерный вектор комплексных чисел, а  $\bar{z}$  – комплексно-сопряжённый к нему вектор.

Для проверки этого неравенства нужно вычислить собственные числа симметричной матрицы  $[E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)]$ , которые будем обозначать  $\lambda_k^{(1)}(\omega)$  ( $k = \overline{1, m}$ ). Если

$$\lambda_k^{(1)}(\omega) \geq 1 \quad k = \overline{1, m}, \quad \forall \omega, \quad (10.П.31)$$

то неравенство (10.П.30) выполняется.

Действительно, Эрмитову матрицу  $[E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)]$  всегда можно представить как

$$[E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)] = U \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)}(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{(1)}(\omega) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m^{(1)}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \bar{U}',$$

где  $U$  – унитарная матрица, обладающая свойством

$$\bar{U}' U = E_m.$$

Введём новый вектор

$$\eta = \bar{U}' z \quad \left( z = [\bar{U}']^{-1} \eta \quad \text{или} \quad z = U \eta \right),$$

тогда (10.П.30) примет вид

$$\sum_{k=1}^m \sigma_k^{(1)}(\omega) \bar{\eta}_k \eta_k \geq \sum_{k=1}^m \bar{\eta}_k \eta_k.$$

Отсюда следует (10.П.31).

Условие (10.П.29) низкой чувствительности системы (10.1.1), (10.1.2) по регулируемым переменным также можно записать в виде

$$\left[ E_r + W^{(2)}(-j\omega) \right]' \left[ E_r + W^{(2)}(j\omega) \right] \geq E_r \quad \forall \omega. \quad (10.П.32)$$

Это неравенство выполняется, если

$$\lambda_k^{(2)}(\omega) \geq 1 \quad k = \overline{1, r}, \quad \forall \omega, \quad (10.П.33)$$

где  $\lambda_k^{(2)}(\omega)$  – собственные числа Эрмитовой матрицы

$$\left[ E_r + W^{(2)}(-j\omega) \right]' \left[ E_r + W^{(2)}(j\omega) \right].$$

При скалярном управлении

$$\lambda_1^{(1)}(\omega) = \left[ 1 + w^{(1)}(-j\omega) \right] \left[ 1 + w^{(1)}(j\omega) \right], \quad (10.П.34)$$

а при скалярной измеряемой переменной

$$\lambda_1^{(2)}(\omega) = \left[ 1 + w^{(2)}(-j\omega) \right] \left[ 1 + w^{(2)}(j\omega) \right]. \quad (10.П.35)$$

Пример 10.П.1. Исследуем матрицу возвратной разности системы (10.1.8), (10.1.9), рассмотренной в примере 10.1.1. Передаточные матрицы  $W^{(1)}(s) = W^{(2)}(s)$  этой системы имеют вид (10.1.11), и, следовательно, матрица

$$\begin{aligned} & \left[ E_2 + W^{(1)}(-j\omega) \right]' \left[ E_2 + W^{(1)}(j\omega) \right] = \left[ E_2 + W^{(2)}(-j\omega) \right]' \left[ E_2 + W^{(2)}(j\omega) \right] = \\ & = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1-j\omega} & \frac{3}{1-j\omega} \\ 0 & 1 + \frac{1}{1-j\omega} \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1+j\omega} & \frac{3}{1+j\omega} \\ 0 & 1 + \frac{1}{1+j\omega} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{2-j\omega}{1-j\omega} & 0 \\ \frac{3}{1-j\omega} & \frac{2-j\omega}{1-j\omega} \end{pmatrix}' \times \begin{pmatrix} \frac{2+j\omega}{1+j\omega} & \frac{3}{1+j\omega} \\ 0 & \frac{2+j\omega}{1+j\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2+4}{\omega^2+1} & \frac{3(2-j\omega)}{\omega^2+1} \\ \frac{3(2+j\omega)}{\omega^2+1} & \frac{\omega^2+1}{\omega^2+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Переходя к нахождению собственных чисел последней матрицы, составим характеристический полином

$$d(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\omega^2+4}{\omega^2+1} & -\frac{3(2-j\omega)}{\omega^2+1} \\ -\frac{3(2+j\omega)}{\omega^2+1} & \lambda - \frac{\omega^2+1}{\omega^2+1} \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2\omega^2+17}{\omega^2+1} \lambda + \frac{\omega^4+8\omega^2+16}{(\omega^2+1)^2}.$$

Корни этого полинома

$$\lambda_1(\omega) = \frac{2\omega^2 + 17 + \sqrt{36\omega^2 + 125}}{2(\omega^2 + 1)}, \quad \lambda_2(\omega) = \frac{2\omega^2 + 17 - \sqrt{36\omega^2 + 125}}{2(\omega^2 + 1)}. \quad (10.П.36)$$

Нетрудно видеть, что

$$\lambda_1(\omega) > 1 \quad \forall \omega, \quad (10.П.37)$$

а  $\lambda_2(\omega)$  может принимать значение меньше 1.

Действительно, при  $\omega = 3$

$$\lambda_2(3) = 0.69 < 1. \quad (10.П.38)$$

Это соотношение имеет принципиальное значение. Дело в том, что система (10.1.8), (10.1.9) обладает хорошими запасами устойчивости, а неравенства (10.П.19) и (10.П.29) для неё нарушаются. В связи с этим исследуем систему (10.1.8), (10.1.9) более детально. Убедимся вначале, что для этой системы

$$r_{o\delta} \geq 1, \quad \varphi_3^{(1)} = \varphi_3^{(2)} \geq 90^\circ, \quad L^{(1)} = L^{(2)} \rightarrow \infty. \quad (10.П.39)$$

Действительно, из (10.1.39) следует, что

$$1 + w_{o\delta}(s) = \frac{(s + 2)^2}{(s + 1)^2}.$$

Тогда  $|1 + w_{o\delta}(j\omega)|^2 = \frac{(\omega^2 + 4)^2}{(\omega^2 + 1)^2} \geq 1 \quad \forall \omega$ .

Это означает, что  $r_{o\delta} \geq 1$ .

Далее, на основе (10.1.55), (10.1.54), (10.1.84) заключаем, что

$$W_1^{(1)}(s) = W_2^{(1)}(s) = W_1^{(2)}(s) = W_2^{(2)}(s) = (s + 1)^{-1}. \quad (10.П.40)$$

Годограф АФЧХ, соответствующий этой передаточной функции, приведён на рис. 10.П.7. Откуда следуют остальные из соотношений (10.П.39).

Рассмотрим множество систем (10.1.8), (10.1.9), которое описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + b_{12}u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, \quad u_1 = -x_1, \quad u_2 = -x_2, \quad (10.П.41)$$

где  $b_{12}$  – произвольное число.

Нетрудно проверить, что передаточные функции  $W_1^{(1)}(s)$ ,  $W_2^{(1)}(s)$ ,  $W_1^{(2)}(s)$ ,  $W_2^{(2)}(s)$  и  $w_{o\delta}(s)$  этой системы не зависят от  $b_{12}$  и совпадают с (10.1.39) и (10.П.40), и, следовательно, независимо от  $b_{12}$  выполняются соотношения (10.П.39).

Пусть объект управления системы (10.П.41) подвержен структурным возмущением и «возмущённая» система имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1 + b_{12}u_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \frac{5}{b_{12}}u_1 + u_2, \quad u_1 = -x_1, \quad u_2 = -x_2, \quad (10.П.42)$$

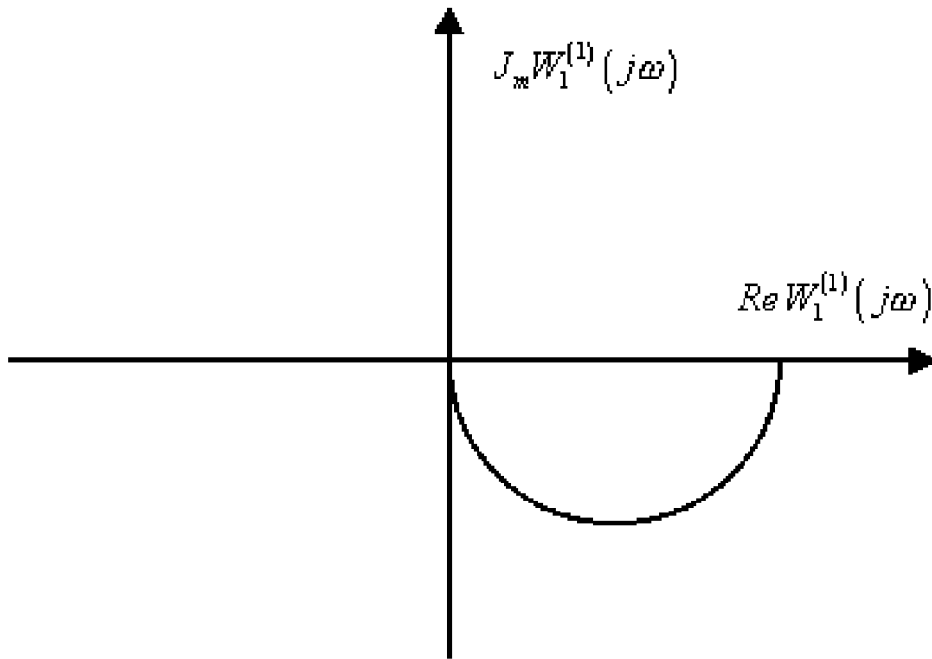


Рис. 10.П.7

Структурная схема исходного объекта и возмущённого объекта (10.П.41), (10.П.42) приведена на рис. 10.П.8.

Характеристический полином системы (10.П.42)

$$d(s) = \det \begin{pmatrix} s + 2 & -b_{12} \\ -\frac{5}{b_{12}} & s + 2 \end{pmatrix} = s^2 + 4s + 4 - \frac{5}{b_{12}} \cdot b_{12} = s^2 + 4s - 1. \quad (10.П.43)$$

Таким образом, если объект системы управления (10.П.41) подвержен структурным возмущениям, то при сколь угодно малых значениях числа  $\frac{5}{b_{12}}$  он теряет устойчивость. Признаком такого свойства рассматриваемой системы является соотношение (10.П.38). ■

### 10.П.5. Сингулярные значения матриц возвратной разности

Естественно сократить число  $m + r$  условий (10.П.31), (10.П.33) низкой чувствительности, и для этого введём понятие о наименьших сингулярных значениях матриц возвратной разности.

Определение 10.П.4. Сингулярными числами  $\sigma_i[K]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – некоторой комплексной матрицы  $K$  размеров  $n \times n$  называются квадратные корни из собственных чисел неотрицательной матрицы  $\bar{K}'K$ , (где  $\bar{K}$  – комплексно сопряженная матрица). Это означает, что

$$\sigma_i[K] = \sqrt{\lambda_i[\bar{K}'K]} \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.П.44)$$

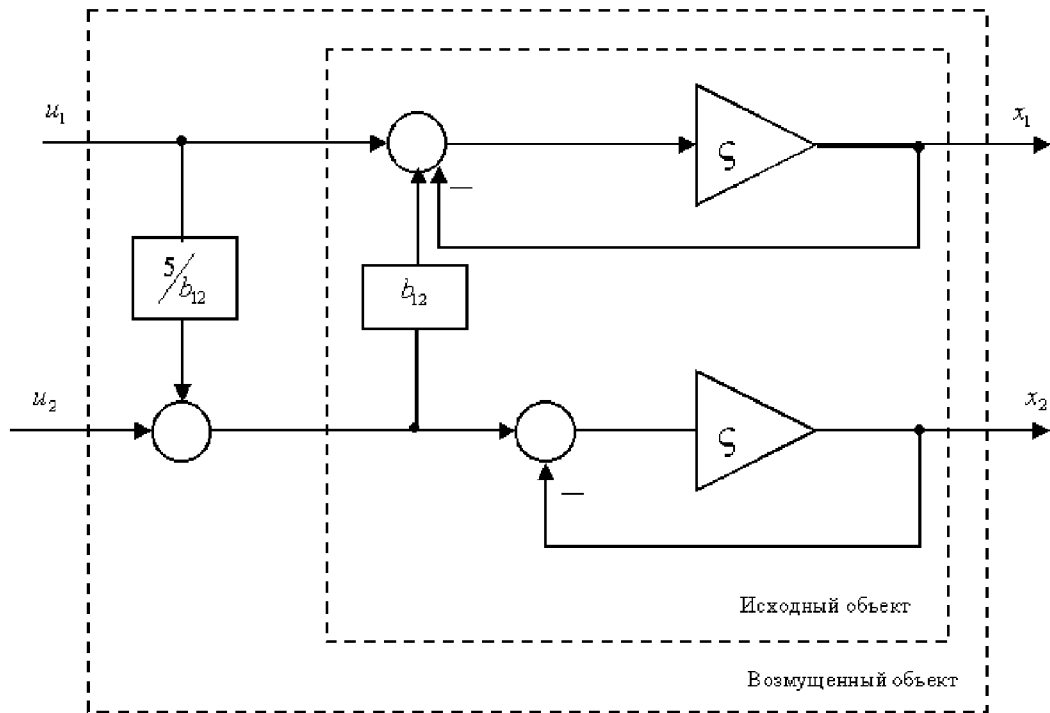


Рис. 10.П.8

В соответствии с этим определением

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_i [E_m + W^{(1)}(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i^{(1)}(\omega)} \quad i = \overline{1, m}, \quad (10.П.45)$$

$$\sigma_i^{(2)} = \sigma_i [E_r + W^{(2)}(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i^{(2)}(\omega)} \quad i = \overline{1, r}. \quad (10.П.46)$$

Определение 10.П.5. *Наименьшим сингулярным значением матрицы возвратной разности по управлению называется функция*

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) = \min \{ \sigma_1^{(1)}(\omega), \sigma_2^{(1)}(\omega), \dots, \sigma_m^{(1)}(\omega) \} \quad \forall \omega. \quad (10.П.47)$$

■

Определение 10.П.6. *Наименьшим сингулярным значением матрицы возвратной разности по регулируемым переменным называется функция*

$$\underline{\sigma}^{(2)}(\omega) = \min \{ \sigma_1^{(2)}(\omega), \sigma_2^{(2)}(\omega), \dots, \sigma_r^{(2)}(\omega) \} \quad \forall \omega. \quad (10.П.48)$$

■

На рис. 10.П.9 показано как определяется функция  $\underline{\sigma}^{(1)}(\omega)$  (которая отмечена штриховкой) по известным функциям  $\sigma_1^{(1)}(\omega)$ ,  $\sigma_2^{(1)}(\omega)$  при  $m = 2$ .

При скалярном управлении  $\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) = \sigma_1^{(1)}(\omega) = [1 + w^{(1)}(-j\omega)] [1 + w^{(1)}(j\omega)]$ , и поэтому радиус запасов устойчивости

$$r^{(1)} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \underline{\sigma}^{(1)}(\omega). \quad (10.П.49)$$

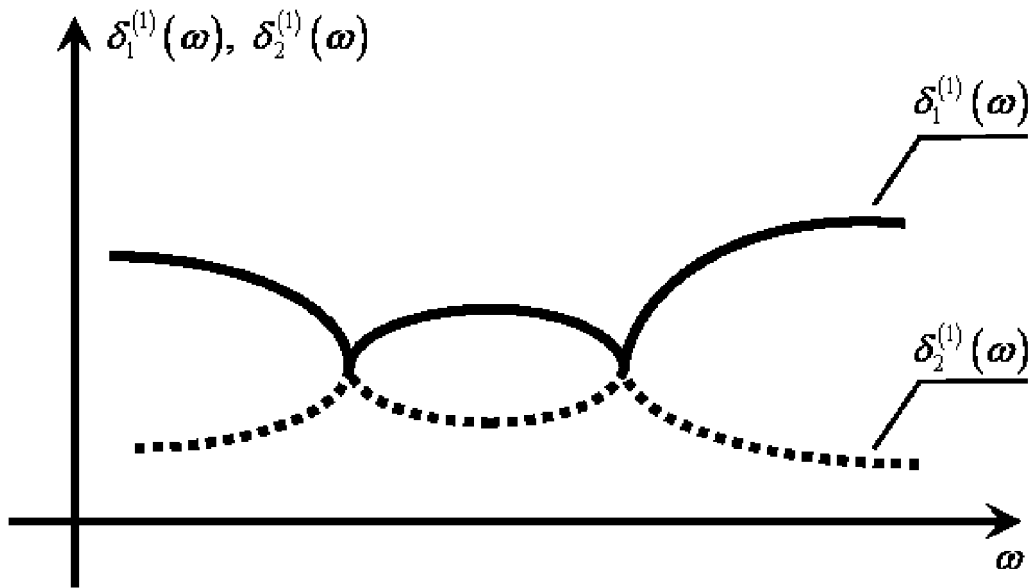


Рис. 10.П.9

Аналогично, при скалярной измеряемой переменной

$$r^{(2)} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \underline{\sigma}^{(2)}(\omega). \quad (10.П.50)$$

Неравенства (10.П.22), (10.П.32) выполняются, и, следовательно, система (10.1.1), (10.1.2) обладает низкой чувствительностью, если, соответственно

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \geq 1, \quad (10.П.51)$$

$$\underline{\sigma}^{(2)}(\omega) \geq 1. \quad (10.П.52)$$

### 10.П.6. Границы сингулярных значений матрицы возвратной разности по управлению

Утверждение 10.П.1. Система (10.3.1), (10.3.2), оптимальная в смысле функционала (10.3.3), обладает низкой чувствительностью по управлению. ■

Действительно, из тождества (9.3.16) при  $s = j\omega$  следует, что

$$\left[ E_m + W^{(1)}(-j\omega) \right]' \left[ E_m + W^{(1)}(j\omega) \right] \geq E_m. \quad (10.П.53)$$

Это в соответствии с 10.П.22 выражает низкую чувствительность оптимальной системы по управлению.

Утверждение 10.П.2. Наименьшее сингулярное значение матрицы возвратной разности по управлению оптимальной, в смысле функционала (10.3.3), системы (10.3.1), (10.3.2)

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \geq 1. \quad (10.П.54)$$

■

**Доказательство.** Из тождества (9.3.16) при  $s = j\omega$  и определения 10.П.5 следует, что

$$\sigma_i [E_m + W^{(1)}(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i [E_m + H'(-j\omega)H(j\omega)]} \quad i = \overline{1, m}. \quad (10.П.55)$$

Для суммы матриц  $E_m + \Psi$ , где  $\Psi$  – произвольная комплексная матрица размеров  $m \times m$ , справедливо равенство

$$\lambda_i [E_m + \Psi] = 1 + \lambda_i [\Psi]. \quad (10.П.56)$$

Действительно, собственные числа матрицы  $E_m + \Psi$  находятся как корни уравнения

$$\det[E\lambda - E - \Psi] = \det[E(\lambda - 1) - \Psi] = 0.$$

Обозначая  $\lambda - 1 = z$ , найдём корни  $z_i[\Psi]$  ( $i = \overline{1, m}$ ) полинома  $\det[Ez - \Psi]$ , которые являются собственными числами матрицы  $\Psi$ . Используя введённое обозначение, получим выражение (10.П.56), с учётом которого можно записать (10.П.55) в виде

$$\sigma_i [E_m + W^{(1)}(j\omega)] = \sigma_i^{(1)}(\omega) = \sqrt{1 + \lambda_i [H'(-j\omega)H(j\omega)]} \quad i = \overline{1, m}. \quad (10.П.57)$$

Так как  $\lambda_i [H'(-j\omega)H(j\omega)] \geq 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ), то  $\sigma_i^{(1)}(\omega) \geq 1$  ( $i = \overline{1, m}$ ), и таким образом утверждение доказано.

### 10.П.7. Критерий обобщённой работы

Утверждение 10.П.3. Система (10.3.1), (10.3.2), построенная на основе АКОР по критерию обобщённой работы, обладает низкой чувствительностью по управлению. ■

Действительно, прибавим матрицу  $E_m + W^{(1)'(-j\omega)W^{(1)}(j\omega)$  к обеим частям тождества (9.3.44). Тогда получим

$$[E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)] = E_m + H'(-j\omega)H(j\omega) + W^{(1)'(-j\omega)W^{(1)}(j\omega). \quad (10.П.58)$$

Отсюда следует неравенство

$$[E_m + W^{(1)}(-j\omega)]' [E_m + W^{(1)}(j\omega)] \geq E_m, \quad (10.П.59)$$

выражающее низкую чувствительность рассматриваемой системы.

Утверждение 10.П.4. Наименьшее сингулярное значение матрицы возвратной разности по управлению системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы

$$\underline{\sigma}^{(1)}(\omega) \geq 1. \quad (10.П.60)$$

■

Доказательство повторяет доказательство утверждения 10.П.2, если принять во внимание тождество (10.П.58).

## Доказательства к главе 10

### 10.Д. Доказательство теорем и утверждений

#### 10.Д.1. Доказательство утверждения 10.1.1

(Построение характеристического полинома многомерной системы).

Преобразуем (10.1.1), (10.1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях и запишем определитель матриц коэффициентов при векторах  $\mathbf{x}(s)$ ,  $\mathbf{u}(s)$ ,  $\mathbf{x}_p(s)$ ,  $\mathbf{y}(s)$

$$d^u(s) = \det \left( \begin{array}{cc|cc} E_n s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & E_m & -D_p & -F_p \\ \hline 0 & 0 & E_{n_p} s - A_p & -B_p \\ -D & -F_o & 0 & E_r \end{array} \right).$$

Применим для вычисления определителя этой блочной матрицы известную формулу. Тогда

$$\begin{aligned} d^u(s) &= \det \left( \begin{array}{c|c} E_n s - A & -B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right) \cdot \det \left[ \left( \begin{array}{c|c} E_{n_p} s - A_p & -B_p \\ \hline 0 & E_r \end{array} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D & -F_o \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} E_n s - A & -B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right)^{-1} \times \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p & -F_p \end{array} \right) \right] = \\ &= \det(E_n s - A) \cdot \det \left[ E_{n_p+r} - \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D & -F_o \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} (E_n s - A)^{-1} & (E_n s - A)^{-1} B \\ \hline 0 & E_m \end{array} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p & -F_p \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} (E_{n_p} s - A_p)^{-1} & (E_{n_p} s - A_p)^{-1} B \\ \hline 0 & E_r \end{array} \right) \right] \cdot \det(E_{n_p} s - A_p) = \\ &= d^c(s) \cdot \det \left[ E_{n_p+r} - \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D(E_n s - A)^{-1} & -D(E_n s - A)^{-1} B - F_o \end{array} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -D_p (E_{n_p} s - A_p)^{-1} & -D_p (E_{n_p} s - A_p)^{-1} B_p - F_p \end{array} \right) \right] = \\ &= d^c(s) \cdot \det \left( \begin{array}{c|c} E_{n_p} & 0 \\ \hline [D(E_n s - A)^{-1} B - F_o] \cdot & D_p (E_{n_p} s - A_p)^{-1} \diagdown \\ \hline E_r + [D(E_n s - A)^{-1} B + F_o] \cdot & -D_p (E_{n_p} s - A_p)^{-1} B_p - F_p \end{array} \right) = \\ &= d^c(s) \cdot \det [E_r - W_o(s)W_p(s)] = d^c(s) \cdot \det [E_r + W^{(2)}(s)], \end{aligned}$$

и, таким образом, соотношение (10.1.31) доказано.



Для доказательства (10.1.30) запишем  $d^u(s)$  после перестановки соответствующих строк и столбцов, в виде

$$d^u(s) = \det \left( \begin{array}{cc|cc} E_{n_p}s - A_p & -B_p & 0 & 0 \\ 0 & E_r & -D & -F_o \\ \hline 0 & 0 & E_n s - A & -B \\ -D_p & -F_p & 0 & E_m \end{array} \right).$$

Повторяя изложенное, получим (10.1.30).

## 10.Д.2. Доказательство теоремы 10.3.1

Для вывода неравенства 10.3.10 воспользуемся теоремой об определителе суммы двух матриц и формулой Бине-Коши.

Из указанной теоремы следует утверждение: определитель суммы двух матриц, одна из которых единичная, а другая – произвольная матрица  $S$  (размеров  $m \times m$ ) является суммой единицы и всех главных миноров  $k$ -го порядка ( $k = \overline{1, m}$ ) матрицы  $S$ .

Проиллюстрируем это утверждение простым примером.

Пусть  $m = 3$ , тогда

$$\begin{aligned} \det[E_3 + S] &= \det \begin{pmatrix} 1 + s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 1 + s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & 1 + s_{33} \end{pmatrix} = \\ &= (1 + s_{11})[(1 + s_{22})(1 + s_{33}) - s_{23}s_{32}] - s_{21}[s_{12}(1 + s_{33}) - s_{13}s_{32}] + s_{31}[s_{12}s_{23} - s_{13}(1 + s_{22})] = \\ &= 1 + s_{11} + s_{22} + s_{33} + (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}) + (s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + (s_{33}s_{11} - s_{31}s_{13}) + \\ &+ s_{11}(s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + s_{21}(s_{13}s_{32} - s_{12}s_{33}) + s_{31}(s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22}). \end{aligned} \quad (10.Д.1)$$

В этом выражении  $s_{11}$ ,  $s_{22}$ ,  $s_{33}$  – главные (диагональные) миноры первого порядка; в круглых скобках – главные миноры второго порядка (получаемые как определитель матрицы, стоящих на пересечениях первых двух строк и первых двух столбцов, затем первой и третьей строк и столбцов и т.д.); наконец, в квадратных скобках – минор третьего порядка.

Если матрица  $S = T'T$ , где  $T$  – матрица размеров  $n \times m$ , то любой из главных миноров  $k$ -го порядка ( $k \leq m$ ) матрицы  $S$  можно представить в виде детерминанта

$$\det [T^{(k)'}T^{(k)}], \quad (10.Д.2)$$

в котором  $T^{(k)}$  – матрица размеров  $n \times k$ , составленная из  $k$  столбцов матрицы  $T$ , выбираемых в зависимости от того, какой именно из главных миноров  $k$ -го порядка рассматривается.

Например, если

$$S = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \\ t_{13} & t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 & t_{11}t_{21} + t_{12}t_{22} + t_{13}t_{23} \\ t_{21}t_{11} + t_{22}t_{12} + t_{23}t_{13} & t_{21}^2 + t_{22}^2 + t_{23}^2 \end{pmatrix},$$

то миноры первого порядка  $s_{11}$  и  $s_{22}$  (диагональные элементы матрицы  $S$ ) являются скалярным произведением векторов

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{bmatrix}.$$

Переходя непосредственно к доказательству (10.3.10), отметим, что в рассматриваемом случае

$$S = H'(-j\omega)H(j\omega),$$

а  $\psi_{\sigma\delta}(\omega)$  – это сумма всех главных миноров  $k$ -го порядка ( $k \leq m$ ).

Рассмотрим конкретный минор и покажем, что

$$\det [H^{(k)'(-j\omega)}H^{(k)}(j\omega)] \geq 0. \quad (10.Д.3)$$

Действительно, в соответствии с формулой Бине-Коши определитель матрицы  $H^{(k)'(-j\omega)}H^{(k)}(j\omega)$  равен сумме произведений миноров  $k$ -го порядка матрицы  $H^{(k)'(-j\omega)}$  на соответствующие миноры того же порядка матрицы  $H^{(k)}(j\omega)$ ; каждое из этих произведений – неотрицательно, так как каждый минор  $k$ -го порядка матрицы  $H^{(k)'(-j\omega)}$  и соответствующий минор  $k$ -го порядка матрицы  $H^{(k)}(j\omega)$  является комплексно-сопряжёнными. Из неравенств (10.Д.3) следует (10.3.10), и, таким образом, теорема доказана.

### 10.Д.3. Доказательство теоремы 10.3.2

Представим оптимальную систему (10.3.1), (10.3.2) в эквивалентной форме (10.1.43), (10.1.44)

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B_{-\nu}C'_{-\nu})\mathbf{x} + B_{[\nu]}u_{\nu}, \quad (10.Д.4)$$

$$\mathbf{u}_{\nu} = C'_{[\nu]}\mathbf{x}. \quad (10.Д.5)$$

Из оптимальности управления (10.3.2) следует, что

$$C_{-\nu} = -PB_{-\nu}, \quad (10.Д.6)$$

$$C_{[\nu]} = -PB_{[\nu]}, \quad (10.Д.7)$$

где  $P$  – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения (9.3.5).

Система (10.Д.4), (10.Д.5) является системой со скалярным управлением  $u_\nu$ , и поэтому естественно ожидать, что её запасы устойчивости удовлетворяют неравенствам (4.2.15), (4.2.16). Для этого нужно показать, что система (10.Д.4), (10.Д.5) оптимальна в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}'(Q + C_{-\nu}C'_{-\nu})\mathbf{x} + u_\nu^2] dt, \quad (10.Д.8)$$

который, если заменить в нём  $C'_{-\nu}\mathbf{x} = \mathbf{u}_{-\nu}$ , совпадает с (10.3.3), так как  $\mathbf{x}'C_{-\nu}C'_{-\nu}\mathbf{x} + u_\nu^2 = \mathbf{u}'_{-\nu}\mathbf{u}_{-\nu} + u_\nu^2 = \mathbf{u}'\mathbf{u}$ .

Для доказательства оптимальности сформулируем вспомогательную задачу АКОР.

Задача 10.Д.1. Пусть имеется объект, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A^*\mathbf{x} + \mathbf{b}^*u^*, \quad (10.Д.9)$$

$$\text{где } A^* = A + B_{-\nu}C'_{-\nu} = A - B_{-\nu}B'_{-\nu}P, \quad \mathbf{b}^* = B_{[\nu]}. \quad (10.Д.10)$$

Требуется найти уравнение регулятора

$$u^* = \mathbf{c}^{*'}\mathbf{x}, \quad (10.Д.11)$$

такое, чтобы на движениях системы (10.Д.9), (10.Д.10) минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'Q^*\mathbf{x} + u^{*2}) dt, \quad (10.Д.12)$$

в котором

$$Q^* = Q + C_{-\nu}C'_{-\nu} = Q + PB_{-\nu}B'_{-\nu}P. \quad (10.Д.13)$$

■

Утверждение 10.Д.1. Единственный вектор  $\mathbf{c}^*$ , разрешающий задачу 10.Д.1, и вектор  $C_{[\nu]}$ , являющийся  $\nu$ -тым столбцом оптимального, в смысле функционала (10.3.3), управления (10.3.2), связаны равенством

$$\mathbf{c}^* = C_{[\nu]}. \quad (10.Д.14)$$

Другими словами, система (10.Д.4), (10.Д.5) является оптимальной в смысле функционала (10.Д.8). ■

**Доказательство.** В соответствии с процедурой 4.1.1

$$\mathbf{c}^* = -P^*\mathbf{b}^*, \quad (10.Д.15)$$

где  $P^* > 0$  является решением уравнения

$$P^*A^* + A^{*'}P^* - P^*\mathbf{b}^*\mathbf{b}^{*'}P^* + Q = 0. \quad (10.Д.16)$$

Подставляя сюда выражения (10.Д.10), (10.Д.13), получим

$$P^* (A - B_{-\nu} B'_{-\nu} P) + (A - B_{-\nu} B'_{-\nu} P)' P^* - P^* B_{[\nu]} B'_{[\nu]} P^* + P^* B_{-\nu} B'_{-\nu} P^* + Q = 0. \quad (10.Д.17)$$

Нетрудно заметить, если учесть  $B_{-\nu} B'_{-\nu} + B_{[\nu]} B'_{[\nu]} = B B'$ , что одним из решений (10.Д.17) служит

$$P^* = P. \quad (10.Д.18)$$

Покажем, что это решение единственно. В соответствии с примечаниями 4.1.1, 4.1.2  $P^* > 0$  является единственным решением уравнения (10.Д.16), если объект (10.Д.9) полностью управляем или стабилизируем, а матрица  $Q^*$  – положительно-определена либо неотрицательна и обладает свойством (4.1.16).

Объект (10.Д.9) – стабилизируем, так как можно указать управление  $u^* = C'_{[\nu]} x$ , при котором система, состоящая из объекта (10.Д.9), замкнутого этим регулятором, асимптотически устойчива (поскольку она совпадает с оптимальной системой (10.Д.4), (10.Д.5)).

Матрица  $Q^* > 0$ , так как  $Q > 0$  и  $C_{-\nu} C'_{-\nu} \geq 0$ .

Подставляя в (10.Д.15) выражения (10.Д.18), (10.Д.10), получим

$$c^* = -P B_{[\nu]} = C'_{[\nu]},$$

что и требовалось доказать. ■

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы 10.3.2. Оно опирается на оптимальность системы (10.Д.4), (10.Д.5) в смысле функционала (10.Д.8).

Передаточная функция такой системы со скалярным управлением

$$w_\nu(s) = -C'_{[\nu]} (E_n s - A - B_{-\nu} C'_{-\nu})^{-1} B_{[\nu]} \quad (10.Д.19)$$

удовлетворяет условию оптимальности в частотной форме

$$[1 + w_\nu(-j\omega)][1 + w_\nu(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^n |h_i^{(\nu)}(j\omega)|^2, \quad (10.Д.20)$$

где  $h_i^{(\nu)}(j\omega)$  – компоненты вектора

$$h^{(\nu)}(j\omega) = H^{(\nu)} (E_n j\omega - A - B_{-\nu} C'_{-\nu})^{-1} B_{[\nu]}, \quad (10.Д.21)$$

в котором  $H^{(\nu)'} H^{(\nu)} = Q + C_{-\nu} C'_{-\nu}$ . (10.Д.22)

На основе (10.Д.20), повторяя доказательство теоремы 4.2.1, получим

$$\varphi_{\nu,3}^{(1)} \geq 60^\circ, \quad L_\nu^{(1)} \geq 2. \quad (10.Д.23)$$

Повторяя изложенное для различных значений  $\nu$  от 1 до  $m$ , заключаем, что  $\varphi_{\nu,3}^{(1)} \geq 60^\circ$ ,  $L_\nu^{(1)} \geq 2$  ( $\nu = \overline{1, m}$ ), откуда и следует (10.3.12).

### 10.Д.4. Доказательство теоремы 10.3.3

Пусть оптимальная система (10.3.1), (10.3.2) подвержена параметрическим возмущениям, которые описываются с помощью передаточных функций  $-\ell_i(s)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – блоков мультипликативных параметрических возмущений, показанных на рис. 10.2.1.

Модель такой параметрически возмущённой системы имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\rho(\tilde{u}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^{(0)}, \quad (10.Д.24)$$

$$\tilde{u} = C'\tilde{x} = -B'P\tilde{x}, \quad (10.Д.25)$$

где  $\rho(\tilde{u})$  –  $m$ -мерная вектор-функция, изображение которой по Лапласу

$$\Lambda\{\rho(\tilde{u})\} = W_\varepsilon(s)\tilde{u}(s). \quad (10.Д.26)$$

Примем

$$W_\varepsilon(s) = \text{diag} \left( w_{\varepsilon,1}(s) \quad w_{\varepsilon,2}(s) \quad \dots \quad w_{\varepsilon,m}(s) \right). \quad (10.Д.27)$$

В соответствии с утверждением 4.Д.1 заключаем, что система (10.Д.24), (10.Д.25) асимптотически устойчива, если

$$W_\varepsilon(j\omega) + W_\varepsilon'(-j\omega) > E_m. \quad (10.Д.28)$$

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 10.3.3, рассмотрим различные реализации матрицы  $W_\varepsilon(s)$  в этом неравенстве.

Пусть

$$W_\varepsilon(j\omega) = \text{diag} \left( \ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_m \right), \quad (10.Д.29)$$

где  $\ell_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – некоторые числа, тогда (10.Д.28) означает, что асимптотическая устойчивость системы (10.Д.24), (10.Д.25) сохраняется при условии, что

$$2\ell_k > 1 \quad i = \overline{1, m}. \quad (10.Д.30)$$

Это свидетельствует, что многосвязный запас устойчивости системы (10.3.1), (10.3.2) на входе объекта по модулю удовлетворяет неравенству (10.3.13).

Допустим теперь, что

$$W_\varepsilon(j\omega) = \text{diag} \left( e^{j\psi_1} \quad e^{j\psi_2} \quad \dots \quad e^{j\psi_m} \right), \quad (10.Д.31)$$

тогда из (10.Д.27) получим, что

$$e^{j\psi_k} + e^{-j\psi_k} > 1 \quad k = \overline{1, m}.$$

Отсюда  $\cos \psi_k > 0.5$ , и, следовательно,

$$|\psi_k| < 60^\circ \quad k = \overline{1, m}, \quad (10.Д.32)$$

и, таким образом, теорема доказана.

### 10.Д.5. Доказательство теоремы 10.3.4

Рассмотрим эквивалентную (10.3.1), (10.3.2) систему со скалярным управлением

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu})\mathbf{x} + B_{[\nu]}u_{\nu}, \quad (10.Д.33)$$

$$\mathbf{u}_{\nu} = C'_{[\nu]}\mathbf{x} \quad (10.Д.34)$$

и покажем (аналогично утверждению (10.Д.1) существование неотрицательной (удовлетворяющей условию наблюдаемости пары  $(H^*, A)$ ) матрицы  $Q^* = H^{*'}H^*$ , такой, что уравнение

$$P^*(A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu}) + (A + B_{\neg\nu}C'_{\neg\nu})'P^* = -Q^* \quad (10.Д.35)$$

имеет решение

$$P^* = P^{(1)}, \quad (10.Д.36)$$

где  $P^{(1)}$  – решение уравнения (10.3.55). Из этого равенства следует, что

$$-P^*B_{[\nu]} = -P^{(1)}B_{[\nu]} = C_{[\nu]}. \quad (10.Д.37)$$

Искомая матрица

$$Q^* = Q + 2C_{\neg\nu}C'_{\neg\nu} = Q + 2P^{(1)}B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}. \quad (10.Д.38)$$

Действительно, подставляя это выражение в (10.Д.35) получим, с учётом соотношения  $C_{\neg\nu} = -P^{(1)}B_{\neg\nu}$ ,

$$P^* [A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}] + [A - B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}]'P^* = -Q - 2P^{(1)}B_{\neg\nu}B'_{\neg\nu}P^{(1)}. \quad (10.Д.39)$$

При  $P^* = P^{(1)}$  это уравнение совпадает с (10.3.55). Отсюда заключаем, что для «объекта» (10.Д.33) со скалярным управлением  $u_{\nu}$  можно указать матрицу  $Q^*$ , при которой процедура АКОР по критерию обобщённой работы доставляет управление с матрицей (10.Д.37). Система со скалярным управлением имеет запасы устойчивости  $\varphi_{\nu,3}^{(1)} \geq 90^\circ$ ,  $L_{\nu}^{(1)} \rightarrow \infty$ .

Повторяя изложенное для любых  $\nu = \overline{1, m}$ , получим (10.3.56), что и доказывает теорему.

### 10.Д.6. Доказательство теоремы 10.3.5

Оно основано на неравенстве, аналогичном (10.Д.28)

$$W_e(-j\omega) + W_e(j\omega) \geq 0, \quad (10.Д.40)$$

которое является достаточным условием асимптотической устойчивости параметрически возмущённой системы (10.3.1), (10.3.2), оптимальной по критерию обобщённой работы.

Вывод этого неравенства приведён в 4.Д.7.

Полагая матрицу  $W_s(j\omega) = \text{diag} \left( \ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_m \right)$ , заключаем, что  $\ell_k > 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ), отсюда следует  $L^{(1)M} \rightarrow \infty$ .

Если принять  $W_s(j\omega) = \text{diag} \left( e^{j\psi_1} \ e^{j\psi_2} \ \dots \ e^{j\psi_m} \right)$ , то  $e^{j\psi_k} + e^{-j\psi_k} > 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ). Отсюда  $\cos \psi_k > 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ), и, следовательно  $|\psi_k| \leq 90^\circ$  ( $k = \overline{1, m}$ ). Это доказывает теорему.

## Заключение к главе 10

Подытожим изложенное в этой главе.

1. Введены понятия обобщённой передаточной функции (10.1.36) и передаточных функций многомерной системы, размыкаемой по различным входам объекта и регулятора – (10.1.75), (10.1.81).
2. На основе этих понятий сформированы частотные показатели грубости: обобщённые запасы устойчивости (10.2.1), (10.2.2), обобщённый радиус запасов устойчивости (10.2.9), запасы устойчивости на выходе объекта – (10.2.17), (10.2.19), запасы устойчивости на входе регулятора, радиусы запасов устойчивости на входе объекта и на входе регулятора – (10.2.22), (10.2.24), многосвязные запасы устойчивости – (10.2.35), (10.2.36). Эти показатели являются (кроме последних) развитием в различных направлениях частотных показателей одномерных систем.
3. Получены границы частотных показателей оптимальных систем, не зависящие от коэффициентов неотрицательного функционала оптимизации – теоремы 10.3.1-10.3.5.
4. (П) Введены критерии сравнительной низкой чувствительности по управлению – (10.П.11) и регулируемым переменным – (10.П.27). Получены условия низкой сравнительной чувствительности – (10.П.22) и (10.П.29).
5. (П) Сформированы понятия наименьших сингулярных значений матрицы возвратной разности многомерной системы по управлению – (10.П.47) и регулируемым переменным – (10.П.48).
6. (П) Получены границы значений критериев сравнительной низкой чувствительности и наименьших значений матриц возвратной разности оптимальных систем, не зависящие от параметров функционалов оптимизации – утверждения 10.П.1-10.П.4.

## Глава 11. Метод частотных параметров

Метод частотных параметров, изложенный в третьей части книги для одномерных систем, развивается в этой главе на многомерный случай. Такое обобщение не вызывает особых затруднений, особенно если учесть, что содержание и форма изложения глав 5-8 указанной части строились так, чтобы обобщение на многомерный случай было почти очевидным.

Цель этой главы:

- определение частотных параметров многомерных объектов,
- частотная трансформация методов пространства состояний (формирование частотного модального и частотного оптимального управлений) и построение метода частотных параметров для многомерных систем регулирования и слежения,
- построение алгоритмов адаптивного управления несамостоятельными объектами.

### 11.1. Стабилизация

#### 11.1.1. Частотные параметры объектов первого вида

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (11.1.1)$$

с измеряемыми переменными  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , матрицы  $A$  и  $B$  которого неизвестны. Известна лишь степень  $C_0$  его неустойчивости.

Приложим к первому входу объекта испытательное воздействие

$$u_{ucn.1}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t, \quad \lambda \geq C_0. \quad (11.1.2)$$

На выходах объекта получим, после умножения на  $e^{-\lambda t}$ ,

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{x[1]}^{\lambda}(\omega_k) \sin \omega_k t + I_{x[1]}^{\lambda}(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \mathbf{a}^{(1)}(t), \quad (11.1.3)$$

где  $\mathbf{a}^{(1)}(t)$  – исчезающая вектор-функция, которая имеет вид (5.2.5).

Снимем воздействие с первого входа и подадим на второй вход

$$u_{ucn.2}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t.$$



На выходах объекта, после умножения на  $e^{-\lambda t}$ , получим

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{x[2]}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + I_{x[2]}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \mathbf{a}^{(2)}(t).$$

Продолжая этот процесс, получим в  $m$ -ом эксперименте (когда возбуждается лишь  $m$ -тый вход)

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{x[m]}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + I_{x[m]}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + \mathbf{a}^{(m)}(t).$$

Во всех экспериментах

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{0} \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.1.4)$$

Определение 11.1.1. Частотными параметрами ( $\omega$ -индексами) объекта (11.1.1) называются элементы  $n \times m$  матриц

$$R_x^\lambda(\omega_k) = \left[ R_{x[1]}^\lambda(\omega_k) \quad R_{x[2]}^\lambda(\omega_k) \quad \cdots \quad R_{x[m]}^\lambda(\omega_k) \right] \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.5)$$

$$I_x^\lambda(\omega_k) = \left[ I_{x[1]}^\lambda(\omega_k) \quad I_{x[2]}^\lambda(\omega_k) \quad \cdots \quad I_{x[m]}^\lambda(\omega_k) \right] \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.6)$$

■

Численные значения частотных параметров нетрудно получить на выходах фильтра Фурье, если включить объект (11.1.1) в схему, аналогичную приведённой на рис. 5.3.1, и сформировать генератором испытательных воздействий описанное выше параллельно-последовательное испытательное воздействие

$$\mathbf{u}_{ucn}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_{ucn}^{(i)}(t), \quad (11.1.7)$$

где  $\mathbf{u}_{ucn}^{(i)}(t)$  –  $m$ -мерный вектор испытательных воздействий в  $i$ -том эксперименте

$$\mathbf{u}_{ucn}^{(i)}(t) = \begin{cases} u_{ucn.1}(t) = u_{ucn.2}(t) = \cdots = u_{ucn.i-1}(t) = 0, \\ u_{ucn.i}(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t & \text{при } t \in [t_{i-1}^u, t_i^u], \\ 0 & \text{при } t \notin [t_{i-1}^u, t_i^u], \end{cases} \\ u_{ucn.i+1}(t) = u_{ucn.i+2}(t) = \cdots = u_{ucn.m}(t) = 0. \end{cases} \quad (11.1.8)$$

Очевидно, что матрицы частотных параметров  $R_x^\lambda(\omega_k)$  и  $I_x^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – это значения вещественной и мнимой частей частотной передаточной матрицы объекта на  $\omega$ -тесте и  $\lambda$ -смещении

$$R_x^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.9)$$

$$I_x^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.10)$$

Далее будем использовать обозначения

$$\mathcal{B}(s) = (Es - A)^{-1} B, \quad \mathcal{B}(\lambda + j\omega) = [E(\lambda + j\omega) - A]^{-1} B = \mathcal{B}^\lambda(j\omega), \quad (11.1.11)$$

и тогда

$$\begin{aligned} R_x^\lambda(\omega_k) &= \operatorname{Re} \mathcal{B}^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \\ I_x^\lambda(\omega_k) &= \operatorname{Im} \mathcal{B}^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

$$R_{x[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} \mathcal{B}_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Re}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B_{[i]} \quad i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.13)$$

$$I_{x[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} \mathcal{B}_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Im}[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1} B_{[i]} \quad i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.14)$$

Сформируем  $n \times nm$  матрицы

$$M_{x.R}^\lambda = \begin{bmatrix} R_x^\lambda(\omega_1) & R_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & R_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad (11.1.15)$$

$$M_{x.I}^\lambda = \begin{bmatrix} I_x^\lambda(\omega_1) & I_x^\lambda(\omega_2) & \cdots & I_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}. \quad (11.1.16)$$

Здесь и далее при  $\lambda = 0$  верхние индексы (11.1.11)-(11.1.16) опускаются.

**Теорема 11.1.1.** Если объект (11.1.1) полностью управляем, а степень его неустойчивости  $C_0 < \lambda$ , то

$$\operatorname{rank} M_{x.R}^\lambda = n, \quad (11.1.17)$$

$$\operatorname{rank} M_{x.I}^\lambda = n. \quad (11.1.18)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.1.

### 11.1.2. Частотные параметры объектов второго вида

Если не все переменные состояния объекта (11.1.1) доступны непосредственному измерению, то он описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad (11.1.19)$$

в которых  $A$ ,  $B$  и  $D$  – неизвестные матрицы, и известно, что объект полностью управляем и наблюдаем, а его степень неустойчивости равна  $C_0$ .

Повторим эксперименты, описанные выше, и получим, аналогично (11.1.3), в  $i$ -том эксперименте

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ R_{[i]}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + I_{[i]}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right] + D\mathbf{a}^{(i)}(t) \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.1.20)$$

**Определение 11.1.2.** Частотными параметрами ( $\omega$ -индексами) объекта (11.1.19) называются элементы  $r \times m$  матриц

$$R^\lambda(\omega_k) = \begin{bmatrix} R_{[1]}^\lambda(\omega_k) & R_{[2]}^\lambda(\omega_k) & \cdots & R_{[m]}^\lambda(\omega_k) \end{bmatrix} \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.21)$$

$$I^\lambda(\omega_k) = \begin{bmatrix} I_{[1]}^\lambda(\omega_k) & I_{[2]}^\lambda(\omega_k) & \cdots & I_{[m]}^\lambda(\omega_k) \end{bmatrix} \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.22)$$

■

Численные значения векторов  $R_{[i]}^\lambda(\omega_k)$  и  $I_{[i]}^\lambda(\omega_k)$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ) получаются на выходах фильтров Фурье в схеме, приведённой на рис. 5.3.2, если генератор испытательных воздействий вырабатывает последовательно-параллельное воздействие (11.1.7), (11.1.8).

Частотные параметры связаны с матрицами объекта (11.1.19) соотношениями

$$R^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} D[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B = \operatorname{Re} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Re} W^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.23)$$

$$I^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} D[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B = \operatorname{Im} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Im} W^\lambda(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.24)$$

Если использовать обозначения (11.1.11), то

$$R_{[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} DB_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Re} D[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B_{[i]} \quad i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.25)$$

$$I_{[i]}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} DB_{[i]}^\lambda(j\omega_k) = \operatorname{Im} D[E(\lambda + j\omega_k) - A]^{-1}B_{[i]} \quad i = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.26)$$

Сформируем  $r \times nm$  матрицы

$$M_R^\lambda = \begin{bmatrix} R^\lambda(\omega_1) & R^\lambda(\omega_2) & \cdots & R^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad (11.1.27)$$

$$M_I^\lambda = \begin{bmatrix} I^\lambda(\omega_1) & I^\lambda(\omega_2) & \cdots & I^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix}. \quad (11.1.28)$$

Теорема 11.1.2. Если объект (11.1.19) полностью управляем, а степень его неустойчивости  $C_0 < \lambda$ , то

$$\operatorname{rank} M_R^\lambda = r, \quad \operatorname{rank} M_I^\lambda = r. \quad (11.1.29)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.2.

### 11.1.3. Частотное модальное управление

Запишем объект (11.1.19) в канонической форме Лагранжа (9.1.13)

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad (11.1.30)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  –  $m$ -мерный вектор, и в соответствии с (9.1.14)

$$P(s) = P^{[\sigma]}s^\sigma + \cdots + P^{[1]}s + P^{[0]}, \quad N(s) = N^{[\nu]}s^\nu + \cdots + N^{[1]}s + N^{[0]}.$$

Введём матрицу

$$\Delta(s) = \Psi(s)N(s) = \left( \Psi^{[\infty]}s^\infty + \cdots + \Psi^{[1]}s + \Psi^{[0]} \right) N(s), \quad (11.1.31)$$

для которой выполняется условие (9.1.41)

$$\partial_{c_j} \Delta(s) \leq \nu_j + \check{\mu} - 1 \quad j = \overline{1, m}, \quad (11.1.32)$$

где  $\check{\mu}$  – индекс элиминантной матрицы, построенной для матриц  $P(s)$  и  $N(s)$ , а  $\nu_j$  – степень  $j$ -го столбца ( $j = \overline{1, m}$ ) матрицы  $P(s)$ .

Будем полагать также, что числа  $\nu_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и  $\check{\mu}$  удовлетворяют условию

$$\nu_j + \check{\mu} \leq 2n \quad j = \overline{1, m}. \quad (11.1.33)$$

**Задача 11.1.1. (Задача частотного модального управления)**

Для объекта (11.1.19), заданного  $\omega$ -индексами (11.1.21), (11.1.22), найти параметры регулятора

$$\left( G^{[\check{\mu}-1]} s^{\check{\mu}-1} + \dots + G^{[1]} s + G^{[0]} \right) \mathbf{u} = \left( R^{[\check{\mu}-1]} s^{\check{\mu}-1} + \dots + R^{[1]} s + R^{[0]} \right) \mathbf{y}, \quad (11.1.34)$$

такие, чтобы характеристический полином системы (11.1.19), (11.1.34) совпадал с заданным полиномом  $\det \Delta(s)$ , в котором полиномиальная матрица  $\Delta(s)$  вида (11.1.31) удовлетворяет условию (11.1.32). ■

При известных параметрах объекта эта задача – частный случай с задачи 9.1.1, решение которой сводится к процедуре 9.1.1 разрешения модального тождества (9.1.26). Это тождество принимает с учётом (11.1.31) вид

$$G(s)P(s) - R(s)N(s) = \Psi(s)N(s). \quad (11.1.35)$$

Умножим его справа на матрицу  $P^{-1}(s)$  и получим

$$G(s) - R(s)W(s) = \Psi(s)W(s). \quad (11.1.36)$$

Положим  $s = \lambda + j\omega$  и приходим к частотному модальному тождеству

$$G(\lambda + j\omega) - R(\lambda + j\omega)W(\lambda + j\omega) = \Psi(\lambda + j\omega)W(\lambda + j\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (11.1.37)$$

которое на  $\omega$ -тесте принимает вид

$$G(\lambda + j\omega_k) - R(\lambda + j\omega_k)W(\lambda + j\omega_k) = \Psi(\lambda + j\omega_k)W(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.38)$$

Используем частотные параметры и запишем эту систему уравнений как

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} G^{[l]}(\lambda + j\omega_k)^l - \left[ \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} R^{[l]}(\lambda + j\omega_k)^l \right] \cdot [R^\lambda(\omega_k) + jI^\lambda(\omega_k)] = \\ = \left[ \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} \Psi^{[l]}(\lambda + j\omega_k)^l \right] \cdot [R^\lambda(\omega_k) + jI^\lambda(\omega_k)] \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (11.1.39)$$

Учтём выражения (6.1.10)-(6.1.12)

$$(\lambda + j\omega_k)^l = \rho_l(\omega_k) + j\mu_l(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad l = \overline{0, \check{\mu}}, \quad (11.1.40)$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_l(\omega_k) &= \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]^*} \rho_{2\nu}^{(l)} \omega_k^{2\nu} \quad k = \overline{1, n}, \\
 \rho_{2\nu}^{(l)} &= (-1)^\nu \lambda^{l-2\nu} \xi_{2\nu}^{(1)} \quad \nu = 0, \left[\frac{l}{2}\right]^*, \\
 \mu_l(\omega_k) &= \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]^*} \mu_{2\nu+1}^{(l)} \omega_k^{2\nu+1} \quad k = \overline{1, n}, \\
 \mu_{2\nu+1}^{(l)} &= (-1)^\nu \lambda^{l-2\nu-1} \xi_{2\nu+1}^{(2)} \quad \nu = 0, \left[\frac{l-1}{2}\right]^*,
 \end{aligned} \quad l = \overline{0, \check{\alpha}}, \quad (11.1.41)$$

$\xi_{2\nu}^{(1)}$  и  $\xi_{2\nu+1}^{(2)}$  – известные числа, и запишем (11.1.38) окончательно

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} \rho_l(\omega_k) G^{[l]'} - \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} \left[ \rho_l(\omega_k) R^{\lambda'}(\omega_k) - \mu_l(\omega_k) I^{\lambda'}(\omega_k) \right] R^{[l]'} &= \\
 = \sum_{l=0}^{\check{\alpha}} \left[ \rho_l(\omega_k) R^{\lambda'}(\omega_k) - \mu_l(\omega_k) I^{\lambda'}(\omega_k) \right] \Psi^{[l]'} \quad k = \overline{1, n}, & \quad (11.1.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} \mu_l(\omega_k) G^{[l]'} - \sum_{l=0}^{\check{\mu}-1} \left[ \mu_l(\omega_k) R^{\lambda'}(\omega_k) + \rho_l(\omega_k) I^{\lambda'}(\omega_k) \right] R^{[l]'} &= \\
 = \sum_{l=0}^{\check{\alpha}} \left[ \mu_l(\omega_k) R^{\lambda'}(\omega_k) + \rho_l(\omega_k) I^{\lambda'}(\omega_k) \right] \Psi^{[l]'} \quad k = \overline{1, n}. & \quad (11.1.43)
 \end{aligned}$$

Это система  $2m^2n$  уравнений для определения  $(m^2 \times \check{\mu}) + (mr \times \check{\mu})$  неизвестных элементов матриц  $G^{[l]}$ ,  $R^{[l]}$  ( $l = \overline{0, \check{\mu}-1}$ ).

**Теорема 11.1.3.** Если объект (11.1.19) полностью управляем, полностью наблюдаем и выполняется условие (11.1.33), то решения уравнений (11.1.42), (11.1.43) совпадают с решениями уравнения (9.1.44), разрешающего тождество (11.1.35). ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.3.

Таким образом, уравнения (11.1.42), (11.1.43) разрешают задачу 11.1.1.

#### 11.1.4. Частотное оптимальное управление

Найдём регулятор для объекта (11.1.1), заданного частотными параметрами (11.1.5), (11.1.6). Если он неустойчив, будем полагать, что известно стабилизирующее управление

$$\mathbf{u} = C^{(0)'} \mathbf{x}. \quad (11.1.44)$$

В этом случае можно замкнуть объект (11.1.1) регулятором (11.1.44) и определить экспериментально при  $\lambda = 0$   $\omega$ -индексы  $R_x^o(\omega_k)$  и  $I_x^o(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Затем можно вычислить стабилизированные частотные параметры объекта (11.1.1).

**Утверждение 11.1.1.** Стабилизированные  $\omega$ -индексы неустойчивого объекта (11.1.1) связаны с частотными параметрами этого объекта, замкнутого регулятором

(11.1.44), соотношениями

$$R_x^c(\omega_k) = L_x(\omega_k)R_x^o(\omega_k) - M_x(\omega_k)I_x^o(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.45)$$

$$I_x^c(\omega_k) = L_x(\omega_k)I_x^o(\omega_k) + M_x(\omega_k)R_x^o(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.46)$$

где

$$L_x(\omega_k) = \left\{ E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)'} + I_x^o(\omega_k)C^{(0)'} \left[ E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)'} \right]^{-1} I_x^o(\omega_k)C^{(0)'} \right\}^{-1}, \quad (11.1.47)$$

$$M_x(\omega_k) = \left[ E_n + R_x^o(\omega_k)C^{(0)'} \right]^{-1} I_x^o(\omega_k)C^{(0)'} L_x(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.48)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 11.Д.4.

### Задача 11.1.2. (Задача АКОР по частотным параметрам)

Пусть имеем полностью управляемый объект (11.1.1) с неизвестными параметрами, для которого заданы его  $\omega$ -индексы (либо, если он неустойчив, известны стабилизированные  $\omega$ -индексы). Требуется найти регулятор

$$\mathbf{u} = C' \mathbf{x}, \quad (11.1.49)$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (11.1.1), (11.1.49), возбуждённой произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt, \quad (11.1.50)$$

в котором  $Q$  – заданная положительно-определённая матрица. ■

### 11.1.5. АКОР по критерию обобщённой работы

Рассмотрим первый шаг итерационной процедуры 9.3.1. В результате этого шага находим

$$C = -P^{(1)}B, \quad (11.1.51)$$

где  $P^{(1)}$  – решение уравнения Ляпунова

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)'}P^{(1)} = -Q - C^{(0)}C^{(0)'}. \quad (11.1.52)$$

Если объект (11.1.1) асимптотически устойчив, то  $C^{(0)} = 0$  и уравнение (11.1.52) совпадает с уравнением (9.3.43) процедуры АКОР по критерию обобщённой работы.

Условие оптимальности по критерию обобщённой работы (9.3.44) можно записать как

$$-C'B(j\omega) - B'(-j\omega)C = B'(-j\omega)QB(j\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (11.1.53)$$

На  $\omega$ -тесте это тождество принимает вид

$$\begin{aligned} & -C' [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)] - [R_x(\omega_k) - jI_x(\omega_k)]' C = \\ & = [R_x(\omega_k) - jI_x(\omega_k)]' Q [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)] \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (11.1.54)$$

Матрица  $C$  – вещественная и поэтому можно записать эту систему в виде двух подсистем

$$-C' R_k - R'_k C = R'_k Q R_k + I'_k Q I_k \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.55)$$

$$-C' I_k + I'_k C = R'_k Q I_k - I'_k Q R_k \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.56)$$

где для сокращения обозначено

$$R_k = R_x(\omega_k), \quad I_k = I_x(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.57)$$

Эти уравнения имеют в развёрнутой форме вид

$$-R'_{k[\psi]} C_{[i]} - R'_{k[i]} C_{[\psi]} = h_{ki\psi} \quad i, \psi = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.58)$$

$$-I'_{k[\psi]} C_{[i]} + I'_{k[i]} C_{[\psi]} = l_{ki\psi} \quad i, \psi = \overline{1, m} \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.59)$$

при этом  $R_{k[i]}$ ,  $I_{k[i]}$ ,  $C_{[i]}$  – столбцы соответствующих матриц,  $h_{ki\psi}$ ,  $l_{ki\psi}$   $i, \psi = \overline{1, m}$   $k = \overline{1, n}$  – элементы матриц  $R'_k Q R_k + I'_k Q I_k$  и  $R'_k Q I_k - I'_k Q R_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) соответственно.

Сформируем вектор

$$\bar{c}' = \left( C'_{[1]} \quad C'_{[2]} \quad \dots \quad C'_{[m]} \right) \quad (11.1.60)$$

Опустим в системе (11.1.58), (11.1.59) совпадающие уравнения и запишем эту систему окончательно

$$M \bar{c}' = \mathbf{h}, \quad (11.1.61)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} M_{[1]} \\ M_{[2]} \\ \vdots \\ M_{[n]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_{[1]} \\ h_{[2]} \\ \vdots \\ h_{[m]} \end{bmatrix}; \quad M_{(k)} = \begin{pmatrix} M_{(k)R} \\ M_{(k)I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_{(k)} = \begin{bmatrix} h_{(k)R} \\ h_{(k)I} \end{bmatrix}; \quad (11.1.62)$$

$$M_{(k)R} = \begin{pmatrix} 2R'_{k[1]} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ R'_{k[2]} & R'_{k[1]} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R'_{k[m]} & 0 & 0 & \dots & R'_{k[1]} \\ \hline 0 & 2R'_{k[2]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R'_{k[3]} & R'_{k[2]} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R'_{k[m]} & 0 & \dots & R'_{k[2]} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 2R'_{k[m]} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_{(k)R} = \begin{bmatrix} h_{k11} \\ h_{k12} \\ \vdots \\ h_{k1m} \\ \hline h_{k23} \\ h_{k24} \\ \vdots \\ h_{k2m} \\ \hline \vdots \\ \hline h_{kmm} \end{bmatrix} \quad k = \overline{1, n}; \quad (11.1.63)$$

$$M_{(k)I} = \begin{pmatrix} -I'_{k[2]} & I'_{k[1]} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I'_{k[3]} & 0 & I'_{k[1]} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -I'_{k[m]} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I'_{k[1]} \\ \hline 0 & -I'_{k[3]} & I'_{k[2]} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I'_{k[4]} & 0 & I'_{k[2]} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -I'_{k[m]} & 0 & 0 & \cdots & 0 & I'_{k[2]} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -I'_{k[m]} & I'_{k[m-1]} \end{pmatrix}, \mathbf{h}_{(k)I} = \begin{bmatrix} l_{k12} \\ l_{k13} \\ \vdots \\ l_{k1m} \\ \hline l_{k23} \\ l_{k24} \\ \vdots \\ l_{k2m} \\ \hline \vdots \\ \hline l_{k(m-1)m} \end{bmatrix}. \quad (11.1.64)$$

Нетрудно видеть, что матрица  $M$  в системе (11.1.61) – прямоугольная, размеров  $m^2n \times mn$ , и, следовательно, число уравнений в этой системе в  $m$  раз больше числа неизвестных компонент вектора  $\bar{\mathbf{c}}$ . В связи с этим возникает проблема существования и единственности решения.

**Теорема 11.1.4.** Если объект (11.1.1) полностью управляем и асимптотически устойчив, то существует единственный вектор  $\bar{\mathbf{c}}$ , удовлетворяющий уравнению (11.1.61). Этот вектор не зависит от выбора испытательных частот и совпадает с вектором, получаемым из (9.3.42), (9.3.43). ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.5.

### 11.1.6. Аналитическое конструирование регуляторов

Для решения задачи 11.1.2 запишем условие оптимальности системы (11.1.1), (11.1.49) в частотной форме. На основе уравнений (9.3.6) итерационной процедуры 9.3.1 получим аналогично (11.1.53) тождество

$$\begin{aligned} -C^{(\alpha+1)'} \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) - \mathcal{B}^{(\alpha)' }(-j\omega) C^{(\alpha+1)} &= \mathcal{B}^{(\alpha)' }(-j\omega) [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) \\ 0 \leq \omega \leq \infty \quad \alpha &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (11.1.65)$$

в котором

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) = (Ej\omega - A^{(\alpha)})^{-1} B. \quad (11.1.66)$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega) = [Ej\omega - A^{(\alpha)}]^{-1} B = [Ej\omega - A - BC^{(\alpha)'}]^{-1} B = \mathcal{B}(j\omega) [E_m - C^{(\alpha)'} \mathcal{B}(j\omega)]^{-1}. \quad (11.1.67)$$

Действительно, из (9.3.19) следует при  $L = E_n$ , что вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}$  связаны соотношением

$$\mathbf{x}(s) = (Es - A - BC')^{-1} \mathbf{f}. \quad (11.1.68)$$

Эта же связь имеет вид (9.3.20).



Сравнивая (9.3.20) и (11.1.68), убеждаемся в справедливости выражения (11.1.67). Тожество (11.1.65) принимает на  $\omega$ -тесте вид

$$-C^{(\alpha+1)'} R_k^{(\alpha)} - R_k^{(\alpha)'} C^{(\alpha+1)} = R_k^{(\alpha)'} [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] R_k^{(\alpha)} + I_k^{(\alpha)'} [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] I_k^{(\alpha)}$$

$$k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (11.1.69)$$

$$-C^{(\alpha+1)'} I_k^{(\alpha)} + I_k^{(\alpha)'} C^{(\alpha+1)} = R_k^{(\alpha)'} [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] I_k^{(\alpha)} - I_k^{(\alpha)'} [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] R_k^{(\alpha)}$$

$$k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (11.1.70)$$

где, в соответствии с (11.1.67)

$$R_k^{(\alpha)} = R_x^{(\alpha)}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \\ I_k^{(\alpha)} = I_x^{(\alpha)}(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (11.1.71)$$

$$R_x^{(\alpha)}(\omega_k) = \operatorname{Re} \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) = \operatorname{Re} [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)] \cdot \{E_m - C^{(\alpha)'} [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\}^{-1}, \quad (11.1.72)$$

$$I_x^{(\alpha)}(\omega_k) = \operatorname{Im} \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) = \operatorname{Im} [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)] \cdot \{E_m - C^{(\alpha)'} [R_x(\omega_k) + jI_x(\omega_k)]\}^{-1}. \quad (11.1.73)$$

Если объект (11.1.1) неустойчив, то в последних двух выражениях нужно заметить  $\omega$ -индексы этого объекта его стабилизированными частотными параметрами (11.1.45), (11.1.46), полагая

$$R_x(\omega_k) = R_x^c(\omega_k), \quad I_x(\omega_k) = I_x^c(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.74)$$

Сформируем, аналогично (11.1.60)–(11.1.64), векторы

$$\bar{\mathbf{c}}^{(\alpha)'} = \begin{bmatrix} C_{[1]}^{(\alpha)'} & C_{[2]}^{(\alpha)'} & \dots & C_{[m]}^{(\alpha)'} \end{bmatrix} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (11.1.75)$$

и  $\mathbf{h}^{(\alpha)}$ , а также матрицы  $M^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots$ ), и составим из (11.1.69) и (11.1.70) уравнения

$$M^{(\alpha)} \bar{\mathbf{c}}^{(\alpha)} = \mathbf{h}^{(\alpha)} \quad \alpha = 0, 1, \dots \quad (11.1.76)$$

**Теорема 11.1.5.** Если объект (11.1.1), заданный частотными параметрами, полностью управляем и асимптотически устойчив (либо, если он неустойчив, известно стабилизирующее управление (11.1.44)), то уравнения (11.1.76) доставляют единственную последовательность векторов, которая сходится к вектору

$$\bar{\mathbf{c}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{c}}^{(\alpha)}, \quad (11.1.77)$$

разрешающему задачу 11.1.2. ■

Доказательство теоремы приведено в 11.Д.6.

### 11.1.7. Анализ устойчивости

Исследуем устойчивость системы (11.1.19), (11.1.34) с известными матрицами  $G^{(i)}$ ,  $R^{(i)}$  ( $i = \overline{0, \check{\mu} - 1}$ ) реализуемого регулятора и объектом, заданным расширенными  $\omega$ -индексами (11.1.21), (11.1.22), в которых ( $k = \overline{1, p}$ ), а  $p > n$ .

Для этого используем второй частотно-алгебраический критерий устойчивости одномерных систем (критерий 6.2.2), заменив в нём  $\omega$ -индексы разомкнутой системы  $-r_{paz}^\lambda(\omega_k), i_{paz}^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ) – обобщёнными  $\omega$ -индексами  $-r_{o\delta}^\lambda(\omega_k), i_{o\delta}^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, p}$ ).

Определение 11.1.3. Обобщёнными частотными параметрами (обобщёнными  $\omega$ -индексами) системы (10.1.1), (10.1.2) называются числа  $r_{o\delta}^\lambda(\omega_k), i_{o\delta}^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), составляющие обобщённую передаточную функцию системы на  $\omega$ -тесте и  $\lambda$ -смещении

$$w_{o\delta}(\lambda + j\omega_k) = r_{o\delta}^\lambda(\omega_k) + ji_{o\delta}^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.78)$$

Выразим обобщённые  $\omega$ -индексы через частотные параметры многомерных объекта и регулятора. Для этого используем (10.1.6) и (10.1.37) и запишем

$$w_{o\delta}(\lambda + j\omega_k) = \det [E_m - W_p(\lambda + j\omega_k)W(\lambda + j\omega_k)] - 1 \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.79)$$

В рассматриваемом случае  $W(\lambda + j\omega_k) = R^\lambda(\omega_k) + jI^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – заданные матрицы, а  $W_p(\lambda + j\omega_k) = R_p^\lambda(\omega_k) + jI_p^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), где, аналогично (11.1.23), (11.1.24),

$$R_p^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} D_p [E(\lambda + j\omega_k) - A_p]^{-1} B_p \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.80)$$

$$I_p^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} D_p [E(\lambda + j\omega_k) - A_p]^{-1} B_p \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.81)$$

Матрицы  $A_p, B_p$  и  $D_p$  в этих выражениях определяются матрицами регулятора (11.1.34), который предполагается реализуемым, и, следовательно, его уравнения приводятся к форме Коши (10.1.2).

Таким образом,

$$r_{o\delta}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} \det \left\{ \left[ E_m - R_p^\lambda(\omega_k)R^\lambda(\omega_k) + I_p^\lambda(\omega_k)I^\lambda(\omega_k) \right] - j \left[ I_p^\lambda(\omega_k)R^\lambda(\omega_k) + R_p^\lambda(\omega_k)I^\lambda(\omega_k) \right] \right\} - 1 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.82)$$

$$i_{o\delta}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} \det \left\{ \left[ E_m - R_p^\lambda(\omega_k)R^\lambda(\omega_k) + I_p^\lambda(\omega_k)I^\lambda(\omega_k) \right] - j \left[ I_p^\lambda(\omega_k)R^\lambda(\omega_k) + R_p^\lambda(\omega_k)I^\lambda(\omega_k) \right] \right\} \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.83)$$

Если все переменные состояния объекта (11.1.1) доступны измерению, а регулятор имеет вид (11.1.49), то эти соотношения принимают более простой вид

$$r_{o\delta}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} \det \left[ E_m - C'R^\lambda(\omega_k) - jC'I^\lambda(\omega_k) \right] - 1 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.1.84)$$

$$i_{o\delta}^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} \det \left[ E_m - C'R^\lambda(\omega_k) - jC'I^\lambda(\omega_k) \right] \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.1.85)$$

## 11.2. Регулирование и слежение

### 11.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим объекты управления (9.2.1), описываемые уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + M\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = L\mathbf{x}, \quad (11.2.1)$$

с неизвестными параметрами.

Внешнее возмущение –  $\mathbf{f}(t)$  – ступенчатое либо гармоническое с компонентами (9.2.3) либо (9.2.4).

Выделим из них объекты первого ( $M = B$ ,  $D = E_n$ ) и второго ( $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ ) видов, которые заданы частотными параметрами.

Пусть известны оценки

$$|m_{ij}^{[0]}| \leq m_{ij}^* \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (11.2.2)$$

элементов матрицы  $M^{[0]}$  при описании объектов второго вида в форме «вход-выход» (9.2.15), а полином  $\det B(s)$  этой формы – гурвицев. Для объектов первого вида известно стабилизирующее управление (11.1.44).

Задача 11.2.1. Для объектов (11.2.1) первого и второго видов, заданных частотными параметрами, найти регулятор

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}, \quad (11.2.3)$$

такой, чтобы система (11.2.1), (11.2.3) удовлетворяла требованиям к точности

$$z_{ycm.i} \leq z_{ycm.i}^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (11.2.4)$$

где  $z_{ycm.i}^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Эта задача является развитием задачи 9.2.1 на случай неизвестных параметров. При этом в ней отсутствуют требования (9.2.14) к показателям качества, так как неизвестна матрица  $M(s)$  (а известны лишь оценки (11.2.2) её матрицы свободных членов), и поэтому нельзя сформировать уравнение качества (9.2.18).

### 11.2.2. Применение частотного модального управления

Переходя к решению задачи 11.2.1 для объектов второго вида, заданных  $\omega$ -индексами (11.1.21), (11.1.22), уточним условия её разрешимости.

Будем полагать, что известны структурные показатели объекта: размерность векторов модели (11.2.1) – числа  $n$ ,  $m$ , индексы  $\nu_j$ ,  $\bar{\nu}_i$  ( $i, j = \overline{1, m}$ ) управляемости и наблюдаемости (при этом  $\nu_j + \bar{\mu} \leq 2n$ ) и индекс  $\bar{\mu}$  элиминантной матрицы, составленной для матриц  $P(s)$  и  $N(s)$  объекта в канонической форме Лагранжа (11.1.30).

Кроме того, предполагаются известными степени строк матрицы  $B(s)$  и столбцов матрицы  $N(s)$

$$\partial_{ri}[B(s)] = \check{\alpha}_i, \quad \partial_{ci}[N(s)] = \check{\beta}_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (11.2.5)$$

а также свойство столбцовой правильности матрицы  $D(s)$

$$\det \Gamma_c[D(s)] \neq 0, \quad (11.2.6)$$

с выполнением равенства (9.2.56).

При этих условиях нетрудно сформировать на основе процедуры 9.2.2 последовательность синтеза регуляторов.

**Процедура 11.2.1 (синтеза регуляторов объектов второго вида, заданных частотными параметрами)** состоит из операций:

**Операция 1.** Построить матрицу  $\tilde{\Psi}(s)$  уравнения качества (9.2.18). Для этого найти матрицу  $\tilde{\Psi}^{[0]}$  такую, чтобы компоненты вектора

$$y_{уст} = (\tilde{\Psi}^{[0]})^{-1} M^{[0]} \bar{f} \leq z_{уст}^* \quad (11.2.7)$$

удовлетворяли требованию (11.2.4) к точности при условии, что элементы матрицы  $M^{[0]}$  определены неравенствами (11.2.2), а  $|f_i| \leq \bar{f}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Остальные матрицы  $\tilde{\Psi}^{[i]}$  ( $i = \overline{1, \infty}$ ) в уравнении качества произвольны, но при этом должно выполняться условие (9.2.37).

**Операция 2.** Построить диагональную матрицу  $E^0(s)$  по формуле (9.2.42). Степени  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) полиномов диагонали определяются неравенствами (9.2.55), (9.2.57). При противоречивости этих неравенств необходимо уточнить структуру матрицы  $\tilde{\Psi}(s)$ .

**Операция 3.** Решить систему уравнений (11.1.42), (11.1.43), в которой матрицы  $\tilde{\Psi}^{[l]}$  ( $l = \overline{0, \infty}$ ) составляют полиномиальную матрицу

$$\tilde{\Psi}(s) = E^0(s) \tilde{\Psi}(s). \quad (11.2.8)$$

**Операция 4.** Сформировать уравнение регулятора

$$(G^{[\mu-1]} s^{\mu-1} + \dots + G^{[1]} s + G^{[0]}) \mathbf{u} = (R^{[\mu-1]} s^{\mu-1} + \dots + R^{[1]} s + R^{[0]}) \mathbf{y}. \quad (11.2.9)$$

**Операция 5.** Преобразовать это уравнение к форме Коши (11.2.3).

■

### 11.2.3. Построение следящих систем

Усложним задачу 11.2.1 для объектов второго вида требованием (9.2.77) к точности слежения

$$|y_i(t) - y_{жс.i}(t)| \leq \varepsilon_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (11.2.10)$$

где  $\varepsilon_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа, а желаемое движение  $y_{жс.i}(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) задаётся желаемой моделью (9.2.76)

$$\Psi_M(s)\mathbf{y}_{жс} = L_M(s)\mathbf{v}, \quad (11.2.11)$$

которая может принимать, в частности, вид

$$\mathbf{y}_{жс}(t) = \mathbf{v}(t). \quad (11.2.12)$$

Искомый регулятор записывается как

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)\mathbf{y} + R^n(s)\mathbf{v}. \quad (11.2.13)$$

Приведём два способа определения его параметров, когда желаемая модель имеет вид (11.2.12).

**1-й способ.** В этом способе (изложенном в п. 9.2.6) задача слежения сводится к стабилизации с расширенным вектором внешних возмущений  $\tilde{\mathbf{f}}' = [\mathbf{f}', \mathbf{y}'_{жс}]$ . Уравнения объекта (11.2.1) принимают в форме «вход-выход» вид (9.2.80).

Применяем процедуру 11.2.1 при известных оценках элементов матрицы  $D^{[0]}$  полинома  $D(s)$

$$|d_{ij}^{[0]}| \leq d_{ij}^* \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (11.2.14)$$

где  $d_{ij}^*$  ( $i, j = \overline{1, m}$ ) – заданные числа, и находим операторы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора (11.2.13).

В соответствии с (9.2.79) полагаем оператор задающего воздействия

$$R^n(s) = -R(s). \quad (11.2.15)$$

**2-й способ.** Он является развитием изложенного в п. 9.2.7 и сводится к процедуре 11.2.1, если в её операции 2 заменить соотношение (9.2.55) неравенством

$$\partial_{r_i} [E^0(s)B(s)] \leq \bar{\nu}_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (11.2.16)$$

которое используется как приближённая замена условия реализуемости (9.2.87).

Оператор задающего воздействия имеет в этом способе вид (9.2.84)

$$R^n(s) = \tilde{\Psi}(s). \quad (11.2.17)$$

Если желаемая модель следящей системы описывается уравнением (11.2.11), то, в соответствии с п. 9.2.8, строим матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора (11.2.13) с помощью процедуры 11.2.1, полагая в ней

$$\tilde{\Psi}(s) = \Psi_M(s), \quad (11.2.18)$$

а затем формируем

$$R^n(s) = L_M(s). \quad (11.2.19)$$

При этом может не выполняться неравенство (11.2.4), выражающее требование к точности стабилизации. В таком случае следует заменить выражения (11.2.18), (11.2.19) соотношениями (9.2.94).

#### 11.2.4. Построение следящих систем при $f = 0$ и $r \neq m$

Рассмотрим объект более общего вида. Пусть в (11.2.1) размерность  $r$  вектора измеряемых переменных  $\mathbf{y}(t)$  не совпадает с размерностью  $m$  вектора регулируемых переменных, а уравнения объекта в канонической форме Лагранжа имеют при  $f = 0$  вид (9.2.96)

$$P(s)\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = N(s)\mathbf{q}, \quad \mathbf{z} = L(s)\mathbf{y}. \quad (11.2.20)$$

Заметим, что последнее соотношение – частный случай выражения регулируемых переменных, которое в общем случае записывается как

$$\mathbf{z} = \tilde{L}(s)\mathbf{q}, \quad (11.2.21)$$

и лишь в случае, когда можно представить

$$\tilde{L}(s) = L(s)N(s), \quad (11.2.22)$$

получим вместо (11.2.21) выражение (11.2.20).

Пусть желаемая модель описывается уравнением (9.2.97)

$$\bar{\Psi}_M(s)\mathbf{z}_ж = L_M(s)\mathbf{v}, \quad (11.2.23)$$

где  $\bar{\Psi}_M(s)$  и  $L_M(s)$  – полиномиальные матрицы размеров  $m \times m$ .

Положим в уравнениях (11.1.42), (11.1.43)

$$\Psi(s) = \bar{\Psi}_M(s)L(s) \quad (11.2.24)$$

и проверим условия (11.1.32), (11.1.33).

Если они выполняются, то решим уравнения (11.1.42), (11.1.43) и получим матрицы  $G(s)$  и  $R(s)$  регулятора (11.2.13). Оператор задающего воздействия в этом регуляторе определим выражением (9.2.100)

$$R^n(s) = L_M(s). \quad (11.2.25)$$

Построенный регулятор может оказаться нереализуемым. В этом случае дополним  $G(s)$  реализующей матрицей  $E(s)$  вида (9.1.67) и выберем коэффициенты составляющих её полиномов достаточно малыми.

## 11.2.5. Компенсационная схема\*

Она доставляет при  $r \neq m$  реализуемый регулятор (9.1.72)

$$Q(s)\mathbf{u} = H^{(1)}(s)\mathbf{y} + H^{(2)}(s)\mathbf{u}, \quad (11.2.26)$$

в котором  $r \times m$  и  $m \times m$  полиномиальные матрицы  $H^{(1)}(s)$  и  $H^{(2)}(s)$  находятся из тождества (9.1.76)

$$H^{(2)}(s)P(s) + H^{(1)}(s)N(s) = Q(s)F(s). \quad (11.2.27)$$

В этом тождестве  $F(s)$  – произвольная  $m \times m$  матрица, удовлетворяющая лишь условию гурвицевости полинома  $\det[P(s) - F(s)]$ , а  $Q(s)$  определяется выражением (9.1.81).

Пусть для матрицы  $N(s)$  можно указать  $m \times r$  матрицу  $\tilde{F}(s)$  такую, что корни  $\lambda_i^N$  ( $i = \overline{1, n}$ ) полинома  $\det[P(s) - \tilde{F}(s)N(s)]$  обладают свойством

$$\operatorname{Re} \lambda_i^N < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.2.28)$$

Тогда положим в (11.2.27)

$$F(s) = \tilde{F}(s)N(s) \quad (11.2.29)$$

и получим, после умножения слева на  $P^{-1}(s)$ , выражение

$$H^{(2)}(s) + H^{(1)}(s)W(s) = Q(s)\tilde{F}(s)W(s), \quad (11.2.30)$$

которое с точностью до обозначений совпадает с тождеством (11.1.36), из которого получены уравнения (11.1.42), (11.1.43).

Если матрица  $Q(s)\tilde{F}(s)N(s)$  удовлетворяет условию (11.1.43)

$$\partial_{c_j} [Q(s)\tilde{F}(s)N(s)] \leq \nu_j + \mu - 1 \quad j = \overline{1, m}, \quad (11.2.31)$$

то решим уравнения (11.1.42), (11.1.43), заменив в них  $\Psi^{[l]}$  на  $\tilde{Q}^{[l]}$  ( $l = \overline{1, \alpha}$ ), где  $\tilde{Q}^{[l]}$  матрицы полинома  $Q(s)\tilde{F}(s)$ , и получим операторы  $H^{(1)}(s)$  и  $H^{(2)}(s)$  регулятора (11.2.26), уравнения которого легко приводятся к форме Коши, как показано в п. 9.1.8.

Этот регулятор разрешает задачу 11.1.1 непосредственно в классе реализуемых регуляторов и не требует дополнения левой части уравнения регулятора реализующей матрицей  $E(s)$ . Он обеспечивает асимптотическую устойчивость системы при условии (11.2.28), однако точность регулирования при внешних воздействиях остаётся неопределённой. Как и не определена точность слежения с оператором (9.1.104).

### 11.2.6. Использование АКОР по критерию обобщённой работы

Пусть в задаче 11.2.1 объектом управления служит объект первого вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \mathbf{f}), \quad \mathbf{z} = L\mathbf{x}, \quad (11.2.32)$$

заданный  $\omega$ -индексами (11.1.15), (11.1.16).

Если свободное движение этого объекта асимптотически устойчиво, то искомый регулятор

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x} \quad (11.2.33)$$

находится путём решения уравнений (11.1.55), (11.1.56) с матрицей

$$Q = L'Q^{[0]}L. \quad (11.2.34)$$

Элементы диагональной матрицы  $Q^{[0]}$  определяются неравенствами (9.3.30)

$$q_{ii}^{[0]} \geq \frac{\bar{\mathbf{f}}'\bar{\mathbf{f}}}{z_{уст.i}^{*2}} \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.2.35)$$

Если объект (11.2.32) неустойчив, но известно стабилизирующее управление (11.1.44), то регулятор (11.2.33), разрешающий задачу 11.2.1, определяется в результате решения рекуррентной системы (11.1.69), (11.1.70), в которой матрица  $Q$  находится из соотношений (11.2.34), (11.2.35).

При гармонических внешних возмущениях следует (в соответствии с (9.3.41)) заменить в неравенствах (11.2.35) границы  $\bar{\mathbf{f}}$  ступенчатых воздействий на границы  $\mathbf{f}_{гарм}$  гармонических возмущений.

## 11.3. Адаптивное управление

### 11.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим несамотождественный объект второго вида, устойчивый по управлению

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + M\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{y}, \quad (11.3.1)$$

с неизвестными параметрами. Известны оценки (11.1.21), (11.1.22) в описании этого объекта в форме «вход-выход», а  $\mathbf{f}(t)$  – ступенчатое либо гармоническое возмущение.

Задача 11.3.1. Найти регулятор

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad (11.3.2)$$

такой, чтобы, начиная с некоторого момента  $t^*$ , система (11.3.1), (11.3.2) удовлетворяла требованиям к точности

$$|z_k(t)| \leq z_k^* \quad k = \overline{1, m}, \quad t > t^*, \quad (11.3.3)$$



где  $y_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Для объектов первого вида (когда в (11.3.1)  $D = E_n$ ,  $M = B$ ,  $z = Lx$ ) искомым регулятор (11.3.2) записывается как

$$u = C'x. \quad (11.3.4)$$

Аналогичная задача возникает для многорежимного объекта, который описывается уравнениями

$$\dot{x} = A^{(i)}x + B^{(i)}u + M^{(i)}f, \quad y = D^{(i)}x, \quad z = y, \quad (11.3.5)$$

на интервалах  $(t_{i-1}, t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Пусть моменты  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) известны и объект полностью управляем и наблюдаем, а также устойчив к управлению в каждом режиме (на каждом интервале  $(t_{i-1}, t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ )). Будем полагать, что он частотно-квазистационарен и самotoждественен в  $i$ -том режиме относительно регулятора  $(i-1)$ -го режима.

Задача 11.3.2. Найти многорежимный регулятор

$$\dot{x}_p = A_p^{(i)}x_p + B_p^{(i)}y, \quad u = D_p^{(i)}x_p + F_p^{(i)}y, \quad t_{i-1} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11.3.6)$$

обеспечивающий в каждом режиме работы объекта (11.3.5) точность

$$|z_k(t)| \leq z_k^* \quad k = \overline{1, m}, \quad t^{*(i)} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11.3.7)$$

где  $t^{*(i)}$  – предельное время адаптации в  $i$ -том режиме, а  $z_k^*$  ( $k = \overline{1, m}$ ) – заданные числа. ■

Для объектов первого вида регулятор (11.3.6) записывается как

$$u = C^{(i)'}x. \quad (11.3.8)$$

Заметим, что свойство самotoждественности объекта в  $i$ -том режиме относительно регулятора  $(i-1)$ -го режима означает асимптотическую устойчивость системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^{(i)}x + B^{(i)}u, & y &= D^{(i)}x \\ \dot{x}_p &= A_p^{(i-1)}x_p + B_p^{(i-1)}y, & u &= D_p^{(i-1)}x_p + F_p^{(i-1)}y \end{aligned} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (11.3.9)$$

состоящей из объекта в  $i$ -том режиме с регулятором, построенным в  $(i-1)$ -м режиме работы системы.

### 11.3.2. Декларативный регулятор

На рис. 11.3.1 приведена схема декларативного регулятора, разрешающего задачу 11.3.1.

**Генератор испытательных воздействий** формирует параллельно-последовательное воздействие (11.1.7), (11.1.8).

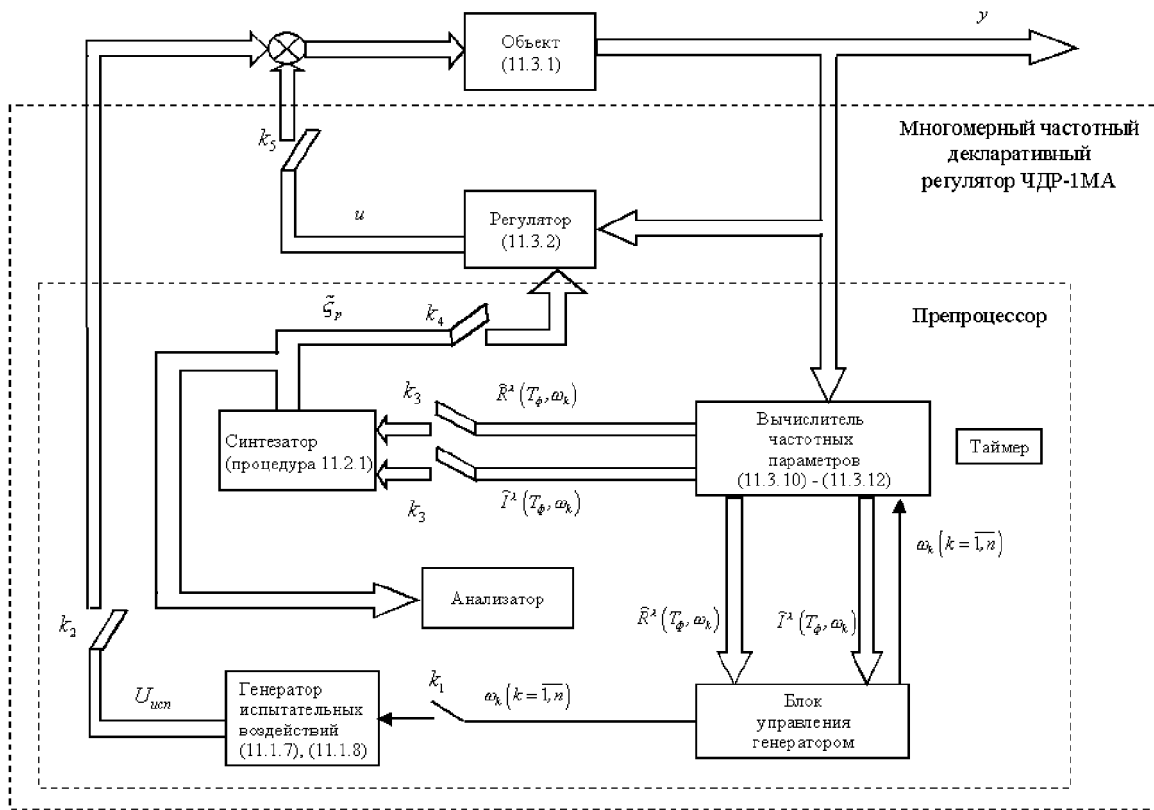


Рис. 11.3.1

Выходом вычислителя частотных параметров служат оценки элементов матриц (11.1.27), (11.1.28)  $\omega$ -индексов

$$\hat{r}_{ji}^{\lambda}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int_{t_{i-1}^u - T_{n.r}}^{t_i^u} \tilde{y}_j(\tau) \sin \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, r} \quad i = \overline{1, m} \quad r = m, (11.3.10)$$

$$\hat{i}_{ji}^{\lambda}(T_{\phi}, \omega_k) = \frac{2}{\rho_k T_{\phi}} \int_{t_{i-1}^u - T_{n.r}}^{t_i^u} \tilde{y}_j(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad k = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, r} \quad i = \overline{1, m} \quad r = m, (11.3.11)$$

где

$$\tilde{y}_j(t) = y_j(t) e^{-\lambda t} \quad j = \overline{1, m}, (11.3.12)$$

а  $T_{\phi}$  – время фильтрации, которое полагается одинаковым во всех  $m$  экспериментах

$$T_{\phi} = t_i^u - t_{i-1}^u + T_{n.г} \quad i = \overline{1, m} (11.3.13)$$

и включает в себя время паузы генератора –  $T_{n.г}$ , в течение которого исследуется, не совпадают ли частоты испытательных воздействий с частотами внешних возмущений. Если имеется совпадение, то блок управления генератором изменяет испытательные частоты.

**Синтезатор** осуществляет процедуру 11.2.1. При выполнении операции 3 этой процедуры элементы матриц  $R^\lambda(\omega_k)$  и  $I^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в уравнениях (11.1.42), (11.3.43) заменяются их оценками (11.3.10), (11.3.11).

Результатом работы синтезатора служит вектор  $\xi_p$ , составленный из параметров регулятора (11.3.2).

**Таймер** организует работу регулятора. Он последовательно включает блоки пре-процессора (блок управления генератором, генератор, вычислитель частотных параметров и синтезатор) и отключает их по окончании работы. Ключ К5 замыкается, когда препроцессор заканчивает работу.

Схема, приведённая на рис. 11.3.1, сохраняется и для объектов первого вида. Изменяются входы и выходы блоков. Так, на вход вычислителя частотных параметров поступают сигналы  $x_j(t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) (и поэтому в (11.3.10)-(11.3.12) заменяем  $y_j$  на  $x_j$ , а  $\tilde{y}_j$  на  $\tilde{x}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ )), синтезатор решает систему (11.1.69), (11.1.70) с матрицей  $Q$ , определяемой соотношениями (11.2.34), (11.2.35), а вектор  $\tilde{\xi}_p$  составлен из элементов матрицы  $C'$  регулятора (11.3.4).

### 11.3.3. Анализатор

Синтезатор осуществляет процедуру 11.2.1 при условии, что известны структурные параметры объекта (размерность пространства состояний, индексы управляемости, наблюдаемости и элиминантной матрицы и т.п.).

Если структурные параметры неизвестны, то в препроцессор добавляется ещё один блок-анализатор. Он осуществляет анализ устойчивости системы, и лишь после этого вектор выхода синтезатора  $\tilde{\xi}_p$  передаётся в регулятор. При этом таймер организует следующую последовательность операций, аналогичную процедуре 8.1.3.

#### Процедура 11.3.1.

**Операция 1.** Задаться индексом  $\check{\mu}$  элиминантной матрицы  $\check{\mu} = \check{\mu}^{(0)}$ , определить  $n = n^{(0)} = \check{\mu}^{(0)}r$  ( $r = m$ ) и решить (после окончания работы вычислителя частотных параметров) систему уравнений (11.1.42), (11.1.43) при  $\omega = 0$  и произвольной матрице  $\Psi^{(0)}$ . Если решение найдено, то перейти к операции 2, если оно не существует, то повторить операцию 1 при  $\check{\mu}_1^{(0)} = \check{\mu}^{(0)} + 1$  и  $\check{n}_1^{(0)} = \check{\mu}_1^{(0)}r$  ( $r = m$ ) и т.д.

**Операция 2.** Положить  $n = n^{(1)} = n^{(0)} + 1$ , определить (по окончании фильтрации) частотные параметры объекта, вычислить обобщённые  $\omega$ -индексы системы (1.1.82), (1.1.83) и по ним проанализировать устойчивость с помощью критерия 6.2.2. Если система асимптотически устойчива, то перейти к операции 3, если неустойчива, то повторить операцию 1 при  $\check{\mu} = \check{\mu}^{(1)} = \check{\mu}^{(0)} + 1$  и  $n = n^{(1)} = \check{\mu}^{(1)}m$  и принять в операции 2  $n = n^{(1)} + 1$  и т.д. Результатом этих операций служат числа  $\check{\mu} = \bar{\mu}$  и  $n = \bar{n}$ .

**Операция 3.** Решить уравнения (11.1.42), (11.1.43) при  $\check{\mu} = \bar{\mu}$  и  $n = \bar{n}$  с матрицей  $\Psi^{(0)}$ , определённой из условия (11.2.7). Проверить выполнение условия (9.1.66) реализуемости регулятора. Если оно нарушается, то использовать реализующий оператор (9.1.67), в котором  $\check{\mu} = \bar{\mu}$ . Затем привести уравнения регулятора к форме Коши (11.2.3) и замкнуть ключ К4. ■

Эта процедура упрощается для объектов первого вида. Так, в операции 1 следует задаться размерностью вектора пространства состояний  $n = n^{(0)}$ , решить систему (11.1.69), (11.1.70) с матрицей  $Q$ , определяемой соотношениями (11.2.34), (11.2.35), и найти матрицу  $C'$  размеров  $m \times n^{(0)}$ . Затем, выполняя операцию 2, положить  $n = n^{(1)}$ , определить частотные параметры объекта, найти с помощью (11.1.84), (11.1.85) обобщённые  $\omega$ -индексы системы и осуществить анализ устойчивости, используя критерий 6.2.2.

#### 11.3.4. Управление многорежимными объектами

Задача 11.3.2 разрешается препроцессором, приведённым на рис. 11.3.1 для каждого режима работы объекта. Ключ К5 замыкается после окончания первого режима и далее остаётся в замкнутом положении. Это приводит к тому, что во втором режиме объекта необходимо вычислить  $\omega$ -индексы объекта по частотным параметрам объекта, замкнутого регулятором первого режима. Эта операция осуществляется и в последующих режимах. Она реализуется блоком-восстановителем  $\omega$ -индексов объекта (входящим в вычислитель частотных параметров). Её результаты используются при выполнении операций 1 и 2 процедуры 11.2.1.

Введём расчётные соотношения, на основе которых работает блок-восстановитель. Рассматриваемая система описывается во втором режиме как

$$\mathbf{y} = \tilde{W}^{(2)}(s)(\mathbf{u} + \mathbf{u}_{ucn}), \quad \mathbf{u} = W_p^{(1)}(s)\mathbf{y}, \quad (11.3.14)$$

где  $\tilde{W}^{(2)}(s)$  – передаточная матрица объекта (11.3.5) во втором режиме, а  $W_p^{(1)}(s)$  – передаточная матрица регулятора (11.3.6) в первом режиме.

Отсюда следует, что  $\mathbf{y} = W_{зам}^{(2)}(s)\mathbf{u}_{ucn}$ , где передаточная матрица замкнутой системы

$$W_{зам}^{(2)}(s) = [E_r - \tilde{W}^{(2)}(s)W_p^{(1)}(s)]^{-1} \tilde{W}^{(2)}(s). \quad (11.3.15)$$

Из этого выражения находим передаточную матрицу объекта во втором режиме

$$\tilde{W}^{(2)}(s) = W_{зам}^{(2)}(s) [E_m + W_p^{(1)}(s)W_{зам}^{(2)}(s)]^{-1}. \quad (11.3.16)$$

Аналогично запишем для  $i$ -го режима

$$\tilde{W}^{(i)}(s) = W_{зам}^{(i)}(s) [E_m + W_p^{(i-1)}(s)W_{зам}^{(i)}(s)]^{-1} \quad i = 2, 3, \dots \quad (11.3.17)$$

Отсюда следуют искомые  $\omega$ -индексы объекта в  $i$ -том режиме

$$R^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \operatorname{Re}\left\{ \left[ R_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + jI_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) \right] \cdot \left\langle E_m + W_p^{(i-1)}(j\omega_k) \left[ R_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + jI_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) \right] \right\rangle^{-1} \right\} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (11.3.18)$$

$$I^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) = \operatorname{Im}\left\{ \left[ R_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + jI_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) \right] \cdot \left\langle E_m + W_p^{(i-1)}(j\omega_k) \left[ R_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) + jI_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k) \right] \right\rangle^{-1} \right\} \quad k = \overline{1, n} \quad i = 2, 3, \dots, \quad (11.3.19)$$

где  $T_{\phi}^{(i)}$  – время фильтрации в  $i$ -том режиме,  $R_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)$  и  $I_{\text{з.а.м}}^{(i)}(T_{\phi}^{(i)}, \omega_k)$  – сигналы на выходах вычислителя частотных параметров в  $i$ -том режиме.

Время фильтрации  $T_{\phi}^{(i)}$  в  $i$ -том режиме ( $i = 1, 2, \dots$ ) работы объекта состоит из  $m$  отрезков  $T_{\phi, k}^{(i)}$  ( $k = \overline{1, m}$ ). На протяжении  $\nu$ -того отрезка времени к  $\nu$ -му входу объекта прикладывается параллельное испытательное воздействие (11.1.8).

Предполагаемая в задаче 11.3.2 частотная квазистационарность объекта означает, что суммарное предельное время фильтрации

$$T_{\phi}^{(i)} = \sum_{k=1}^m T_{\phi, k, \text{предельн}}^{(i)}$$

не превышает длительности  $T^{(i)}$   $i$ -го режима, где  $T_{\phi, k, \text{предельн}}^{(i)}$  определяется (8.3.11).

### 11.3.5. Следящая система с эталонной моделью

Усложним задачу 11.3.2 требованием слежения за сигналом  $\mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$  с заданной точностью

$$|y_j(t) - y_{\text{жс}, j}(t)| \leq y_j^* \quad j = \overline{1, m}, \quad t^{*(i)} \leq t < t_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (11.3.20)$$

Сигнал  $\mathbf{y}_{\text{жс}}(t)$  формируется эталонной моделью, описываемой уравнением (9.2.76)

$$\bar{\Psi}_M(s)\mathbf{y}_{\text{жс}} = L_M(s)\mathbf{v}. \quad (11.3.21)$$

Уравнение искомого регулятора в форме «вход-выход» имеет вид

$$G^{(i)}(s)\mathbf{u} = R^{(i)}(s)\mathbf{y} + L_M(s)\mathbf{v} \quad i = 0, 1, \dots \quad (11.3.22)$$

Структурная схема адаптивного регулятора представлена на рис. 11.3.2.

Рассмотрим первый режим работы объекта. Выделим в этом режиме два интервала времени  $[t_0, T^{*(1)}]$  и  $[T^{*(1)}, t_1]$ . В течение первого интервала  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  и результатом работы адаптера служит регулятор

$$\begin{aligned} & \left\{ G^{(\dot{\mu}-1)} \left[ T^{*(1)} \right] s^{\dot{\mu}-1} + \dots + G^{(1)} \left[ T^{*(1)} \right] s + G^{(0)} \left[ T^{*(1)} \right] \right\} \mathbf{u} = \\ & = \left\{ R^{(\dot{\mu}-1)} \left[ T^{*(1)} \right] s^{\dot{\mu}-1} + \dots + R^{(1)} \left[ T^{*(1)} \right] s + R^{(0)} \left[ T^{*(1)} \right] \right\} \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (11.3.23)$$

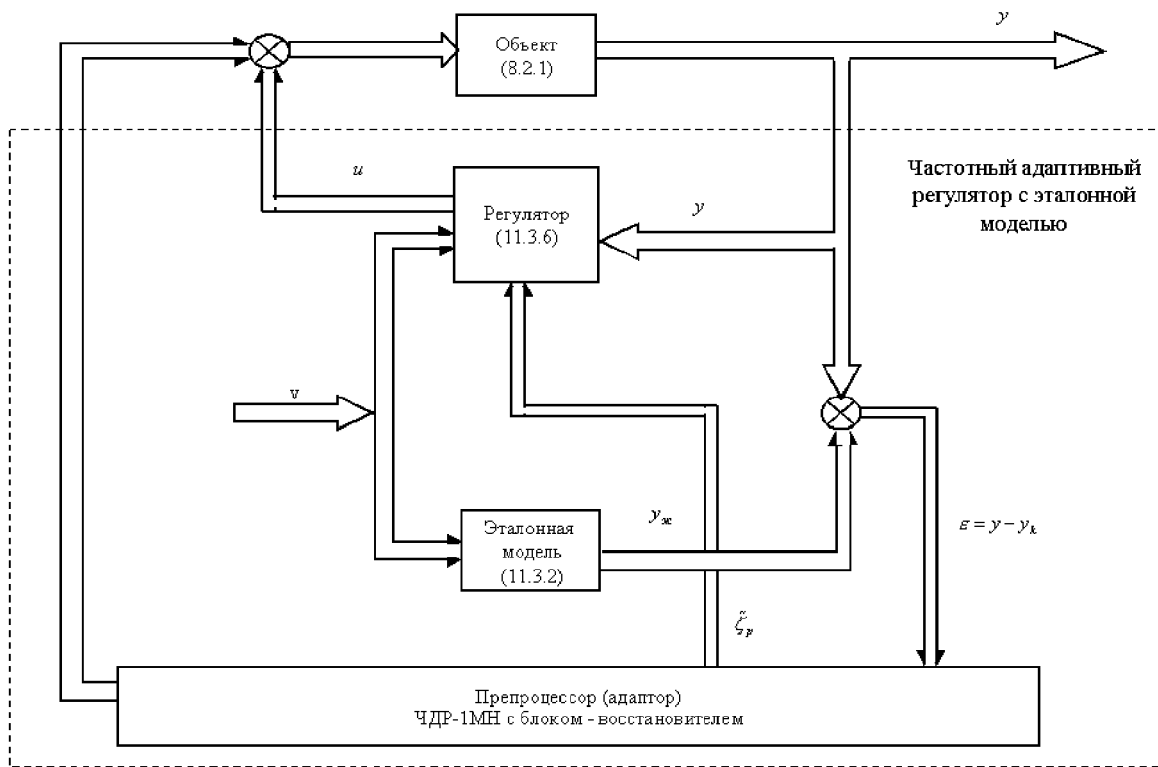


Рис. 11.3.2

который, после его подключения к объекту, обеспечивает на интервале  $[t^{*(1)}, T^{*(1)}]$  выполнение неравенства

$$|y_j(t)| \leq y_j^* \quad j = \overline{1, m}, \quad t^{*(1)} \leq t < T^{*(1)}. \quad (11.3.24)$$

При этом в операции 1 процедуры 11.2.1 полагаем

$$\tilde{\Psi}(s) = \Psi_M(s) \quad (11.3.25)$$

(Если  $y_{уст}$ , определяемое из (11.2.7), не удовлетворяет (11.3.23), то используем выражения (9.2.94)).

### 11.3.6. Слежение в первом режиме работы объекта

На втором интервале  $[T^{*(1)}, t_1]$  приложим к эталонной модели и регулятору задающее воздействие  $v(t)$ .

Найдём выражение для ошибки слежения. Для этого запишем уравнение объекта (11.3.5) в форме «вход-выход» и уравнение регулятора (11.3.23) с учётом задающего воздействия

$$D^{(1)}(s)y = B^{(1)}(s)(u + u_{ucn}) + M^{(1)}(s)f, \quad G(s)u = R(s)y + L_M(s)v. \quad (11.3.26)$$

Заменим в этих уравнениях  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{y}_{\text{жс}}$  и получим

$$D^{(1)}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = B^{(1)}(s)(\mathbf{u} + \mathbf{u}_{ucn}) - D^{(1)}(s)\mathbf{y}_{\text{жс}} + M^{(1)}(s)\mathbf{f}, \quad (11.3.27)$$

$$G(s)\mathbf{u} = R(s)\boldsymbol{\varepsilon} + R(s)\mathbf{y}_{\text{жс}} + L_M(s)\mathbf{v}. \quad (11.3.28)$$

Запишем уравнение регулятора как

$$G(s)\mathbf{u} = R(s) \times \\ \times \left\{ [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s)(\mathbf{u} + \mathbf{u}_{ucn}) - \mathbf{y}_{\text{жс}} + [D^{(1)}(s)]^{-1} M^{(1)}(s)\mathbf{f} \right\} + R(s)\mathbf{y}_{\text{жс}} + L_M(s)\mathbf{v}.$$

Отсюда

$$\mathbf{u} = \left\{ G(s) - R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \\ \cdot \left\{ R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} M^{(1)}(s)\mathbf{f} + R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s)\mathbf{u}_{ucn} + L_M(s)\mathbf{v} \right\}. \quad (11.3.29)$$

Подставим это выражение в (11.3.27) и получим

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ G(s) - R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \\ \cdot \left\{ R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} M^{(1)}(s)\mathbf{f} + R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s)\mathbf{u}_{ucn} + L_M(s)\mathbf{v} \right\} - \\ - \mathbf{y}_{\text{жс}} + [D^{(1)}(s)]^{-1} M^{(1)}(s)\mathbf{f} + [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s)\mathbf{u}_{ucn}. \quad (11.3.30)$$

Запишем его в более компактной форме. Для этого используем равенство

$$[D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ G(s) - R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) + \\ + [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) = [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ G(s) - R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} G(s), \quad (11.3.31)$$

которое нетрудно доказать, применяя очевидное соотношение

$$(K - L)^{-1}L + E = (K - L)^{-1}K, \quad (11.3.32)$$

где  $K$  и  $L$  – произвольные квадратные матрицы.

Последнее выражение в (11.3.31) представим как

$$[D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ G(s) - R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} G(s) = \\ = [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ E_m - G^{-1}(s)R(s) [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} = \\ = \tilde{W}^{(1)}(s) [E_m - W_p(s)\tilde{W}^{(1)}(s)]^{-1}, \quad (11.3.33)$$

где

$$\tilde{W}^{(1)}(s) = [D^{(1)}(s)]^{-1} B^{(1)}(s), \quad W_p(s) = G^{-1}(s)R(s). \quad (11.3.34)$$

Будем использовать также равенство

$$\begin{aligned}
 & \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ G(s) - R(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \\
 & \quad \cdot R(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} M^{(1)}(s) + \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} M^{(1)}(s) = \\
 = & \left\langle \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ E_m - G^{-1}(s) R(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot G^{-1}(s) R(s) + E_m \right\rangle \cdot \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} M^{(1)}(s) = \\
 = & \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \left\{ E_m - G^{-1}(s) R(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) \right\}^{-1} \cdot \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} M^{(1)}(s),
 \end{aligned} \tag{11.3.35}$$

которое можно доказать, если применить соотношение

$$K(E - LK)^{-1}L + E = K(E - LK)^{-1}K^{-1}, \tag{11.3.36}$$

где  $K$  и  $L$  – произвольные квадратные матрицы.

Используем выражения (11.3.33)-(11.3.35) и запишем (11.3.30) в окончательной форме

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \tilde{W}^{(1)}(s) \left[ G(s) - R(s) \tilde{W}^{(1)}(s) \right]^{-1} L_M(s) \mathbf{v} - \mathbf{y}_{жс} + \\
 & + \tilde{W}^{(1)}(s) \left[ E_m - W_p(s) \tilde{W}^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{u}_{ucn} + \\
 & + \tilde{W}^{(1)}(s) \left[ G(s) - R(s) \tilde{W}^{(1)}(s) \right]^{-1} G(s) \left[ B^{(1)}(s) \right]^{-1} M^{(1)}(s) \mathbf{f}.
 \end{aligned} \tag{11.3.37}$$

Учтём теперь, что матрицы регулятора (11.3.23) удовлетворяют, в соответствии с процедурой 11.2.1, тождеству

$$G(s) - R(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) = \Psi_M(s) \left[ D^{(1)}(s) \right]^{-1} B^{(1)}(s) = \Psi_M(s) \tilde{W}^{(1)}(s), \tag{11.3.38}$$

(в котором для простоты полагаем  $E^0(s) = E$ ), и поэтому

$$G(s) = B^{(1)}(s) \quad \text{и} \quad R(s) = D^{(1)}(s) - \Psi_M(s). \tag{11.3.39}$$

Подставим тождество (11.3.38) в выражение (11.3.37) для ошибки слежения и получим, с учётом первого из соотношений (11.3.39), связь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \Psi_M^{-1}(s) L_M(s) \mathbf{v} - \mathbf{y}_{жс} + \tilde{W}^{(1)}(s) \left[ E_m - W_p(s) \tilde{W}^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{u}_{ucn} + \Psi_M^{-1}(s) M^{(1)}(s) \mathbf{f} = \\
 = & \tilde{W}^{(1)}(s) \left[ E_m - W_p(s) \tilde{W}^{(1)}(s) \right]^{-1} \mathbf{u}_{ucn} + \Psi_M^{-1}(s) M^{(1)}(s) \mathbf{f},
 \end{aligned} \tag{11.3.40}$$

которая означает, что использование эталонной модели даёт основание рассматривать следящую систему как систему регулирования. Эта связь означает также, что на втором интервале  $[T^{*(1)}, t_1]$  можно оставить в регуляторе (11.3.28) параметры регулятора (11.3.23).



### 11.3.7. Слежение во втором режиме работы объекта

В момент времени  $t_1$  начался второй режим и изменились параметры объекта. Выражение (11.3.37) для ошибки слежения принимает теперь вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \tilde{W}^{(2)}(s) \left[ G(s) - R(s) \tilde{W}^{(2)}(s) \right]^{-1} L_M(s) \mathbf{v} - \mathbf{y}_{\text{жс}} + \tilde{W}^{(2)}(s) \left[ E_m - W_p(s) \tilde{W}^{(2)}(s) \right]^{-1} \mathbf{u}_{\text{исп}} + \\ & + \tilde{W}^{(2)}(s) \left[ G(s) - R(s) \tilde{W}^{(2)}(s) \right]^{-1} G(s) \left[ B^{(2)}(s) \right]^{-1} M^{(2)}(s) \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (11.3.41)$$

где  $\tilde{W}^{(2)}(s) = \left[ D^{(2)}(s) \right]^{-1} B^{(2)}(s)$  – передаточная матрица объекта во втором режиме его работы.

Тождество (11.3.38) теперь нарушается, и в процессе фильтрации появляется дополнительная «помеха»

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \tilde{W}^{(2)}(s) \left[ G(s) - R(s) \tilde{W}^{(2)}(s) \right]^{-1} L_M(s) \mathbf{v} - \mathbf{y}_{\text{жс}}, \quad (11.3.42)$$

которая увеличивает время фильтрации.

После окончания фильтрации синтезатор формирует параметры регулятора

$$G^{(2)}(s) \mathbf{u} = R^{(2)}(s) \mathbf{y} + L_M(s) \mathbf{v}. \quad (11.3.43)$$

В последующих режимах работы объекта описанные ситуации повторяются, за исключением процесса на начальном интервале  $[t_0, T^{*(1)}]$ .

## Доказательства к главе 11

### 11.Д. Доказательство теорем и утверждений

#### 11.Д.1. Доказательство теоремы 11.1.1

Рассмотрим вначале равенство (11.1.18) при условии, что объект (11.1.1) – асимптотически устойчив, а  $\lambda = 0$ , и повторим изложенное в 6.Д.4 доказательство утверждения 6.3.1, которое при  $m = 1$  совпадает с доказываемой теоремой.

Аналогично (6.Д.44)-(6.Д.47) запишем

$$I_x(\omega) = \text{Jm } \mathcal{B}(j\omega) = \text{Jm } \frac{\overline{(Ej\omega - A)} B d(-j\omega)}{|d(j\omega)|^2} = \frac{1}{|d(j\omega)|^2} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \Psi^{(2i+1)} \omega^{2i+1}, \quad (11.Д.1)$$

где  $n \times m$  матрица

$$\Psi^{(\alpha)} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\alpha-\gamma} d_{\alpha-\gamma} A_{\gamma} B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (11.Д.2)$$

Используем обозначения (6.Д.52), (6.Д.58) и получим, повторяя (6.Д.51)-(6.Д.62)

$$\begin{aligned}
 M_{x.I} &= \begin{bmatrix} I_x(\omega_1) & I_x(\omega_2) & \cdots & I_x(\omega_n) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \omega_1^{2i+1} \Psi^{(2i+1)} & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \omega_2^{2i+1} \Psi^{(2i+1)} & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \omega_n^{2i+1} \Psi^{(2i+1)} \end{bmatrix} \cdot \\
 &\cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{|d(j\omega_1)|^2} \quad \frac{1}{|d(j\omega_2)|^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \right] = \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} & \cdots & \Psi^{(2n-1)} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes S] \cdot T = \\
 &= \begin{bmatrix} A_{n-1}B & A_{n-2}B & \cdots & A_0B \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot T = \\
 &= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3] \cdot [E_m \otimes \Gamma_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot T,
 \end{aligned} \tag{11.Д.3}$$

где

$$T = \text{diag} \left[ \frac{1}{|d(j\omega_1)|^2} \quad \frac{1}{|d(j\omega_2)|^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{|d(j\omega_n)|^2} \right], \tag{11.Д.4}$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \cdots & d_1 \\ 0 & d_n & d_{n-1} & \cdots & d_2 \\ 0 & 0 & d_n & \cdots & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}. \tag{11.Д.5}$$

Выражение

$$E_m \otimes L = \begin{pmatrix} E_m l_{11} & E_m l_{12} & \cdots & E_m l_{1n} \\ E_m l_{21} & E_m l_{22} & \cdots & E_m l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_m l_{n1} & E_m l_{n2} & \cdots & E_m l_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11.Д.6}$$

где  $l_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – элементы матрицы  $L$ .

Лемма 11.Д.1. Если определитель некоторой матрицы  $L$  равен  $\Delta$  ( $\det L = \Delta$ ), то

$$\det[E_m \otimes L] = \Delta^m. \tag{11.Д.7}$$

■

Доказательство леммы приведено в конце 11.Д.1.

Определим ранг матрицы 11.Д.3. Из (11.Д.5) следует, что

$$\det \Gamma_2 = d_n^n \neq 0. \tag{11.Д.8}$$

В 6.Д.4 показано, что для асимптотически устойчивых объектов  $\det \Gamma_1 \neq 0$ , а  $\det \check{S} \neq 0$  как определитель Вандермонда с несовпадающими элементами.

Используем лемму и получим

$$\det[E_m \otimes \Gamma_3] \neq 0, \quad \det[E_m \otimes \Gamma_1] \neq 0, \quad \det[E_m \otimes \check{S}] \neq 0. \tag{11.Д.9}$$

Учитывая, что от умножения некоторой матрицы  $A$  слева или справа на матрицы, определитель которых отличен от нуля, ранг  $A$  не меняется, заключаем из (11.Д.3), что

$$\text{rank } M_{x,I} = \text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}. \quad (11.Д.10)$$

Из этого равенства и полной управляемости объекта (11.1.1) следует при  $\lambda = 0$  равенство (11.1.18) теоремы.

Пусть теперь объект неустойчив и  $\lambda > C_0$ . В этом случае (11.Д.1) примет вид

$$I_x^\lambda(\omega) = \text{Im } \mathcal{B}^\lambda(j\omega) = \text{Im} \frac{\overline{(Ej\omega - \tilde{A})} B \tilde{d}(-j\omega)}{|\tilde{d}(j\omega)|^2} = \frac{1}{|\tilde{d}(j\omega)|^2} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tilde{\Psi}^{(2i+1)} \omega^{2i+1}, \quad (11.Д.11)$$

где

$$\tilde{A} = A - E\lambda, \quad \tilde{d}(j\omega) = \det(Ej\omega - \tilde{A}). \quad (11.Д.12)$$

Повторяя (11.Д.2)-(11.Д.5), запишем

$$\begin{aligned} M_{x,I}^\lambda &= \begin{bmatrix} I_x^\lambda(\omega_1) & I_x^\lambda(\omega_2) & \dots & I_x^\lambda(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}^{(1)} & \tilde{\Psi}^{(2)} & \dots & \tilde{\Psi}^{(2n-1)} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot \tilde{T} = \\ &= \begin{bmatrix} B & \tilde{A}B & \dots & \tilde{A}^{n-1}B \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \tilde{\Gamma}_2] \cdot [E_m \otimes \tilde{\Gamma}_1] \cdot [E_m \otimes \check{S}] \cdot \tilde{T}. \end{aligned} \quad (11.Д.13)$$

$$\text{Покажем, что } \det \tilde{\Gamma}_1 \neq 0. \quad (11.Д.14)$$

По построению, собственные числа  $\tilde{s}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) матрицы  $\tilde{A}$  связаны соотношением

$$\tilde{s}_i = s_i - \lambda \quad i = \overline{1, n}, \quad (11.Д.15)$$

в котором  $s_i$  – собственные числа матрицы  $A$ .

Действительно, обозначим  $s + \lambda = \delta$  и запишем полином

$$\det(Es - \tilde{A}) = \det[E(s + \lambda) - A] = \det[E\delta - A] = \delta^n + d_{n-1}\delta^{n-1} + \dots + d_1\delta + d_0.$$

Его корни

$$\delta_i = s_i \quad i = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, его корни как корни полинома

$$\det(Es - \tilde{A}) = s^n + \tilde{d}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{d}_1s + \tilde{d}_0$$

равны  $\tilde{s}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), и, следовательно, справедливо (11.Д.15).

Убедимся, что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & \tilde{A}B & \dots & \tilde{A}^{n-1}B \end{bmatrix} = n. \quad (11.Д.16)$$

Для этого покажем, что

$$\begin{aligned} &\det \left( B_{[1]} \ AB_{[1]} \ \dots \ A^{\nu_1-1}B_{[1]} \middle| B_{[2]} \ AB_{[2]} \ \dots \ A^{\nu_2-1}B_{[2]} \middle| \dots \middle| B_{[m]} \ AB_{[m]} \ \dots \ A^{\nu_m-1}B_{[m]} \right) = \\ &= \det \left( B_{[1]} \ \tilde{A}B_{[1]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_1-1}B_{[1]} \middle| B_{[2]} \ \tilde{A}B_{[2]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_2-1}B_{[2]} \middle| \dots \middle| B_{[m]} \ \tilde{A}B_{[m]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_m-1}B_{[m]} \right). \end{aligned} \quad (11.Д.17)$$

Учитывая, что

$$\tilde{A}^\gamma = (A - E\lambda)^\gamma = \sum_{i=0}^{\gamma} \alpha_i^{(\gamma)} A^i \quad \gamma = \overline{1, \rho}, \quad \rho = \max\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m\} - 1, \quad (11.Д.18)$$

где  $\alpha_i^{(\gamma)}$  – вещественные числа, преобразуем правую часть (11.Д.17) так, чтобы она совпала с левой. Подобное преобразование описано в п. 6.3.2.

Из (11.Д.14) и (11.Д.16) следует второе из равенств теоремы.

Доказательство выражения (11.1.17) аналогично.

### Доказательство леммы 11.Д.1.

Приведём вначале некоторые вспомогательные факты, на которые будет опираться доказательство.

Пусть  $K$  и  $L$  – произвольные матрицы размеров  $n \times n$ . Очевидно, что

а) если  $K + L = M$ , то

$$E_m \otimes K + E_m \otimes L = E_m \otimes M; \quad (11.Д.19)$$

б) если  $K \cdot L = D$ , то

$$[E_m \otimes K] \cdot [E_m \otimes L] = E_m \otimes D. \quad (11.Д.20)$$

Из последнего выражения следует, что для  $L = K^{-1}$

$$[E_m \otimes K] \cdot [E_m \otimes K^{-1}] = E_m \otimes E_n,$$

и поэтому

$$[E_m \otimes K]^{-1} = E_m \otimes K^{-1}. \quad (11.Д.21)$$

Переходя непосредственно к доказательству леммы, воспользуемся методом математической индукции.

Так, при  $n = 1$  лемма очевидна и

$$\det E_m l_{11} = l_{11}^m.$$

При  $n = 2$  воспользуемся формулой для определителя блочной матрицы и запишем

$$\begin{aligned} \det[E_m \otimes L] &= \det \begin{pmatrix} E_m l_{11} & E_m l_{12} \\ E_m l_{21} & E_m l_{22} \end{pmatrix} = \det[E_m l_{11} \cdot \det[E_m l_{22} - E_m l_{21} (E_m l_{11})^{-1} E_m l_{12}]] = \\ &= l_{11}^m \det[E_m (l_{22} - l_{21} l_{11}^{-1} l_{12})] = (l_{11} l_{22} - l_{21} l_{12})^m. \end{aligned} \quad (11.Д.22)$$

Пусть равенство 11.Д.7 выполняется для  $n - 1$ . Убедимся, что оно справедливо и для  $n$ . Представим матрицу  $L$  в виде

$$L = \begin{pmatrix} \bar{L} & \bar{L}^{[n]} \\ \bar{L}^{[n]} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad (11.Д.23)$$

где  $\bar{L}$  – матрица размеров  $(n-1) \times (n-1)$ , получаемая из матрицы  $L$  вычёркиванием  $n$ -й строки и  $n$ -го столбца,  $\bar{L}^{[n]}$  –  $n$ -я строка матрицы  $L$  без последнего элемента,  $\bar{L}_{[n]}$  –  $n$ -й столбец матрицы  $L$  без последнего элемента.

Используем (11.Д.20)-(11.Д.22) и получим выражение

$$\begin{aligned} \det[E_m \otimes L] &= \det[E_m \otimes \bar{L}] \cdot \det \left\{ E_m l_{nn} - E_m \otimes \bar{L}^{[n]} [E_m \otimes \bar{L}]^{-1} E_m \otimes \bar{L}_{[n]} \right\} = \\ &= (\det \bar{L})^m \cdot \det \left\{ E_m (l_{nn} - \bar{L}^{[n]} \bar{L}^{-1} \bar{L}_{[n]}) \right\} = (\det \bar{L})^m \cdot (l_{nn} - \bar{L}^{[n]} \bar{L}^{-1} \bar{L}_{[n]})^m = \\ &= \left[ \det \bar{L} (l_{nn} - \bar{L}^{[n]} \bar{L}^{-1} \bar{L}_{[n]}) \right]^m = (\det L)^m, \end{aligned} \quad (11.Д.24)$$

которое и доказывает лемму.

## 11.Д.2. Доказательство теоремы 11.1.2

Используем выражение (11.1.24) и запишем на основе (11.Д.11)

$$I^\lambda(\omega) = \text{Jm} D \frac{\overline{(Ej\omega - \tilde{A})} B \tilde{d}(-j\omega)}{|\tilde{d}(j\omega)|^2} = \frac{1}{|\tilde{d}(j\omega)|^2} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i D \tilde{\Psi}^{(2i+1)} \omega^{2i+1}. \quad (11.Д.25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_I^\lambda &= \left[ I^\lambda(\omega_1) \ I^\lambda(\omega_2) \ \dots \ I^\lambda(\omega_n) \right] = \left[ DI_x^\lambda(\omega_1) \ DI_x^\lambda(\omega_2) \ \dots \ DI_x^\lambda(\omega_n) \right] = \\ &= D \left[ B \ \tilde{A}B \ \dots \ \tilde{A}^{n-1}B \right] \cdot [E_m \otimes \tilde{I}_2] \cdot [E_m \otimes \tilde{I}_1] \cdot [E_m \otimes \tilde{S}] \cdot \tilde{T}. \end{aligned} \quad (11.Д.26)$$

Покажем, что

$$\text{rank} \left[ DB \ D\tilde{A}B \ \dots \ D\tilde{A}^{n-1}B \right] = r. \quad (11.Д.27)$$

Для этого представим

$$\left[ B \ \tilde{A}B \ \dots \ \tilde{A}^{n-1}B \right] = \left[ \tilde{L} \ \tilde{K} \right], \quad (11.Д.28)$$

где  $\tilde{L} = \left( B_{[1]} \ \tilde{A}B_{[1]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_1-1}B_{[1]} \mid B_{[2]} \ \tilde{A}B_{[2]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_2-1}B_{[2]} \mid \dots \mid B_{[m]} \ \tilde{A}B_{[m]} \ \dots \ \tilde{A}^{\nu_m-1}B_{[m]} \right)$ , а матрица  $\tilde{K}$  содержит остальные столбцы матрицы в левой части (11.Д.28).

Тогда

$$D \left[ B \ \tilde{A}B \ \dots \ \tilde{A}^{n-1}B \right] = \left[ D\tilde{L} \ D\tilde{K} \right]. \quad (11.Д.29)$$

Из (11.Д.17) следует, что  $\det \tilde{L} \neq 0$ , и поэтому

$$\text{rank} D\tilde{L} = \text{rank} D = r. \quad (11.Д.30)$$

Так как  $\det \tilde{I}_2 \neq 0$ ,  $\det \tilde{I}_1 \neq 0$  и  $\det S \neq 0$ , то из (11.Д.30) следует второе из равенств (11.1.29) теоремы.

Доказательство первого из них аналогично.

### 11.Д.3. Доказательство теоремы 11.1.3

Покажем вначале, что уравнения (11.1.42), (11.1.43) теоремы эквивалентны системе

$$G(\lambda + j\omega_k)P(\lambda + j\omega_k) - R(\lambda + j\omega_k)N(\lambda + j\omega_k) = \Psi(\lambda + j\omega_k)N(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.31)$$

которая следует из тождества (11.1.35) при  $s = \lambda + j\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Эта система, после её умножения справа на  $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), совпадает с системой (11.1.38), следствием которой служат рассматриваемые уравнения (11.1.42), (11.1.43).

Таким образом, если существуют матрицы  $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то указанные уравнения и система (11.Д.31) эквивалентны.

Найдём условия существования  $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Представим  $P(\lambda + j\omega) = P^{(1)} + jP^{(2)}$ , где  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$  – матрицы, зависящие от  $\lambda$  и  $\omega$ , и найдём  $m \times m$  матрицы  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  такие, что

$$\left[ P^{(1)} + jP^{(2)} \right]^{-1} = L^{(1)} + jL^{(2)}.$$

По определению обратной матрицы

$$\left[ P^{(1)} + jP^{(2)} \right] \cdot \left[ L^{(1)} + jL^{(2)} \right] = \left[ L^{(1)} + jL^{(2)} \right] \cdot \left[ P^{(1)} + jP^{(2)} \right] = E_m.$$

Из первого произведения следует

$$P^{(1)}L^{(1)} - P^{(2)}L^{(2)} = E_m, \quad P^{(2)}L^{(1)} + P^{(1)}L^{(2)} = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$L^{(2)} = - \left[ P^{(1)} \right]^{-1} P^{(2)}L^{(1)}. \quad (11.Д.32)$$

Подставим это выражение в первое из уравнений и получим

$$L^{(1)} = \left\{ P^{(1)} + P^{(2)} \left[ P^{(1)} \right]^{-1} P^{(2)} \right\}^{-1}. \quad (11.Д.32')$$

Очевидно, что

$$L^{(2)} = \left\{ P^{(2)} + P^{(1)} \left[ P^{(2)} \right]^{-1} P^{(1)} \right\}^{-1}.$$

Таким образом,  $P^{-1}(\lambda + j\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) существует, если

$$\det \left\{ P^{(1)}(\omega_k) + P^{(2)}(\omega_k) \left[ P^{(1)}(\omega_k) \right]^{-1} P^{(2)}(\omega_k) \right\} \neq 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.33)$$

$$\det \left\{ P^{(2)}(\omega_k) + P^{(1)}(\omega_k) \left[ P^{(2)}(\omega_k) \right]^{-1} P^{(1)}(\omega_k) \right\} \neq 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.34)$$

где  $P^{(1)}(\omega_k) = \operatorname{Re} P(\lambda + \omega_k)$ ,  $P^{(2)}(\omega_k) = \operatorname{Im} P(\lambda + \omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Условия (11.Д.33), (11.Д.34) – выполняются, так как в противном случае не существует частотных параметров.

Действительно, учитывая (11.1.23), (11.1.24) и (9.2.39), запишем

$$\begin{aligned} R^\lambda(\omega_k) &= \operatorname{Re} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Re} [N(\lambda + j\omega_k)P^{-1}(\lambda + \omega_k)], \\ I^\lambda(\omega_k) &= \operatorname{Im} W(\lambda + j\omega_k) = \operatorname{Im} [N(\lambda + j\omega_k)P^{-1}(\lambda + \omega_k)]. \end{aligned} \quad (11.Д.35)$$

Рассмотрим теперь систему (11.Д.31) и покажем, что её решения совпадают с решениями уравнения (9.1.44).

Запишем эту систему с учётом (9.1.40), (9.1.42) в виде

$$G(s_k)P(s_k) - R(s_k)N(s_k) - \Delta(s_k) = [X M_{e\mu} - \Delta]S_{e\mu}(s_k) = 0, \quad (11.Д.36)$$

где  $s_k = \lambda + j\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Обозначим

$$H = [X M_{e\mu} - \Delta]' \quad (11.Д.37)$$

и представим (11.Д.36)

$$S'_{e\mu}(s_k)H = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.Д.38)$$

Здесь  $S'_{e\mu}(s_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – матрицы размеров  $m \times (n + m\mu)$ , а  $H$  – матрица размеров  $(n + m\mu) \times m$ .

Систему (11.Д.38) можно записать как  $m$  независимых подсистем

$$S'_{e\mu}(s_k)H_{[i]} = 0 \quad k = \overline{1, n} \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.Д.39)$$

В развёрнутой форме, например, первая из этих подсистем имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_1 + \check{\mu} - 1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_2 + \check{\mu} - 1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & s_k & \cdots & s_k^{\nu_m + \check{\mu} - 1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \times \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{21} \\ \vdots \\ \eta_{\nu_1 + \check{\mu}, 1} \\ \vdots \\ \eta_{n + m\check{\mu}, 1} \end{bmatrix} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.40)$$

где  $\eta_{i1}$  ( $i = \overline{1, n + m\mu}$ ) – компоненты вектора  $H_{[i]}$ .

Эта подсистема, в свою очередь, представляется как  $m$  независимых подсистем для определения векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(1)} &= \left[ \eta_{11} \quad \eta_{21} \quad \cdots \quad \eta_{\nu_1 + \check{\mu}, 1} \right], \\ \boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \left[ \eta_{\nu_1 + \check{\mu} + 1, 1} \quad \eta_{\nu_1 + \check{\mu} + 2, 1} \quad \cdots \quad \eta_{\nu_1 + \nu_2 + 2\check{\mu}, 1} \right], \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\eta}^{(m)} &= \left[ \eta_{n + (m-1)\check{\mu} - \nu_m + 1, 1} \quad \eta_{n + (m-1)\check{\mu} - \nu_m + 2, 1} \quad \cdots \quad \eta_{n + m\check{\mu}, 1} \right]. \end{aligned}$$

Запишем первую из этих подсистем в виде

$$M^{(1,1)}\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (11.Д.41)$$

где

$$M^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + j\omega_1 & (\lambda + j\omega_1)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_1)^{\nu_1 + \mu - 2} & (\lambda + j\omega_1)^{\nu_1 + \mu - 1} \\ 1 & \lambda + j\omega_2 & (\lambda + j\omega_2)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_2)^{\nu_1 + \mu - 2} & (\lambda + j\omega_2)^{\nu_1 + \mu - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda + j\omega_q & (\lambda + j\omega_q)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_q)^{\nu_1 + \mu - 2} & (\lambda + j\omega_q)^{\nu_1 + \mu - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda + j\omega_n & (\lambda + j\omega_n)^2 & \cdots & (\lambda + j\omega_n)^{\nu_1 + \mu - 2} & (\lambda + j\omega_n)^{\nu_1 + \mu - 1} \end{pmatrix}, \quad (11.Д.42)$$

а  $q = \frac{\nu_1 + \mu}{2} \leq n$  в силу условия (11.1.33) теоремы.

Выделим из (11.Д.41) подсистему

$$\sum_{\alpha=0}^{2q-1} (\lambda + j\omega_\alpha)^\alpha \eta_{\alpha,1} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.43)$$

которая с точностью до обозначения совпадает с (6.Д.1). Повторяя доказательство теоремы 6.1.1, заключаем, что  $\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \mathbf{0}$ . Аналогично получим  $\boldsymbol{\eta}^{(i)} = \mathbf{0}$  ( $i = \overline{2, m}$ ), и, следовательно,  $H_{[1]} = \mathbf{0}$ .

Повторяя изложенное, приходим к равенствам  $H_{[1]} = \mathbf{0}$  ( $i = \overline{2, m}$ ) и тогда заключаем, что система (11.Д.38) имеет решение

$$H = [X M_{e\mu} - \Delta]' = 0, \quad (11.Д.44)$$

и, следовательно, матрица  $X$ , разрешающая это уравнение, служит решением системы (11.Д.31), эквивалентной – при условиях (11.Д.33), (11.Д.34) – уравнениям (11.1.42), (11.1.43).

#### 11.Д.4. Доказательство утверждения 11.1.1

Покажем вначале, что

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{(0)}(s) &= [Es - A - BC^{(0)'}]^{-1} B = \\ &= (Es - A)^{-1} B [E_m - C^{(0)'}(Es - A)^{-1} B]^{-1} = \mathcal{B}(s) [E_m - C^{(0)'}\mathcal{B}(s)]^{-1}. \end{aligned} \quad (11.Д.45)$$

Запишем для этого очевидное тождество

$$B [E_m - C^{(0)'}(Es - A)^{-1} B] = [E - BC^{(0)'}(Es - A)^{-1}] B. \quad (11.Д.46)$$

Умножим его справа на матрицу  $[E_m - C^{(0)'}(Es - A)^{-1} B]^{-1}$ , а слева на матрицу  $[E - BC^{(0)'}(Es - A)^{-1}]^{-1}$  и получим

$$[E - BC^{(0)'}(Es - A)^{-1}]^{-1} B = B [E_m - C^{(0)'}(Es - A)^{-1} B]^{-1}. \quad (11.Д.47)$$



Левую часть этого выражения представим в виде

$$\begin{aligned} [E - BC^{(0)'}(Es - A)^{-1}]^{-1} &= \{[Es - A - BC^{(0)'}](Es - A)^{-1}\}^{-1} = \\ &= (Es - A)[Es - A - BC^{(0)'}]^{-1}. \end{aligned} \quad (11.Д.48)$$

Тогда (11.Д.47) можно записать в форме

$$(Es - A)[Es - A - BC^{(0)'}]^{-1}B = B[E_m - C^{(0)'}(Es - A)^{-1}B]^{-1},$$

из которой следует (11.Д.45).

Выразим теперь передаточную матрицу  $\mathcal{B}(s)$  через  $\mathcal{B}^{(0)}(s)$ . Для этого умножим (11.Д.45) справа на  $[E_m - C^{(0)'}\mathcal{B}(s)]$  и получим соотношение

$$\mathcal{B}^{(0)}(s)[E_m - C^{(0)'}\mathcal{B}(s)] = \mathcal{B}(s), \quad (11.Д.49)$$

которое представим в виде

$$\mathcal{B}^{(0)}(s) - \mathcal{B}^{(0)}(s)C^{(0)'}\mathcal{B}(s) = \mathcal{B}(s).$$

Отсюда следует искомое выражение

$$\mathcal{B}(s) = [E + \mathcal{B}^{(0)}(s)C^{(0)'}]^{-1}\mathcal{B}^{(0)}(s). \quad (11.Д.50)$$

На  $\omega$ -тесте это соотношение принимает вид

$$\mathcal{B}(j\omega_k) = [E + \mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k)C^{(0)'}]^{-1}\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.Д.51)$$

Представим

$$\mathcal{B}(j\omega_k) = R^c(\omega_k) + jI^c(\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad (11.Д.52)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} L_x(\omega_k) &= \operatorname{Re} [E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'} + jI^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'}]^{-1}, \\ M_x(\omega_k) &= \operatorname{Im} [E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'} + jI^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'}]^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда из (11.Д.51) сразу следуют выражения (11.1.45), (11.1.46) утверждения, а его соотношения (11.1.47), (11.1.48) – на основе формул (11.Д.32), (11.Д.32'), если в них положить  $P^{(1)} = E + R^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'}$ ,  $P^{(2)} = I^{(0)}(\omega_k)C^{(0)'}$ .

## 11.Д.5. Доказательство теоремы 11.1.4

Докажем вначале существование решения уравнения (11.1.61). Для этого приведём две леммы.

Лемма 11.Д.2. Необходимым и достаточным условием выполнения равенств (11.1.55), (11.1.56) является тождество (11.1.53). ■

**Доказательство леммы.** Достаточность тождества (11.1.53) следует из построения уравнений (11.1.55), (11.1.56). Докажем его необходимость. Для этого преобразуем тождество.

Аналогично (11.Д.1) запишем

$$B(s) = (Es - A)^{-1}B = \frac{\widetilde{(Es - A)}Bd(-s)}{d(s)d(-s)} = \frac{1}{d(s)d(-s)} \left( \sum_{\alpha=0}^{2n-1} L_{\alpha} s^{\alpha} \right) B, \quad (11.Д.53)$$

где

$$L_{\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\alpha-\gamma} d_{\alpha-\gamma} A_{\gamma} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (11.Д.54)$$

Заметим, что из (11.Д.2) следует

$$\Psi^{(\alpha)} = L_{\alpha} B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (11.Д.55)$$

Подставим выражение (11.Д.53) в тождество (11.1.53) и запишем (при  $j\omega = s$ ) его в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} [-C' L_{\alpha} B - (-1)^{\alpha} B' L'_{\alpha} C - Q_{\alpha}] s^{\alpha} = 0, \quad (11.Д.56)$$

где

$$Q_{\alpha} = B' \left[ \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\gamma} A'_{\gamma} Q A_{\alpha-\gamma} \right] B \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (11.Д.57)$$

Введём обозначение

$$K_{\alpha} = -C' L_{\alpha} B - (-1)^{\alpha} B' L'_{\alpha} C - Q_{\alpha} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1} \quad (11.Д.58)$$

и получим окончательно тождество

$$\sum_{\alpha=0}^{2n-1} K_{\alpha} s^{\alpha} = 0. \quad (11.Д.59)$$

Уравнения (11.1.55), (11.1.56) выражают вещественную и мнимую части тождества (11.1.53) для  $n$  фиксированных частот, и поэтому они совпадают с уравнениями, которые следуют из (11.Д.59)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i K_{2i} \omega_k^{2i} = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.60)$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} K_{2i-1} \omega_k^{2i-1} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \quad (11.Д.61)$$

Представим уравнения (11.Д.60), совпадающие с (11.1.55), в матричной форме

$$(E_m \otimes \tilde{S}) K = 0, \quad (11.Д.62)$$

где

$$E_m \otimes \tilde{S} = \begin{pmatrix} E_m & -E_m\omega_1^2 & E_m\omega_1^4 & \cdots & (-1)^{n-1} E_m\omega_1^{2n-2} \\ E_m & -E_m\omega_2^2 & E_m\omega_2^4 & \cdots & (-1)^{n-1} E_m\omega_2^{2n-2} \\ E_m & -E_m\omega_3^2 & E_m\omega_3^4 & \cdots & (-1)^{n-1} E_m\omega_3^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_m & -E_m\omega_n^2 & E_m\omega_n^4 & \cdots & (-1)^{n-1} E_m\omega_n^{2n-2} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_2 \\ K_4 \\ \vdots \\ K_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (11.Д.63)$$

Очевидно, что  $\det \tilde{S} \neq 0$  как определитель Вандермонда, поэтому, в силу леммы 11.Д.1,  $\det (E_m \otimes \tilde{S}) \neq 0$ . Это означает, что решение системы уравнений (11.Д.60)

$$K_{2i} = 0 \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (11.Д.64)$$

Аналогично доказывается, что решение (11.Д.61)

$$K_{2i-1} = 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.Д.65)$$

Пусть выполняются равенства (11.1.55) и (11.1.56), эквивалентные уравнениям (11.Д.60), (11.Д.61) соответственно. Покажем, что при этом выполняется тождество (11.Д.59), эквивалентное тождеству (11.1.53).

Действительно, из (11.Д.60), (11.Д.61) следует тривиальные решения (11.Д.64), (11.Д.65), подставляя которые в (11.Д.59), убеждаемся в справедливости этого тождества, и, таким образом, лемма 11.Д.2 доказана. ■

**Лемма 11.Д.3.** При условиях теоремы 11.1.4 матрица  $C$ , удовлетворяющая (11.1.55), (11.1.56):

1° существует и имеет вид

$$C = -AB, \quad (11.Д.66)$$

где  $A$  – положительно-определённая матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$PA + A'P = -Q, \quad (11.Д.67)$$

2° не зависит от выбора испытательных частот,

3° обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (11.1.1), (11.1.49). ■

**Доказательство леммы.** Используем лемму 11.Д.2 и будем искать матрицу  $C$ , удовлетворяющую тождеству (11.1.53). Запишем его в виде

$$-C'(Es - A)^{-1}B - B'(-Es - A)^{-1}C = B'(-Es - A)^{-1}Q(Es - A)^{-1}B. \quad (11.Д.68)$$

Если матрица  $C$  определена выражением (11.Д.66), то (11.Д.68) можно представить следующим образом

$$B'(-Es - A)^{-1}[(-Es - A)'P + P(Es - A) - Q](Es - A)^{-1}B = 0. \quad (11.Д.69)$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю при любых  $s$ , если матрица  $P$  – решение уравнения Ляпунова (11.Д.67), и, таким образом, п. 1° и п. 2° леммы доказаны. Последняя часть леммы (п. 3°) следует из (11.Д.66), (11.Д.67), если вычислить полную производную функции Ляпунова  $v = x'Ax$  в силу уравнений (11.1.1), (11.1.49). ■

Из леммы 11.Д.3 и выражения (11.1.60) следует, что вектор  $\bar{c}$  – существует.

Докажем *единственность* вектора  $c$ .

Для этого покажем, что уравнения (11.Д.64), (11.Д.65), которые в развёрнутой форме имеют, с учётом (11.Д.58), вид

$$-C'L_\alpha B - (-1)^\alpha B'L_\alpha C - Q_\alpha = 0 \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}, \quad (11.Д.70)$$

разрешаются единственной матрицей  $C$ .

Лемма 11.Д.4. Система (11.Д.70) эквивалентна следующим двум подсистемам

$$\begin{bmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'C & B'A'C & \cdots & B'A^{n-1}C \end{bmatrix} = -Q_H, \quad (11.Д.71)$$

$$\begin{bmatrix} C'B & C'AB & \cdots & C'A^{n-1}B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B'C & B'A'C & \cdots & B'A^{n-1}C \end{bmatrix} = -Q_P, \quad (11.Д.72)$$

в которых

$$Q_H = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_3 & \cdots & Q_{2n-3} & Q_{2n-1} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}, \quad (11.Д.73)$$

$$Q_P = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_2 & \cdots & Q_{2n-4} & Q_{2n-2} \end{bmatrix} \cdot [E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}, \quad (11.Д.74)$$

а матрицы  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  определены выражениями (6.Д.58), (7.Д.11) и (6.Д.62) соответственно. ■

Доказательство леммы приведено в конце 11.Д.5.

Введём обозначение

$$A^k B = B_k \quad k = \overline{0, n-1} \quad (11.Д.75)$$

и представим подсистему (11.Д.71) в развёрнутой форме, аналогичной (11.1.58),

$$B'_{k[i]} C_{[\psi]} + B'_{k[\psi]} C_{[i]} = q_{ki\psi}^H \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i, m}, \quad (11.Д.76)$$

где  $q_{ki\psi}^H$  –  $i\psi$ -тый элемент  $k$ -той подматрицы

$$Q_{Hk} = Q_{2k+1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1} \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (11.Д.77)$$

Подобным образом представим и систему (11.Д.72)

$$B'_{k[i]} C_{[\psi]} - B'_{k[\psi]} C_{[i]} = q_{ki\psi}^P \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i+1, m}, \quad (11.Д.78)$$

где  $q_{ki\psi}^P$  –  $i\psi$ -тый элемент  $k$ -той подматрицы

$$Q_{Pk} = Q_{2k} \cdot [E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1} \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (11.Д.79)$$

Вычтем из (11.Д.76) уравнения (11.Д.78) и получим окончательно систему

$$B'_{k[i]} C_{[\psi]} + B'_{k[\psi]} C_{[i]} = q_{ki\psi}^H \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i, m}, \quad (11.Д.80)$$

$$B'_{k[\psi]} C_{[i]} = \frac{1}{2} [q_{ki\psi}^H - q_{ki\psi}^P] \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, m} \quad \psi = \overline{i+1, m}. \quad (11.Д.81)$$

Сформируем из неё рекуррентные подсистемы для последовательного вычисления векторов  $C_{[1]}, C_{[2]}, \dots, C_{[m]}$ .

Подсистема для определения вектора  $C_{[1]}$ :

$$\begin{aligned} B'_{k[1]} C_{[1]} &= \frac{1}{2} q_{k11}^H \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[\psi]} C_{[1]} &= \frac{1}{2} [q_{k1\psi}^H - q_{k1\psi}^P] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{2, m}. \end{aligned}$$

Подсистема для определения вектора  $C_{[2]}$ :

$$\begin{aligned} B'_{k[1]} C_{[2]} &= -B'_{k[2]} C_{[1]} + q_{k12}^H \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[2]} C_{[2]} &= \frac{1}{2} q_{k22}^H \quad k = \overline{0, n-1}, \\ B'_{k[\psi]} C_{[2]} &= \frac{1}{2} [q_{k2\psi}^H - q_{k2\psi}^P] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{3, m}. \end{aligned}$$

Подсистема для определения вектора  $C_{[\rho]}$  ( $\rho = \overline{3, m}$ ):

$$\begin{aligned} B'_{k[i]} C_{[\psi]} &= -B'_{k[\psi]} C_{[i]} + q_{ki\psi}^H \quad k = \overline{0, n-1} \quad i = \overline{1, \rho} \quad \psi = \rho, \\ B'_{k[\psi]} C_{[\rho]} &= \frac{1}{2} [q_{k\rho\psi}^H - q_{k\rho\psi}^P] \quad k = \overline{0, n-1} \quad \psi = \overline{\rho+1, m}. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов  $G$  подсистемы для определения вектора  $C_{[1]}$  имеет вид

$$G' = \left( B_{0[1]} \ B_{1[1]} \ \cdots \ B_{n-1[1]} \ \middle| \ B_{0[2]} \ B_{1[2]} \ \cdots \ B_{n-1[2]} \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ B_{0[m]} \ B_{1[m]} \ \cdots \ B_{n-1[m]} \right). \quad (11.Д.82)$$

Объект (11.1.1) – полностью управляем, и поэтому

$$\text{rank } G = n. \quad (11.Д.83)$$

Нетрудно заметить, что матрицы коэффициентов подсистем для определения векторов  $C_{[2]}, \dots, C_{[\rho]}, \dots, C_{[m]}$  совпадают и имеют вид (11.Д.82).

Это означает, что ранг матрицы коэффициентов системы (11.Д.80), (11.Д.81) равен числу неизвестных  $nm$  компонент вектора  $\bar{c}$ .

Известна теорема: для того, чтобы совместная система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен числу неизвестных.

Рассматриваемая система (11.Д.80), (11.Д.81) – совместна, так как по лемме 11.Д.3 можно указать решение (11.Д.66) этой системы, а матрица системы имеет ранг  $nm$ , равный числу неизвестных.

Это доказывает теорему 11.Д.4.

**Доказательство леммы 11.Д.4.**

Запишем уравнения (11.Д.70) в компактной форме

$$C' \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & \cdots & L_{2n-3} & L_{2n-1} \end{bmatrix} B - B' \begin{bmatrix} L'_1 & L'_3 & \cdots & L'_{2n-3} & L'_{2n-1} \end{bmatrix} C = -\tilde{Q}_H, \quad (11.Д.84)$$

$$C' \begin{bmatrix} L_0 & L_2 & \cdots & L_{2n-4} & L_{2n-2} \end{bmatrix} B + B' \begin{bmatrix} L'_0 & L'_2 & \cdots & L'_{2n-4} & L'_{2n-2} \end{bmatrix} C = -\tilde{Q}_P, \quad (11.Д.85)$$

где

$$\tilde{Q}_H = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_3 & \cdots & Q_{2n-3} & Q_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_P = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_2 & \cdots & Q_{2n-4} & Q_{2n-2} \end{bmatrix}. \quad (11.Д.86)$$

Представим выражение (11.Д.54) в виде

$$\begin{aligned} C' L_\alpha B &= \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\alpha-\gamma} d_{\alpha-\gamma} C' A_\gamma B = \\ &= \left( C' A_{n-1} B \quad C' A_{n-2} B \quad \cdots \quad C' A_1 B \quad C' A_0 B \right) \times \begin{pmatrix} E_m d_{\alpha-n+1} (-1)^{\alpha-n+1} \\ E_m d_{\alpha-n+2} (-1)^{\alpha-n+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\alpha-1} (-1)^{\alpha-1} \\ E_m d_\alpha (-1)^\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} B' L'_\alpha C &= \sum_{\gamma=0}^{n-1} (-1)^{\alpha-\gamma} d_{\alpha-\gamma} B' A'_\gamma C = \\ &= \left( B' A'_{n-1} C \quad B' A'_{n-2} C \quad \cdots \quad B' A'_1 C \quad B' A'_0 C \right) \times \begin{pmatrix} E_m d_{\alpha-n+1} (-1)^{\alpha-n+1} \\ E_m d_{\alpha-n+2} (-1)^{\alpha-n+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\alpha-1} (-1)^{\alpha-1} \\ E_m d_\alpha (-1)^\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \end{aligned}$$

На основе этих соотношений запишем (11.Д.84), (11.Д.85), с учётом (11.Д.70), в форме

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} C' A_{n-1} B & \cdots & C' A_1 B & C' A_0 B \end{bmatrix} [E_m \otimes \Gamma_1] - \\ &- \begin{bmatrix} B' A'_{n-1} C & \cdots & B' A'_1 C & B' A'_0 C \end{bmatrix} [E_m \otimes \Gamma_1] = -\tilde{Q}_H, \quad (11.Д.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} C' A_{n-1} B & \cdots & C' A_1 B & C' A_0 B \end{bmatrix} [E_m \otimes \Gamma_2] + \\ &+ \begin{bmatrix} B' A'_{n-1} C & \cdots & B' A'_1 C & B' A'_0 C \end{bmatrix} [E_m \otimes \Gamma_2] = -\tilde{Q}_P. \quad (11.Д.88) \end{aligned}$$

Используем теперь выражение (6.Д.46) для матриц

$$A_\gamma = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad \gamma = \overline{0, n-2}, \quad A_{n-1} = E,$$

и представим

$$C'A_\gamma B = \left( C'B \quad C'AB \quad \dots \quad C'A^{n-1}B \right) \times \begin{pmatrix} E_m d_{\gamma+1} \\ E_m d_{\gamma+2} \\ \vdots \\ E_m d_{\gamma+n} \end{pmatrix} \quad \gamma = \overline{0, n-2}.$$

(где  $d_{\gamma+i+1} = 0$ , при  $\gamma + i + 1 > n$ ). Тогда

$$\begin{cases} C'A_{n-1}B & \dots & C'A_1B & C'A_0B \\ B'A'_{n-1}C & \dots & B'A'_1C & B'A'_0C \end{cases} = \begin{cases} C'B & C'AB & \dots & C'A^{n-1}B \\ B'C & B'A'C & \dots & B'A^{n-1}C \end{cases} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3], \quad (11.Д.89)$$

Подставим эти соотношения в (11.Д.87), (11.Д.88), умножим первое из них справа на  $[E_m \otimes \Gamma_1]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}$ , а второе на  $[E_m \otimes \Gamma_2]^{-1} \cdot [E_m \otimes \Gamma_3]^{-1}$  и получим искомые выражения (11.Д.71), (11.Д.72).

Матрицы  $[E_m \otimes \Gamma_i]^{-1}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – существуют, так как объект асимптотически устойчив, и поэтому, как показано в п. 6.Д.4 и п. 7.Д.1,  $\det \Gamma_1 \neq 0$ ,  $\det \Gamma_2 \neq 0$ . Из выражений (6.Д.62) следует, что  $\det \Gamma_3 = d_n^n \neq 0$ , и, таким образом, лемма 11.Д.4 доказана. ■

## 11.Д.6. Доказательство теоремы 11.1.5

Запишем систему (11.1.69), (11.1.70), эквивалентную уравнениям (11.1.76), в её начальной форме: тождеством (11.1.65) на  $\omega$ -тесте

$$-C^{(\alpha+1)'} \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) - \mathcal{B}^{(\alpha)' }(-j\omega_k) C^{(\alpha+1)} = \mathcal{B}^{(\alpha)' }(-j\omega_k) [Q + C^{(\alpha)} C^{(\alpha)'}] \mathcal{B}^{(\alpha)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = 0, 1, \dots \quad (11.Д.90)$$

Рассмотрим эту рекуррентную систему на первых шагах  $\alpha$ .

Пусть  $\alpha = 0$ . Уравнения (11.Д.90) принимают в этом случае вид

$$-C^{(1)'} \mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) - \mathcal{B}^{(0)' }(-j\omega_k) C^{(1)} = \mathcal{B}^{(0)' }(-j\omega_k) [Q + C^{(0)} C^{(0)'}] \mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (11.Д.91)$$

где, в соответствии с (11.1.66), (11.1.67),

$$\mathcal{B}^{(0)}(j\omega_k) = [Ej\omega_k - A - BC^{(0)'}]^{-1} B = \mathcal{B}(j\omega_k) [E - C^{(0)'} \mathcal{B}(j\omega_k)]^{-1}. \quad (11.Д.92)$$

Утверждение 11.Д.1. При условиях теоремы 11.1.5 матрица  $C^{(1)}$ , разрешающая уравнение (11.Д.92), существует и единственна. ■

Справедливость утверждения следует непосредственно из теоремы 11.1.4.

Действительно, уравнения (11.Д.91) дают решение  $\mathbf{u} = C^{(1)'}\mathbf{x}$  задачи АКОР по критерию обобщённой работы для «объекта»

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(0)}\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad A^{(0)} = A + BC^{(0)'}. \quad (11.Д.93)$$

Он асимптотически устойчив по определению матрицы  $C^{(0)}$  и полностью управляем.

Последнее следует из известной леммы об управляемости объекта с любой обратной связью по состоянию (если объект без обратной связи полностью управляем).

Утверждение 11.Д.2. Собственные числа матрицы  $A^{(1)} = A + BC^{(1)'}$  имеют отрицательные вещественные части

$$\operatorname{Re} \lambda_i [A^{(1)}] < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.Д.94)$$

■

Доказательство утверждения опирается на лемму 11.Д.3 и неравенства (4.Д.14) в доказательстве теоремы 4.1.2. Из леммы 11.Д.3 следует, что для «объекта» (11.Д.93)

$$C^{(1)} = -P^{(1)}B,$$

где  $P^{(1)}$  – удовлетворяет уравнению

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)'}P^{(1)} = -Q - C^{(0)}C^{(0)'}$$

Повторяя вывод неравенств (4.Д.14), приходим к (11.Д.94).

Положим в (11.Д.90)  $\alpha = 1$ . Матрица  $C^{(2)}$ , разрешающая эти уравнения, существует и единственна, так как «объект»  $\dot{\mathbf{x}} = A^{(1)}\mathbf{x} + B\mathbf{u}$  асимптотически устойчив и полностью управляем. Собственные числа матрицы  $A^{(2)} = A + BC^{(1)'}$  имеют отрицательные вещественные части. Это следует из леммы 11.Д.3 и неравенств (4.Д.20).

Продолжая этот процесс, получим последовательность матриц  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$ . Этим матрицам соответствует единственная последовательность матриц  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots$ , которая имеет предел.

Отсюда следует выражение (11.1.77) теоремы.

## Заключение к главе 11

Эта завершающая глава концентрирует в компактной форме содержание всей книги, где построено частотное управление, обеспечивающее требующуюся точность при ограниченных внешних возмущениях в системах регулирования и слежения для:

а) самотождественных объектов первого и второго видов (объекты второго вида должны быть устойчивы по управлению), заданных частотными параметрами,



б) несамотождественных объектов (однорежимных и многорежимных) тех же видов; частотное управление такими объектами реализуется декларативными и адаптивными регуляторами, а в следящих системах содержат (дополнительно) эталонные модели.

В обоих случаях частотное управление строится на основе метода частотных параметров.

Он вместе с натурными критериями устойчивости из глав 6 и 7 образует упомянутую в предисловии натурную теорию автоматического управления непрерывными объектами.

Можно наметить направления развития натурной теории: метод частотных параметров и анализ устойчивости систем с различными объектами:

- дискретными,
- нестационарными,
- нелинейными.

В приложениях к главам 5 и 6 положено начало метода частотных параметров для дискретных систем.

Частотные параметры нестационарных объектов являются функциями времени, и поэтому для их экспериментального определения следует использовать локальный фильтр из главы 5.

Для нелинейных объектов, правые части которых (в форме Коши) разлагаются в ряд Тейлора, можно использовать в качестве испытательного воздействия совокупность экспонент  $e^{\lambda_i t}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Это позволяет найти «частотные  $\omega$ -индексы» для таких объектов с неизвестными параметрами.

Таким образом, открывается широкое поле дальнейших исследований.

## Примечания и литературные указания

### К части III

**Введение.** Эта часть служит началом натурной теории управления. Она содержит натурные критерии устойчивости и натуральный метод синтеза – метод частотных параметров. Эти результаты развиваются на дискретный (п. 5.П.2, § 6.П) и многомерный (гл. 11) случаи. Можно указать пути их развития для нестационарных и нелинейных систем. Всё это составляет частотное направление натурной теории. Наряду с этим целесообразно развивать нечастотную натурную теорию, которая опирается на эксперименты с объектом, возбуждённым некоторой совокупностью сигналов, обладающих свойством ортогональности, но не являющихся гармоническими.

### К главе 6

§ 6.1. п. 6.1.3. Теорема 6.1.1 доказана в [1э].

§ 6.3. п. 6.3.1. Доказательство утверждения 6.3.1 приведено в [1ц].

п. 6.3.4. Утверждение 6.3.2 доказано в [1ц].

§ 6.П. п. 6.П.1. – Подробное изложение части статьи [1э].

### К главе 7

§ 7.1. п. 7.1.1. Теорема 7.1.1 доказана в [1ц].

п. 7.1.4. Теорема 7.1.2 доказана в [1ч].

§ 7.2. п. 7.2.4. Следует работе [69в].

§ 7.3. п. 7.3.1 – п. 7.3.4. Утверждения 7.3.1 и 7.3.2, а также критерии устойчивости 7.3.1 и 7.3.2 доказаны в статье [1ц].

п. 7.3.5. Погрешности вычислений приводят к проблеме выбора испытательных частот. Постановка этой проблемы и подход к её решению содержатся в статье [69б].

Отметим, в заключение, что в этой главе, в отличие от предыдущей, не рассматриваются дискретные объекты. Это вызвано принципиальными трудностями. Дело в том, что условие оптимальности в частотной форме (на котором основано вычисление частотного оптимального управления) для дискретных систем содержат [1ж], [1ш] слагаемые, зависящие от значения функционала оптимизации при оптимальном движении системы. Это значение неизвестно, и поэтому неясно, как обобщить результаты этой главы на дискретный случай.

## К главе 8

**Введение.** Поясним термин «декларативный» в названии регулятора. Этот термин широко используется в теории искусственного интеллекта [58], где различают два способа представления знаний – декларативный и процедуральный, отражающие различие между «знать что (делать)» и «знать как (делать)». Термин «декларативный» происходит от английского слова *declare* (объявлять, заявлять, провозглашать).

Системы, рассматриваемые в этой главе, относятся к системам с пробным (поисковым, испытательным) гармоническим воздействием. Такие системы активно исследовались в 60-х годах [78a], [31a]. Дополнительные движения в таких системах, вызванные пробным сигналом, привели к развитию беспоисковых самонастраивающихся (адаптивных) систем, и в частности, систем с эталонной моделью [56].

Однако затем было показано, что для сходимости процессов в беспоисковых адаптивных системах с эталонной моделью необходимо «достаточно богатое» внешнее воздействие на систему. Такое внешнее воздействие должно, в частности, содержать  $n$  частот. Эти обстоятельства и вызвали возврат к пробным (испытательным) воздействиям.

§ 8.1. п. 8.1.6. Параметры модели (8.1.39) и задающего воздействия (8.1.42) взяты из работы [101].

п. 8.1.7. Рассуждения о дуальном характере управления при неопределённых параметрах, приведённые в начале этого подраздела, следуют [74].

§ 8.2. п. 8.2.1. Идея частотного адаптивного регулятора ЧДР-2 была предложена в докладе [1y], более подробное изложение которого приведено в [1x]. В этих работах для определения частотных параметров использовался резонансный фильтр. П.А. Трефилов [69a] предложил заменить его фильтром Фурье, и тогда алгоритм принял описываемый вид. Пример 8.2.1 имеется в диссертации [69в].

п. 8.2.3, п. 8.2.4. Описание экспериментальной установки и результаты экспериментальных исследований взяты из [69a], при этом название ЧАР-1 заменено на ЧДР-2.

§ 8.3. п. 8.3.2. Гипотеза квазистационарности (хотя и в несколько ином смысле, чем в определении 8.3.2) широко используется [56] в теории адаптивного управления.

## К части IV

### К главе 9

§ 9.1. п. 9.1.4 – п. 9.1.6, п. 9.1.8. Следуют книге [100]. Двухкомпонентный изме-

ритель (датчик) угловой скорости, приведённый в примере 9.1.4, рассматривался как объект управления в работе [4].

§ 9.2. п. 9.2.1. Введённое здесь понятие качества и точности многомерных систем являются обобщением этих понятий одномерных систем. Они, так же как и задачи п. 9.2.1, следуют книге [1ш, гл. 1].

§ 9.3. п. 9.3.1 – п. 9.3.5, п. 9.3.7, п. 9.3.8. – Краткое изложение материалов книги [1ш]. Пример 9.3.1 построил Ю.К. Тимофеев.

§ 9.П. п. 9.П.1 – п. 9.П.3. Следуют книге [100], за исключением п. 9.П.2.4, где приведена столбцово-правильная форма «вход-выход», полученная в [1е].

## К главе 10

§ 10.1. п. 10.1.1. Передаточные матрицы многомерных систем вводятся, например, в [29]. Объект (10.1.8), (10.1.9) взят из работы [89] при  $b_{12} = 3$ . Утверждение 10.1.1, выражающее характеристический полином через её передаточные матрицы, было впервые доказано [1д], [84]. Соотношение (10.1.30) было получено в [1д] для случая, когда регулятор описывается алгебраическим соотношением [в (10.1.2) отсутствует дифференциальное уравнение]. Соотношение (10.1.31) получено в [84].

п. 10.1.2. Понятие обобщённой передаточной функции введено в [1д]. По годографу АФЧХ, соответствующего обобщённой передаточной функции, можно судить об устойчивости многомерной системы, используя критерий Найквиста. Впервые это было сделано в работах [1д], [91а].

п. 10.1.3. Изложение следует [2]. Пример 10.1.5 построил В.Н. Честнов.

§ 10.2. п. 10.2.1. Вводимые понятия запасов устойчивости [1д] и радиуса запасов устойчивости являются простым обобщением понятий одномерных систем. Уравнения (10.2.10), (10.2.11) примера 10.2.1, который построил В.Н. Честнов, взяты из [89].

п. 10.2.2. Определение 10.2.3 следует работе [1д]. Пример 10.2.2 построил В.Н. Честнов.

п. 10.2.3. Многосвязные запасы устойчивости приведены в [97].

§ 10.3. п. 10.3.1. Теорема 10.3.1 доказана в [1д]. Теорема об определителе суммы двух матриц, используемая в 10.Д.2, содержится в [14]. Теорема 10.3.2 доказана в [2], а теорема 10.3.3 – в [97].

п. 10.3.2. Пример 10.3.1 построил В.Н. Честнов.

**п. 10.3.3.** Утверждение 10.3.2 является простым развитием теоремы 10.3.1.

О возможности малых запасов устойчивости в системах, оптимальных в смысле функционала (10.3.30), говорится в работе [89], откуда и взят пример 10.3.2.

**п. 10.3.4.** Теорема 10.3.4 доказана в [13], теорема 10.3.5 является очевидным развитием теоремы 10.3.3.

**§ 10.П. п. 10.П.1 – п. 10.П.3.** Изложенное опирается на теорию чувствительности и сравнения, развитые в работах [81], [55]. Определения 10.П.1 и 10.П.2 следуют [1п]. Теорему Парсеваля можно найти в [75]. Определение 10.П.3 и теорема 10.П.2 приведены в [81] и [55].

**п. 10.П.4 – п. 10.П.5.** Сингулярные числа комплексных матриц хорошо известны в математике. Понятие наименьшего сингулярного значения матрицы возвратной разности по управляемым (регулируемым) переменным введено в [99].

## К главе 11

**§ 11.Д. п. 11.Д.5.** Теорема об условиях единственности решения совместной системы алгебраических уравнений приведена в [14, п. 6.19].

**п. 11.Д.6.** Лемма об управляемости объекта с любой обратной связью по состоянию доказана в [71, гл. 2].

## Литература

- [1] Александров А.Г. а) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гироскопа. Автоматика и телемеханика, №11, 1967, 39-49 с.; б) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гироскопа, установленной на подвижном основании. Автоматика и телемеханика, №12, 1967, 16-25 с.; в) К обратной задаче синтеза оптимальных регуляторов. Известия АН СССР «Техническая кибернетика», №4, 1967, 115-122 с.; г) Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. Автоматика и телемеханика, №9, 1969, 176-181 с.; д) Частотные свойства оптимальных линейных систем с несколькими управлениями. Автоматика и телемеханика, №12, 1969, 12-17 с.; е) Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. II., Автоматика и телемеханика, №2, 1972, 17-29 с.; ж) Построение дискретных систем управления с заданными свойствами. Автоматика и телемеханика, №9, 1973, 57-66 с.; з) Свойства аналитически сконструированных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1975, 5-11 с.; и) Степень грубости и частотные показатели качества автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып.1, Саратов, СПИ, 1976, 14-26 с.; к) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №3, 1977, 37-41 с.; л) Степень грубости систем с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, 105-118 с.; м) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Неполная степень наблюдаемости. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №11, 1978, 34-39 с.; н) Аналитический синтез регуляторов по заданным показателям качества переходных процессов. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 3, Саратов, СПИ, 1978, 21-38 с.; о) Построение функционала качества в задаче аналитического конструирования регуляторов. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №4, 1980.; п) Свойства аналитически сконструированных систем нестационарных линейных систем. Автоматика и телемеханика, №3, 1980, 5-12 с.; р) Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1980, 3-14 с.; с) Аддитивная компенсация в многомерных системах с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1981, 68-81 с.; т) Аналитический синтез регуляторов нестационарных систем автоматического регулирования. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 1983, №3220.; у) Частотный алгоритм адаптивного управления. Всесоюзная конференция «Теория адаптивных систем и её применение». Тезисы докладов и сообщений. М.-Л. 1983.; ф) О принципах построения систем анализа динамики и синтеза устройств управления (САПР

- САУ). В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, Саратов, СПИ, 1982, 123-136 с.; х) Частотный алгоритм адаптивного управления. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 8-13 с.; ц) Аналитический синтез регуляторов для объектов, задаваемых частотными характеристиками. Автоматика и телемеханика, №7, 1985, 45-55 с.; ч) Аналитическое конструирование регуляторов по частотным характеристикам объекта. Автоматика и телемеханика, №9, 1986, 163-167 с.; ш) Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986, 272 с.; щ) Конечно-частотные критерии устойчивости систем с неопределёнными параметрами. Автоматика и телемеханика, №7, 1988, 26-37 с.; ы) Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989, 263 с.; э) Метод частотных параметров. Автоматика и телемеханика, №12, 1989, 1-14 с.
- [2] Александров А.Г., Небалуев Н.А. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. 1. Автоматика и телемеханика, №12, 1971, 12-20 с.
- [3] Александров А.Г., Подчукаев В.А. К обратной задаче аналитического синтеза с переменными параметрами. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №3, 1975, 25-29 с.
- [4] Александров А.Г., Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Синтез регуляторов двухкомпонентного измерителя угловой скорости на основе трехстепенного гироскопа. Изв. АН СССР «Механика твердого тела», №4, 1975, 30-38 с.
- [5] Александров А.Г., Солдунов В.А. Синтез регуляторов по заданной точности при действии ограниченных внешних возмущений. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 9.09.1983, №2227 пр Д83.
- [6] Андреев Ю.Н. а) Управление конечномерными объектами. М.: Наука, 1976, 424 с.; б) Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Автоматика и телемеханика, №3, 1977.
- [7] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [8] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. ДАН СССР, 1937, 14, 247.
- [9] Булгаков Б.Н. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, Докл. АН СССР, т. 51, №5, 1946, 339-342 с.

- [10] Беллман Р., Калаба Р. Обратная задача в динамическом программировании и автоматическом управлении. Сб. перев. «Механика», №6, 1964.
- [11] Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1976, 992 с.
- [12] Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ИЛ, 1948.
- [13] Вавилов А.А., Солодовников А.И. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. Л.: 1963.
- [14] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.
- [15] Воронов А.А. а) Устойчивость управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979, 336 с.; б) Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980, 309 с.
- [16] Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 6, 1963.
- [17] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1954.
- [18] Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969, 512 с.
- [19] Горовиц А.М. Синтез систем с обратной связью. М.: Советское радио, 1970, 600 с.
- [20] Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. М.: Радио и связь, 1984.
- [21] Дас П. К прямой и обратной задачам оптимизации квадратичных функционалов в линейных автономных системах. Автоматика и телемеханика, №9, 1966, 11-18 с.
- [22] Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974, 288 с.



- [23] Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981, 246 с.
- [24] Деруссо П., Рой Р., Клодз У. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970, 620 с.
- [25] Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967, 336 с.
- [26] Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1973, 607 с.
- [27] Калман Р.Е. Когда линейная система управления является оптимальной. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., серия Д, №1, Мир, 1964.
- [28] Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., «Техническая механика», серия Д, т. 83, 1961, 95-107 с.
- [29] Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления. М.: Наука, 1966, 416 с.
- [30] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 650 с.
- [31] Красовский А.А. а) Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Наука, 1963, 468 с.; б) Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1967.; в) Системы автоматического управления полётом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973, 558 с.
- [32] Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977, 272 с.
- [33] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [34] Кузовков Т.Н. а) Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М.: Оборонгиз, 1960, 446 с.; б) Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.

- [35] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977, 392 с.
- [36] Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике. Киев. Гос. изд-во технич. литературы. 1963.
- [37] Кухтенко В.И. Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик. М.: Машиностроение, 1970.
- [38] Ларин Б.В. Методы решения алгебраических уравнений Риккати. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, №2, 1983.
- [39] Ларин В.Б., Сунцев В.Н. О задаче аналитического конструирования. Автоматика и телемеханика, №2, 1968.
- [40] Лётов А.М. а) Аналитическое конструирование регуляторов, I. Автоматика и телемеханика, №4, 1960, 436-441 с.; б) Аналитическое конструирование регуляторов, II. Автоматика и телемеханика, №5, 1960, 561-568 с.; в) Аналитическое конструирование регуляторов, III. Автоматика и телемеханика, №6, 1960, 661-665 с.; г) Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, №4, 1961, 425-435 с.; д) Теория оптимального управления. Тр. II Конгресса ИФАК, т. Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, 7-38 с.; е) Динамика полёта и управления, М.: Наука, 1969, 360 с.
- [41] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
- [42] Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. Изд. АН СССР, 1949.
- [43] Мееров М.В. а) Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Физматгиз, 1959.; б) Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.
- [44] Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973, 440 с.
- [45] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного синтеза. М.: Наука, 1981, 488 с.

- 
- [46] Морозовский В.Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970.
- [47] Надеждин П.В. О практической неустойчивости (негрубости) систем. Автоматика и телемеханика, №5, 1973.
- [48] Нарендра К.С., Валавани Л.С. Устойчивые адаптивные наблюдения и управления. ТИИЭР, т. 64, №8, 1976. (перев. с англ.)
- [49] Нгуен Тхьонг Нго. Чувствительность систем автоматического управления (обзор). Автоматика и телемеханика, №5, 1971, 53-81 с.
- [50] Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчёта. М.: Физматгиз, 1961.
- [51] Ольденбургер Р. Изображение частотных характеристик, стандарты и расчётные критерии. В кн. Частотные методы в автоматике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957, 21-62 с.
- [52] Основы автоматического регулирования (под ред. В.В. Солодовникова). М.: Машгиз, 1954.
- [53] Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987, 480 с.
- [54] Палк К.И. Системы управления механической обработкой на станках. Л.: Машиностроение, 1984, 215 с.
- [55] Перкинс В., Крус Д. Операторы чувствительности для линейных систем с переменными параметрами. В кн. Чувствительность автоматических систем. М.: Наука, 1968, 45-50 с.
- [56] Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972, 260 с.
- [57] Петров Ю.П. Синтез устойчивых систем управления по среднеквадратичным критериям качества (обзор). Автоматика и телемеханика, №7, 1983.
- [58] Попов Э.В. Общение с ЭВМ на естественном языке. М.: Наука, 1982.

- [59] Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих установках. Автоматика и телемеханика, №6, 1963.
- [60] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. Л.: Энергия, 1969, 208 с.
- [61] Розенвассер Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления, М.: Наука, 1977, 344 с.
- [62] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971, 396 с.
- [63] Садомцев Ю.В. Аналитический синтез регуляторов при случайных возмущениях. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, вып. 3, 1978, 39-57 с.
- [64] Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980, 400 с.
- [65] Смагина Е.М. Нули линейных многомерных систем. Определение, классификация, применение. Автоматика и телемеханика, №12, 1985, 5-33 с.
- [66] Солдунов В.А. Аналитический синтез регуляторов при неопределённых внешних возмущениях, Диссерт. на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1985.
- [67] Справочник по теории автоматического управления (под ред. Красовского А.А.). М.: Наука, 1987, 712 с.
- [68] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования (под ред. Солодовникова В.В.). М.: Машиностроение, 1967-1969, 2418 с.
- [69] Трефилов П.А. а) Частотный адаптивный регулятор ЧАР-1. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 36-42 с.; б) О выборе испытательных воздействий в частотном адаптивном регуляторе. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1985, 60-69 с.; в) Разработка и исследование частотных алгоритмов адаптивного управления. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. 1987.
- [70] Трефилов П.А., Шмыков И.Г. Исследование двух способов адаптивного управления. В сб. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1985.

- [71] Уонем М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980, 376 с.
- [72] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.
- [73] Хлебалин Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта управления. Диссертация на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1984.
- [74] Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах, М.: Наука, 1968, 460 с.
- [75] Чанг Ш.С.Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964, 440 с.
- [76] Чеботарёв Н.Г. Об одной математической задаче, возникшей в связи с оценкой отклонений регулируемой переменной, если возмущающая сила ограничена по модулю. Автоматика и телемеханика, №4, 1948, т. 9, 331-334 с.
- [77] Честнов В.Н. О возможной неустойчивости управляющих систем и синтез регуляторов с учётом параметрических возмущений. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1984.
- [78] Эйкхофф П. а) Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975, 684 с.; б) Современные методы идентификации систем (под ред. Эйкхоффа П.). М.: Мир, 1983, 400 с.
- [79] Якубович В.А. а) Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. ДАН СССР, т. 6, 1966, 1308-1311 с.; б) К теории адаптивных систем. ДАН СССР, т. 1827, №3, 1968, 518-521 с.
- [80] Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear systems optimisation with prescribed degree of stability. Proc. Inst. Eng., 1969, 116, №2.
- [81] Cruz J.B., Perkins Jr.K.R. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design. IEEE Trans. on Autom. Control, 1964, Vol. AC-9, №3.
- [82] Doyle J.C., Stein G. Robustness With Observers. IEEE Trans. Autom. Control, 1979, Vol. AC-24, №4, p.p. 607-611.

- [83] Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical – Modern Synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, Vol. AC-26, №1, p.p. 4-16.
- [84] Hsu C.H., Chen C. A proof of the stability of multivariable feedback system. *Proc. IEEE(Lett)*, Vol 56, p.p. 2061-2062, 1968.
- [85] Jameson A., Kreindler E. Inverse problem of linear optimal control. *SIAM. J. Control*, Vol. AC-14, 1969, p.p. 1-19.
- [86] Kleinman O.I. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1968, Vol. AC-13, №4, p. 114.
- [87] Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control. *Bullet. Soc., Mat. Mech*, 1960, Vol. 5, №1, p.p. 102-119.
- [88] Leake R.J. Return difference Bode diagram for optimal system design. *IEEE Trans. Autom Control*, 10., 3, p.p. 342-344, 1965.
- [89] Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M. Robustness. Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Design. *IEEE Tran. Autom. Control*, 1981, Vol AC-26, №1, p.p. 75-92.
- [90] Luenberger D.G. Observing the state of linear system. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-11, №2, 1966, p.p. 190-197.
- [91] MacFarlane A.G.I. a) Two necessary conditions in the frequency domain for the optimality of a multiple-input linear control systems. *Proc. IEEE*, 117(2), 1970, p.p. 464-466.; б) The Development of Frequency-Response Methods in Automatic Control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-24, №2, April, 1979.
- [92] Narendra K.S., Valavani L.S. Stable Adaptive Controller Design-Direct Control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-23, №4, 1978.
- [93] Nyquist H. Regeneration theory Bell system. *Tech. J.*, January, 1932.
- [94] Park H., Seborg D.E. Eigenvalue Assignment using Proportional-Integral Feedback *International Journal of Control*, September, 1974. p.p. 517-523.
- [95] Porter B., Grossely T.R. *Modal Control. Theory and Applications*, London, 1972, 233 p.

- [96] Rosenbrock H.H. Distinctive problems of process control. Chem. Eng. Progr., Vol. 58, №9, 1962, p.p. 43-50.
- [97] Safonov M.G., Athans M. Gain and phase margining for multi loop LQG regulators. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, Vol. AC-22, №2, p.p. 173-179.
- [98] Silverman L.M. Inversion of Multivariable Linear System. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-14, 1969, p.p. 270-276.
- [99] Stein G., Dayle I.C. Singular values and feedback: Design examples. Proc. 1978., Allerton Conf. Urbana., IL, 1978.
- [100] Wolovich W.A. Linear Multivariable System. Springer-Verlag, 1974, 358 p.

Александров Альберт Георгиевич

**Частотная теория автоматического управления  
(частотное управление)**

*Учебное пособие  
В 2-х книгах*

*Книга 2*

Редактор: Г.В.Атмашкина

---

Уч.-изд.л. 14,18

Тираж 100 экз.

Цена "С"

Регистрационный №

---

Электростальский политехнический институт (филиал)  
Федерального государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования «Национальный  
исследовательский технологический университет МИСиС»  
144000, Московская обл., г.Электросталь,  
ул. Первомайская, д.7