

Федеральное агентство по образованию

---



ЭЛЕКТРОСТАЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(филиал)  
Федерального государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский технологический  
университет МИСиС»

Александров А.Г.

**Частотная теория  
автоматического управления  
(частотное управление)**

*Учебное пособие*

*Книга 1*

---

ЭЛЕКТРОСТАЛЬ 2010 г.

УДК 681.51  
ББК 32.965

А-46 Александров А.Г. Частотная теория автоматического управления (частотное управление): Учебное пособие. В 2 кн. – Кн.1 – Электросталь: ЭПИ МИСиС, 2010. – 320 с.

### Аннотация

Учебное пособие посвящено новому направлению в автоматическом управлении объектами с неопределёнными параметрами. Оно исходит из частотных параметров объекта, получаемых экспериментально.

Построен метод частотных параметров для синтеза обычных и адаптивных регуляторов, обеспечивающих требуемую точность регулирования и слежения при ограниченных внешних возмущениях.

Изложение теории носит конструктивный характер и завершается процедурами проектирования регуляторов.

Учебное пособие предназначено для изучения курса «Идентификация динамических систем» студентами специальности «Автоматизация технологических процессов и производств», а также для выполнения КНИР и дипломного проектирования.

© Электростальский политехнический институт (филиал)  
Федерального государственного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский технологический  
университет МИСиС», 2010

## Содержание

Предисловие .....	10
<b>Часть I. Введение в частотное управление .....</b>	<b>12</b>
<b>Глава 1. Проблемы управления при неопределённых параметрах объекта и частотное управление .....</b>	<b>14</b>
1.1. Модели объектов .....	15
1.1.1. Типы объектов .....	15
1.1.2. Внешние возмущения и помехи .....	15
1.1.3. Свойства объектов .....	16
1.1.4. Границы параметров* .....	17
1.1.5. Многомерные объекты. Виды объектов .....	18
1.1.6. Структурные показатели и структурные свойства объектов .....	19
1.1.7. Регулирование и слежение .....	20
1.1.8. Переходные и установившиеся процессы .....	21
1.1.9. Методы синтеза регуляторов и уравнение качества .....	22
1.2. Частотное управление .....	26
1.2.1. Управление при неизвестных параметрах объекта .....	26
1.2.2. Частотные параметры и их определение .....	27
1.2.3. Частотный метод идентификации .....	28
1.2.4. Метод ЛАЧХ .....	29
1.2.5. Метод частотных параметров .....	30
1.3. Частотное адаптивное управление .....	32
1.3.1. Пуск и останов объекта .....	32
1.3.2. Несамотождественные объекты .....	34
1.3.3. Структура адаптивного регулятора .....	34
1.3.4. Алгоритм частотного адаптивного управления .....	35
1.3.5. Многорежимные самотождественные объекты .....	37
1.3.6. Многорежимные несамотождественные объекты .....	38
<b>Приложения к главе 1 .....</b>	<b>40</b>
<b>1.П. Параметрические возмущения систем автоматического управления .....</b>	<b>40</b>
1.П.1. Параметрические возмущения. Их уровни .....	40
1.П.2. Явление параметрической (аддитивной) компенсации .....	42
1.П.3. Неявная параметрическая (аддитивная) компенсация .....	45
1.П.4. Возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезируемых на основе методов пространства состояния .....	46
1.П.5. Системы с непосредственным устройством восстановления .....	46
1.П.6. Аналитически сконструированные системы .....	49
1.П.7. Модальное управление .....	51



<b>Глава 3. Модальное управление</b> .....	<b>101</b>
3.1. Стабилизация объектов второго вида .....	101
3.1.1. Постановка задачи .....	101
3.1.2. Процедура решения.....	102
3.1.3. Существование решения .....	103
3.1.4. Условия единственности .....	104
3.1.5. Структурное модальное управление .....	106
3.1.6. Реализация структурного управления .....	107
3.2. Регулирование.....	108
3.2.1. Постановка задачи .....	108
3.2.2. Процедура решения.....	109
3.2.3. Уравнение качества при ступенчатых и гармонических возму- щениях .....	110
3.2.4. Уравнение качества грубых регуляторов.....	112
3.2.5. ПИД-регулятор* .....	114
3.2.6. Анализ структурной грубости* .....	115
3.3. Слежение .....	117
3.3.1. Постановка задачи .....	117
3.3.2. Последовательное задающее воздействие.....	119
3.3.3. О классической задаче регулирования* .....	120
3.3.4. Принцип разделения .....	121
3.3.5. Параллельное задающее воздействие* .....	123
3.3.6. Последовательно-параллельное задающее воздействие* .....	123
3.3.7. Компенсационная схема (1-й вариант)* .....	124
3.3.8. Компенсационная схема (2-й вариант)* .....	126
3.3.9. Влияние внешних возмущений на компенсационную схему* .....	126
3.4. Обратная связь по состоянию .....	127
3.4.1. Постановка задачи .....	127
3.4.2. Каноническая форма .....	128
3.4.3. Построение управления .....	130
3.4.4. Проблема синтеза .....	132
3.4.5. Процедура синтеза .....	133
3.4.6. Следящие системы .....	134
3.4.7. Система с эталонной моделью* .....	135
3.4.8. Анализ структурной грубости* .....	137
<b>Приложения к главе 3</b> .....	<b>139</b>
<b>3.П.1. Системы с наблюдателями</b> .....	<b>139</b>
3.П.1.1. Восстановление (наблюдение) переменных состояния объекта управления .....	139

3.П.1.2. Следящая система с наблюдателем .....	140
3.П.1.3. Наблюдатель пониженного порядка .....	141
3.П.1.4. Передаточная функция разомкнутой системы с наблюдателем .....	143
3.П.1.5. О негрубости систем с наблюдателями .....	144
3.П.1.6. Описание компенсационной схемы в пространстве состояний .....	145
3.П.1.7. Компенсационные схемы и системы с наблюдателями .....	146
<b>3.П.2. Построение уравнения качества .....</b>	<b>147</b>
3.П.2.1. Постановка задачи .....	147
3.П.2.2. Выбор корней характеристического полинома .....	148
3.П.2.3. Оценка максимального отклонения .....	150
Доказательства к главе 3 .....	152
<b>3.Д. Доказательства теорем и утверждений .....</b>	<b>152</b>
3.Д.1. Доказательство теоремы 3.1.1 .....	152
3.Д.2. Доказательство теоремы 3.1.2 .....	155
3.Д.3. Доказательство утверждения 3.1.1 .....	157
3.Д.4. Доказательство теоремы 3.4.1 .....	157
3.Д.5. Доказательство утверждения 3.П.1 .....	159
3.Д.6. Доказательство утверждения 3.П.2 .....	159
3.Д.7. Доказательство утверждения 3.П.3 .....	160
3.Д.8. Доказательство утверждения 3.П.4 .....	160
3.Д.9. Доказательство утверждения 3.П.5 .....	161
<b>Заключение к главе 3 .....</b>	<b>163</b>
<b>Глава 4. Оптимальное управление .....</b>	<b>165</b>
4.1. Аналитическое конструирование регуляторов .....	165
4.1.1. Процедура АКОР .....	165
4.1.2. Критерий обобщённой работы .....	169
4.1.3. Объекты второго вида .....	171
4.1.4. Реализуемость .....	172
4.1.5. Эталонная модель* .....	174
4.2. Частотные свойства оптимальных систем .....	176
4.2.1. Условие оптимальности в частотной форме .....	176
4.2.2. Запасы устойчивости .....	177
4.2.3. Объекты второго вида .....	179
4.2.4. Эталонная модель* .....	180
4.3. Точность и качество .....	181
4.3.1. Установившиеся ошибки (ступенчатые воздействия) .....	181
4.3.2. Переходные процессы .....	183
4.3.3. Время регулирования .....	185
4.3.4. Гармонические воздействия .....	187

4.3.5.	Показатель колебательности	188
4.3.6.	Частота среза (полоса пропускания)	189
4.4.	Синтез регуляторов	190
4.4.1.	Объекты первого вида	190
4.4.2.	Объекты второго вида	195
4.4.3.	$b(s) \neq 1, m(s) \neq 1$ . Уравнение качества	197
4.4.4.	Ограничение полосы пропускания	199
4.4.5.	Следящие системы	200
4.4.6.	ПИ-регулятор*	202
4.4.7.	Построение структурно-грубых регуляторов*	203
4.4.8.	Условия структурной грубости для одного вида структурных возмущений*	204
4.5.	Обратная задача АКОР	205
4.5.1.	Функционал общего вида	205
4.5.2.	Запасы устойчивости	207
4.5.3.	Обратная задача	208
4.5.4.	Существование решения	209
4.5.5.	Процедура	211
4.5.6.	Объекты второго вида	214
	<b>Доказательства к главе 4</b>	<b>216</b>
<b>4.Д.</b>	<b>Доказательство теорем и утверждений</b>	<b>216</b>
4.Д.1.	Доказательство теоремы 4.1.2	216
4.Д.2.	Доказательство теоремы 4.2.1	220
4.Д.3.	Доказательство утверждения 4.2.4	221
4.Д.4.	Доказательство утверждения 4.4.1	222
4.Д.5.	Доказательство утверждения 4.4.3	223
4.Д.6.	Доказательство утверждения 4.4.4	225
4.Д.7.	Доказательство утверждений 4.4.5 и 4.4.6	226
4.Д.8.	Доказательство теоремы 4.5.1	228
	<b>Заключение к главе 4</b>	<b>231</b>
	<b>Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы</b>	<b>233</b>
	<b>Глава 5. Частотные параметры</b>	<b>234</b>
5.1.	Частотная передаточная функция	234
5.1.1.	Определения	234
5.1.2.	Смещённая частотная передаточная функция	237
5.1.3.	Модель системы разомкнутой на входе объекта*	238
5.1.4.	Модель системы разомкнутой на входе регулятора*	239
5.1.5.	Стабилизированный частотный передаточный вектор	240
5.1.6.	Стабилизированная частотная передаточная функция	241

5.2. Частотные параметры ( $\omega$ -индексы) .....	242
5.2.1. Реакция на испытательное воздействие .....	242
5.2.2. Определение частотных параметров ( $\omega$ -индексов) .....	243
5.2.3. Стабилизированные $\omega$ -индексы (1-й способ вычисления) .....	246
5.2.4. Частотные параметры входа и выхода при ( $\lambda = 0$ ) .....	247
5.2.5. Частотные параметры входа и выхода при ( $\lambda \neq 0$ ) .....	249
5.2.6. Функции перехода к частотным параметрам* .....	250
5.2.7. Время сходимости к частотным параметрам* .....	252
5.2.8. Частотные параметры разомкнутой системы* .....	254
5.3. Фильтр Фурье .....	255
5.3.1. Схема эксперимента .....	255
5.3.2. Алгоритм фильтрации .....	257
5.3.3. Время фильтрации .....	258
5.3.4. Влияние внешних возмущений и помех .....	259
5.3.5. Фильтрация при параллельном испытательном воздействии ....	261
5.3.6. Время фильтрации при внешних возмущениях .....	263
5.3.7. Учёт ограничений на управление и измерение* .....	264
5.3.8. Управление генератором .....	266
5.3.9. Алгоритм с паузами .....	267
5.3.10. Последовательные пары испытаний .....	268
5.4. Локальный фильтр* .....	270
5.4.1. Алгоритм для устойчивых объектов .....	270
5.4.2. Алгоритм для неустойчивых объектов .....	271
5.4.3. Сравнение с фильтром Фурье .....	272
5.4.4. Метод наименьших квадратов .....	273
5.4.5. Идентификация .....	275
<b>Приложения к главе 5 .....</b>	<b>276</b>
<b>5.П.1. Формула Коши .....</b>	<b>276</b>
5.П.1.1. Вид формулы .....	276
5.П.1.2. Нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (5.П.3) .....	277
5.П.1.3. Доказательство формулы Коши .....	278
<b>5.П.2. Дискретные объекты .....</b>	<b>280</b>
5.П.2.1. Частотные параметры .....	280
5.П.2.2. Уравнения «вход-выход» .....	281
5.П.2.3. Дискретный фильтр Фурье .....	283
5.П.2.4. Рекуррентный фильтр Фурье .....	284
<b>Доказательства к главе 5 .....</b>	<b>285</b>
<b>5.Д. Доказательства теорем и утверждений .....</b>	<b>285</b>



---

5.Д.1. Доказательство утверждения 5.2.1 .....	285
5.Д.2. Доказательство утверждения 5.2.2 .....	287
5.Д.3. Доказательство теоремы 5.2.1 .....	288
5.Д.4. Доказательство утверждения 5.3.2 .....	292
5.Д.5. Доказательство утверждения 5.3.3 .....	293
5.Д.6. Доказательство утверждения 5.3.4 .....	294
5.Д.7. Доказательство утверждения 5.4.2 .....	296
5.Д.8. Доказательство теоремы 5.4.1 .....	297
5.Д.9. Доказательство утверждения 5.П.1 .....	298
<b>Заключение к главе 5 .....</b>	<b>299</b>
<b>Примечания и литературные указания .....</b>	<b>301</b>
К части I .....	301
К главе 1 .....	303
К главе 2 .....	304
К части II .....	305
К главе 3 .....	306
К главе 4 .....	307
К части III .....	309
К главе 5 .....	309
<b>Литература .....</b>	<b>310</b>

## Предисловие

В последние годы резко сократилось время проектирования объектов и устройств управления. Это результат использования САПР при проектировании объектов и унифицированных элементов в устройствах управления – измерительных устройств с цифровым выходом, контроллеров, исполнительных устройств с цифровым входом. Такое сокращение приводит к тому, что часто объект и устройство управления готовы в натуре, а математическая модель объекта ещё не создана и, следовательно, нельзя построить алгоритм управления.

Наличие объекта и устройств управления позволяет провести их испытания, результаты которых могут быть использованы для построения алгоритма управления. Это делает актуальной *натурную теорию управления*, исходным для которой служат не математические модели объектов, а результаты их экспериментальных исследований.

Частотное управление – это направление натурной теории управления, когда объект испытывается гармоническими входными сигналами.

В книге рассматриваются системы, которые мало отклоняются от состояния равновесия и поэтому объект описывается линейными дифференциальными уравнениями. Структура и параметры этих уравнений неизвестны, но объект доступен для экспериментирования. Он возбуждается испытательным воздействием, состоящим из конечного числа гармоник (частот). Сигналы с выходов объекта подаются на фильтр Фурье. Каждой из входных гармоник соответствует на выходе фильтра Фурье два числа. Совокупность этих чисел образуют частотные параметры объекта, которые служат исходными данными для синтеза алгоритмов управления.

Книга состоит из четырёх частей. Собственно частотное управление излагается 3-й и 4-й частях. Хотя 2-я часть и главы 9, 10 четвёртой части носят подготовительный характер, они имеют самостоятельное значение, поскольку содержат важные результаты для синтеза регуляторов (по требованиям к точности управления при ограниченном внешнем возмущении, грубости, а также условиям реализуемости регуляторов) при известных параметрах объекта.

Излагаемая теория частотного управления носит конструктивный характер и может непосредственно использоваться для проектирования.

Стремление выделить конструктивную часть теории привело к тому, что основной текст содержит процедуры синтеза регуляторов, анализа устойчивости систем и экспериментального определения частотных параметров. Развитие этих процедур, анализ грубости и различные преобразования помещены в разделах, помеченных звёздочкой, а также в приложениях к каждой главе, обозначаемых с использованием буквы П. Доказательства утверждений, на которых базируются методы расчёта, приведены в конце соответствующих глав. Они содержат в своих обозначениях букву Д.

Для понимания излагаемого материала необходимо знание стандартного втузовского курса по теории автоматического управления.

Изложение построено так, что оно будет доступно и для математиков. Для этой цели подробно излагаются классические понятия частотной теории регулирования и методы экспериментального определения частотных параметров.

Книга адресована инженерам и учёным, занимающимся разработкой и исследованием современных систем управления.

Первые найдут здесь новые способы построения и методы расчёта регуляторов для объектов с неопределёнными параметрами, вторые – предмет для дальнейшего исследования.

Для того чтобы не прерывать изложения, в тексте отсутствуют ссылки на литературу. Они приводятся в примечаниях и литературных указаниях в конце книги. Там же помещён список литературы. Он далёк от полноты. Это объясняется тем, что содержание книги касается многих разделов автоматического управления (частотной теории регулирования, фильтрации, оптимального, модального и адаптивного управления, теории чувствительности и т.д.), поэтому библиография отражает лишь направления исследований по автоматическому регулированию, которые имеют прямую связь с содержанием книги.

---

# Часть I. Введение в частотное управление

Объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, полностью характеризуются параметрами (коэффициентами) этих уравнений.

Частотные параметры служат столь же исчерпывающей характеристикой объекта, однако, в отличие от коэффициентов уравнений, они являются непосредственным результатом эксперимента. Число коэффициентов и частотных параметров определяется структурными показателями объекта (числом измеряемых и управляющих переменных, размерностью пространства состояний и т.п.).

Адекватность этих двух видов характеристик даёт основание полагать, что можно построить теорию управления, исходящую из частотных параметров, параллельную обычной теории управления, которая предполагает известными коэффициенты модели объекта. Очертим круг проблем частотного управления, который рассматривается в книге.

1. Анализ устойчивости.
2. Синтез стабилизирующего управления.
3. Синтез регуляторов, обеспечивающих требуемую точность при ограниченных внешних возмущениях.
4. Анализ грубости (чувствительности).
5. Условия реализуемости регулятора.

Третья из этих проблем является центральной, и поэтому теория, исходящая из частотных параметров, названа теорией частотного управления (теорией построения управления по частотным параметрам).

Цель первой части книги: сформулировать задачи управления при неопределённых (неизвестных) коэффициентах уравнений объекта и описать на качественном уровне подход к их решению. Кроме того, здесь излагается метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (метод ЛАЧХ). Это связано с тем, что значения частотных характеристик могут быть получены из тех же экспериментов, что и частотные параметры. Правда, в отличие от метода частотных параметров, число этих экспериментов, вообще говоря, бесконечно, так как анализ устойчивости и синтез регуляторов в методе ЛАЧХ предполагает, что амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики известны во всём диапазоне частот от нуля до бесконечности.

Последнее явилось причиной применения этого метода для расчёта регуляторов, в основном, для объектов с известными параметрами. Однако, наглядность и эффективность метода ЛАЧХ делает его в определённом смысле образцом прикладных методов, которому можно следовать.

Кроме того, круг задач, решаемых методом ЛАЧХ для таких объектов, оказался столь значимым для практики регулирования (он охватывает указанные выше пять проблем), что при создании новых методов необходимо, как минимум, не сокращать этот круг.

## Глава 1. Проблемы управления при неопределённых параметрах объекта и частотное управление

Трудности расчёта параметров (коэффициентов модели) объекта, вызванные сокращением сроков их проектирования, – лишь одна из причин их неопределённости.

Существуют более глубокие причины неопределённости параметров объекта, обусловленные его природой.

Одна из них – несамотождественность объекта. Для того, чтобы пояснить её, представим себе интеллектуального робота, осуществляющего сборку некоторой конструкции. «Рука» робота «берет» детали конструкции, которые имеют различные веса и моменты инерции. «Рука» робота (рассматриваемая как объект в системе управления её движением) описывается, после «захвата» детали, дифференциальными уравнениями с параметрами, которые определяются весом и моментом инерции этой детали. Такой объект называется далее *несамотождественным*, так как его параметры принимают непредвиденные значения (поскольку не известны ни вес, ни момент инерции, ни последовательность сборки деталей) для каждого из интервалов времени, начинающихся с момента «захвата» детали и заканчивающихся в момент её установки (интервалы «пуск-останов»).

Управление несамотождественными объектами должно приспособливаться (адаптироваться) к параметрам объекта, реализовавшимся на каждом интервале «пуск-останов».

Цель этой главы:

- описание моделей объектов (с определёнными и неопределёнными параметрами, самотождественных и несамотождественных, однорежимных и многорежимных), целей управления и внешних возмущений.
- формулировка задач регулирования и слежения при неопределённых параметрах объекта.

Эти задачи сопровождаются изложением существа подхода к решению на основе метода частотных параметров. При этом рассматривается простейший случай, когда объект одномерный (с одним входом и одним выходом) и асимптотически устойчивый. Это позволяет, во-первых, глубже понять рассматриваемые задачи, а во-вторых, служит содержательным введением в частотное управление, которое развивается в последующих главах для неустойчивых и многомерных объектов.

## 1.1. Модели объектов

### 1.1.1. Типы объектов

Рассмотрим объект управления, возмущённое движение которого описывается в первом приближении уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \tilde{\mathbf{m}}f, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (1.1.1)$$

$$y = \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (1.1.2)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  –  $n$ -мерный вектор его переменных состояния,  $u(t)$  и  $f(t)$  – управление и внешнее возмущение соответственно,  $y(t)$  – измеряемая переменная,  $A$  – матрица чисел размеров  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\tilde{\mathbf{m}}$  –  $n$ -мерные вектора-столбцы,  $\mathbf{d}$  –  $n$ -мерный вектор-строка. Числа, составляющие эту матрицу и вектора, называются параметрами объекта.

Введём четыре типа моделей объектов (1.1.1), (1.1.2), при этом здесь и далее будем использовать термин «объект» и для обозначения уравнений, описывающих его.

**Объект типа А** – это объект (1.1.1), (1.1.2), в котором матрица  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{d}$  – известны.

**Объект типа В** – это объект (1.1.1), (1.1.2), где матрица  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}$ ,  $\mathbf{d}$  – неизвестны.

**Объект типа С** (многорежимный объект с известными параметрами) – описывается на каждом из интервалов времени  $[t_{k-1}, t_k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A^{(k)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(k)}u + \tilde{\mathbf{m}}^{(k)}f, \\ y &= \mathbf{d}^{(k)}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad t_{k-1} \leq t < t_k \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1.3)$$

в которых  $A^{(k)}$ ,  $\mathbf{b}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}$ ,  $\mathbf{d}^{(k)}$  – заданные числовые матрица и вектора. Моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – переход с режима на режим – заданы.

**Объект типа D** (многорежимный объект с неизвестными параметрами) – это объект (1.1.3), где матрица  $A^{(k)}$  и вектора  $\mathbf{b}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}^{(k)}$ ,  $\mathbf{d}^{(k)}$  – неизвестны. Моменты  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) могут быть как заданными, так и неизвестными. К типу D будем относить также объекты (1.1.3) с известными параметрами, но неизвестными моментами  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) смены режима работы.

### 1.1.2. Внешние возмущения и помехи

Входящее в (1.1.1) внешнее воздействие  $f(t)$  – неизвестная ограниченная функция такая, что

$$|f(t)| \leq f^*, \quad (1.1.4)$$

где  $f^*$  – заданное число.

Ограничим далее класс  $f(t)$  функциями, которые могут быть представлены как сумма конечного числа гармоник

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left( \delta_i^{(1)} \sin \omega_i^f t + \delta_i^{(2)} \cos \omega_i^f t \right), \quad (1.1.5)$$

где  $\delta_i^{(1)}$ ,  $\delta_i^{(2)}$ ,  $\omega_i^f$  ( $i = \overline{1, \mu_1}$ ) – неизвестные числа.

Представление (1.1.5) можно интерпретировать при  $\omega_i = i\omega$  как результат разложения  $f(t)$  в ряд Фурье и отбрасывания тех гармоник этого ряда, которые находятся вне полосы пропускания объекта либо системы управления.

Кроме (1.1.5), будем рассматривать также многорежимное внешнее возмущение

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left( \delta_i^{(1)k} \sin \omega_i^{fk} t + \delta_i^{(2)k} \cos \omega_i^{fk} t \right), \quad t_{k-1}^f \leq t \leq t_k^f \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1.6)$$

где  $t_k^f$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – моменты изменения режима внешнего возмущения. Числа  $\delta_i^{(1)k}$ ,  $\delta_i^{(2)k}$ ,  $\omega_i^{fk}$  ( $i = \overline{1, \mu_1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ) в каждом из режимов неизвестны.

Помехи измерения будем учитывать, записывая соотношение (1.1.2) в виде

$$y = dx + \varepsilon, \quad (1.1.7)$$

где  $\varepsilon(t)$  – помеха измерения, которая ограничена известным числом

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*.$$

Как и внешнее воздействие, будем представлять помеху суммой конечного числа гармоник

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \left( \rho_i^{(1)} \sin \omega_i^\varepsilon t + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^\varepsilon t \right), \quad (1.1.8)$$

где  $\rho_i^{(1)}$ ,  $\rho_i^{(2)}$ ,  $\omega_i^\varepsilon$  ( $i = \overline{1, \mu_2}$ ) – неизвестные числа.

Наряду с регулярной помехой будем рассматривать многорежимные помехи, аналогичные (1.1.6).

### 1.1.3. Свойства объектов

Будем полагать, что объекты обладают свойствами:

1. Все типы объектов полностью управляемы сигналом  $u(t)$  и полностью наблюдаемы по сигналам  $y(t)$ . (Многорежимный объект обладает этими свойствами на каждом из его режимов).
2. Для неустойчивых объектов известны положительные число либо последовательность  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) такие, что для объекта В выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) e^{-C_0 t} = \mathbf{0},$$



где  $\mathbf{x}(t)$  – решение уравнений (1.1.2), а для объекта D справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) e^{-C_k t} = \mathbf{0} \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – решение (1.1.3).

3. Исполнительные и измерительные устройства регулятора будем относить к объекту управления. Это означает, что уравнения (1.1.1) включают в себя уравнения исполнительных и измерительных устройств и описывают так называемую *неизменяемую часть системы*. Под регулятором будем понимать изменяемую часть системы.

#### 1.1.4. Границы параметров\*

Уточним понятие известных и неизвестных параметров объекта. Если неизвестен хотя бы один из элементов матриц или векторов объекта, то он называется *объектом с неизвестными параметрами*.

Когда параметры физического объекта считаются известными, то подразумевается, что они известны с некоторой точностью. Так, например, известная матрица  $A$  определяется неравенствами

$$\underline{A} \leq A \leq \overline{A}, \quad (1.1.9)$$

в которых  $\underline{A}$  и  $\overline{A}$  – заданные матрицы размеров  $n \times n$ , определяющие диапазон возможных значений параметров, где  $\underline{A}$  – нижняя граница диапазона, а  $\overline{A}$  – его верхняя граница. Эти границы определяются технологическими допусками на изготовление устройств объекта, старением этих устройств, погрешностями методов расчёта или идентификации параметров и т.д.

Введём понятие *расчётной матрицы* (матрицы номинальных значений параметров) определив её элементы как центры диапазонов элементов матрицы  $A$ . Это означает, что расчётная матрица

$$A^* = \frac{1}{2} (\overline{A} + \underline{A}). \quad (1.1.10)$$

Тогда можно представить

$$A = A^* \pm \Delta A, \quad (1.1.11)$$

где  $\Delta A$  – неизвестная матрица, модули элементов которой удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}^* \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (1.1.12)$$

в которых числа  $\varepsilon_{ij}^*$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – элементы матрицы

$$\mathcal{E}^* = \frac{1}{2} (\overline{A} - \underline{A}). \quad (1.1.13)$$

Когда параметры объекта неизвестны, часто можно дать оценку возможных диапазонов их значений. Тогда, например, для матрицы  $A$  можно записать

$$\underline{\tilde{A}} \leq A \leq \overline{\tilde{A}}, \quad (1.1.14)$$

где  $\underline{\tilde{A}}$  и  $\overline{\tilde{A}}$  – матрицы оценок нижних и верхних границ.

Используя расчётную матрицу  $A^* = \frac{1}{2} (\underline{\tilde{A}} + \overline{\tilde{A}})$ , представим (1.1.14) в виде (1.1.11), где

$$|\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}^{**} \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (1.1.15)$$

$$\mathcal{E}^{**} = \frac{1}{2} (\underline{\tilde{A}} - \overline{\tilde{A}}). \quad (1.1.16)$$

При таком описании параметров объекта становится слабо различимой грань между объектами с известными и неизвестными параметрами, хотя интуитивно ясно, что  $\varepsilon_{ij}^* < \varepsilon_{ij}^{**}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ).

Один из путей строгого определения этой грани основан на понятии параметрической грубости систем регулирования, которое приведено в 1.П.

### 1.1.5. Многомерные объекты. Виды объектов

Объект (1.1.1), (1.1.2) – одномерный, так как измеряемая и управляющая переменные – скаляры. Наряду с такими объектами далее будут рассматриваться многомерные объекты, описываемые уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + M\mathbf{f} \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = L\mathbf{x}, \quad (1.1.18)$$

в которых  $\mathbf{y}(t)$  –  $r$ -мерный вектор измеряемых переменных,  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{z}(t)$  –  $m$ -мерные вектора управлений и регулируемых переменных,  $\mathbf{f}(t)$  –  $\mu$ -мерный вектор возмущений, а  $B, M, D, L$  – матрицы размеров  $n \times m, n \times \mu, r \times n, m \times n$  – соответственно.

Аналогично описываются многомерные многорежимные объекты

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A^{(k)}\mathbf{x} + B^{(k)}\mathbf{u} + M^{(k)}\mathbf{f}, \\ \mathbf{y} &= D^{(k)}\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = L^{(k)}\mathbf{x}, \quad t_{k-1} \leq t < t_k \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Отметим, что в отличие от одномерных систем в многомерных системах вектор  $\mathbf{z}(t)$  не совпадает с вектором измеряемых переменных. Более того, может случиться так, что ни одна из компонент вектора  $\mathbf{z}(t)$  не доступна измерению.

Рассмотрим два вида объектов (1.1.17), (1.1.18), которые и будут использоваться далее.

**Объекты первого вида** характеризуются равенством

$$M = B, \quad (1.1.20)$$

которое означает, что внешние возмущения прикладываются к объекту в местах приложения управляющих воздействий.

Кроме того, будем полагать также, что

$$D = E_n, \quad (1.1.21)$$

где  $E_n$  – единичная матрица размеров  $n \times n$  и следовательно, все переменные состояния объекта измеряются.

**Объекты второго вида**, в которых регулируемые переменные совпадают с измеряемыми и тогда

$$D = L, \quad (1.1.22)$$

при этом размерность вектора  $\mathbf{y}(t)$  совпадает с размерностью вектора  $\mathbf{u}(t)$ .

Выделение этих видов объектов вызвано тем, что даже для объектов типа  $A$  лишь для этих видов существуют регуляторы, при которых достигается наперёд заданная точность регулирования при внешних воздействиях (1.1.4).

### 1.1.6. Структурные показатели и структурные свойства объектов

Объект (1.1.17), (1.1.18) характеризуется наряду с матрицами параметров, размерностями векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{f}$ . Эти размерности  $n$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $t$  и  $\mu$  соответственно называются *структурными показателями объекта*. Структурные показатели считаются далее, если не оговорено противное, заданными.

Многорежимный объект (1.1.19) может в каждом режиме иметь различные структурные показатели  $n^{(k)}$ ,  $m^{(k)}$ ,  $r^{(k)}$ ,  $\mu^{(k)}$ .

Часто случается так, что объект с неизвестными параметрами сохраняет свои свойства (управляемость, наблюдаемость, устойчивость и т.п.) при любых значениях параметров из заданного диапазона их возможных значений. Например, объект

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + b_{21}u, \quad y = x_1$$

является асимптотически устойчивым, полностью управляемым, полностью наблюдаемым для любых отрицательных  $p_{21}$ ,  $p_{22}$  и любого не равного нулю числа  $b_{21}$ .

Кроме того, в ряде случаев неизвестными являются один или несколько элементов матриц уравнений (1.1.17) или (1.1.19) и значения этих параметров из заданного диапазона не влияют на свойства объекта, которые определяются известными параметрами.

Определение 1.1.1. Свойства объекта, которые не зависят от значений неизвестных его параметров из заданного диапазона, называются *структурными свойствами объекта*. ■

### 1.1.7. Регулирование и слежение

Среди задач управления выделим задачи регулирования и слежения.

Регулятор, разрешающий задачу управления для объекта (1.1.1), (1.1.2) с известными параметрами (объекта А) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y, & \mathbf{x}_p(t_0) &= \mathbf{x}_p^{(0)}, \\ u &= \mathbf{d}_p \mathbf{x}_p + f_p y, \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

где  $\mathbf{x}_p(t)$  –  $n_p$ -мерный вектор переменных состояния регулятора;  $A_p$  – числовая матрица размеров  $n_p \times n_p$ ;  $\mathbf{b}_p$ ,  $\mathbf{d}_p$  –  $n_p$ -мерные вектор-столбцы чисел;  $f_p$  – число.

Задача 1.1.1 (Задача регулирования объекта А).

Найти параметры регулятора (1.1.23) такие, чтобы, начиная с некоторого момента времени  $t_{рег}$  ( $t_{рег}$  – время регулирования), выполнялось условие

$$|y(t)| \leq y^*, \quad t \geq t_{рег}, \quad (1.1.24)$$

где  $y^*$  – заданное положительное число, характеризующее точность (погрешность) регулирования. ■

Неравенство (1.1.24) выражает цель управления. В задачах слежения эта цель имеет вид

$$|y(t) - y_{ж}(t)| \leq y^*, \quad t \geq t_{рег}, \quad (1.1.25)$$

где  $y_{ж}(t)$  – измеряемая, но априори неизвестная функция, описывающая желаемые движения объекта. Эта функция часто называется *задающим воздействием*.

Регулятор следящих систем будем искать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y + \mathbf{r}^n y_{ж}, \\ u &= \mathbf{d}_p \mathbf{x}_p + f_p y, \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

(где  $\mathbf{r}^n$  –  $n_p$ -мерный вектор чисел) либо в форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y, \\ u &= u_p + y_{ж}, \quad u_p = \mathbf{d}_p \mathbf{x}_p + f_p y. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Физический смысл форм (1.1.26), (1.1.27) состоит в следующем: в первом случае сигнал  $y_{ж}(t)$  поступает на вход регулятора, а втором – он складывается с выходом ( $u_p$ ) регулятора.

Задача 1.1.2 (Задача слежения).

Найти параметры регуляторов (1.1.26) либо (1.1.27), при которых выполняется целевое условие (1.1.25). ■

В многомерном случае задачи 1.1.1 уравнения искомого регулятора принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= D_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}, \quad \mathbf{z} = L_p \mathbf{x}_p. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

( $B_p, D_p, F_p$  – матрицы размеров  $n_p \times r, m \times n_p, m \times r$ ), а целевое условие выражается теперь в виде системы неравенств

$$|z_i(t)| \leq z_i^* \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq t_{peg}, \quad (1.1.29)$$

в которых  $z_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные числа, характеризующие точность регулирования по каждой из регулируемых переменных, а  $t_{peg} = \max\{t_{1peg}, t_{2peg}, \dots, t_{mpeg}\}$ , где  $t_{ipeg}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – время регулирования по каждой из этих переменных.

Аналогичный вид имеют регуляторы для следящих систем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y} + R^n \mathbf{z}_{ж}, \\ \mathbf{u}_z &= D_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

либо

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p + \mathbf{z}_{ж}, \quad \mathbf{u}_p = C_p \mathbf{x}_p + F_p \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

а целевое условие записывается как

$$|z_i(t) - z_{iж}(t)| \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.1.32)$$

в котором  $z_{iж}(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – измеряемые функции, описывающие желаемое движение объекта по каждой из регулируемых переменных (задающие воздействия).

### 1.1.8. Переходные и установившиеся процессы

Часто вводят ограничения на движение системы в период  $[0, t_{peg}]$

$$\max_{0 \leq t \leq t_{per}} |y(t)| \leq y_{nereg}^*,$$

где  $y_{nereg}^*$  – заданное число, и процесс регулирования разбивается на два процесса: установившийся и переходный. Первый из них – это обычный режим работы системы, обусловленный внешними возмущениями. Переходный процесс вызывается начальными условиями и изменением начального состояния системы при возникновении возмущения. По истечении  $t_{peg}$  переходные процессы затухают и наступает установившийся режим, характеристикой которого является число  $y^*$ . Геометрический образ этих понятий показан в виде некоторых трубок, в которые заключены процессы в системе, на рис. 1.1.1

Для следящих систем можно записать аналогично

$$\max_{0 \leq t \leq t_{per}} |y(t) - y_{ж}(t)| \leq y_{nereg}^*.$$

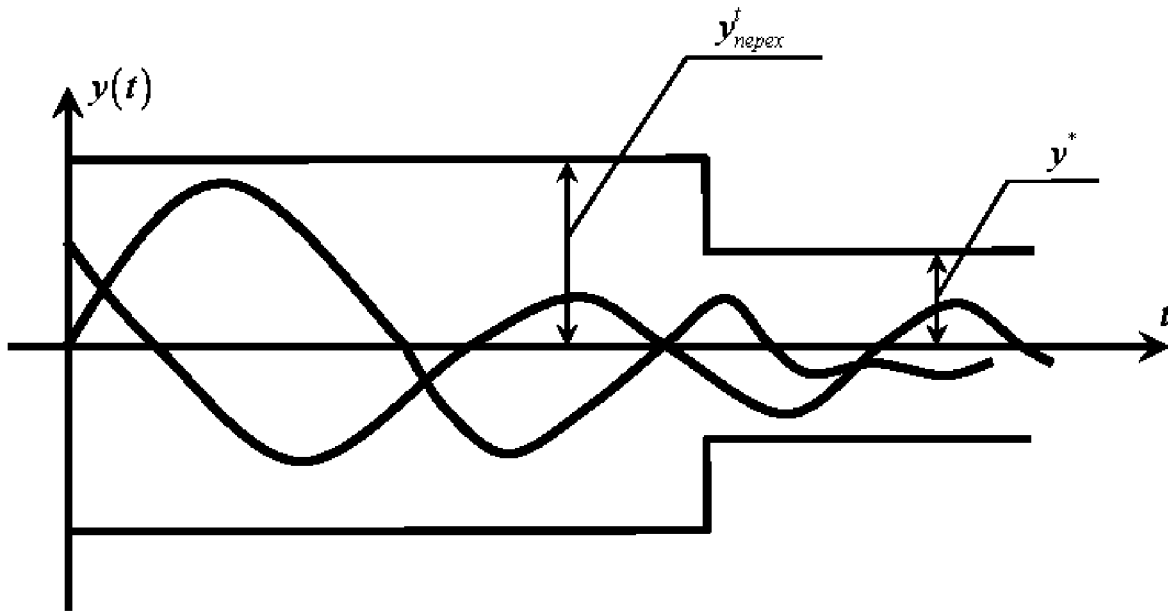


Рис. 1.1.1

### 1.1.9. Методы синтеза регуляторов и уравнение качества

Эффективным методом решения задачи 1.1.1 служит хорошо известный метод логарифмических частотных характеристик (метод ЛАЧХ).

Этот метод, приведённый в гл. 2, к сожалению, не распространяется на многомерные системы, и поэтому далее используются методы аналитического синтеза регуляторов, применимые как для одномерных, так и для многомерных систем. К настоящему времени можно выделить два таких метода: метод, основанный на теории *модального управления*, и метод, использующий процедуры *аналитического конструирования регуляторов* (процедуры АКОР).

Эти методы, особенно первый из них, опираются на уравнение качества.

Для его составления запишем уравнения объекта (1.1.1), (1.1.2) и регулятора (1.1.23) в форме «вход-выход»

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad (1.1.33)$$

$$g(s)u = r(s)y, \quad (1.1.34)$$

где

$$d(s) = \sum_{i=0}^n d_i s^{i-1}, \quad b(s) = \sum_{i=0}^{\gamma} b_i s^{i-1}, \quad m(s) = \sum_{i=0}^{\alpha} \tilde{m}_i s^{i-1} \quad (\gamma < n, \alpha < n), \quad (1.1.35)$$

$$g(s) = \sum_{i=0}^{n_p} g_i s^{i-1}, \quad r(s) = \sum_{i=0}^{\gamma_p} r_i s^{i-1}, \quad (\gamma_p \leq n_p), \quad (1.1.36)$$

$s$  – символ дифференцирования, кроме того, он используется далее и как символ преобразования по Лапласу при нулевых начальных условиях.

Уравнение объекта (1.1.33) нетрудно получить, если преобразовать (1.1.1), (1.1.2) по Лапласу и исключить вектор  $\mathbf{x}$ . Аналогично приходим к уравнению регулятора (1.1.34).

Исключим из уравнений системы (1.1.33), (1.1.34) переменную  $u$  и получим

$$[d(s)g(s) - b(s)r(s)]y = g(s)m(s)f. \quad (1.1.37)$$

Уравнением качества (неявной эталонной моделью) называется уравнение

$$\psi(s)y_\kappa = g(s)m(s)f, \quad (1.1.38)$$

в котором

$$\psi(s) = \psi_\kappa s^\kappa + \psi_{\kappa-1} s^{\kappa-1} + \psi_1 s + \psi_0. \quad (1.1.39)$$

Коэффициенты полиномов  $\psi(s)$ ,  $g(s)$  выбираются так, чтобы выполнялось целевое условие (1.1.24).

Цель управления формулируется теперь как требование совпадения (при нулевых начальных условиях) решений уравнения (1.1.37) и управления качества

$$y(t) = y_\kappa(t). \quad (1.1.40)$$

Это равенство выполняется, если полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$  регулятора удовлетворяют тождеству

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \psi(s). \quad (1.1.41)$$

Использование неявной эталонной модели (уравнения качества) так же, как и использование явной (физической) эталонной модели движения объекта, замкнутого регулятором, существенно ограничивает число вариантов регуляторов (1.1.23), при которых достигается цель (1.1.24). Вместе с этим уравнение качества позволяет формализовать требования к времени регулирования (а если необходимо, то и к перерегулированию) и построить аналитическую процедуру синтеза.

Отметим, что определение полиномов  $\psi(s)$  и  $g(s)$ , в свою очередь, является непростой задачей, поскольку необходимо определить их так, чтобы целевое условие (1.1.24) выполнялось для множества функций  $f(t)$  вида (1.1.5), удовлетворяющих ограничению (1.1.4). Однако далее будем полагать, что эта задача решена с учётом ограничений на структуру этих полиномов, которые будут наложены далее.

Пример 1.1.1. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнениями с известными параметрами

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u + f, \quad y = x_1, \quad (1.1.42)$$

где  $f(t)$  – ступенчатое возмущение вида

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при } t \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \quad (1.1.43)$$

Требуется найти регулятор, при котором, начиная с заданного момента времени  $t_{рег}^*$ , выполняется требование к точности

$$|y(t)| \leq y^*. \quad (1.1.44)$$

Переходя к решению этой задачи регулирования (задача 1.1.1) с фиксированным временем  $t_{рег}^*$ , сформируем уравнение качества. Представим уравнение (1.1.42) в форме «вход-выход»

$$\ddot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = u + f, \quad d_1 = -a_{22}, \quad d_0 = -a_{21}, \quad (1.1.45)$$

и тогда, полагая пока  $\varkappa = 2$ , запишем уравнение качества

$$(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) y_\kappa = f.$$

Запишем полином  $(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) = (s + s_1)(s + s_2)$  и выберем корни этого полинома, исходя из требования (1.1.44) к точности

$$s_1 s_2 \geq \frac{\bar{f}}{y^*} \quad (1.1.46)$$

и времени регулирования

$$s_1 \leq \frac{3}{t_{рег}^*}, \quad s_2 > s_1. \quad (1.1.47)$$

Составим тождество (1.1.41)

$$(s^2 + d_1 s + d_0)g(s) - r(s) = s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0, \quad (1.1.48)$$

находим, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , параметры полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$

$$r_1 = d_1 - \tilde{\psi}_1, \quad r_0 = d_0 - \tilde{\psi}_0, \quad g_0 = 1. \quad (1.1.49)$$

Таким образом, уравнение регулятора имеет вид

$$u = r_1 \dot{y} + r_0 y. \quad (1.1.50)$$

Оно содержит «чистые» производные измеряемой переменной. Для получения реализуемого регулятора изменим уравнение качества, приняв его как

$$(\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) y_\kappa = f, \quad (1.1.51)$$

где  $\tau$  – постоянная времени – достаточно малое число, удовлетворяющее, в частности, условию

$$\tau < \frac{1}{s_2}. \quad (1.1.52)$$



Тождество (1.1.48) примет теперь вид

$$(s^2 + d_1s + d_0)(g_1s + g_0) - (r_1s + r_0) = (\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0). \quad (1.1.53)$$

Сравнивая коэффициенты, получим уравнения

$$g_1 = \tau, \quad g_0 = 1 + \tau\tilde{\psi}_1 - \tau d_1, \quad d_1g_0 - r_1 = \tilde{\psi}_1 + \tau\tilde{\psi}_0 - g_1d_0, \quad d_0g_0 - r_0 = \tilde{\psi}_0, \quad (1.1.54)$$

из которых следует, что при достаточно малых  $\tau$  уравнение регулятора имеет вид

$$\tau\dot{u} + u = r_1\dot{y} + r_0y, \quad (1.1.55)$$

где  $r_1$  и  $r_0$  определяются (1.1.49).

Приведём это уравнение к форме Коши (1.1.23).

Введём переменную  $x_{p1} = \tau u - r_1y$  и запишем (1.1.55) в виде

$$\dot{x}_{p1} = -\frac{1}{\tau}x_{p1} + \left(r_0 - \frac{r_1}{\tau}\right)y, \quad u = \frac{1}{\tau}x_{p1} + \frac{r_1}{\tau}y. \quad (1.1.56)$$

Этот реализуемый регулятор и разрешает задачу синтеза.

Приведём численное решение задачи синтеза. Пусть имеем следующие параметры объекта, внешнего возмущения, цели управления и времени регулирования

$$a_{21} = -d_0 = -200, \quad a_{22} = -d_1 = -30, \quad \bar{f} = 10, \quad y^* = 0.01, \quad t_{pez}^* = 0.15. \quad (1.1.57)$$

Определим на основе (1.1.46), (1.1.47), (1.1.52) значения коэффициентов уравнения качества

$$\tilde{\psi}_0 = s_1s_2 = 10^3, \quad s_1 = 20, \quad s_2 = 50, \quad \tilde{\psi}_1 = 70, \quad \tau = 10^{-2}. \quad (1.1.58)$$

Решим систему (1.1.54) и получим искомые параметры регулятора

$$g_1 = 10^{-2}, \quad g_0 = 1.4, \quad r_1 = -36, \quad r_0 = -720. \quad (1.1.59)$$

Отметим, что величина  $\tau$  была принята недостаточно малой и поэтому  $g_0$ ,  $r_1$  и  $r_0$  несколько отличаются от соответствующих значений  $1$ ,  $-40$ ,  $-800$ , получаемых на основе (1.1.49).

Кстати, здесь можно пояснить необходимость требования малости числа  $\tau$ . Дело в том, что уравнение качества (1.1.38) содержит неизвестный (до решения задачи синтеза) полином  $g(s)$ . Если

$$\psi(s) = (\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0). \quad (1.1.60)$$

то, поскольку, при достаточно малых  $\tau$ ,

$$g(s) \approx \tau s + 1, \quad (1.1.61)$$

запишем уравнение качества как

$$(\tau s + 1) (s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) y_\kappa = (\tau s + 1) f.$$

Сократим в нём полином  $(\tau s + 1)$  и получим уравнение качества

$$(s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0) y_\kappa = f,$$

не содержащее полинома  $g(s)$ .

В заключение приведём уравнение регулятора

$$g_1 \dot{u} + g_0 u = r_1 \dot{y} + r_0 y \quad (1.1.62)$$

(где для общности  $g_1 \neq \tau$ ,  $g_0 \neq 1$ ), записанное в форме «вход-выход», к форме Коши

$$\dot{x}_{p1} = a_{p11} x_{p1} + b_{p1} y, \quad (1.1.63)$$

$$u = d_{p1} x_{p1} + f_p y, \quad (1.1.64)$$

где, аналогично (1.1.56),

$$a_{p11} = -\frac{g_0}{g_1}, \quad b_{p1} = r_0 - \frac{g_0 r_1}{g_1}, \quad d_{p1} = \frac{1}{g_1}, \quad f_p = \frac{r_1}{g_1}. \quad (1.1.65)$$

■

## 1.2. Частотное управление

### 1.2.1. Управление при неизвестных параметрах объекта

Рассмотрим объект с неизвестными параметрами (объект типа В). Его можем представить себе некоторым устройством с известными точками приложения управляющего и возмущающего воздействий и точкой выхода. Известна также размерность пространства его состояний и некоторые свойства.

Задача 1.2.1. Задача регулирования объекта В. Найти параметры регулятора (1.1.23) такие, чтобы, начиная с некоторого момента времени  $t^*$ , выполнялось требование к точности (1.1.24). ■

Аналогично формулируется задача слежения.

Хорошо известны два пути решения этой задачи: идентификационный и метод ЛАЧХ.

Первый путь заключается в идентификации (определении) неизвестных параметров объекта (1.1.1), (1.1.2) и затем решении задачи 1.1.2.

Среди методов идентификации выделим частотный метод. Это вызвано тем, что неизвестны статистические характеристики случайного внешнего возмущения  $f(t)$ . Последнее затрудняет применение таких методов идентификации как метод наименьших квадратов и метод стохастической аппроксимации, а неизмеряемость  $f(t)$  делает невозможной идентификацию с помощью настраиваемой модели.

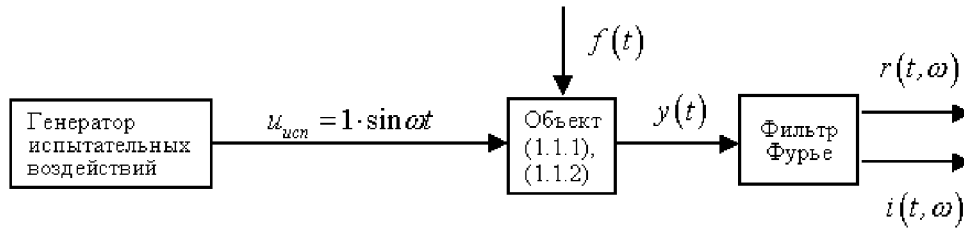


Рис. 1.2.1

### 1.2.2. Частотные параметры и их определение

Частотный метод идентификации содержит два этапа: первый этап – экспериментальное определение частотных параметров, второй этап – вычисление коэффициентов передаточной функции объекта по частотным параметрам.

Дадим формальное определение частотных параметров.

Определение 1.2.1. Частотными параметрами объекта (1.1.1), (1.1.2) с передаточной функцией

$$w(s) = \frac{b(s)}{d(s)} \quad (1.2.1)$$

называются  $2n$  чисел

$$r^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} w(\lambda + j\omega_k), \quad i^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} w(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2.2)$$

■

При  $\lambda = 0$  частотные параметры являются обычными значениями вещественной и мнимой частей передаточной функции объекта для различных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и обозначаются как

$$r(\omega_k) = \operatorname{Re} w(j\omega_k), \quad i(\omega_k) = \operatorname{Im} w(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2.3)$$

Структурная схема экспериментальной установки для определения частотных параметров (1.2.3) асимптотически устойчивого объекта (1.1.1), (1.1.2) на рис. 1.2.1

Эта установка содержит генератор испытательных воздействий  $u_{исп} = 1 \cdot \sin \omega t$ , поступающих на вход объекта. Сигнал с объекта  $y(t)$  подаётся на фильтр Фурье, выходы которого

$$\hat{r}(t, \omega) = \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t y(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau, \quad \hat{i}(t, \omega) = \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t y(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau. \quad (1.2.4)$$

Эти функции обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}(t, \omega) = r(\omega), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{i}(t, \omega) = i(\omega). \quad (1.2.5)$$

Фиксируя  $\omega$ , получим, после  $n$  экспериментов на различных испытательных частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , параметры  $r(\omega_k), i(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

### 1.2.3. Частотный метод идентификации

Переходя ко второму этапу частотного метода идентификации, представим передаточную функцию (1.2.1) при  $s = j\omega$  в виде

$$w(j\omega) = \frac{l(\omega) + jv(\omega)}{l_d(\omega) + jv_d(\omega)} = r(\omega) + ji(\omega), \quad (1.2.6)$$

где

$$l(\omega) = \sum_{i=0}^{[\gamma/2]} (-1)^i b_{2i} \omega^{2i}, \quad v(\omega) = \sum_{i=1}^{[\gamma+1/2]} (-1)^{i-1} b_{2i-1} \omega^{2i-1}; \quad (1.2.7)$$

$$l_d(\omega) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i d_{2i} \omega^{2i}, \quad v_d(\omega) = \sum_{i=1}^{[n+1/2]} (-1)^{i-1} d_{2i-1} \omega^{2i-1}. \quad (1.2.8)$$

Символ  $[\psi]$  означает целую часть  $\psi$ .

Из (1.2.6) следует система  $2n$  линейных алгебраических уравнений для определения параметров  $d_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) и  $b_i$  ( $i = \overline{0, \gamma}$ )

$$l(\omega_k) = l_d(\omega_k)r(\omega_k) - v_d(\omega_k)i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.2.9)$$

$$v(\omega_k) = v_d(\omega_k)r(\omega_k) - l_d(\omega_k)i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2.10)$$

Пример 1.2.1. Пусть параметры  $b_0, d_1, d_0$  передаточной функции объекта (1.1.42)

$$w(s) = \frac{b_0}{s^2 + d_1 s + d_0} \quad (1.2.11)$$

неизвестны и пусть в результате первого этапа частотного метода идентификации экспериментально получены, на частотах

$$\omega_1 = 10, \quad \omega_2 = 30, \quad (1.2.12)$$

значения частотных параметров

$$r(\omega_1) = 10^{-3}, \quad r(\omega_2) = -5.4 \cdot 10^{-4}; \quad i(\omega_1) = -3 \cdot 10^{-3}, \quad i(\omega_2) = -7 \cdot 10^{-4}. \quad (1.2.13)$$

Система (1.2.9), (1.2.10) имеет в рассматриваемом случае вид

$$b_0 = (d_0 - \omega_1^2) r(\omega_1) - d_1 \omega_1 i(\omega_1), \quad b_0 = (d_0 - \omega_2^2) r(\omega_2) - d_1 \omega_2 i(\omega_2); \quad (1.2.14)$$

$$0 = d_1 \omega_1 r(\omega_1) + (d_0 - \omega_1^2) i(\omega_1), \quad 0 = d_1 \omega_2 r(\omega_2) + (d_0 - \omega_2^2) i(\omega_2). \quad (1.2.15)$$

Уравнения (1.2.15) не зависят от  $b_0$  и при численных значениях (1.2.12), (1.2.13) записываются как

$$10^{-2} d_1 - 3 \cdot 10^{-3} d_0 = -0.3, \quad -16.2 \cdot 10^{-3} d_1 - 7 \cdot 10^{-4} d_0 = -0.63. \quad (1.2.16)$$

Решим эти уравнения и получим

$$d_1 = 30, \quad d_0 = 200. \quad (1.2.17)$$

Подставляя эти числа в любое из уравнений (1.2.24), заключаем, что  $b_0 = 1$ . Аналогично можно идентифицировать коэффициент при внешнем возмущении  $f$  в (1.1.43). Решим затем систему (1.1.54) и получим искомые коэффициенты (1.1.59) регулятора, разрешающего задачу 1.2.1 для объекта (1.1.42) с неизвестными параметрами. ■

#### 1.2.4. Метод ЛАЧХ

Идентификационный путь решения задачи 1.2.1 сводится к процедуре 1.2.1, которая состоит из операций:

1. экспериментальное определение частотных параметров;
2. идентификация (вычисление коэффициентов передаточной функции объекта);
3. построение уравнения качества;
4. аналитическое определение на основе тождества (1.1.41) коэффициентов передаточной функции регулятора  $w_p(s) = \frac{r(s)}{g(s)}$  либо параметров уравнения (1.1.23). ■

Второй (неидентификационный) путь решения задачи 1.2.1 основан на методе ЛАЧХ. Для его применения должна быть задана амплитудно-частотная –  $a(\omega)$  – и фазо-частотная –  $\varphi(\omega)$  характеристики объекта во всём диапазоне частот

$$a(\omega) = |w(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg w(j\omega) \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (1.2.18)$$

Если параметры объекта (1.1.1), (1.1.2) известны, то эти функции находятся аналитически. При неизвестных параметрах функции  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  можно получить экспериментально.

Действительно, используя экспериментальную установку, структурная схема которой приведена на рис. 1.2.1, получим (после достаточно большого числа экспериментов с различными испытательными частотами) функции  $r(\omega)$  и  $i(\omega)$ , а затем вычислим

$$a(\omega) = \sqrt{r^2(\omega) + i^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg w(j\omega). \quad (1.2.19)$$

Кроме того,  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  можно получать и непосредственно по результатам эксперимента, если несколько изменить схему установки.

Метод ЛАЧХ является графоаналитическим. Первым его этапом является построение желаемой ЛАЧХ, которая аналогична уравнению качества. Отличие состоит

лишь в том, что уравнение качества задаёт эталонную модель замкнутой системы, а желаемая ЛАЧХ – эталонную модель разомкнутой системы.

Процедура 1.2.2. (Неидентификационный метод решения задачи 1.2.1) состоит из операций:

1. экспериментальное определение  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  при  $\omega \in (0, \infty)$ ;
2. построение желаемой ЛАЧХ;
3. графоаналитическое определение передаточной функции регулятора

$$w_p(s) = \frac{r(s)}{g(s)}.$$

■

Сравним изложенные два пути решения задачи 1.2.1. Достоинством первого пути является конечное ( $n$ ) число экспериментов (конечное число значений частотной передаточной функции объекта), а его недостаток – операция идентификации параметров объекта, которая не вытекает из существа задачи синтеза. Достоинство второго пути – непосредственное (прямое) решение задачи синтеза регулятора по частотным характеристикам. Недостатком здесь является необходимость проведения экспериментов с бесконечно большим числом испытательных частот.

### 1.2.5. Метод частотных параметров

Рассмотрим теперь третий путь, основанный на *методе частотных параметров*. Этот путь содержит достоинства изложенных двух подходов. Поясним существо метода на примере.

Пример 1.2.2. Пусть в примере 1.1.1 параметры объекта (1.1.42) неизвестны, но экспериментально получены частотные параметры (1.2.13).

Построим уравнение качества, формализующее эту задачу, и запишем тождество (1.1.53) для определения параметров регулятора. Разделив его на полином  $s^2 + d_1s + d_0$ , получим соотношение

$$(g_1s + g_0) - (r_1s + r_0)w(s) = (\tau s + 1)(s^2 + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0)w(s), \quad (1.2.20)$$

в котором

$$w(s) = \frac{1}{s^2 + d_1s + d_0}. \quad (1.2.21)$$

Полагая в (1.2.20)  $s = j\omega$  и учитывая обозначение (1.2.6), запишем

$$\begin{aligned} & (jg_1\omega + g_0) - (jr_1\omega + r_0)[r(\omega) + ji(\omega)] = \\ & = [\tau(j\omega)^3 + (1 + \tilde{\psi}_1\tau)(j\omega)^2 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)j\omega + \tilde{\psi}_0][r(\omega) + ji(\omega)]. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Отсюда следуют соотношения для мнимой и вещественной частей (1.2.22)

$$\omega g_1 - r(\omega)\omega r_1 - i(\omega) r_0 = n_1(\omega), \quad (1.2.23)$$

$$g_0 + i(\omega)\omega r_1 - r(\omega) r_0 = n_2(\omega), \quad (1.2.24)$$

где

$$n_1(\omega) = \left[ -\tau\omega^3 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)\omega \right] r(\omega) + \left[ -(1 + \tilde{\psi}_1\tau)\omega^2 + \tilde{\psi}_0 \right] i(\omega), \quad (1.2.25)$$

$$n_2(\omega) = - \left[ -\tau\omega^3 + (\tilde{\psi}_0\tau + \tilde{\psi}_1)\omega \right] i(\omega) + \left[ -(1 + \tilde{\psi}_1\tau)\omega^2 + \tilde{\psi}_0 \right] r(\omega). \quad (1.2.26)$$

Положим вначале  $\omega = \omega_1$ , а затем  $\omega = \omega_2$  и получим систему из четырёх линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $g_0, g_1, r_0, r_1$  искомой передаточной функции регулятора

$$\omega_1 g_1 - r(\omega_1)\omega_1 r_1 - i(\omega_1) r_0 = n_1(\omega_1), \quad (1.2.27)$$

$$\omega_2 g_1 - r(\omega_2)\omega_2 r_1 - i(\omega_2) r_0 = n_1(\omega_2), \quad (1.2.28)$$

$$g_0 + i(\omega_1)\omega_1 r_1 - r(\omega_1) r_0 = n_2(\omega_1), \quad (1.2.29)$$

$$g_0 + i(\omega_2)\omega_2 r_1 - r(\omega_2) r_0 = n_2(\omega_2). \quad (1.2.30)$$

Переходя к численному решению, вычислим по формулам (1.2.25), (1.2.26) значения

$$n_1(10) = -1.7, \quad n_1(30) = -0.78; \quad n_2(10) = 3.2, \quad n_2(30) = 1.78. \quad (1.2.31)$$

Уравнения (1.2.27)-(1.2.30) принимают вид

$$\begin{aligned} 10 g_1 - 10^{-2} r_1 + 3 \cdot 10^{-3} r_0 &= -1.7, \\ 30 g_1 + 16.2 \cdot 10^{-2} r_1 + 7 \cdot 10^{-4} r_0 &= -0.78, \\ g_0 - 3 \cdot 10^{-2} r_1 - 10^{-3} r_0 &= 3.2, \\ g_0 - 2.1 \cdot 10^{-2} r_1 + 5.4 \cdot 10^{-4} r_0 &= 1.78. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим

$$g_0 = 1.4, \quad g_1 = 10; \quad r_0 = -730, \quad r_1 = -36. \quad (1.2.32)$$

Нетрудно видеть, что эти числа совпадают с (1.1.59) для известных параметров объекта. ■

**Процедура 1.2.3. (Решение задачи 1.2.1, основанное на методе частотных параметров)** состоит из операций:

1. экспериментальное определение частотных параметров;
2. построение уравнения качества;
3. аналитическое определение (на основе соотношения вида (1.2.20)) параметров передаточной функции регулятора. ■

### 1.3. Частотное адаптивное управление

#### 1.3.1. Пуск и останов объекта

Продолжим рассмотрение задачи 1.2.1, уточнив некоторые свойства объекта. Для этого введем вектор  $\xi$ , составив его из параметров объекта (1.1.1), (1.1.2) следующим образом

$$\xi = \left[ a_{11} \ \cdots \ a_{1n} \ \cdots \ a_{n1} \ \cdots \ a_{nn} \mid b_1 \ \cdots \ b_n \mid \tilde{m}_1 \ \cdots \ \tilde{m}_n \mid d_1 \ \cdots \ d_n \right]. \quad (1.3.1)$$

Будем называть его *вектором вариантов*. Аналогично определим *границы вектора вариантов*

$$\underline{\xi} = \left[ \underline{a}_{11} \ \cdots \ \underline{a}_{1n} \ \cdots \ \underline{a}_{n1} \ \cdots \ \underline{a}_{nn} \mid \underline{b}_1 \ \cdots \ \underline{b}_n \mid \underline{\tilde{m}}_1 \ \cdots \ \underline{\tilde{m}}_n \mid \underline{d}_1 \ \cdots \ \underline{d}_n \right] \quad (1.3.2)$$

$$\bar{\xi} = \left[ \bar{a}_{11} \ \cdots \ \bar{a}_{1n} \ \cdots \ \bar{a}_{n1} \ \cdots \ \bar{a}_{nn} \mid \bar{b}_1 \ \cdots \ \bar{b}_n \mid \bar{\tilde{m}}_1 \ \cdots \ \bar{\tilde{m}}_n \mid \bar{d}_1 \ \cdots \ \bar{d}_n \right] \quad (1.3.3)$$

где, в частности,  $\underline{a}_{ij}$  и  $\bar{a}_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – элементы матриц  $\underline{A}$  и  $\bar{A}$  границ диапазонов (1.1.14) возможных значений параметров.

Таким образом,

$$\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}. \quad (1.3.4)$$

Граничные вектора  $\underline{\xi}$  и  $\bar{\xi}$  описывают множество  $\Xi$  возможных значений параметров объекта. Таким образом, объект типа В – это объект (1.1.1), (1.1.2), для которого неизвестен вариант

$$\xi \in \Xi. \quad (1.3.5)$$

Введём понятие пуска и останова физического объекта, математической моделью которого служат уравнения (1.1.1), (1.1.2).

**Определение 1.3.1.** Модель (1.1.1), (1.1.2) описывает динамику физического объекта от момента начала его работы, называемого *моментом пуска объекта* ( $t^{nyc}$ ), до момента окончания работы, называемого *моментом останова объекта* ( $t^{ocm}$ ). Физический объект может допускать однократный либо многократный пуск и останов, и тогда он характеризуется интервалом пуск-останов  $[t^{nyc}, t^{ocm}]$  либо совокупностью интервалов  $[t_i^{nyc}, t_i^{ocm}]$  ( $i = \overline{1, \eta}$ ), где  $\eta$  – число пусков. ■

Так, солнечная система, это система с однократным пуском и интервалом пуск-останов:  $[-\infty, \infty]$ ; ракета, выводящая спутник на орбиту, также система с однократным пуском, а её интервал пуск-останов имеет длину в несколько минут. Космический аппарат многоразового использования – это система с многократными пусками и остановами, и она характеризуется совокупностью интервалов пуск-останов.

Приведём ещё пример объекта, для которого понятия пуска и останова также носят буквальный смысл.



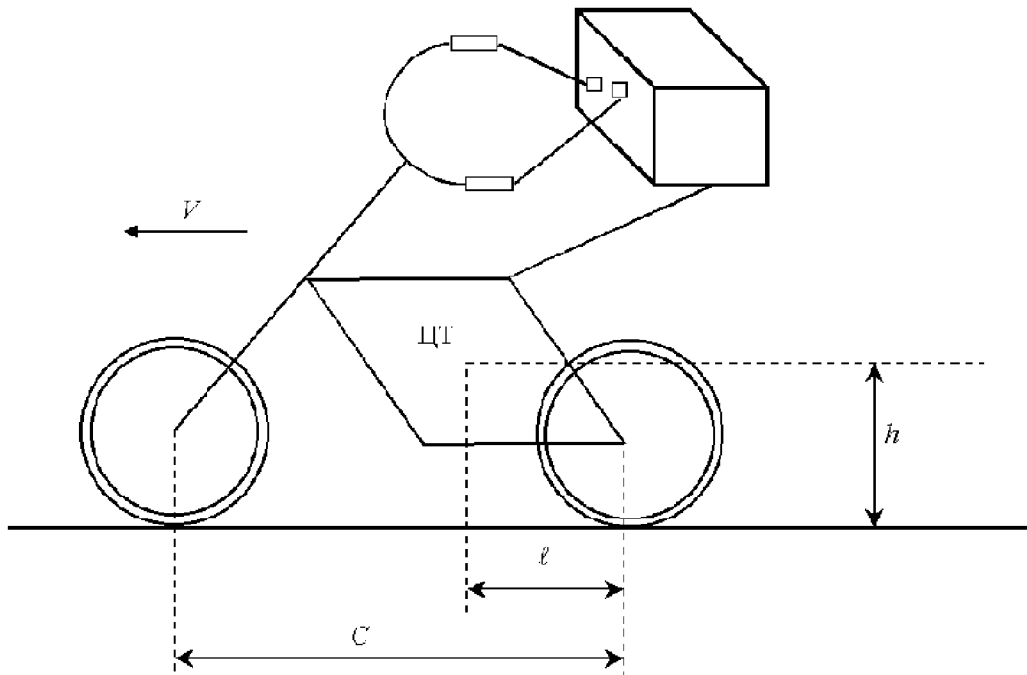


Рис. 1.3.1

Пример 1.3.1. Рассмотрим объект управления – велосипед в задаче о работе-велосипедисте, который должен поддерживать равновесие движущегося велосипеда, (см. рис. 1.3.1).

Велосипед в первом приближении описывается уравнением

$$\ddot{y} - d_0 y = b_1 \dot{u} - b_0 u + f, \quad (1.3.6)$$

где  $y(t)$  – угол отклонения рамы велосипеда от вертикальной плоскости (этот угол измеряется датчиком отклонения, выход датчика также будем обозначать  $y(t)$ ),  $u(t)$  – угол поворота руля велосипеда,  $f(t)$  – внешнее возмущение, параметры

$$d_0 = gh^{-1}, \quad b_1 = lvh^{-1}c^{-1}, \quad b_0 = v^2h^{-1}c^{-1}, \quad (1.3.7)$$

$v$  – скорость велосипеда;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $l$ ,  $h$  – координаты центра тяжести;  $c$  – база велосипеда.

Пусть «робот-велосипедист», предназначенный для выработки сигнала в устройство поворота руля (этот сигнал для сокращения также будем обозначать как  $u(t)$ ), отключён. Осуществим пуск велосипеда, толкнув его вперёд в момент времени  $t_1^{nyc}$ . В момент времени  $t_1^{ocm}$  велосипед остановится (упадёт). Повторим пуск (поднимем велосипед и снова его толкнём вперёд), возникнет второй интервал  $[t_2^{nyc}, t_2^{ocm}]$ , отличающийся от первого и т.д. ■

Здесь можно различить две ситуации. Во-первых, когда моменты пуска и остано-ва зависят от экспериментатора, и, во-вторых, когда эти моменты зависят от свойств

объекта. Так, в примере 1.3.1 остановы (падения) велосипеда определяются свойствами велосипеда, а не желаниями экспериментатора. Аналогично обстоит дело в случае с ракетой, выводящей спутник на орбиту. Моменты пуска и останова обитаемого корабля многоразового использования определяются экспериментатором.

### 1.3.2. Несамотождественные объекты

Далее предполагается, что моменты пуска и останова назначаются экспериментатором в каждом из интервалов пуск-останов. Физический объект описывается уравнениями (1.1.1), (1.1.2), которые могут отличаться лишь параметрами объекта. В связи с этим введём определение.

Определение 1.3.2. Физический объект называется *самотождественным*, если вектор вариантов  $\xi \in \Xi$  остаётся неизменным на всех интервалах пуск-останов, и *несамотождественным*, если хотя бы на одном из этих интервалов имеет место вариант  $\xi \in \Xi$ , отличный от варианта на других интервалах пуск-останов. ■

Пример 1.3.2. Велосипед, рассмотренный в примере 1.3.1, является самотождественным объектом, если толчок велосипеда вперёд осуществляется с одной и той же силой (скоростью  $v$ ) при каждом пуске, а останов осуществляется до его падения. Если скорость  $v$  (сила толчка) будет различной (так как параметры (1.3.7) зависят от скорости) от пуска к пуску, то это уже несамотождественный объект. ■

До сих пор молчаливо предполагалось, что рассматриваемые в задаче 1.2.1 объекты самотождественны, и поэтому использовалась процедура 1.2.2 её решения, которую на физическом уровне можно представить как процедуру 1.3.1.

1. На первом интервале (или нескольких первых интервалах) пуск-останов определяем экспериментально частотные параметры.
2. Вычисляем параметры регулятора.
3. Конструируем регулятор, описываемый уравнениями (1.1.23).
4. Осуществляем рабочий пуск (второй интервал пуск-останов) объекта с регулятором и достигаем через время  $t^{pe2}$  цели управления. ■

### 1.3.3. Структура адаптивного регулятора

Если объект несамотождественный, то может случиться так, что на втором интервале пуск-останов реализуется вариант  $\xi^{(2)} \in \Xi$ , отличный от варианта  $\xi^{(1)}$  на первом интервале, и тогда, построенный по данным первого интервала, регулятор не позволит, вообще говоря, достичь цели управления на втором интервале, так как  $\xi^{(1)} \neq \xi^{(2)}$ .

В этом случае необходимо осуществлять все операции процедуры 1.3.1 в одном физическом устройстве, называемом *частотным адаптивным регулятором*.

Адаптивный регулятор состоит из регулятора (1.1.23) и *частотного адаптера*, выходом которого являются коэффициенты регулятора (1.1.23).

Частотный адаптер содержит *генератор испытательных воздействий* и *фильтр*, необходимые для реализации первой операции процедуры 1.3.1. Адаптер включает в себя также *синтезатор* для определения коэффициентов регулятора.

**Пример 1.3.3.** Приведём структурную схему (рис. 1.3.2) системы с адаптивным регулятором для объекта (1.1.42) с неизвестными параметрами.

Запишем уравнения (1.2.4) фильтра Фурье для фиксированных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в дифференциальной форме, которая следует непосредственно из (1.2.4)

$$\dot{x}_{sk} = y \sin \omega_k t, \quad \dot{x}_{ck} = y \cos \omega_k t \quad k = 1, 2, \quad (1.3.8)$$

$$r(t, \omega_k) = \frac{2}{t - t_0} x_{sk}, \quad i(t, \omega_k) = \frac{2}{t - t_0} x_{ck} \quad k = 1, 2. \quad (1.3.9)$$

В силу (1.2.5) всегда существует время фильтрации  $T_\phi$ , начиная с которого выполняются неравенства

$$|r(T_\phi, \omega_k) - r(\omega_k)| \leq \Delta r_k, \quad |i(T_\phi, \omega_k) - i(\omega_k)| \leq \Delta i_k \quad k = 1, 2, \quad (1.3.10)$$

где  $\Delta r_k$ ,  $\Delta i_k$  ( $k = 1, 2$ ) – наперёд заданные числа, выражающие допустимые погрешности в определении частотных параметров.

По окончании фильтрации решаются уравнения (1.2.27)-(1.2.30), в которые вместо  $r(\omega_k)$  и  $i(\omega_k)$  следует подставить  $r(T_\phi, \omega_k)$  и  $i(T_\phi, \omega_k)$  ( $k = 1, 2$ ). В результате получим коэффициенты регулятора в форме «вход-выход». Затем по формулам (1.1.65) найдём параметры регулятора в форме Коши. Эти параметры передаются из синтезатора в регулятор. Если  $T_p$  – время работы синтезатора (время, затрачиваемое на решение уравнений (1.2.27)-(1.2.30) и (1.1.65), то время адаптации

$$t^* = T_\phi + T_p + T_{\partial\epsilon}, \quad (1.3.11)$$

где  $T_{\partial\epsilon} = T_{p\epsilon\epsilon}$  – время движения объекта (1.1.42) с регулятором (1.1.63), (1.1.64) до момента достижения цели управления.

Отметим, что по истечении времени  $T_\phi + T_p$  адаптер отключается от регулятора и включается регулятор, что осуществляется с помощью ключей КЛ1 и КЛ2, КЛ3, показанных на рис. 1.3.2. ■

### 1.3.4. Алгоритм частотного адаптивного управления

Составим из параметров регулятора (1.1.23) вектор

$$\tilde{\xi}_p = \left[ a_{p11} \cdots a_{p1n} \cdots a_{pn1} \cdots a_{pnn} \mid b_{p1} \cdots b_{pn} \mid d_{p1} \cdots d_{pn} \mid f_p \right]', \quad (1.3.12)$$

который будем называть *вектором настраиваемых коэффициентов*.

Компоненты этого вектора определяются  $2n$  коэффициентами полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  регулятора в форме «вход-выход». Образует из них *вектор существенных настраиваемых коэффициентов*

$$\xi_p = \left[ g_0 \ g_1 \ \cdots \ g_{n-1} \mid r_0 \ r_1 \ \cdots \ r_{n-1} \right]', \quad (1.3.13)$$

который, в свою очередь, выражается через *вектор оценок частотных параметров*

$$h(T_f) = \left[ r(T_f, \omega_1) \ r(T_f, \omega_2) \ \cdots \ r(T_f, \omega_n) \mid i(T_f, \omega_1) \ i(T_f, \omega_2) \ \cdots \ i(T_f, \omega_n) \right]', \quad (1.3.14)$$

компоненты которого являются решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{r}(t, \omega_k) = \frac{1}{t-a} [-r(t, \omega_k) + 2y(t) \sin \omega_k t], \quad r(t_0, \omega_k) = r_{0k} \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.3.15)$$

$$\dot{i}(t, \omega_k) = \frac{1}{t-a} [-i(t, \omega_k) + 2y(t) \cos \omega_k t], \quad i(t_0, \omega_k) = i_{0k} \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.3.16)$$

Эти уравнения нетрудно получить, если продифференцировать соотношения (1.2.4) и положить  $a = t_0 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторое положительное число.

Будем полагать, что вектор начальных частотных параметров  $h(t_0)$ , составленный из начальных условий  $r_{0k}$  и  $i_{0k}$  ( $k = \overline{1, n}$ ), уравнений (1.3.15), (1.3.16), принадлежит некоторому заданному множеству  $H_0$

$$h(t_0) \in H_0. \quad (1.3.17)$$

В качестве множества  $H_0$  можно принять оценки частотных параметров.

Вектора  $\xi_p$  и  $h(T_f)$  связаны соотношением

$$M\xi_p = \bar{n}, \quad (1.3.18)$$

в котором матрица  $M$  и вектор  $\bar{n}$  составлены из компонент вектора  $h(T_f)$ . Примером системы (1.3.18) служат уравнения (1.2.27)-(1.2.30).

Решим линейное матричное уравнение (1.3.18) и получим

$$\xi_p = M^{-1}\bar{n}. \quad (1.3.19)$$

Структурная схема системы с частотным адаптивным регулятором имеет в общем случае вид, показанный на рис. 1.3.2

В этой схеме выход регулятора (1.1.23)  $u$  обозначен как  $u_{ynp}$  ( $u$  – управляющее), а ключи КЛ1 и КЛ2 отключают адаптер от регулятора после окончания фильтрации (в момент времени  $t = T_f$ ) и решения (за время  $T_p$ ) уравнения (1.3.18) с последующим нормированием вектора  $\xi_p$ . Ключ КЛ3 включает регулятор.

Определение 1.3.3. Система (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23), (1.3.15) (1.3.16), (1.3.18) называется *адаптивной* по отношению к целевому условию (1.1.24), если для любого варианта  $\xi \in \Xi$  и любого  $h(t_0) \in H_0$  найдётся такой момент времени  $t^*$ , что для всех  $t \geq t^*$  выполняется (1.1.24). ■

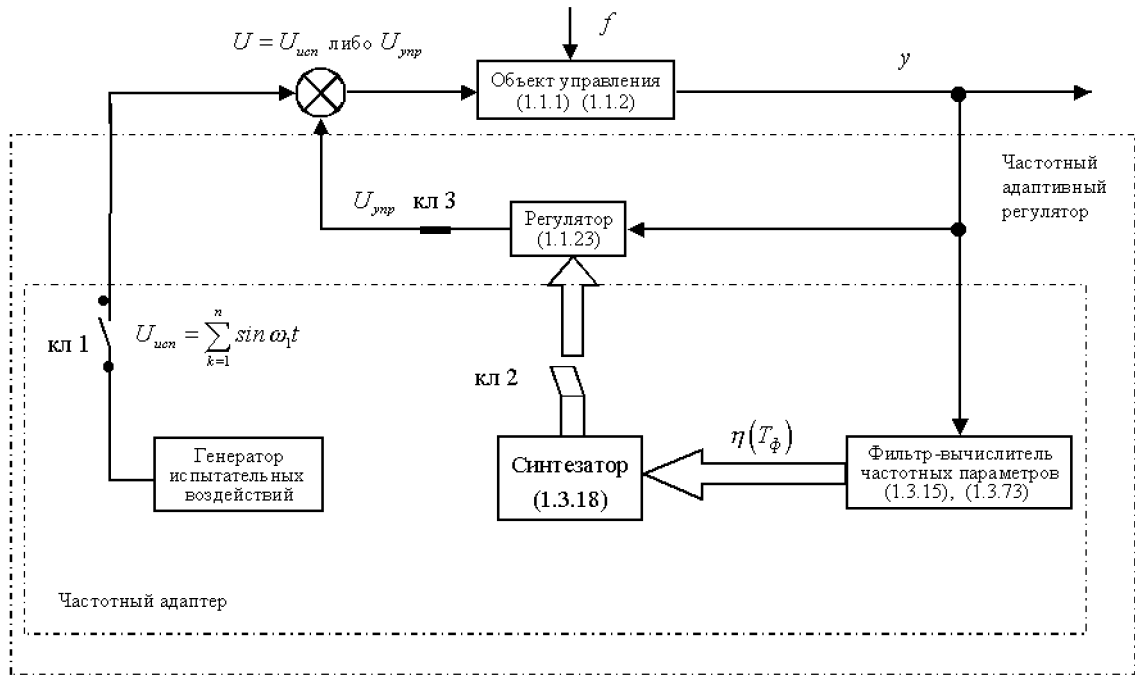


Рис. 1.3.2

1.3.5. Многорежимные самождественные объекты

Рассмотрим многорежимный объект (1.1.3) с известными параметрами (объект типа С). Его можно представить себе как многократно запускаемый объект типа А и тогда, записывая регулятор в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p^{(k)} x_p + b_p^{(k)} y, & x_p(t_k) &= x_p^{(0)}, & k &= 1, 2, \dots, \\ u &= d_p^{(k)} x_p + f_p^{(k)} y, \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

искать его параметры с помощью известных методов.

При этом в задаче 1.1.1, решаемой для каждого режима, время регулирования  $t_{pez}^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) должно выбираться из условия

$$t_{pez}^k \leq t_k - t_{k-1}. \tag{1.3.21}$$

Переходя к многорежимным объектам с неизвестными параметрами (объектам типа D), введём вектора режимных вариантов

$$\xi_t^k = \left\| \xi_t^{k'}, t_k \right\|' \in \Xi_t^k \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.3.22}$$

составленные (аналогично (1.3.1)) из параметров объекта (1.1.3) в  $k$ -том режиме и момента окончания этого режима.

Граничные вектора  $\tilde{\xi}_t^k$  и  $\bar{\xi}_t^k$ , являющиеся оценками параметров и времени  $k$ -того режима, определяют множества  $\Xi_t^k$  возможных значений векторов  $\xi_t^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Рассмотрим случай, когда число режимов конечно и равно  $\varkappa$ . Тогда, если интервал

$$[t_0, t_{\varkappa-1}] \in [t^{nyc}, t^{ocm}] \tag{1.3.23}$$

и многорежимный объект является самотождественным (неизвестные вектора режимных вариантов сохраняются при каждом пуске), то для определения коэффициентов регулятора (1.3.20) можно применить метод частотных параметров, если

$$T_{\phi}^{*k} \leq t_k - t_{k-1}, \quad (1.3.24)$$

где  $T_{\phi}^{*k}$  – предельное время фильтрации (время определения частотных параметров) в  $k$ -том режиме.

Неравенство (1.3.24) выделяет множество многорежимных объектов, для которых применим метод частотных параметров.

### 1.3.6. Многорежимные несамотождественные объекты

Пусть теперь многорежимный объект несамотождественен (неизвестные вектора режимных параметров отличаются при различных пусках объекта). В этом случае естественно использовать частотный адаптивный регулятор, приведённый на рис. 1.3.2 Однако здесь есть ряд особенностей.

*Во-первых*, частотный адаптер для несамотождественного одnoreжимного объекта (объекта типа В) отключается (КЛ1 и КЛ2) по окончании фильтрации и расчёта коэффициентов регулятора, и с этого момента к объекту подключается регулятор (КЛ3).

Для многорежимного объекта регулятор и адаптер должны работать одновременно, за исключением первого режима, когда сохраняется схема рис. 1.3.2.

*Во-вторых*, гармоническое испытательное воздействие, поступающее на вход объекта, содержит сигнал  $u_{ucn} = \sum_{i=1}^n \sin \omega_i t$ , вырабатываемый генератором испытательных воздействий, и гармонические составляющие  $u_{ynp}^{zap.m}$  сигнала  $u_{ynp}$ , снимаемого с выхода регулятора. Поэтому для определения фактического испытательного воздействия

$$u_{ucn}^{\phi ak} = u_{ucn} + u_{ynp}^{zap.m} \quad (1.3.25)$$

необходима фильтрация сигнала с выхода регулятора.

*В-третьих*, поскольку на вход объекта поступает вместо  $u_{ucn} = \sum_{i=1}^n \sin \omega_i t$  сигнал (1.3.25), который можно записать как

$$u_{ucn}^{\phi ak} = \sum_{i=1}^n \nu_i \sin \omega_i t + \sum_{i=1}^n \gamma_i \cos \omega_i t, \quad (1.3.26)$$

то выходами фильтра Фурье будут функции

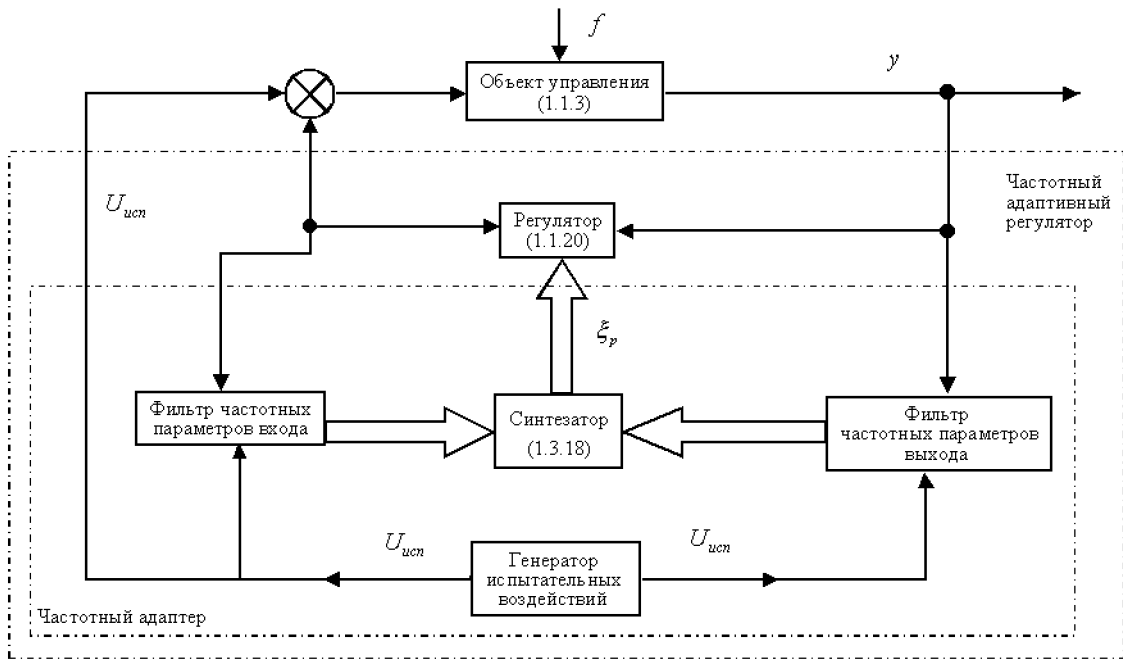


Рис. 1.3.3

$\hat{\alpha}_i(t)$ ,  $\hat{\beta}_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), обладающие свойствами

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_i(t) = \alpha_i, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\beta}_i(t) = \beta_i \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3.27)$$

Числа  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  связаны с частотными параметрами  $r(\omega_i)$  и  $i(\omega_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) соотношениями

$$r(\omega_i) = \frac{\nu_i \alpha_i + \gamma_i \beta_i}{\nu_i^2 + \gamma_i^2}, \quad i(\omega_i) = \frac{\nu_i \beta_i - \gamma_i \alpha_i}{\nu_i^2 + \gamma_i^2} \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3.28)$$

Параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) описывают (при достаточно больших  $t$ ) гармоническую составляющую  $y^{ap}(t)$  выхода  $y(t)$  объекта

$$y^{ap}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \omega_i t + \sum_{i=1}^n \beta_i \cos \omega_i t. \quad (1.3.29)$$

Эти числа зависят как от свойств объекта, так и от параметров  $\nu_i$  и

$\gamma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) испытательного воздействия (1.3.26). Будем называть  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) частотными параметрами выхода объекта, возбуждённого испытательным воздействием (1.3.26) с коэффициентами  $\nu_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), которые назовём частотными параметрами входа объекта.

Структурная схема частотного адаптивного регулятора для многорежимного объекта приведена на рис. 1.3.3.

На этом рисунке  $\xi_p^i$  – вектор настраиваемых коэффициентов (1.3.12) в  $i$ -том режиме. Для простоты полагаем, что моменты  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) перехода с режима на режим известны. Сигнал с генератора испытательных воздействий используется в фильтрах входа и выхода объекта для построения функций  $y(t) \sin \omega_i t$ ,  $y(t) \cos \omega_i t$  с использованием фактических (а не расчётных) частот, создаваемых генератором.

Фильтры входа и выхода объекта функционируют в соответствии с уравнениями (1.3.15), (1.3.16), где следует заменить  $r(t, \omega_i)$  на  $\alpha_i(t)$ , а  $i(t, \omega_i)$  на  $\beta_i(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а для фильтров входа –  $y(t)$  на  $u_{ynp}(t)$ .

В синтезаторе вычисляются на основе (1.3.28) частотные параметры объекта, решаются уравнения (1.3.18) и формируются вектора  $\xi_p^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) коэффициентов регулятора.

## Приложения к главе 1

### 1.П. Параметрические возмущения систем автоматического управления

#### 1.П.1. Параметрические возмущения. Их уровни

Далее для простоты будем рассматривать свободное движение системы (1.1.17), (1.1.18), (1.1.28), возбуждённое начальными отклонениями.

Уравнения (1.1.17), (1.1.18), (1.1.28) в этом случае принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (1.П.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_p^{(0)}. \quad (1.П.2)$$

Начальные отклонения

$$\mathbf{x}^{(0)'} \mathbf{x}^{(0)} \leq \delta^2, \quad \mathbf{x}_p^{(0)'} \mathbf{x}_p^{(0)} \leq \delta_p^2, \quad (1.П.3)$$

где  $\delta$  и  $\delta_p$  – заданные числа.

Матрицы  $A$  и  $B$  объекта (1.П.1) представим как (1.1.11)

$$A = A^* + \Delta A, \quad B = B^* + \Delta B, \quad (1.П.4)$$

где  $A^*$  и  $B^*$  – известные матрицы чисел, элементы которых называются далее *расчётными* либо *номинальными параметрами*;  $\Delta A$  и  $\Delta B$  – неизвестные матрицы, которые называются *параметрическими возмущениями*.

Природа параметрических возмущений может быть различной: это неполное знание программного движения, на основе которого строятся уравнения объекта, изменение параметров при различных пусках объекта, старение его элементов, разброс параметров в пределах технологических допусков.



Можно различить два уровня параметрических возмущений: малый и большой.

Причиной малых параметрических возмущений является разброс параметров объекта в пределах технологических допусков, «старение» элементов. Большие параметрические возмущения вызываются существенным изменением режимов работы объекта, малой информацией о программном его движении.

Количественно малые возмущения определим неравенствами

$$|\Delta a_{ij}| < |a_{ij}^*|, \quad |\Delta b_{ik}| < |b_{ik}^*| \quad i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.П.5)$$

где  $a_{ij}^*$ ,  $b_{ik}^*$ ,  $\Delta a_{ij}$ ,  $\Delta b_{ik}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) – элементы матриц  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  – соответственно.

Большие параметрические возмущения определяются соотношениями

$$|\Delta a_{ij}| \gg |a_{ij}^*|, \quad |\Delta b_{ik}| \gg |b_{ik}^*| \quad i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.П.6)$$

Среди малых возмущений выделим *инфинизимальные параметрические возмущения*, которые удовлетворяют условиям

$$|\Delta a_{ij}| < \varepsilon, \quad |\Delta b_{ik}| < \varepsilon \quad i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.П.7)$$

где  $\varepsilon$  – произвольные сколь угодно малые числа, а среди больших параметрических возмущений выделим *параметрические возмущения с интервальной неопределенностью*.

Для этих возмущений

$$\Delta a_{ij}^* \leq \Delta a_{ij} \leq \Delta a_{ij}^{**}, \quad \Delta b_{ik}^* \leq \Delta b_{ik} \leq \Delta b_{ik}^{**} \quad i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.П.8)$$

где  $\Delta a_{ij}^*$ ,  $\Delta b_{ik}^*$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) – заданные числа, характеризующие нижнюю границу возможных значений параметров;  $\Delta a_{ij}^{**}$ ,  $\Delta b_{ik}^{**}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) – заданные числа – верхние грани значений параметров.

Наряду с системой (1.П.1), (1.П.2) будем рассматривать одномерную систему, в которой  $y(t)$  и  $u(t)$  являются скалярами ( $r = m = 1$ ). Одномерная система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (1.П.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + b_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = d_p\mathbf{x}_p + f_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_p^{(0)}. \quad (1.П.10)$$

где  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}'$  –  $n$ -мерные вектора;  $\mathbf{b}_p$ ,  $\mathbf{d}'_p$  –  $n_p$ -мерные вектора;  $f_p$  – число.

Отметим, что не только объект, но и регулятор системы (1.П.1), (1.П.2) подвержен параметрическим возмущениям, вызванным неточной реализацией алгоритма управления (1.П.2), выходом из строя (поломкой) элементов регулятора и т.п. Однако для простоты изложения ограничимся далее лишь параметрическими возмущениями объекта.

Для анализа устойчивости одномерной системы (1.П.9), (1.П.10) при параметрических возмущениях запишем её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \quad (1.П.11)$$

Это выражение следует из уравнения (1.1.38), если в нём положить  $f = 0$ .

Представим этот полином в несколько иной форме. Обозначая

$$d^c(s) = d(s)g(s), \quad k(s) = -b(s)r(s) \quad (1.П.12)$$

получим

$$d^u(s) = d^c(s) + k(s). \quad (1.П.13)$$

Полином  $d^c(s)$  называется характеристическим полиномом разомкнутой системы (1.П.9), (1.П.10). Его нетрудно получить, если положить в (1.П.9), (1.П.10)  $u = 0$  либо  $y = 0$ . Это означает размыкание системы на входе объекта либо регулятора соответственно. Операция размыкания может быть осуществлена также, если положить  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  либо  $\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$  и  $f_p = 0$ . При этих условиях  $d^u(s) = d^c(s)$ .

Полиномы, вещественные части корней которых отрицательны, далее будем называть *гурвицевыми полиномами*.

Из структуры полиномов (1.П.12) следует, что

$$d^c(s) = d_{n_c}^c s^{n_c} + d_{n_c-1}^c s^{n_c-1} + \dots + d_1^c s + d_0^c, \quad (d_{n_c}^c = 1) \quad (1.П.14)$$

$$k(s) = k_{n_c} s^{n_c} + k_{n_c-1} s^{n_c-1} + \dots + k_1 s + k_0, \quad (1.П.15)$$

где

$$n_c = n + n_p. \quad (1.П.16)$$

## 1.П.2. Явление параметрической (аддитивной) компенсации

Реальные значения коэффициентов полиномов (1.П.14), (1.П.15) представляют собой сумму расчётных значений и параметрических возмущений

$$d_i^c = d_i^{*c} + \Delta d_i, \quad k_i = k_i^* + \Delta k_i \quad i = \overline{1, n_c}, \quad (1.П.17)$$

где числа  $d_i^{*c}$  и  $k_i^*$  ( $i = \overline{1, n_c}$ ) определяются матрицами  $A^*$ ,  $A_p^*$ , векторами  $\mathbf{b}^*$ ,  $\mathbf{b}_p^*$ ,  $\mathbf{d}^*$ ,  $\mathbf{d}_p^*$  и числом  $f_p^*$ , а параметрические возмущения  $\Delta d_i^c$  и  $\Delta k_i$  ( $i = \overline{1, n_c}$ ) характеристического полинома замкнутой системы  $d^u(s)$  зависят от параметрических возмущений  $\Delta A$  и  $\Delta \mathbf{b}$ .

Таким образом,

$$d^u(s) = d^{*u}(s) + \Delta d^u(s), \quad (1.П.18)$$

где

$$d^{*u}(s) = d^{*c}(s) + k^*(s) = \sum_{i=0}^{n_c} (d_i^{*c} + k_i^*) s^i, \quad (1.П.19)$$

$$\Delta d^u(s) = \Delta d^c(s) + \Delta k(s) = \sum_{i=0}^{n_c} (\Delta d_i^c + \Delta k_i) s^i. \quad (1.П.20)$$

Рассмотрим два случая связи коэффициентов полиномов  $d^{*c}(s)$  и  $k^*(s)$ .

**1 случай:** коэффициенты полиномов  $d^{*c}(s)$  и  $k^*(s)$  удовлетворяют равенствам

$$k_{n_c-j}^* = -d_{n_c-j}^{*c} \quad j \in \overline{0, \gamma}, \quad \gamma \leq n_c. \quad (1.П.21)$$

**2 случай:** коэффициенты полиномов  $d^{*c}(s)$  и  $k^*(s)$  связаны соотношениями

$$k_\rho^* = -d_\rho^{*c} + \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0, \alpha}, \quad \alpha \leq n_c, \quad (1.П.22)$$

где  $\varepsilon_\rho^*$  – заданные положительные числа значительно меньше абсолютных значений чисел  $k_\rho^*$  и  $d_\rho^{*c}$ , ( $\rho \in \overline{0, \alpha}$ ).

Это можно записать как

$$\varepsilon_\rho^* \ll |k_\rho^*|, |d_\rho^{*c}| \quad \rho \in \overline{0, \alpha}. \quad (1.П.23)$$

Если выполняются равенства (1.П.21), то коэффициенты характеристического полинома

$$d^u(s) = d_{n_c}^u s^{n_c} + d_{n_c-1}^u s^{n_c-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u \quad (1.П.24)$$

имеют вид

$$d_{n_c-j}^u = 0 \quad j \in \overline{0, \gamma}. \quad (1.П.25)$$

Во втором случае коэффициенты

$$d_{n_c-\rho}^u = \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0, \alpha}. \quad (1.П.26)$$

Это означает, что расчётное значение по крайней мере одного из коэффициентов характеристического полинома получается в результате вычитания двух больших по модулю чисел.

Результатом вычитания является малое по величине число.

Параметрические возмущения могут оказаться больше этой разности, что приведёт (при соответствующих знаках параметрических возмущениях) к неустойчивости системы.

Последнее возможно, если

$$|\Delta d_\rho^c + \Delta k_\rho| > \varepsilon_\rho^* \quad \rho \in \overline{0, \alpha}. \quad (1.П.27)$$

В первом случае, когда выполняется (1.П.25), нарушение устойчивости системы может произойти при сколь угодно малых (инфинизимальных) параметрических возмущениях.

Равенства (1.П.21) выражают явления полной параметрической (аддитивной) компенсации. Когда имеют место соотношения (1.П.22), (1.П.23) будем говорить о неполной параметрической (аддитивной) компенсации.

Изложенное наводит на мысль, что каждая система автоматического регулирования должна характеризоваться некоторым показателем, определяющим допустимое отклонение её параметров от расчётных значений, при которых сохраняется её устойчивость. Такой показатель будем называть *степенью грубости*.

Определение П.1.1. Система автоматического регулирования имеет нулевую степень грубости, если сколь угодно малые параметрические возмущения могут привести к потере её асимптотической устойчивости. ■

Определение П.1.2. Система автоматического регулирования имеет малую степень грубости, если она может стать неустойчивой при малых (но конечных) параметрических возмущениях. Это определение можно перефразировать так, система имеет малую степень грубости (грубая в «малом»), если существуют положительные числа  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\bar{\varepsilon}_{ik}^*$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ), определяющие множество параметрических возмущений как

$$|\Delta a_{ij}| < \varepsilon_{ij}^*, \quad |\Delta b_{ik}| < \bar{\varepsilon}_{ik}^* \quad i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, m} \quad (1.П.28)$$

такие, что система сохраняет асимптотическую устойчивость. ■

Определение П.1.3. Если при параметрических возмущениях из заданных интервалов (1.П.8) система является асимптотически устойчивой, то она имеет большую степень грубости (грубая в «большом»). ■

Определение П.1.4. Если система сохраняет свойство асимптотической устойчивости при любых параметрических возмущениях, то она называется грубой в «целом». ■

Нетрудно заметить аналогию этих определений с соответствующими определениями теории устойчивости. Так, аналогом систем с нулевой степенью грубости являются неустойчивые системы, и поэтому системы с нулевой степенью грубости далее будем называть для простоты *негрубыми системами*. Понятие грубости в «малом» аналогично понятию устойчивости в «малом», а грубость в «большом» – устойчивости в «большом» и т.д. Однако, это только аналогия, так как система грубая в «малом», может быть устойчивой в «целом», что имеет место в рассматриваемых здесь и далее линейных стационарных системах.

Равенство (1.П.21), описывающее явление полной параметрической (аддитивной) компенсации, выступает как *алгебраический критерий нулевой степени грубости*, а соотношения (1.П.22), (1.П.23) – это *алгебраический критерий малой степени грубости*.

### 1.П.3. Неявная параметрическая (аддитивная) компенсация

Соотношения (1.П.21) и (1.П.23) выражают наличие взаимно-уничтожающихся (либо почти взаимно-уничтожающихся) подобных членов при формировании полинома замкнутой системы  $d^u(s)$ .

Однако такое взаимное уничтожение подобных членов может происходить и при построении полиномов  $b(s)$  и  $r(s)$ . Такие случаи будем называть явлением *неявной параметрической (аддитивной) компенсации*. Приведём пример такой компенсации.

Пример П.1.1. Пусть объект (1.П.9) описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + 3.01u, \quad \dot{x}_2 = 3x_1 - 10x_2 - 10u; \quad y = x_1, \quad (1.П.29)$$

а регулятор (1.П.10) имеет вид

$$u = -100y. \quad (1.П.30)$$

На основе формул (2.1.10), (2.1.8) следующей главы построим

$$b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+10 & 3 \\ 3 & s+1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 3.01 \\ -10 \end{bmatrix} = 3.01s + 30.1 - 30 = 3.01s + 0.1; \quad (1.П.31)$$

$$d(s) = \det \begin{pmatrix} s+1 & -3 \\ -3 & s+10 \end{pmatrix} = s^2 + 11s + 1, \quad g(s) = 1, \quad r(s) = -100. \quad (1.П.32)$$

В соответствии с (1.П.12) заключаем, что

$$\begin{aligned} d^c(s) &= d(s) = s^2 + 11s + 1, & k(s) &= 100(3.01s + 0.1), \\ d^u(s) &= d(s) + k(s) = s^2 + 312s + 11. \end{aligned} \quad (1.П.33)$$

Отсюда следует, что система (1.П.29), (1.П.30) – асимптотически устойчива.

Допустим теперь, что коэффициент 3.01 при управлении в первом из уравнений (1.П.29) отличается от расчётного на 0.6% и составляет 2.99.

Тогда

$$b(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} s+10 & 3 \\ 3 & s+1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.99 \\ -10 \end{bmatrix} = 2.99s + 29.9 - 30 = 2.99s - 0.1,$$

а полином

$$d^u(s) = s^2 + 11s + 1 + 299s - 10 = s^2 + 310 - 10. \quad (1.П.34)$$

Причиной потери устойчивости при малых параметрических возмущениях в этой системе является неявная параметрическая компенсация, которая происходит при построении полинома  $b(s)$ , так как свободный член этого полинома является результатом вычитания близких по абсолютной величине чисел 30.1 и 30 в (1.П.31). ■

### 1.П.4. Возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезируемых на основе методов пространства состояний

На первый взгляд может показаться, что параметрическая (аддитивная) компенсация (полная и неполная) – редкое явление, возникающее лишь при специальном (искусственном) подборе параметров объекта и регулятора. В действительности же параметрическая (аддитивная) компенсация часто присуща системам регуляторы которых получены с использованием методов пространства состояний (аналитического конструирования регуляторов, модального управления, систем с устройствами восстановления переменных состояний).

Это объясняется тем, что в постановке задач, решаемых этими методами, не содержится требования грубости синтезируемых на основе этих методов систем. Отметим, кстати, что в классическом методе синтеза – методе ЛАЧХ – в косвенной форме содержится требование грубости, как ограничение наименьших запасов устойчивости по фазе и модулю.

Ниже в п. 1.П.5-1.П.7 показана возможная негрубость и малая степень грубости систем, синтезированных на основе процедур АКОР и модального управления. Кроме того, в п. 1.П.6 показано, что эквивалентные (в смысле сохранения характеристического полинома) преобразования системы, связанные с восстановлением (наблюдением) переменных состояний, является неэквивалентными, в смысле грубости исходной и преобразованной систем.

### 1.П.5. Системы с непосредственным устройством восстановления

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 - a_2x_1 + b_2u, \quad \dot{x}_2 = x_3 - a_1x_1 + b_1u, \quad \dot{x}_3 = -a_0x_1 + b_0u. \quad (1.П.35)$$

Для этого объекта найдём на основе того или иного метода синтеза регулятор

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad (1.П.36)$$

при котором система (1.П.35), (1.П.36) асимптотически устойчива. Пусть реализация этого регулятора затруднена тем, что из трёх переменных состояний, входящих в закон управления (1.П.36), непосредственному измерению доступна лишь переменная  $x_1$ .

Таким образом

$$y = x_1. \quad (1.П.37)$$

В связи с этим возникает задача восстановления (наблюдения) переменных состояний  $x_2$  и  $x_3$  по измеряемой переменной  $y$  и её производным.

Одна из возможных процедур построения алгоритма восстановления заключается в следующем: дифференцируя (1.П.37) дважды в силу (1.П.35), получим систему алгебраических уравнений, разрешая которую относительно неизвестных  $x_2$  и  $x_3$  получаем алгоритм восстановления. Устройство, построенное на основе этого алгоритма, называется *непосредственным устройством восстановления*.

В рассматриваемом случае

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 - a_2y + b_2u, \quad (1.П.38)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 - a_2\dot{y} + b_2\dot{u} = x_3 - a_1y + b_1u - a_2\dot{y} + b_2\dot{u}. \quad (1.П.39)$$

Отсюда следует алгоритм восстановления

$$x_2 = \dot{y} + a_2y - b_2u, \quad x_3 = \ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y - b_1u - b_2\dot{u}. \quad (1.П.40)$$

Подставим (1.П.40) в (1.П.36), получим уравнение регулятора

$$g_1\dot{u} + g_0u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0y, \quad (1.П.41)$$

где

$$g_1 = c_3b_2, \quad g_0 = 1 + c_2b_2 + c_3b_1; \quad (1.П.42)$$

$$r_2 = c_3, \quad r_1 = c_2 + c_3a_2, \quad r_0 = c_1 + c_2a_2 + c_3a_1. \quad (1.П.43)$$

Рассмотрим теперь характеристический полином полученной системы (1.П.35), (1.П.37), (1.П.41). Для удобства построения этого полинома запишем на основе (1.П.35), (1.П.37) уравнение объекта относительно переменной  $y$ . Для этого продифференцируем первое уравнение системы (1.П.35) с учётом второго, затем продифференцируем полученное уравнение с учётом третьего уравнения этой системы. Тогда получим уравнение объекта

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y + a_0y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u. \quad (1.П.44)$$

Характеристический полином системы (1.П.41), (1.П.44) имеет вид

$$\begin{aligned} d^u(s) &= d_4^u s^4 + d_3^u s^3 + d_2^u s^2 + d_1^u s + d_0^u = \\ &= (s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)(g_1s + g_0) - (b_2s^2 + b_1s + b_0)(r_2s^2 + r_1s + r_0) = \\ &= (g_1 - b_2r_2)s^4 + (a_2g_1 + g_0 - b_1r_2 - b_2r_1)s^3 + (a_1g_1 + a_2g_0 - \\ &\quad - b_0r_2 - b_1r_1 - b_2r_0)s^2 + (a_0g_1 + a_1g_0 - b_0r_1 - b_1r_0)s + (a_0g_0 - b_0r_0). \end{aligned} \quad (1.П.45)$$

Учитывая (1.П.42), (1.П.43), получим

$$d_4^u = g_1 - b_2r_2 = c_3b_2 - b_2c_3 = 0, \quad (1.П.46)$$

$$d_3^u = a_2g_1 + g_0 - b_1r_2 - b_2r_1 = 1 + c_2b_2 + c_3b_1 + c_3b_2a_2 - b_2(c_2 + c_3a_2) - b_1c_3 = 1. \quad (1.П.47)$$

Из (1.П.46) следует, что система (1.П.41), (1.П.44) обладает нулевой степенью грубости. Эта негрубая система теряет свойство асимптотической устойчивости при сколь угодно малых возмущениях параметра  $b_2$ . Действительно, параметр  $g_1$  регулятора (1.П.41) содержит в соответствии с (1.П.43) расчётное значение  $b_2$ , а это же число  $b_2$ , входящее в  $b_2 r_2$  в выражении (1.П.46), – это реализовавшееся в объекте значение этого параметра, которое может отличаться от расчётного. Другими словами,  $b_2$  дважды входит в выражение (1.П.46), однако оно реализуется различными устройствами:  $b_2$  из  $c_3 b_2$  – в регуляторе, а  $b_2$  в произведении  $b_2 c_3$  – в объекте.

Регуляторы вида (1.П.41) часто называют физически нереализуемыми, потому что в правой его части содержатся «чистые» производные измеряемой переменной, порядок которых превышает порядок левой части. Это обстоятельство учитывают при синтезе регуляторов и ищут (1.П.36) в виде дифференциального уравнения

$$\tilde{g}_2 \ddot{u} + \tilde{g}_1 \dot{u} + \tilde{g}_0 u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3, \quad (1.П.48)$$

где  $\tilde{g}_i$  ( $i = \overline{0, 2}$ ) – достаточно малые числа.

Используя алгоритм восстановления (1.П.40), получим на основе (1.П.48) уравнение регулятора

$$\tilde{g}_2 \ddot{u} + (\tilde{g}_1 + g_1) \dot{u} + (\tilde{g}_0 + g_0) u = r_2 \ddot{y} + r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad (1.П.49)$$

где  $g_1, g_0, r_2, r_1, r_0$  определяются как и ранее по формулам (1.П.42), (1.П.43).

Характеристический полином системы (1.П.44), (1.П.49)

$$\tilde{d}^u(s) = \tilde{d}_4^u s^4 + \tilde{d}_3^u s^3 + \tilde{d}_2^u s^2 + \tilde{d}_1^u s + \tilde{d}_0^u, \quad (1.П.50)$$

где

$$\tilde{d}_4^u = \tilde{g}_1 + c_3 b_2 - b_2 c_3 = \tilde{g}_1, \quad (1.П.51)$$

$$\tilde{d}_3^u = 1 + c_2 b_2 + c_3 b_1 + g_0 + c_3 b_2 a_2 + \tilde{g}_1 a_2 - b_2(c_2 + c_3 a_2) - b_1 c_3 = 1 + g_0 + \tilde{g}_1 a_2 \quad (1.П.52)$$

Из этих выражений следует, что система (1.П.44), (1.П.49) обладает малой степенью грубости, если

$$|c_3 b_2| \gg \tilde{g}_1 \quad (1.П.53)$$

либо

$$|c_2 b_2 + c_3 b_1 + c_3 b_2 a_2| \gg 1 + \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 a_2. \quad (1.П.54)$$

В заключение приведём уравнение (1.П.49) к виду (1.П.23). В связи с этим введём переменные

$$x_{p1} = \tilde{g}_2 u - r_2 y, \quad x_{p2} = \tilde{g}_2 \dot{u} + (\tilde{g}_1 + g_1) u - r_2 \dot{y} - r_1 y. \quad (1.П.55)$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x}_{p1} = x_{p2} + (\tilde{g}_1 + g_1) u - r_1 y. \quad (1.П.56)$$



Подставим второе из выражения (1.П.55) в (1.П.56) и получим

$$\dot{x}_{p2} = -(\tilde{g}_0 + g_0)u + r_0y. \quad (1.П.57)$$

Исключая из этих уравнений переменную  $u$ , получим систему вида (1.1.23)

$$\dot{x}_{p1} = x_{p2} + \frac{\tilde{g}_1 + g_1}{\tilde{g}_2}x_{p1} + \left( \frac{\tilde{g}_1 + g_1}{\tilde{g}_2}r_2 - r_1 \right) y, \quad (1.П.58)$$

$$\dot{x}_{p2} = \frac{\tilde{g}_0 + g_0}{\tilde{g}_2}x_{p1} + \left( \frac{\tilde{g}_0 + g_0}{\tilde{g}_2}r_2 + r_0 \right) y, \quad (1.П.59)$$

$$u = \frac{1}{\tilde{g}_2}x_{p1} + \frac{r_2}{\tilde{g}_2}y. \quad (1.П.60)$$

Совокупность уравнений (1.П.35), (1.П.37), (1.П.58)-(1.П.60) образует систему вида (1.П.1), (1.П.2), которая при условии (1.П.53) либо (1.П.54) обладает малой степенью грубости.

## 1.П.6. Аналитически сконструированные системы

Рассмотрим следующую задачу об оптимальном управлении: пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + d_2\dot{y} + d_1y + d_0y = b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0u. \quad (1.П.61)$$

Требуется определить коэффициенты регулятора

$$\sum_{i=0}^{\gamma_1} g_i u^{(i)} = \sum_{i=0}^{\gamma_2} r_i y^{(i)}, \quad (1.П.62)$$

такие, чтобы система (1.П.61), (1.П.62) была асимптотически устойчивой и на её движениях, возбуждённых произвольными начальными отклонениями

$$y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n0} \quad (1.П.63)$$

минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}y^2 + u^2) dt, \quad (1.П.64)$$

в котором  $q_{11}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – заданные положительные числа.

Это хорошо известная задача об аналитическом конструировании регуляторов (задача АКОР).

Опишем её решение на основе уравнений Эйлера-Пуассона классического вариационного исчисления.

Введём в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L = q_{11}y^2 + u^2 + \lambda(t) \left( \ddot{y} + d_2\dot{y} + d_1y + d_0y - b_2\ddot{u} - b_1\dot{u} - b_0u \right). \quad (1.П.65)$$

Тогда уравнение Эйлера-Пуассона примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = 0, \quad (1.П.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{u}} = 0, \quad (1.П.67)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (1.П.68)$$

Подставляя в эти уравнения выражение (1.П.65), получим соответственно

$$2q_{11}y - d(-s)\lambda = 0, \quad 2u - b(-s)\lambda = 0, \quad d(s)y = b(s)u, \quad (1.П.69)$$

где

$$d(s) = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0, \quad b(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0. \quad (1.П.70)$$

Исключая переменные  $u$ ,  $\lambda$ , получим уравнение для экстремалей вариационной задачи

$$[d(s)d(-s) + q_{11}b(s)b(-s)]y = 0. \quad (1.П.71)$$

Характеристический полином

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + q_{11}b(s)b(-s) \quad (1.П.72)$$

является полиномом чётных степеней  $s$ , и поэтому его можно представить в форме

$$\Delta(s) = \delta(s)\delta(-s), \quad (1.П.73)$$

где  $\delta(s) = s^3 + \delta_2s^2 + \delta_1s + \delta_0$  – полином, корни которого имеют отрицательные вещественные части.

Из условия асимптотической устойчивости следует, что функционал (1.П.64) со связями (1.П.61) достигает минимума на кривых, являющихся решением уравнения

$$(s^3 + \delta_2s^2 + \delta_1s + \delta_0)y = 0. \quad (1.П.74)$$

С другой стороны, характеристический полином системы (1.П.61), (1.П.62) имеет вид

$$d^u(s) = (s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0)(g_{\gamma_1}s^{\gamma_1} + g_{\gamma_1-1}s^{\gamma_1-1} + \dots + g_1s + g_0) - \\ - (b_2s^2 + b_1s + b_0)(r_{\gamma_2}s^{\gamma_2} + r_{\gamma_2-1}s^{\gamma_2-1} + \dots + r_1s + r_0). \quad (1.П.75)$$

Очевидно, что оптимальный регулятор, разрешающий задачу АКОР, должен быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$\delta(s) = d^u(s). \quad (1.П.76)$$

Минимальные значения степеней  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которых это равенство может быть достигнуто, равны соответственно 1 и 2, таким образом регулятор имеет вид

$$g_1\dot{u} + g_0u = r_2\ddot{y} + r_1\dot{y} + r_0y, \quad (1.П.77)$$

а его параметры определяются на основе (1.П.76) путём сравнения коэффициентов при одинаковых степенях

$$g_1 - b_2r_2 = 0, \quad d_2g_1 + g_0 - b_1r_2 - b_2r_1 = 1, \quad d_0g_0 - b_0r_0 = \delta_0, \quad (1.П.78)$$

$$d_1g_1 + d_2g_0 - b_0r_2 - b_1r_1 - b_2r_0 = \delta_2, \quad d_0g_1 + d_1g_0 - b_0r_1 - b_1r_0 = \delta_1. \quad (1.П.79)$$

Решая эту систему из почти линейных алгебраических уравнений, получим искомые параметры регулятора (1.П.77).

Нетрудно заметить, что оптимальная в смысле функционала (1.П.64) система (1.П.61), (1.П.77) является негрубой.

Действительно, из структуры этой системы следует, что её характеристический полином является полиномом четвёртой степени. Однако первое из уравнений (1.П.78) означает, что коэффициент при  $s^4$  равен нулю.

## 1.П.7. Модальное управление

Приведём простой численный пример, показывающий, как возникает явление неполной аддитивной компенсации при построении модального управления.

Пример П.1.7. Пусть имеется объект регулирования, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + 150\dot{y} + 0.4y = u. \quad (1.П.80)$$

Требуется найти управление, при котором корни характеристического уравнения системы регулирования были равны

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -0.5.$$

В соответствии с процедурой построения модального управления строим желаемый характеристический полином системы

$$d^u(s) = (s + 1)(s + 0.5) \quad (1.П.81)$$

и вычитаем из него характеристический полином объекта (1.П.80)

$$d^u(s) - d(s) = (s^2 + 1.5s + 0.5) - (s^2 + 150s + 0.4) = -148.5s + 0.1. \quad (1.П.82)$$

Тогда искомое управление

$$u = 148.5\dot{y} - 0.1y. \quad (1.П.83)$$

Очевидно, что при этом управлении корни характеристического полинома удовлетворяют требованию (1.П.81).

В рассматриваемом случае  $d^c(s) = d(s)$ ,  $k(s) = -148.5s + 0.1$ .

Нетрудно видеть, что система (1.П.80), (1.П.83) обладает малой степенью грубости, так как

$$d_1 + k_1 = 150 - 148.5 = 1.5 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \ll |d_1|, |k_1|. \quad (1.П.84)$$

Выражения (1.П.84) означают, что если параметры  $d_1$  объекта (либо параметры  $k_1$  регулятора) реализованы с погрешностью 1.2%, то это может привести к неустойчивой работе системы. Убедимся, что малая степень грубости системы (1.П.80), (1.П.83) сохраняется и при реализуемой структуре уравнения (1.П.83).

Действительно, реализуемое уравнение регулятора имеет вид

$$g_1 \dot{u} + u = -148.5 \dot{y} + 0.1y, \quad (1.П.85)$$

где  $g_1$  — достаточно малое число.

Характеристический полином системы (1.П.80), (1.П.85)

$$\begin{aligned} d^u(s) &= (s^2 + 150s + 0.4)(g_1s + 1) - 148.5s + 0.1 = \\ &= g_1s^3 + (150g_1 + 1)s^2 + (0.4g_1 + 150 - 148.5)s + (0.4 + 0.1). \end{aligned} \quad (1.П.86)$$

Число  $g_1$  выбирается так, чтобы два корня этого полинома были близки к (1.П.81), а третий был значительно больше каждого из значений (1.П.81). При этих условиях  $g_1$  должно быть значительно меньше 1, тогда, как видно из (1.П.86), явление неполной аддитивной компенсации сохраняется. ■

## Заключение к главе 1

Подытожим содержание этой главы.

1. Введены виды объектов [объекты первого (1.1.20), (1.1.21) и второго (1.1.22) видов], определены цели управления (1.1.29) и (1.1.32) и внешние возмущения (1.1.5), для которых здесь и далее строится частотное управление.
2. Сформулирована задача 1.2.1 управления при неопределённых параметрах объекта и предложен подход к её решению на основе метода частотных параметров.
3. Введены понятия (определение 1.3.2) самотождественных и несамотождественных объектов. Для несамотождественных объектов предложен подход к формированию алгоритмов частотного адаптивного управления, использующий метод частотных параметров.
4. (П) Введены понятия степеней грубости систем автоматического управления и показано, что системы, синтезируемые с помощью методов пространства состояний, могут обладать малой степенью грубости.

## Глава 2. Метод ЛАЧХ

Метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик уже пятое десятилетие служит основным орудием инженера при проектировании регуляторов для одномерных объектов с известными параметрами.

Это объясняется тем, что он в наглядной форме позволяет для многих случаев ответить на вопрос: как построить регулятор, который обеспечивает требования к

- точности (установившимся ошибкам),
- качеству (времени регулирования, перерегулированию),
- грубости (запасам устойчивости),
- реализуемости,
- сложности (размерности  $n_p$  вектора пространства состояний регулятора).

Предмет этой главы составляет следующее:

**Во-первых**, частотные показатели параметрической и структурной грубости, которые не используются в явной форме при постановке задач главы 1, однако регулятор должен обеспечивать необходимую грубость в смысле этих показателей.

**Во-вторых**, собственно метод ЛАЧХ, который излагается для читателей, не знакомых с классической частотной теорией регулирования. На таких читателей метод ЛАЧХ должен произвести большое впечатление наглядностью и простотой решения сложной задачи синтеза, математическое решение которой не получено до сих пор.

### 2.1. Анализ устойчивости

#### 2.1.1. Уравнения «вход-выход»

Запишем уравнения объекта (1.1.1), (1.1.2) и регулятора (1.1.23) в форме «вход-выход», полагая при этом  $f(t) = 0$  и  $f_p(t) = 0$ ,

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad \gamma < n, \quad (2.1.1)$$

$$u^{(n_p)} + g_{n_p-1}u^{(n_p-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = r_{\gamma_p}y^{(\gamma_p)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y, \quad \gamma_p \leq n_p, \quad (2.1.2)$$

где  $y^{(i)}(t)$  –  $i$ -я производная ( $i = \overline{0, n}$ ) измеряемой переменной,  $u^{(k)}(t)$  –  $k$ -я производная ( $k = \overline{0, n_p}$ ) управления. Начальные условия  $y^{(i)}(t_0)$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ),  $u^{(k)}(t_0)$  ( $k = \overline{0, n_p-1}$ ) определяются векторами  $\mathbf{x}(t_0)$  и  $\mathbf{x}_p(t_0)$ .

Если объект и регулятор полностью управляемы и наблюдаемы, то коэффициенты этих уравнений нетрудно получить, сравнивая преобразования по Лапласу уравнений (1.1.1), (1.1.2), (1.1.23), (2.1.1), (2.1.2).

Действительно, преобразуя (2.1.1), (2.1.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$d(s)y = b(s)u, \quad g(s)u = r(s)y, \quad (2.1.3)$$

где

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0, \quad b(s) = b_\gamma s^\gamma + \dots + b_1s + b_0, \quad (2.1.4)$$

$$g(s) = s^{n_p} + g_{n_p-1}s^{n_p-1} + \dots + g_1s + g_0, \quad r(s) = \gamma_\rho s^\rho + \dots + r_1s + r_0. \quad (2.1.5)$$

С другой стороны, на основе (1.1.1), (1.1.2), (1.1.22) запишем

$$y(s) = \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{b}u(s) = \frac{\mathbf{d}(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}}{d(s)}u(s), \quad (2.1.6)$$

$$u(s) = \mathbf{d}_p(Es - A_p)^{-1}\mathbf{b}_p y(s) = \frac{\mathbf{d}_p(\widetilde{Es - A_p})\mathbf{b}_p}{g(s)}y(s), \quad (2.1.7)$$

где  $(\widetilde{Es - A})$  – матрица, присоединённая к  $(Es - A)$ . Это означает, что  $(\widetilde{Es - A})(Es - A) = Ed(s)$ ,

$$d(s) = \det(Es - A). \quad (2.1.8)$$

Аналогично,  $(\widetilde{Es - A_p})$  – матрица, присоединённая к  $(Es - A_p)$ , а

$$g(s) = \det(Es - A_p). \quad (2.1.9)$$

Таким образом,

$$b(s) = \mathbf{d}(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}, \quad r(s) = \mathbf{d}_p(\widetilde{Es - A_p})\mathbf{b}_p. \quad (2.1.10)$$

### 2.1.2. Анализ по параметрам

Пусть коэффициенты уравнений (2.1.1), (2.1.2) известны. Для анализа устойчивости сформируем её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s). \quad (2.1.11)$$

Коэффициенты полинома

$$d^u(s) = s^N + d_{N-1}^u s^{N-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u \quad (2.1.12)$$

выражаются через параметры системы (2.1.1), (2.1.2).

Составим из этих коэффициентов матрицу размеров  $N \times N$

$$H = \begin{pmatrix} d_{N-1}^u & d_{N-3}^u & d_{N-5}^u & \cdots & 0 \\ 1 & d_{N-2}^u & d_{N-4}^u & \cdots & 0 \\ 0 & d_{N-1}^u & d_{N-3}^u & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & d_{N-2}^u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_0^u \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Гурвица). Для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необходимо и достаточно, чтобы определитель  $\Delta_n$  матрицы  $H$  ( $\Delta_n = \det H$ ) и его диагональные миноры

$$\Delta_1 = d_{N-1}^u, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} d_{N-1}^u & d_{N-3}^u \\ 1 & d_{N-2}^u \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} d_{N-1}^u & d_{N-3}^u & d_{N-5}^u \\ 1 & d_{N-2}^u & d_{N-4}^u \\ 0 & d_{N-1}^u & d_{N-3}^u \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} \quad (2.1.14)$$

были положительными. ■

Если все переменные состояния объекта доступны непосредственному измерению, то он описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u. \quad (2.1.15)$$

Регулятор для такого объекта имеет вид

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (2.1.16)$$

где  $\mathbf{c}$  –  $n$ -мерный вектор чисел.

Уравнение (2.1.16) является частным случаем уравнений (1.1.23), когда  $n_p = 0$ , а число  $f_p$  заменяется вектором  $\mathbf{c}'$ . В связи с этим такой регулятор иногда называют безинерционным.

Для суждения об устойчивости системы (2.1.15), (2.1.16) при известных матрице  $A$  и векторах  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  сформируем полином

$$d^u(s) = \det(Es - A - \mathbf{b}\mathbf{c}') = s^n + d_{n-1}^u s^{n-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u, \quad (2.1.17)$$

и используем критерии Гурвица.

### 2.1.3. Анализ по амплитудно-фазовой характеристике

Передаточная функция разомкнутой системы (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$w_{раз}(s) = -\frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)}. \quad (2.1.18)$$

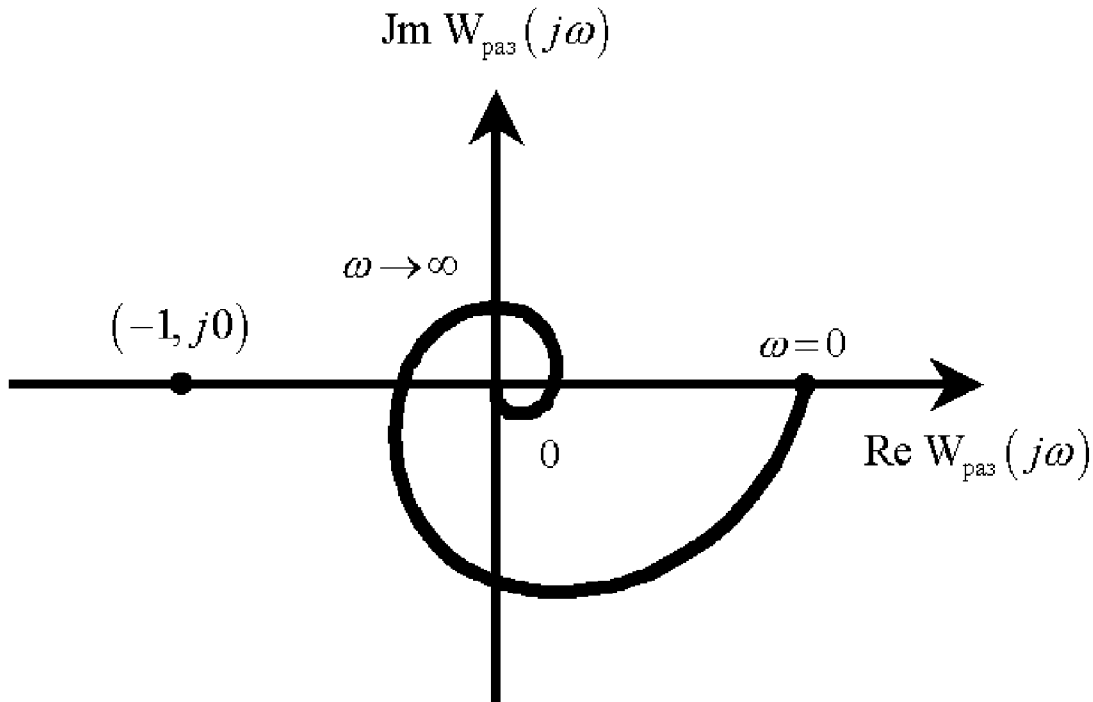


Рис. 2.1.1

Число ( $p$ ) корней характеристического полинома  $d_c(s) = d(s)g(s)$  разомкнутой системы может быть различным. Будет различать два случая:  $p = 0$  (разомкнутая система асимптотически устойчива) и  $p \neq 0$  (разомкнутая система неустойчива).

Пусть параметры системы (2.1.1) (2.1.2) неизвестны, а известна частотная передаточная функция  $w_{раз}(j\omega)$ , полученная экспериментально в диапазоне частот  $[0, \infty]$ . При  $p \neq 0$  для осуществления эксперимента необходимо стабилизирующее управление.

Определение 2.1.1. Амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы (диаграммой Найквиста) называется кривая в плоскости с осью ординат  $\text{Im } w_{раз}(j\omega)$  и осью абсцисс  $\text{Re } w_{раз}(j\omega)$  при  $0 \leq \omega \leq \infty$ . ■

На рис. 2.1.1 приведён пример амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Здесь же показана точка, лежащая по оси абсцисс на расстоянии, равном 1 слева от начала координат. Далее она называется точкой  $(-1, j0)$ .

Теорема 2.1.2. (Критерий Найквиста) Если разомкнутая система асимптотически устойчива ( $p = 0$ ), то для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку  $(-1, j0)$ . ■

В общем случае ( $p \neq 0$ ) условие устойчивости замкнутой системы заключается в следующем.

Теорема 2.1.3. Для асимптотической устойчивости системы (2.1.1), (2.1.2) необ-



ходимо и достаточно, чтобы при возрастании  $\omega$  от 0 до  $\infty$  вектор, начинающийся в точке  $(-1, j0)$  и скользящий своим концом по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы, повернулся вокруг точки  $(-1, j0)$  в направлении по часовой стрелке  $p/2$  раз. ■

#### 2.1.4. Структура передаточной функции

Представим передаточную функцию (2.1.18)

$$w_{pas}(s) = -\frac{b(s)r(s)}{d(s)g(s)} = \frac{k(s)}{d^c(s)} = \frac{k_\alpha s^\alpha + k_{\alpha-1} s^{\alpha-1} + \dots + k_1 s + k_0}{s^N + d_{N-1}^c s^{N-1} + \dots + d_1^c s + d_0^c} \quad (2.1.19)$$

как произведение элементарных сомножителей

$$w_{pas}(s) = k \frac{s^q \prod_{i=1}^{\alpha_1} (\tilde{T}_i s \pm 1) \prod_{j=1}^{\alpha_2} (\hat{T}_j^2 s^2 \pm 2\hat{\xi}_j \hat{T}_j s \pm 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{N_1} (T_i s \pm 1) \prod_{j=1}^{N_2} (\tilde{T}_j^2 s^2 \pm 2\tilde{\xi}_j \tilde{T}_j s \pm 1)}, \quad (2.1.20)$$

где

$$\alpha = \gamma + \gamma_p, \quad N = n + n_p, \quad \alpha < N, \quad q + \alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha, \quad \nu + N_1 + 2N_2 = N, \quad k = k_0/d_0.$$

Далее будем предполагать, что разомкнутая система обладает следующим свойством, которое неявно предполагалось в критерии Найквиста.

**Свойство 2.1.1.** Постоянные времени  $\tilde{T}_i$ ,  $\hat{T}_j$  ( $i = \overline{1, \alpha_1}$ ,  $j = \overline{1, \alpha_2}$ ) числителя передаточной функции (2.1.20) не совпадают с постоянными времени  $T_i$ ,  $\tilde{T}_j$  ( $i = \overline{1, N_1}$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ ) её знаменателя, а число  $q = 0$ , если  $\nu \neq 0$  и  $\nu = 0$ , если  $q \neq 0$ , либо  $\nu = q = 0$ . ■

Другими словами, полагаем, что разомкнутая система полностью управляема и полностью наблюдаема.

Сомножители передаточной функции (2.1.20) называются элементарными (или типовыми) звеньями. Они имеют названия:  $k$  – усилительное звено (коэффициент усиления, коэффициент передачи),  $1/s$  – интегрирующее, а  $s$  – дифференцирующее звенья,  $1/(Ts \pm 1)$  – инерционное (апериодическое) звено,  $1/(T^2 s^2 \pm 2\xi Ts \pm 1)$  – колебательное звено,  $Ts \pm 1$  – дифференцирующее звено первого порядка,  $T^2 s^2 \pm 2\xi Ts \pm 1$  – дифференцирующее звено второго порядка.

**Определение 2.1.2.** Передаточная функция называется *минимально-фазовой*, если её нули (корни уравнения  $k(s) = 0$ ) и полюса (корни уравнения  $d^c(s) = 0$ ) имеют отрицательные вещественные части. ■

Так, минимально-фазовая передаточная функция (2.1.20) имеет вид

$$w_{pas}(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{\alpha_1} (\tilde{T}_i s + 1) \prod_{j=1}^{\alpha_2} (\hat{T}_j^2 s^2 + 2\hat{\xi}_j \hat{T}_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{N_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{N_2} (\tilde{T}_j^2 s^2 + 2\tilde{\xi}_j \tilde{T}_j s + 1)}, \quad (2.1.21)$$

где  $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha$ ,  $N_1 + 2N_2 = N$ .

Если передаточная функция имеет хотя бы один нуль или полюс с неотрицательной вещественной частью, то она называется *неминимально-фазовой*.

### 2.1.5. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ)

Представим частотную передаточную функцию в показательной форме

$$w_{pas}(j\omega) = a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.1.22)$$

Определение 2.1.3. Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой называется кривая  $a(\omega)$ , построенная в плоскости с осью ординат  $20 \lg a(\omega)$  и осью абсцисс  $\lg \omega$ . Единица измерения и оси ординат – децибел, по оси абсцисс – рад/сек.

Утверждение 2.1.1. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика с известной точностью аппроксимируется конечным числом отрезков прямых и колоколообразных линий.

Для доказательства утверждения рассмотрим логарифмические амплитудно-частотные –  $l(\omega)$  – и фазо-частотные –  $\varphi(\omega)$  – характеристики каждого звена. Будем полагать, для простоты, эти звенья минимально-фазовыми.

#### Усилительное звено

$$l^{(1)}(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi^{(1)}(\omega) = 0. \quad (2.1.23)$$

#### Интегрирующее звено

$$l^{(2)}(\omega) = -20 \lg a, \quad \varphi^{(2)}(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.1.24)$$

Эти характеристики приведены на рис. 2.1.2

Нетрудно видеть, что ЛАЧХ интегрирующего звена имеет наклон  $-20 \text{ дб/дек}$ .

#### Дифференцирующее звено

$$l^{(3)}(\omega) = 20 \lg \omega, \quad \varphi^{(3)}(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.1.25)$$

ЛАЧХ этого звена имеет наклон  $20 \text{ дб/дек}$ .

#### Инерционное (апериодическое) звено

$$l^{(4)}(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \varphi^{(4)}(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (2.1.26)$$

ЛАЧХ этого звена показана на рис. 2.1.3 пунктиром, который при  $\omega T > 1$  и  $\omega T < 1$  сливается со сплошными линиями. Таким образом, ЛАЧХ инерционного звена с известной точностью аппроксимируется двумя отрезками прямых.

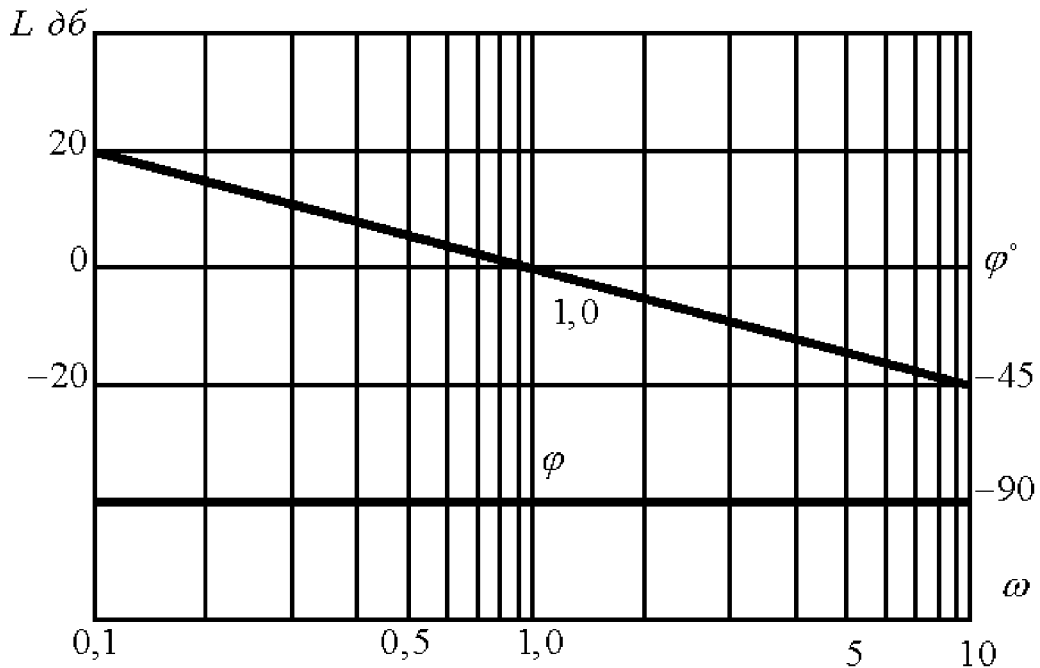


Рис. 2.1.2

**Колебательное звено**

$$l^{(5)}(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2) + 4\xi^2 T^2\omega^2}}, \quad \varphi^{(5)}(\omega) = - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}. \quad (2.1.27)$$

Из графиков, приведённых на рис. 2.1.4 следует, что ЛАЧХ аппроксимируется: а) при  $\omega T < 1$  – отрезком горизонтальной прямой, б) в окрестности  $\omega T$  – колоколообразной кривой, в) при  $\omega T > 1$  – отрезком прямой с наклоном  $-40$  дБ/дек.

ЛАЧХ дифференцирующих звеньев первого и второго порядка являются зеркальным отображением относительно оси  $\omega T$  ЛАЧХ инерционного и колебательного звеньев соответственно.

Для завершения доказательства представим на основе (2.1.21) амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы как

$$a(\omega) = k a^{(2)\nu}(\omega) a^{(3)q}(\omega) \prod_{i=1}^{N_1} a_i^{(4)}(\omega) \prod_{j=1}^{N_2} a_j^{(5)}(\omega) \prod_{i=1}^{\alpha_1} a_i^{(6)}(\omega) \prod_{j=1}^{\alpha_2} a_j^{(7)}(\omega), \quad (2.1.28)$$

где  $a^{(6)}(\omega)$  и  $a^{(7)}(\omega)$  – АЧХ дифференцирующих звеньев первого и второго порядков соответственно.

Из этого выражения следует, что

$$20 \lg a(\omega) = 20 \lg k + \nu l^{(2)}(\omega) + q l^{(3)}(\omega) + \sum_{i=1}^{N_1} l_i^{(4)}(\omega) + \sum_{j=1}^{N_2} l_j^{(5)}(\omega) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} l_i^{(6)}(\omega) + \sum_{j=1}^{\alpha_2} l_j^{(7)}(\omega), \quad (2.1.29)$$

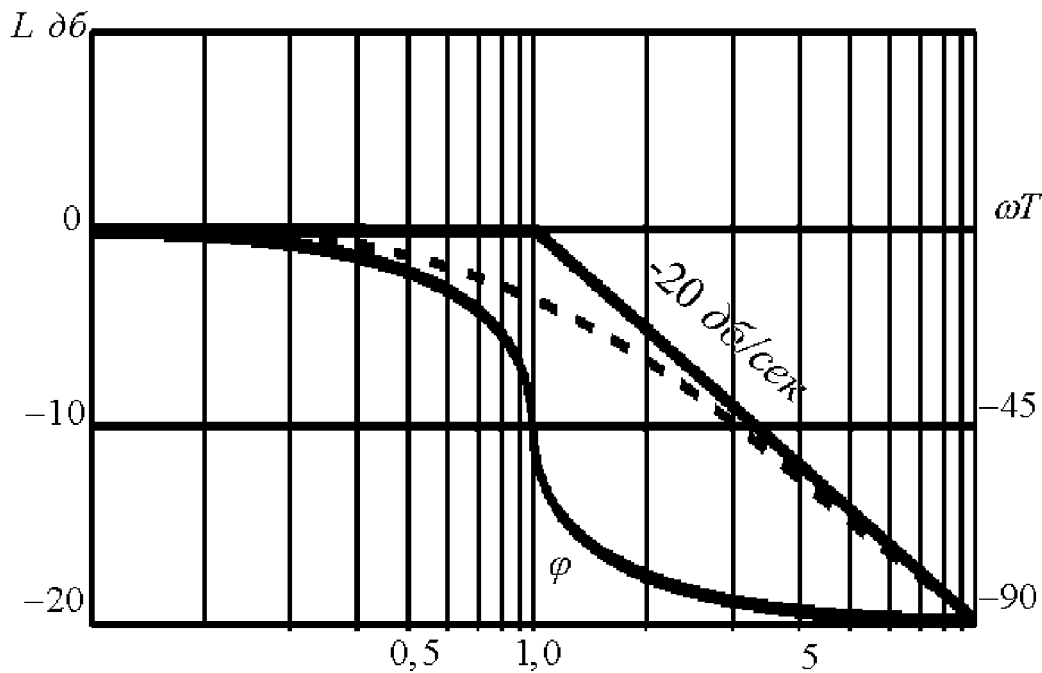


Рис. 2.1.3

и, таким образом, утверждение 2.1.1 доказано.

Фазо-частотная характеристика ФЧХ разомкнутой системы имеет аналогичный (2.1.29) вид

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \nu\varphi^{(2)}(\omega) + q\varphi^{(3)}(\omega) + \sum_{i=1}^{N_1} \varphi_i^{(4)}(\omega) + \sum_{j=1}^{N_2} \varphi_j^{(5)}(\omega) + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \varphi_i^{(6)}(\omega) + \sum_{j=1}^{\alpha_2} \varphi_j^{(7)}(\omega) = \\ &= -\nu\frac{\pi}{2} + q\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{N_1} \arctg T_i\omega + \sum_{j=1}^{N_2} \arctg \frac{2\hat{\xi}_j\hat{T}_j\omega}{1-\hat{T}_j\omega} + \sum_{i=1}^{\alpha_1} \arctg \hat{T}_i\omega + \sum_{j=1}^{\alpha_2} \arctg \frac{2\hat{\xi}_j\hat{T}_j\omega}{1-\hat{T}_j\omega}. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Пример 2.1.1. Рассмотрим передаточную функцию

$$w(s) = \frac{2 \cdot 10^3}{s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}. \quad (2.1.31)$$

ЛАЧХ, соответствующая этой функции, приведена на рис. 2.1.5

Нетрудно видеть, что ЛАЧХ имеет изломы на частотах  $\omega_1 = \frac{1}{0.1} = 10 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{0.02} = 50 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\omega_3 = \frac{1}{0.01} = 100 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\omega_4 = \frac{1}{0.005} = 200 \frac{1}{\text{сек}}$ .

### 2.1.6. Анализ по ЛАЧХ и ФЧХ

Системы регулирования описывают различными способами: дифференциальными уравнениями с известными параметрами и частотными характеристиками, полученными экспериментально.

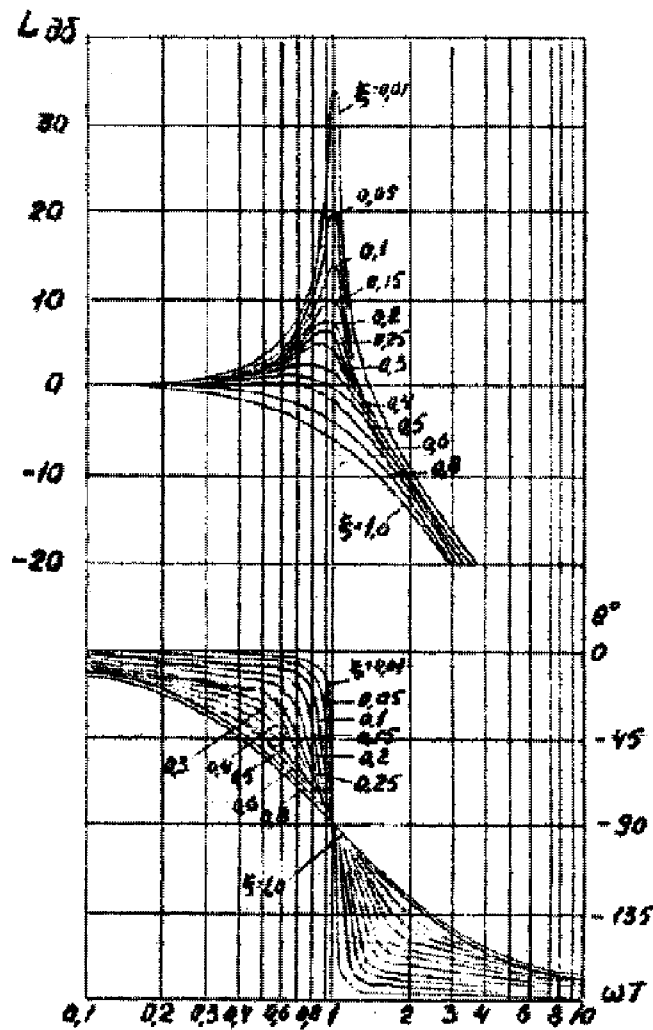


Рис. 2.1.4

Промежуточное положение между этими способами занимает описание с помощью структурных схем. Структурная схема представляет собой совокупность элементарных звеньев и связей между ними. Постоянные времени звеньев и коэффициенты затухания (демпфирования)  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, \alpha_2}$ ),  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, N_2}$ ) получают на основе дифференциальных уравнений либо по ЛАЧХ звеньев. В последнем случае постоянные времени определяются по точкам излома ЛАЧХ.

На основе структурной схемы строится передаточная функция разомкнутой системы (2.1.21). Её ЛАЧХ и ФЧХ получают в соответствии с (2.1.29), (2.1.30) простым суммированием ЛАЧХ и ФЧХ звеньев.

Для анализа устойчивости замкнутой системы по амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам разомкнутой системы используем теоремы 2.1.1 и 2.1.2.

Интерпретируем теорему 2.1.2 в терминах АЧХ и ФЧХ. Для этого рассмотрим рис. 2.1.6

Зафиксируем на амплитудно-фазовой характеристике точку, которой соответ-

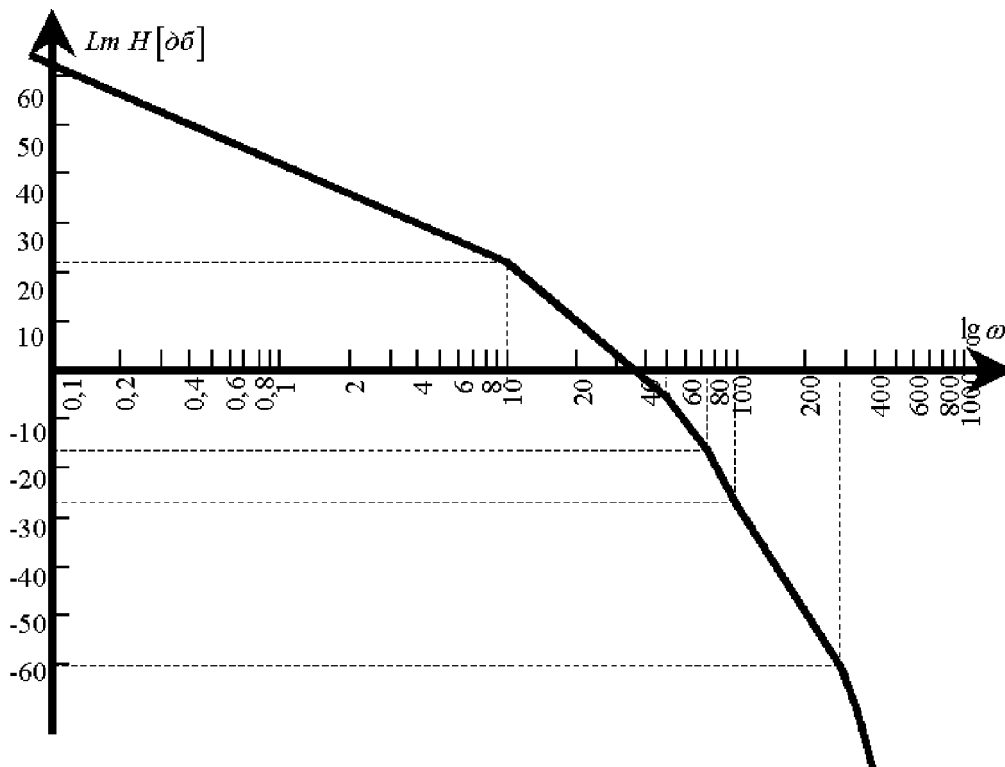


Рис. 2.1.5

ствуется частота  $\omega_1$ . Длина отрезка, соединяющего эту точку с началом координат, равна  $a(\omega_1)$ , а угол между ним и положительной вещественной полуосью составляет  $\varphi(\omega_1)$ . При  $\omega = \omega_2$  получим  $a(\omega_2)$  и  $\varphi(\omega_2)$  и т.д.

По теореме 2.1.2 анализ устойчивости сводится к исследованию отрезка  $[-1, -\infty]$  вещественной оси. Если АФХ пересекает этот отрезок сверху вниз, то ФЧХ пересекает одну из линий  $-\pi, -3\pi, \dots$  снизу вверх. Для анализа устойчивости представляют интерес лишь те участки ЛАЧХ, для которых  $20 \lg a(\omega) > 0$  ( $a(\omega) > 1$ ).

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы на отрезках оси частот, где ЛАЧХ – положительна, разность числа переходов ФЧХ через линии  $-\pi, -3\pi, \dots$  снизу вверх и сверху вниз равнялась нулю.

Пример 2.1.2. Пусть имеется система, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии описывается выражением (2.1.31).

Проанализируем устойчивость этой системы. Её фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg 0.1\omega - \arctg 0.02\omega - \arctg 0.01\omega - \arctg 0.005\omega$$

является монотонно-убывающей функцией, которая на интервале  $\left[0, 42 \frac{1}{сек}\right]$  положительности ЛАЧХ (см. рис. 2.1.5) изменяется от 0 до  $-244^\circ$ . В силу монотонности  $\varphi(\omega)$  существует лишь один переход ФЧХ через линию  $-\pi$  и поэтому замкнутая система неустойчива. ■

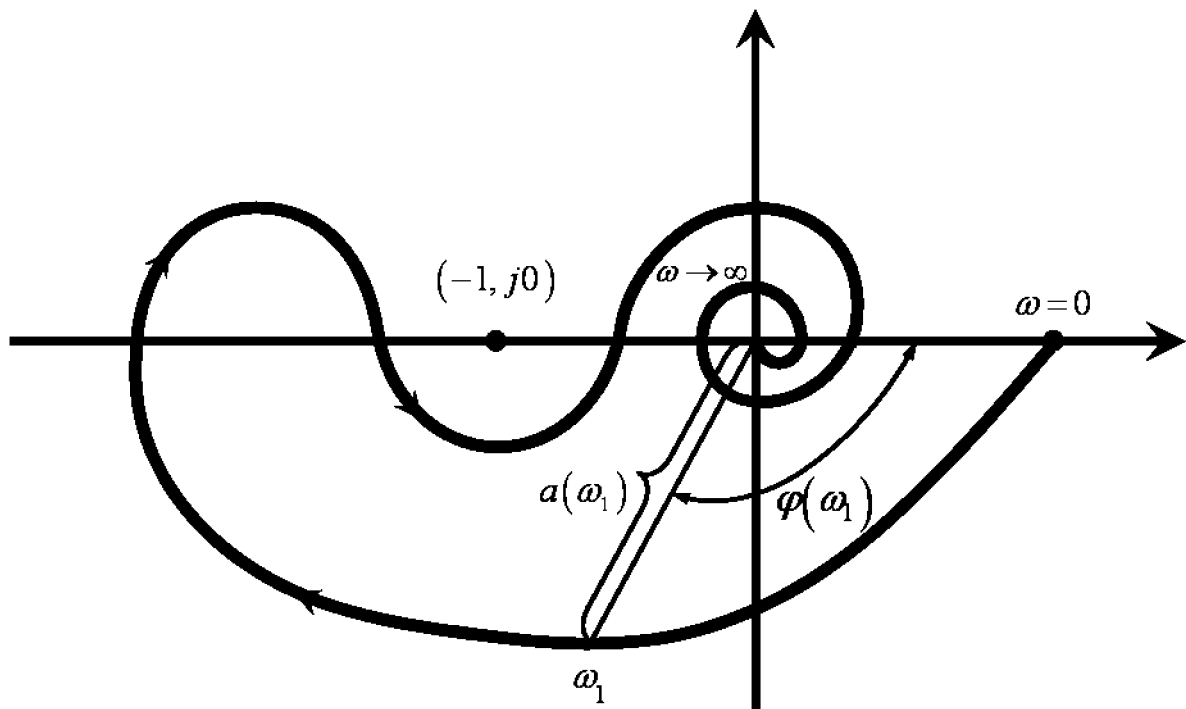


Рис. 2.1.6

## 2.2. Грубость

### 2.2.1. Запасы устойчивости

Вновь рассмотрим рис. 2.1.1 АФХ не охватывает точку  $(-1, j0)$  и, следовательно, замкнутая система устойчива. Однако может случиться так, что АФХ, оставаясь справа от точки  $(-1, j0)$ , приближается к ней сколь угодно близко. Такая система формально асимптотически устойчива. Однако малые изменения параметров объекта или регулятора могут привести к такой деформации АФХ, что она охватит критическую точку.

Избежать описанной ситуации можно, если АФХ будет находиться на фиксированном расстоянии от точки  $(-1, j0)$ . Это обеспечит грубость рассматриваемой системы.

Одним из способов определения расстояния являются *запас устойчивости по фазе*  $\varphi_z$  и *запас устойчивости по амплитуде*  $L$ . Для их описания введём частоту среза  $\omega_{cp}$  и *фазовую частоту* (частоту перехода фазы)  $\omega_\phi$ , определив их уравнениями

$$a(\omega_{cp}) = 1, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} a(\omega_\phi^{(1)}) &= -\pi && \text{при } a(\omega_\phi^{(1)}) > 1; \\ a(\omega_\phi^{(2)}) &= -\pi && \text{при } a(\omega_\phi^{(2)}) < 1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

При этом предполагается «типичный» случай, когда уравнение (2.2.1) имеет не

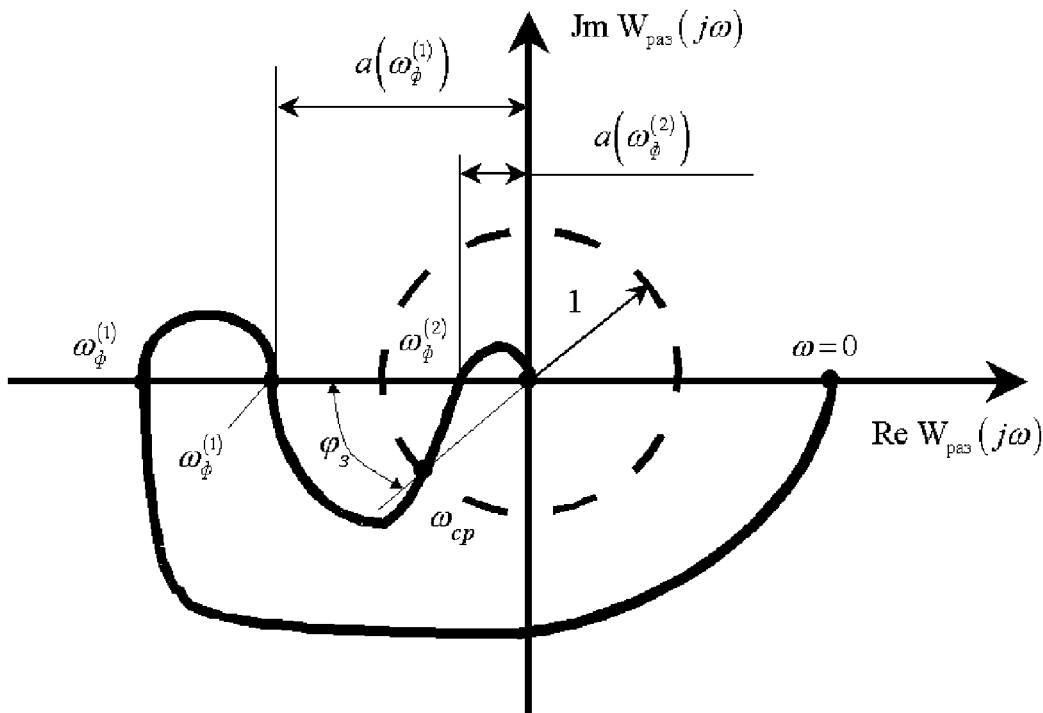


Рис. 2.2.1

более одного решения. Определение частот среза при неединственном решении этого уравнения, а также более строгое определение фазовых частот приведено в приложении 2.П.1.

Запас по фазе определяется выражением

$$\varphi_z = \pi + \varphi(\omega_{сп}) \quad (2.2.3)$$

а запас по амплитуде

$$L = \min \left\{ a(\omega_{\phi}^{(1)}), \frac{1}{a(\omega_{\phi}^{(2)})} \right\}. \quad (2.2.4)$$

Геометрическая интерпретация запасов устойчивости приведена на рис. 2.2.1

Опыт разработки и эксплуатации различных систем регулирования позволили выработать рекомендации для проектирования.

Рекомендация 2.2.1. Запас устойчивости по фазе должен составлять по крайней мере  $30^\circ$ , а запас устойчивости по амплитуде – по крайней мере 2 (6 дБ). ■

### 2.2.2. Запретная область

Запасы устойчивости носят локальный характер и не исключают ситуации, показанной на рис. 2.2.3.

Здесь приведена АФХ, удовлетворяющая рекомендации 2.2.1. Однако она проходит вдоль дуги окружности единичного радиуса и вещественной оси. Достаточно малые изменения параметров системы (параметрические возмущения) могут привести



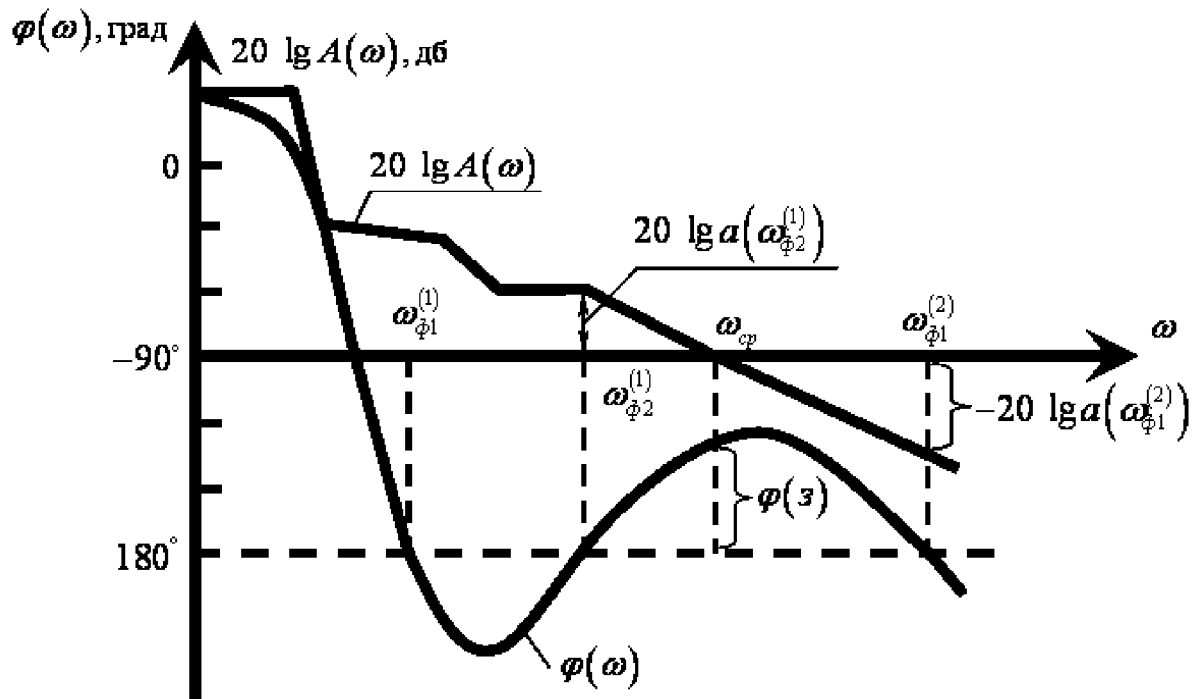


Рис. 2.2.2

к деформации АФХ, показанной на рис. 2.2.3 пунктиром. Таким образом, при малых отклонениях параметров от расчётных значений система становится неустойчивой.

Введём понятие *запретной области*, которая исключает описанную ситуацию. Запретная область представляет собой сектор, отмеченный штриховкой на рис. 2.2.4.

Размеры запретной области удовлетворяют рекомендации 2.2.1.

$$\varphi_z \geq 30^\circ, \quad L \geq 2. \quad (2.2.5)$$

### 2.2.3. Радиус запасов устойчивости

Другой формой описания запретной области является запретный круг радиуса  $r$  с центром в точке  $(-1, j0)$ .

Этот круг показан на рис. 2.2.5.

Годограф АФЧХ не пересекает запретного круга, если для всех  $\omega$  выполняется неравенство

$$[1 + \operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{\text{раз}}(j\omega) > r^2. \quad (2.2.6)$$

Определение 2.2.1. Радиусом запасов устойчивости называется число

$$r = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sqrt{[1 + \operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{\text{раз}}(j\omega)}. \quad (2.2.7)$$

■

Выражение (2.2.7) можно записать в более компактных формах

$$r = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sqrt{[1 + w_{\text{раз}}(j\omega)][1 + w_{\text{раз}}(-j\omega)]}, \quad (2.2.8)$$

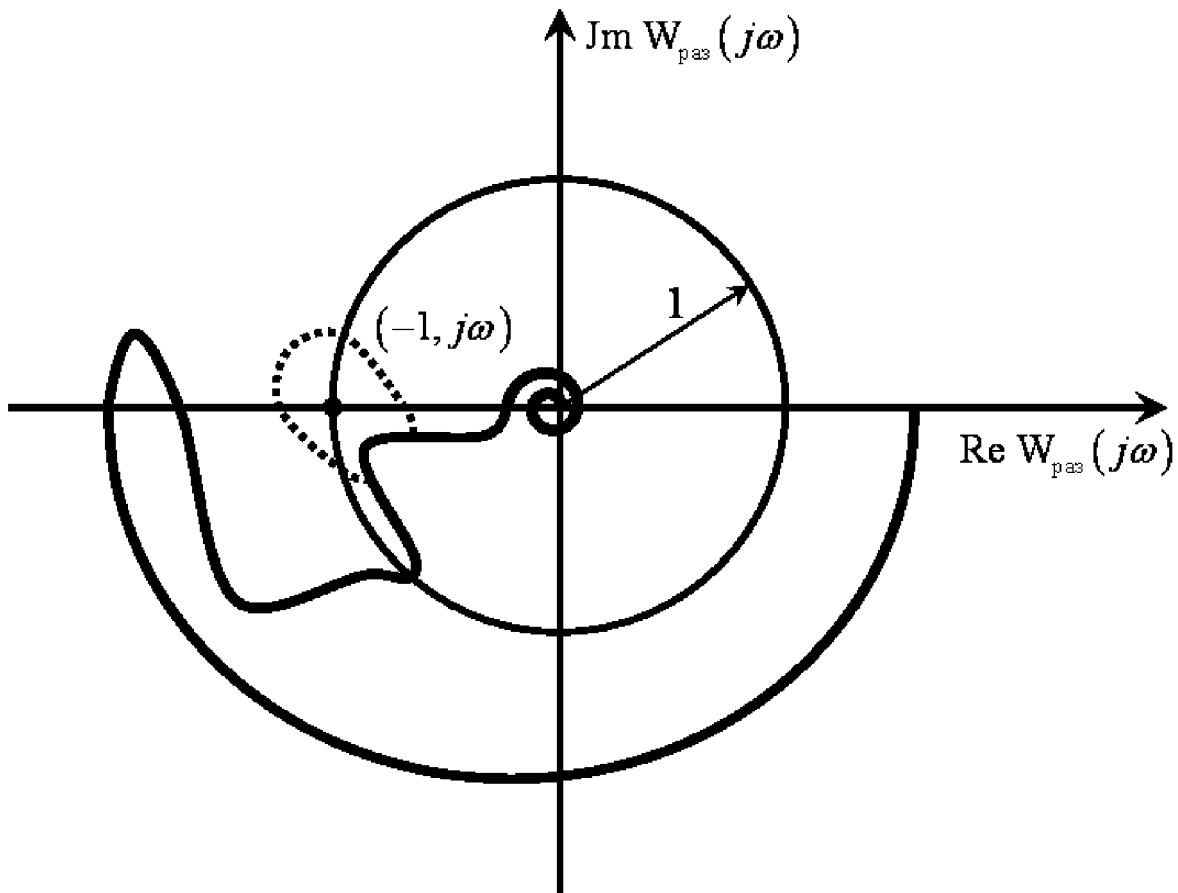


Рис. 2.2.3

либо

$$r = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} |1 + w_{pas}(j\omega)|. \quad (2.2.9)$$

Заметим, что вычисление радиуса запасов устойчивости часто оказывается более сложным, чем вычисление запасов устойчивости. Действительно, для определения  $r$  необходимо найти значения  $w_{pas}(j\omega)$  во всём диапазоне частот, а для вычисления  $\varphi_3$  и  $L$  достаточно значения передаточной функции при фиксированных частотах, определяемых из (2.2.1), (2.2.2). Приближённое определение этих частот не вызывает затруднений.

Найдём связь между радиусом запасов устойчивости и запасами устойчивости по фазе и модулю. Непосредственно из рис. 2.2.5 следует, что

$$L = \min \left\{ 1 + r, \frac{1}{1 - r} \right\}, \quad (2.2.10)$$

$$\varphi_3 = 2 \arcsin \frac{r}{2}. \quad (2.2.11)$$

В таблице 2.2.1 приведены вычисленные по этим формулам запасы устойчивости по фазе и модулю при различных значениях радиуса запасов устойчивости.

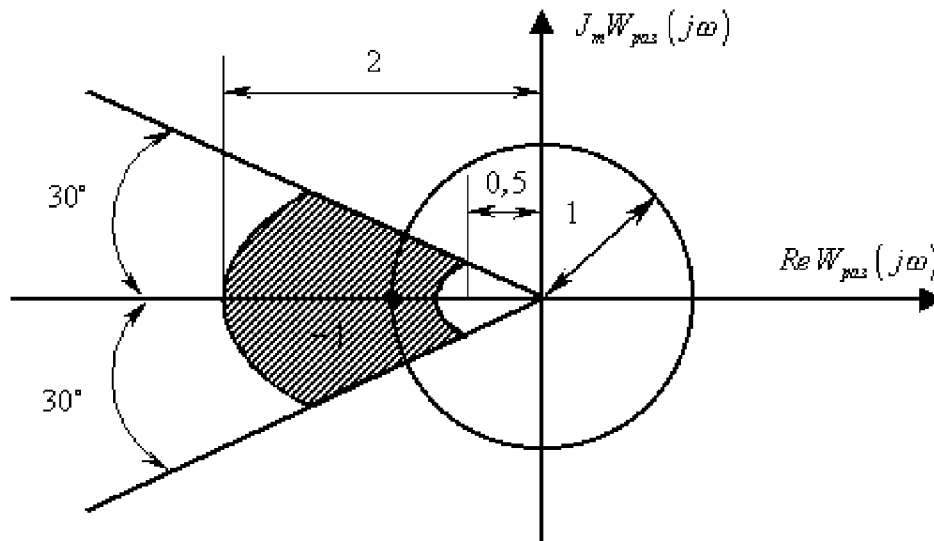


Рис. 2.2.4

Таблица 2.2.1

	$r$	$r = 0.5$	$r = 0.75$	$r = 1$
$\varphi_z \geq$	-	29°	44°	60°
$L \geq$	АФХ первого рода	2	4	$\infty$
$L \geq$	АФХ второго рода	1.5	1.75	2

В таблице приводятся данные для АФХ первого и второго рода. Примерами таких АФХ служат кривые на рис. 2.2.1 и 2.1.5 соответственно. Строгое определение АФХ первого и второго рода содержится в приложении 2.П.1.

### 2.2.4. Структурная грубость

Передаточные функции объекта  $w(s) = \frac{b(s)}{d(s)}$ , регулятора  $w_p(s) = \frac{r(s)}{g(s)}$  и разомкнутой системы  $w_{раз}(s)$ , используемые для анализа устойчивости системы, будем называть *рабочими моделями (рабочими передаточными функциями)* объекта, регулятора и разомкнутой системы соответственно.

Они характеризуются *структурными показателями* и параметрами.

Так, передаточная функция объекта

$$w(s) = \frac{b(s)}{d(s)} = \frac{b_\gamma s^\gamma + b_{\gamma-1} s^{\gamma-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0} = k^0 \frac{s^{\alpha_1} \prod_{i=1}^{\alpha_1} (\tilde{T}_i^0 s + 1) \prod_{j=1}^{\alpha_2} (\hat{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \hat{T}_j^0 s + 1)}{s^{\nu_0} \prod_{i=1}^{N_1^0} (T_i^0 s + 1) \prod_{j=1}^{N_2^0} (\tilde{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \tilde{T}_j^0 s + 1)} \quad (2.2.12)$$

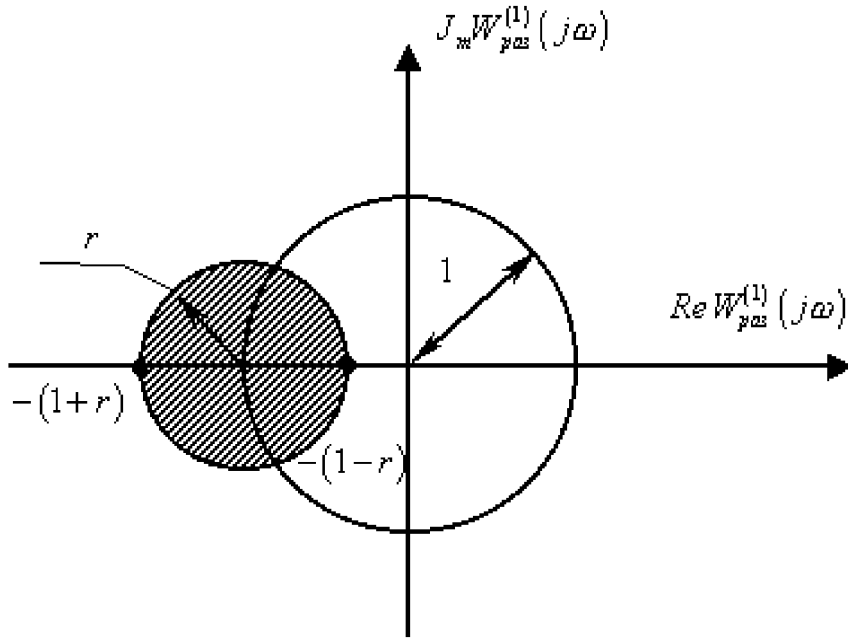


Рис. 2.2.5

(где  $q^0 + \alpha_1^0 + \alpha_2^0 = \gamma$ ,  $\nu^0 + N_1^0 + N_2^0 = n$ ,  $k^0 = b_0/d_0$ ) имеет структурные показатели  $n$  и  $\gamma$ , и параметры  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ).

Наряду с рабочей моделью всегда существует *полная* либо *более точная* (*уточненная*) модель объекта

$$w_{ym}(s) = \frac{b_{ym}(s)}{d_{ym}(s)} = \frac{b_{\gamma_{y\Gamma}} s^{\gamma_{y\Gamma}} + \dots + (b_\gamma + \Delta b_\gamma) s^\gamma + \dots + (b_1 + \Delta b_1) s + (b_0 + \Delta b_0)}{d_{n_{y\Gamma}} s^{n_{y\Gamma}} + \dots + (1 + \Delta d_n) s^n + \dots + (d_1 + \Delta d_1) s + (d_0 + \Delta d_0)}, \quad (2.2.13)$$

которая имеет структурные показатели ( $n_{ym}$  и  $\gamma_{ym}$ ) и параметры, отличающиеся от показателей и параметров рабочей модели.

При этом отличие параметров вызвано уточнением структуры. Поясним это обстоятельство. Пусть некоторая механическая конструкция описывается в предположении идеальной жёсткости её элементов передаточной функцией (2.2.12). Если учесть при построении передаточной функции и вычислении её параметров конечную жёсткость элементов, то такая уточнённая передаточная функция примет вид (2.2.13). Приращения  $\Delta d_i$  и  $\Delta b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) параметров вызваны учётом новых физических факторов, а не уточнением расчётов.

Уточнённую модель представим в форме

$$w_{ym}(s) = k_{ym}^0 \frac{s^{q_0} \prod_{i=1}^{\alpha_{1y\Gamma}^0} (\tilde{T}_i^0 s + 1) \prod_{j=1}^{\alpha_{2y\Gamma}^0} (\hat{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \hat{T}_j^0 s + 1)}{s^{\nu_0} \prod_{i=1}^{N_{1y\Gamma}^0} (T_i^0 s + 1) \prod_{j=1}^{N_{2y\Gamma}^0} (\tilde{T}_j^{02} s^2 + 2\tilde{\xi}_j^0 \tilde{T}_j^0 s + 1)}. \quad (2.2.14)$$

Частным случаем этой передаточной функции служит функция

$$w_{ym}(s) = \bar{k}^0 \frac{\prod_{i=\alpha_1^0+1}^{\alpha_{1yT}^0-\alpha_1^0} (\tilde{T}_i^0 s + 1) \prod_{j=\alpha_2^0+1}^{\alpha_{2yT}^0-\alpha_2^0} (\hat{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \hat{T}_j^0 s + 1)}{\prod_{i=N_1^0+1}^{N_{1yT}^0-N_1^0} (T_i^0 s + 1) \prod_{j=N_2^0+1}^{N_{2yT}^0-N_2^0} (\tilde{T}_j^{02} s^2 + 2\tilde{\xi}_j^0 \tilde{T}_j^0 s + 1)} \cdot w(s) = w_{\text{соз}}(s)w(s), \quad (2.2.15)$$

которая описывает наиболее распространённые мультипликативные структурные возмущения рабочей модели (рабочей передаточной функции) (2.2.12). Эти возмущения описываются передаточной функцией

$$w_{\text{соз}}(s) = \bar{k}^0 \frac{\prod_{i=\alpha_1^0+1}^{\alpha_{1yT}^0-\alpha_1^0} (\tilde{T}_i^0 s + 1) \prod_{j=\alpha_2^0+1}^{\alpha_{2yT}^0-\alpha_2^0} (\hat{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \hat{T}_j^0 s + 1)}{\prod_{i=N_1^0+1}^{N_{1yT}^0-N_1^0} (T_i^0 s + 1) \prod_{j=N_2^0+1}^{N_{2yT}^0-N_2^0} (\tilde{T}_j^{02} s^2 + 2\tilde{\xi}_j^0 \tilde{T}_j^0 s + 1)}. \quad (2.2.16)$$

Уточнённые передаточные функции регулятора и разомкнутой системы имеют, для мультипликативных возмущений, вид

$$w_p(s) = w_{p.\text{созм}}(s)w_p(s), \quad (2.2.17)$$

$$w_{paz}(s) = w_{paz.\text{созм}}(s)w_{paz}(s). \quad (2.2.18)$$

Определение 2.2.2. Рабочая модель системы называется *структурно грубой*, если структурные возмущения не нарушают её асимптотической устойчивости. ■

На первый взгляд может показаться, что можно ввести аналогичное определение структурной грубости объекта (или регулятора), если заменить в определении 2.2.2 термин «система» на термин «объект» или «регулятор». Если так определить структурную грубость объекта, то окажется, что одна и та же рабочая передаточная функция (рабочая модель) объекта является структурно грубой при одних параметрах регулятора и структурно негрубой при других.

Это объясняется тем что структурные параметры рабочей модели объекта зависят от целей управления, для достижения которых используется регулятор с теми или иными параметрами. Поясним это на примере.

Пример 2.2.1. Пусть рабочая модель объекта описывается передаточной функцией

$$w(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)}, \quad (2.2.19)$$

а уточнённая модель имеет вид

$$w_{ym}(s) = \frac{1}{s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}. \quad (2.2.20)$$

Здесь структурное возмущение

$$w_{\text{воз}}(s) = \frac{1}{(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}.$$

Передаточные функции регулятора

$$w_p(s) = w_{p.ym}(s) = \text{const.}$$

Пусть

$$w_p(s) = -10. \quad (2.2.21)$$

Нетрудно убедиться, что передаточная функция

$$w_{\text{паз}}(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)} \quad (2.2.22)$$

свидетельствует об устойчивости замкнутой системы, а её уточнение

$$w_{\text{паз.ym}}(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}$$

подтверждает это заключение.

Пусть теперь

$$w_p(s) = -2 \cdot 10^3. \quad (2.2.23)$$

В этом случае передаточная функция

$$w_{\text{паз}}(s) = \frac{2 \cdot 10^3}{s(0.1s + 1)} \quad (2.2.24)$$

по-прежнему приводит к суждению об устойчивости системы, но, как показано в примерах 2.1.1 и 2.1.2, передаточная функция

$$w_{\text{паз.ym}}(s) = \frac{2 \cdot 10^3}{s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)} \quad (2.2.25)$$

соответствует неустойчивой системе. ■

Таким образом, рабочая модель объекта (2.2.19) выступает в первом случае как структурно-грубая, а во втором – структурно негрубой. Если же использовать определение 2.2.2, то теперь имеется две рабочих модели (2.2.22) и (2.2.24). Суждение об их структурной грубости однозначно: модель (2.2.22) – структурно грубая, а модель (2.2.24) – структурно негрубая. Для того, чтобы избежать последнего, нужно принять в качестве рабочей модели уточнённую модель (2.2.25) и использовать не столь простой регулятор, как (2.2.23).

### 2.2.5. Анализ структурно-параметрической грубости\*

Часто модель разомкнутой системы является структурно грубой, но запасы устойчивости, вычисленные по уточнённой передаточной функции  $w_{раз.ым}(s)$ , могут оказаться недопустимо малыми. Такие запасы устойчивости обусловлены параметрами структурных возмущений.

Определение 2.2.3. Рабочая передаточная функция разомкнутой системы называется *структурно-параметрически грубой*, если структурные возмущения не нарушают асимптотической устойчивости замкнутой системы, а радиус запасов устойчивости уменьшается не более чем на  $\sqrt{\varepsilon_3}$  (где  $\varepsilon_3$  – заданное положительное число).

■

Это определение означает, что

$$r^2 - r_{ym}^2 \leq \varepsilon_3, \quad (2.2.26)$$

где  $r_{ym}$  – радиус запасов устойчивости уточнённой системы, который определяется (2.2.7)

$$r_{ym} = \min_{0 \leq \omega \leq \infty} \sqrt{[1 + \operatorname{Re} w_{раз.ым}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{раз.ым}(j\omega)}. \quad (2.2.27)$$

Для определённости примем  $\varepsilon_3 = r^2 - (0.75)^2$ , что соответствует  $r_{ym} \leq 0.75$ .

Сравним амплитудно-частотные –  $a(\omega)$  и  $a_{ym}(\omega)$  – и фазо-частотные –  $\varphi(\omega)$  и  $\varphi_{ym}(\omega)$  – характеристики рабочей и уточнённой моделей разомкнутой системы.

Определение 2.2.4. Если в диапазоне частот  $[0, \omega_n]$  выполняются соотношения

$$\frac{|a(\omega) - a_{ym}(\omega)|}{a(\omega)} \leq \varepsilon_1, \quad |\varphi(\omega) - \varphi_{ym}(\omega)| \leq \varepsilon_2 \quad 0 < \omega \leq \omega_n, \quad (2.2.28)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – достаточно малые положительные числа, то этот диапазон называется *полосой неразличимости* с точностью до  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  рабочей и уточнённой моделей разомкнутой системы. ■

Вне полосы неразличимости амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики моделей могут как угодно сильно отличаться друг от друга, однако, пусть

$$a(\omega) > a_{ym}(\omega) \quad \omega_n \leq \omega \leq \infty. \quad (2.2.29)$$

Утверждение 2.2.1. Рабочая передаточная функция разомкнутой системы является структурно-параметрически грубой, если

a) выполняются неравенства (2.2.28), в которых числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  удовлетворяют условию

$$\eta^2 \left( \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \right) + \eta \left( \varepsilon_1 + 2 \sin \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \leq \varepsilon_3, \quad (2.2.30)$$

где  $\eta = \max_{0 \leq \omega \leq \omega_n} a(\omega)$ ;

б) выполняется соотношение (2.2.29), при этом вне полосы неразличимости

$$a(\omega) \leq 0.2 \quad \omega_n \leq \omega \leq \infty. \quad (2.2.31)$$

Доказательство утверждения приведено в 2.Д.1. Последнее неравенство можно принять за определение наименьшей длины полосы неразличимости при исследовании грубости. В связи с этим найдём частоту  $\bar{\omega}_n = \inf \tilde{\omega}$ , где  $\tilde{\omega}$  – множество частот, для которых выполняется неравенство (2.2.31) и тогда вместо (2.2.31) можно записать

$$\bar{\omega}_n \leq \omega_n. \quad (2.2.32)$$

Сравним частоту  $\bar{\omega}_n$  с частотой среза, которая определяется равенством (2.2.1).

В обычных случаях наклон ЛАЧХ в окрестности  $\omega_{cp}$  составляет (-20 дб/дек). При таком наклоне находим

$$\lg \frac{\bar{\omega}_n}{\omega_{cp}} = \frac{\lg 0.2 \text{ дб.}}{-20 \text{ дб/дек.}} = \frac{-14 \text{ дб.}}{-20 \text{ дб/дек.}} = 0.7 \text{ декады.}$$

Это означает, что

$$\bar{\omega}_n = 5\omega_{cp}. \quad (2.2.33)$$

В практике проектирования давно используется

Правило 2.2.1. Если постоянные времени объекта

$$\check{T}_i^0 (i = \alpha_1^0 + 1, \alpha_{1_{ym}}^0), \hat{T}_j (j = \alpha_2^0 + 1, \alpha_{2_{ym}}^0), T_i^0 (i = N_1^0 + 1, N_{1_{ym}}^0), \check{T}_j^0 (j = N_2^0 + 1, N_{2_{ym}}^0)$$

меньше числа  $\frac{1}{(5 \div 10)\omega_{cp}}$ , то эти постоянные (называемые «паразитными», «малыми» и т.п.) можно не учитывать при синтезе регулятора. ■

Это правило во многом согласуется с условиями структурно-параметрической грубости в утверждении 2.2.1.

## 2.3. Синтез корректирующих устройств

### 2.3.1. Постановка задачи

Рассмотри задачу слежения (задача 1.1.2). Пусть параметры объекта (неизменяемой части системы)

$$d(s)y = b(s)u \quad (2.3.1)$$

известны и требуется найти параметры регулятора (корректирующего контура)

$$g(s)u = r(s)(y - y_{ж}), \quad (2.3.2)$$

где  $y_{ж}(t)$  – задающее воздействие.



Нетрудно проверить, что

$$y = \frac{w_{paz}(s)}{1 + w_{paz}(s)} y_{жс}, \quad (2.3.3)$$

а поэтому ошибка слежения

$$\varepsilon = y_{жс} - y = \frac{1}{1 + w_{paz}(s)} y_{жс}. \quad (2.3.4)$$

Пусть задающее воздействие – ступенчатая функция

$$y_{жс}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ \bar{y}_{жс} = \text{const} & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Эта функция соответствует перенастройке регулятора на новый режим. При таком воздействии приобретают ясный физический смысл понятия переходного и установившихся процессов, введённые в п. 1.1, а характеристики процессов (установившаяся ошибка, перерегулирование, время регулирования) легко определяются экспериментально.

Установившаяся ошибка при воздействии (2.3.5) называется *статической ошибкой*  $\varepsilon_{ст}$ .

Учитывая, что изображение функции (2.3.5) имеет вид  $\frac{\bar{y}_{жс}}{s}$ , получим по теореме о конечном значении

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1 + w_{paz}(0)} \bar{y}_{жс}. \quad (2.3.6)$$

Если система не обладает астатизмом (в передаточной функции (2.1.20)  $\nu = 0$ ), то

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1 + k} \bar{y}_{жс}.$$

В установившемся режиме выход объекта

$$y_{ст} = \frac{k}{1 + k} \bar{y}_{жс}.$$

Для астатических систем ( $\nu \neq 0$ )  $\varepsilon_{ст} = 0$ , и поэтому их точность характеризуется амплитудой ошибки при задающем воздействии

$$y_{жс} = y_m \sin \omega_{жс} t.$$

Из (2.3.4) следует, что

$$\varepsilon_z(\omega_{жс}) = \frac{y_m}{|1 + w_{paz}(j\omega_{жс})|}. \quad (2.3.7)$$

На рис. 2.3.1 приведён пример графика переходного процесса, возбуждённого ступенчатым воздействием при нулевых начальных условиях.

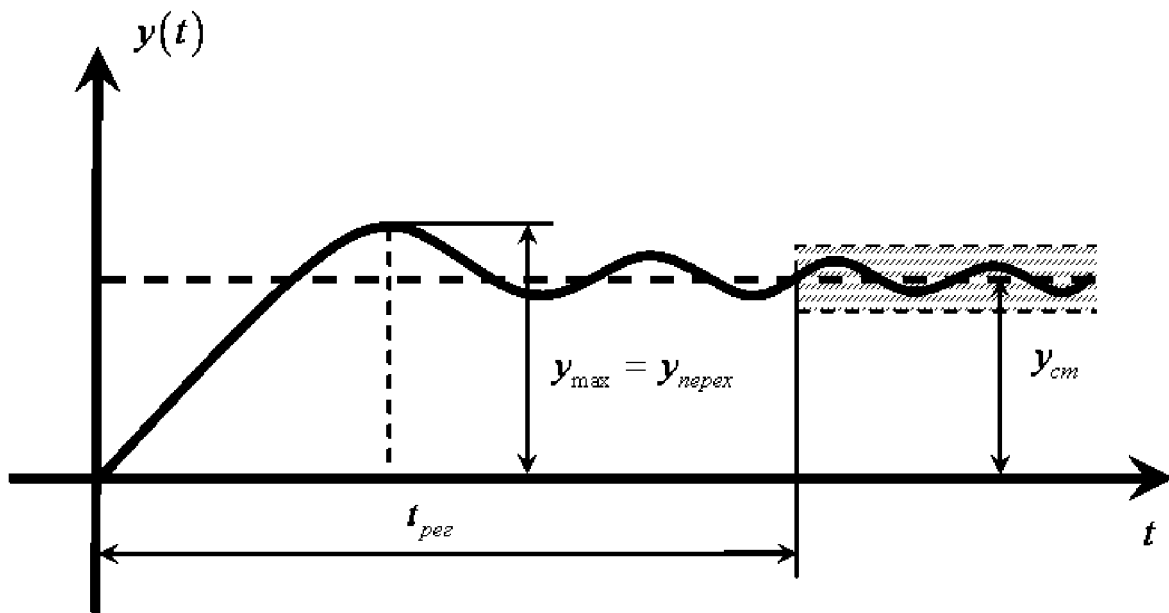


Рис. 2.3.1

Определение 2.3.1. Время, через которое процесс не выходит из трубки  $\pm 5\% \cdot y_{см}$ , называется временем регулирования при ступенчатом задающем воздействии ( $t_{рег}^3$ ).

Трубка радиусом  $5\% \cdot y_{см}$  заштрихована на рис. 2.3.1

Определение 2.3.2. Число

$$\sigma^3 = \frac{|y_{\max} - y_{см}|}{|y_{см}|} \cdot 100\% \quad (2.3.8)$$

называется *перерегулированием при ступенчатом задающем воздействии*.

Статическая ошибка – это показатель точности, а время регулирования и перерегулирования – показатели качества (переходного процесса) системы регулирования.

Связь показателей качества переходного процесса с частотными характеристиками системы приведена в 2.П.4.

Задача 2.3.1. (Задача синтеза корректирующих устройств). Пусть имеем объект регулирования (неизменяемую часть системы), заданный либо уравнением (2.1.1) с известными параметрами, либо амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками. Требуется найти параметры регулятора (2.3.2) (или, другими словами, передаточную функцию корректирующего устройства).

При этом система (2.3.1), (2.3.2) должна:

- а) быть асимптотически устойчивой (при  $y_{жс} = 0$ );
- б) удовлетворить требованиям к точности

$$|\varepsilon_{см}| \leq y^* \quad \text{либо} \quad \varepsilon_2(\omega_{жс}) \leq y^*, \quad (2.3.9)$$

где  $y^*$  – заданное число;

в) иметь показатели качества переходного процесса,

$$\underline{t}_{peg}^3 \leq t_{peg}^3 \leq \bar{t}_{peg}^3, \quad (2.3.10)$$

$$\underline{\sigma}^3 \leq \sigma^3 \leq \bar{\sigma}^3, \quad (2.3.11)$$

где  $\underline{t}_{peg}^3, \bar{t}_{peg}^3, \underline{\sigma}^3, \bar{\sigma}^3$  – заданные числа;

г) быть грубой, обладая запасами устойчивости

$$\varphi_3 \geq 30^\circ, \quad L \geq 2. \quad (2.3.12)$$

■

Число  $\underline{t}_{peg}^3$  задаёт минимальное быстродействие системы. Чем выше быстродействие, тем лучше. Однако при этом обычно увеличивается полоса пропускания и, как следствие, ухудшается помехозащищённость системы. Число  $\bar{t}_{peg}^3$  характеризует допустимую полосу пропускания, понятие о которой приводится ниже.

Граница  $\bar{\sigma}^3$  определяет предельно допустимое перерегулирование. В ряде случаев рекомендуется некоторое перерегулирование, для задания которого и используется  $\underline{\sigma}^3 > 0$ .

Для определения полосы пропускания системы (2.3.1.), (2.3.2) положим

$$y_{ж}(t) = 1 \cdot \sin \omega t. \quad (2.3.13)$$

Выход объекта, возбуждённого таким воздействием, будет (после затухания переходных процессов) изменяться по закону

$$y(t) = M(\omega) \sin[\omega t + \psi(\omega)]. \quad (2.3.14)$$

Функция  $M(\omega)$  называется амплитудно-частотной характеристикой замкнутой системы.

Из (2.3.3) следует, что

$$M(\omega) = \frac{|w_{paz}(j\omega)|}{|1 + w_{paz}(j\omega)|}. \quad (2.3.15)$$

Пример графика этой функции приведён на рис. 2.3.2.

Диапазон  $[0, \omega_n]$  называется полосой пропускания системы. Частота  $\omega_n$  определяется из условия  $M(\omega_n) = 0.707$ . Значение  $\omega_n$  соизмеримо (а часто близко) с частотой среза  $\omega_{cp}$  и поэтому полагают, что  $\omega_{cp}$  характеризует полосу пропускания.

На рис. 2.3.2 показана величина

$$M = \max_{0 \leq \omega < \infty} M(\omega), \quad (2.3.16)$$

которая называется показателем колебательности. Он характеризует резонансные свойства системы. При проектировании систем рекомендуется, чтобы его значение находилось в пределах

$$M = 1.3 \div 2. \quad (2.3.17)$$

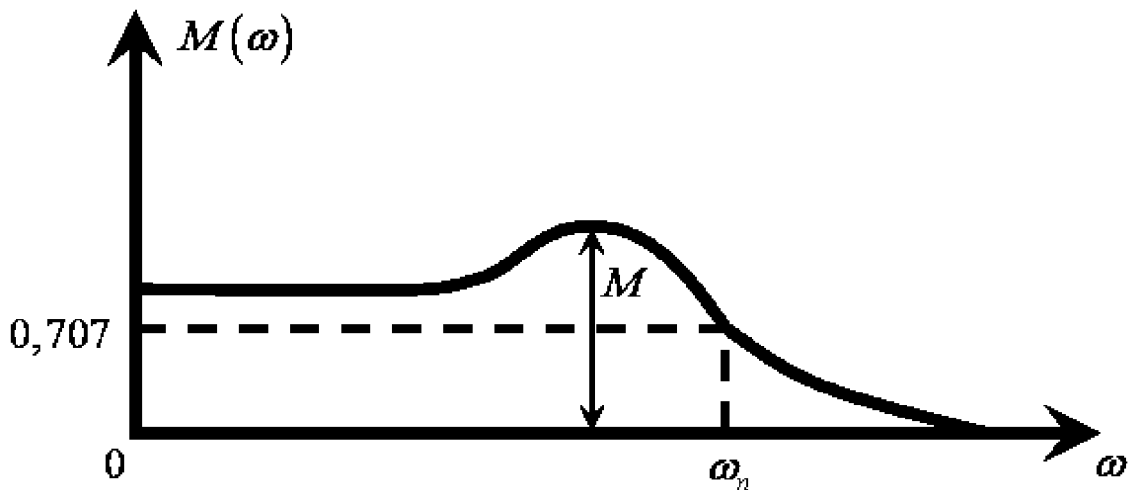


Рис. 2.3.2

### 2.3.2. Метод ЛАЧХ

Решение задачи синтеза исчерпывается операциями следующей процедуры.

#### Процедура 2.3.1. (Операции метода ЛАЧХ)

1. построить желаемую ЛАЧХ разомкнутой системы, при которой система, замкнутая единичной отрицательной обратной связью, удовлетворяет требованиям а) - г) задачи 2.3.1,
2. сформировать ЛАЧХ регулятора (корректирующего контура) путём вычитания ЛАЧХ объекта из желаемой,
3. определить (по изломам полученной ЛАЧХ) постоянные времени регулятора (вычисление коэффициентов полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ ),
4. осуществить анализ системы и уточнить желаемую ЛАЧХ.

■

На рис. 2.3.3 приведён центральный участок одной из типовых желаемых ЛАЧХ и указаны три диапазона частот, для которых определяются соответствующие части желаемой ЛАЧХ.

**Низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ** строят так, чтобы удовлетворить требованию (2.3.9) к точности.

Для систем без астатизма ( $\nu = 0$ ) коэффициент передачи  $k$  определяет значение желаемой ЛАЧХ при  $\omega = 0$ . Найдём этот коэффициент из условия (2.3.9)

Подставляя (2.3.6) в (2.3.9), получим

$$k > \frac{\bar{y}_{жс} - y^*}{y^*}, \quad (2.3.18)$$

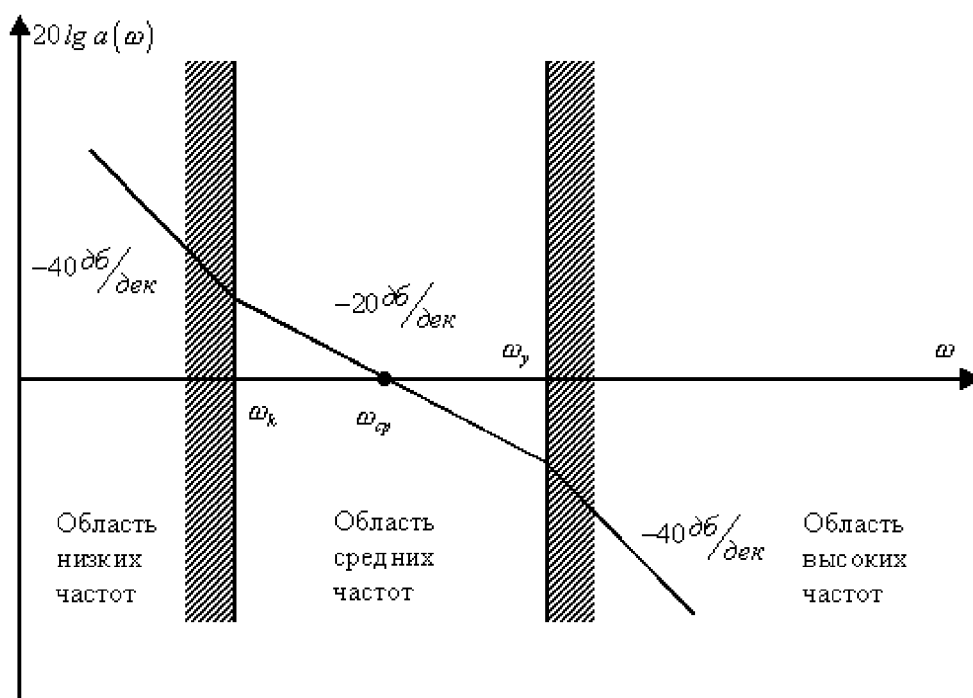


Рис. 2.3.3

и, таким образом, желаемая ЛАЧХ

$$l_{жс}(0) \geq 20 \lg k. \quad (2.3.19)$$

Для астатических систем из (2.3.8) и (2.3.9) следует

$$|1 + w_{раз}(j\omega_{жс})| \geq \frac{y_m}{y^*}. \quad (2.3.20)$$

Обычно  $w_{раз}(j\omega_{жс}) \gg 1$ , поэтому требование к точности выполняется, если

$$l_{жс}(\omega_{жс}) \geq 20 \lg \frac{y_m}{y^*}. \quad (2.3.21)$$

**Среднечастотная часть желаемой ЛАЧХ** определяет качество переходного процесса и грубость системы.

Частоту  $\omega_{ср}$  находят из требования (2.3.10) и времени переходного процесса

$$\omega_{ср} = \frac{\pi}{T_{рег}} \div \frac{4\pi}{T_{рег}}. \quad (2.3.22)$$

Это соотношение носит эмпирический характер и получено из опыта расчёта и эксплуатации большого числа систем регулирования. Этот опыт позволил также дать рекомендации для построения среднечастотной части, при которой выполняются требования к запасам устойчивости (2.3.12) и перерегулированию (2.3.11).

Рекомендация 2.3.1. Для обеспечения запасов устойчивости и малого перерегулирования необходимо, чтобы

- а) наклон ЛАЧХ среднечастотной части ЛАЧХ составлял – 20 дб/дек,
- б) отношение частот  $\omega_x$  и  $\omega_y$  (определяющих длину среднечастотной части) равнялось по крайней мере 5,
- в) отношение частот  $\omega_{cp}$  и  $\omega_x$  составляло  $1/3 \div 1/2$  отношения частот  $\omega_x$  и  $\omega_y$ .

■

**Высокочастотную часть желаемой ЛАЧХ** строят параллельно ЛАЧХ объекта. Этим достигается простота передаточной функции корректирующего устройства (малые степени  $n_p$  и  $\gamma$  уравнения регулятора (2.1.2).

После построения желаемой ЛАЧХ вычитают из неё ЛАЧХ объекта (ЛАЧХ неизменяемой части системы). Результатом этой операции (вторая операция процедуры 2.3.1) является ЛАЧХ регулятора. По её изломам строят передаточную функцию регулятора

$$w_p(s) = k_p \frac{s^{\alpha_{p1}} \prod_{i=1}^{\alpha_{p1}} (\tilde{T}_{pi}s \pm 1) \prod_{j=1}^{\alpha_{p2}} (\hat{T}_{pj}^2 s^2 \pm 2\hat{\xi}_{pj}\hat{T}_{pj}s \pm 1)}{s^{\gamma_p} \prod_{i=1}^{N_{p1}} (T_{pi}s \pm 1) \prod_{j=1}^{N_{p2}} (\tilde{T}_{pj}^2 s^2 \pm 2\tilde{\xi}_{pj}\tilde{T}_{pj}s \pm 1)} = \frac{r(s)}{g(s)}. \quad (2.3.23)$$

Пример 2.3.1. Дан объект регулирования

$$s(0.1s + 1)(0.02s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)y = 2 \cdot 10^3 u. \quad (2.3.24)$$

Его ЛАЧХ приведена на рис. 2.1.5.

Требуется найти регулятор такой, чтобы

- а) ошибка воспроизведения задающего воздействия

$$y_{жс}(t) = 1 \cdot \sin \omega_{жс} t, \quad \omega_{жс} = 0, 1 \frac{1}{сек}$$

удовлетворяла неравенству

$$\varepsilon_2(\omega_{жс}) \leq 10^{-3}, \quad (2.3.25)$$

- б) показатели качества переходного процесса при ступенчатом воздействии

$$t_{peg}^3 = 0, 8 \text{ сек}, \quad \sigma^3 = 30\%, \quad (2.3.26)$$

- в) запасы устойчивости системы удовлетворяли неравенствам (2.3.12).

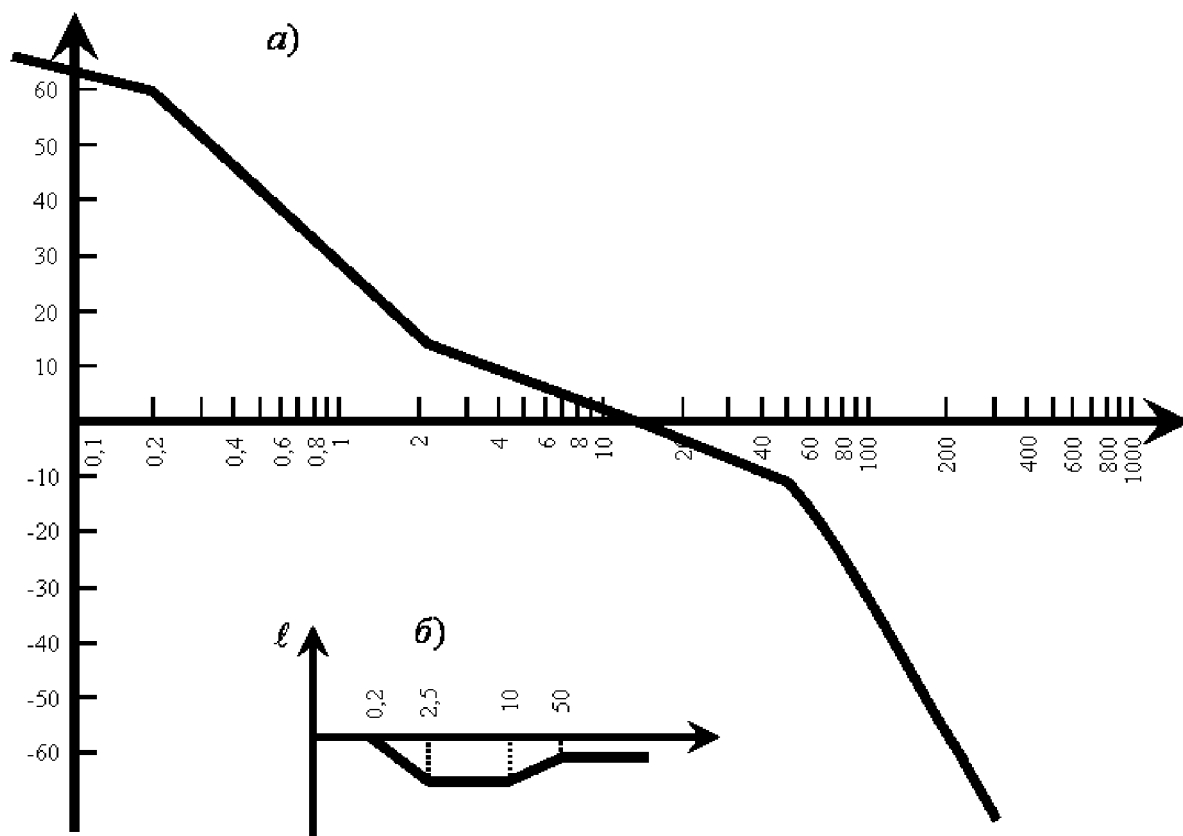


Рис. 2.3.4

Для решения задачи построим желаемую ЛАЧХ. Она приведена на рис. 2.3.4.

Низкочастотная её часть должна удовлетворять условию (2.3.21). Нетрудно проверить, что, если при  $\omega = \omega_k$ , желаемая ЛАЧХ совпадает с ЛАЧХ объекта, то неравенство (2.3.21) выполняется.

Среднечастотная часть пересекает ось частот в точке, которая определяется из (2.3.22) как

$$\omega_{cp} = \frac{4\pi}{t_{рег}} = \frac{4\pi}{0.8} = 15.7 \frac{1}{сек}.$$

Принимаем

$$\omega_{cp} = 15 \frac{1}{сек}.$$

Через эту точку проходит (под наклоном  $-20$  дБ/дек) отрезок желаемой ЛАЧХ. Справа он оканчивается на частоте  $\omega_1$  излома ЛАЧХ объекта. Левый конец отрезка соответствует частоте  $\omega_x$ , значение которой определено с учётом рекомендации 2.3.1.

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = 17, \quad \frac{\omega_{cp}}{\omega_y} = 6.$$

Высокочастотная часть ЛАЧХ, начиная с частоты  $\omega_1$ , проходит параллельно ЛАЧХ объекта. Нетрудно проверить, что построенная желаемая ЛАЧХ удовлетворяет требованиям (2.3.12) к запасам устойчивости.

Осуществим вторую операцию процедуры 2.3.1.

Получим ЛАЧХ корректирующего контура, приведенную на рис. 2.3.46. Очевидно, что

$$w_p(s) = \frac{\left(\frac{1}{2.5}s + 1\right) \left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{0.2}s + 1\right) \left(\frac{1}{50}s + 1\right)} = \frac{(0.4s + 1)(0.1s + 1)}{(5s + 1)(0.02s + 1)} = \frac{r(s)}{g(s)}. \quad (2.3.27)$$

Анализ переходного процесса в объекте (2.3.24) с регулятором

$$(5s + 1)(0.02s + 1)u = (0.4s + 1)(0.1s + 1)y \quad (2.3.28)$$

показывает, что

$$t_{рег}^3 = 0.9 \text{ сек}, \quad \sigma^3 = 35\%. \quad (2.3.29)$$

Эти значения отличаются от требуемых (2.3.26). Если они допустимы по физическим соображениям, то можно остановиться на регуляторе (2.3.28). В противном случае необходимо уточнить желаемую ЛАЧХ. ■

### 2.3.3. Анализ системы и уточнение желаемой ЛАЧХ

Рекомендация 2.3.1. носит эмпирический характер. Поэтому может случиться, что построенная на её основе ЛАЧХ не обеспечивает выполнение требований (2.3.10), (2.3.11) к качеству переходных процессов. В связи с этим необходимо проанализировать переходные процессы в системе.

Используя изломы желаемой ЛАЧХ, найдём её передаточную функцию

$$w_{жс}(s) = \frac{k_{жс}(s)}{d_{жс}^c(s)}. \quad (2.3.30)$$

Замкнутая система, возбуждённая  $y_{жс}$ , описывается, как нетрудно проверить, уравнением

$$[d_{жс}^c(s) + k_{жс}(s)]y = k_{жс}(s)y_{жс}. \quad (2.3.31)$$

Это уравнение часто решают методом трапеций. Для этого строят вначале график вещественной частотной характеристики

$$p_{жс}(\omega) = \text{Im} \frac{k_{жс}(j\omega)}{d_{жс}^c(j\omega) + k_{жс}(j\omega)}.$$

Затем аппроксимируют  $p_{жс}(\omega)$  суммой трапеций (показанных в разделе 2.П.4), для каждой из которых легко находятся составляющие  $y(t)$ . Уравнение (2.3.31) можно решить более точно одним из методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (например, методом Рунге-Кутты).

Если требования (2.3.10), (2.3.11) к качеству переходных процессов не выполняются, то желаемая ЛАЧХ уточняется. Часто используемая процедура такого уточнения приведена в приложении 2.П.6.



2.3.4. Внешние возмущения

Пусть на объект (2.3.1) действует внешнее возмущение. Тогда он описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad (2.3.32)$$

где

$$m(s) = m_\alpha s^\alpha + m_{\alpha-1} s^{\alpha-1} + \dots + m_1 s + m_0. \quad (2.3.33)$$

Нетрудно проверить, что выход системы (2.3.32), (2.3.2)

$$y = \frac{w_{paz}(s)}{1 + w_{paz}(s)} y_{жк} + \frac{w_f(s)}{1 + w_{paz}(s)} f, \quad (2.3.34)$$

где

$$w_f(s) = \frac{m(s)}{d^c(s)}. \quad (2.3.35)$$

Ошибка воспроизведения задающего воздействия имеет в этом случае вид

$$\varepsilon^f = \frac{1}{1 + w_{paz}(s)} y_{жк} - \frac{w_f(s)}{1 + w_{paz}(s)} f. \quad (2.3.36)$$

Пусть  $y_{жк} = 0$ , а  $f(t)$  – ступенчатая функция

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} = \text{const} & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \quad (2.3.37)$$

В установившемся режиме выход объекта

$$y_{cm} = \frac{m(0)}{d^c(0) + k(0)} \bar{f}. \quad (2.3.38)$$

Определение 2.3.3. Время, через которое процесс регулирования не выходит из трубки  $\pm 5\% \cdot y_{cm}$ , называется *временем регулирования при ступенчатом внешнем возмущении* ( $t_{рег}$ ). ■

Определение 2.3.4. Число

$$\sigma = \frac{|y_{\max} - y_{cm}|}{|y_{cm}|} \cdot 100\%, \quad (2.3.39)$$

где  $y_{\max}$  – максимальное значение выхода при внешнем воздействии (2.3.37), называется *перерегулированием при ступенчатом внешнем воздействии*. ■

Если  $\bar{y}_{жк} \neq 0$ , то установившаяся ошибка

$$\varepsilon_c^f = \varepsilon_c + y_{cm}. \quad (2.3.40)$$

Значения  $t_{рег}^s$  и  $t_{рег}$ , вообще говоря, не зависят один от другого и поэтому время регулирования при действии задающего и возмущающего воздействий

$$t_p = \max \{ t_{рег}^s, t_{рег} \}. \quad (2.3.41)$$

Перерегулирование определяется аналогично, как наибольшее из чисел  $\sigma^s$  и  $\sigma$ .

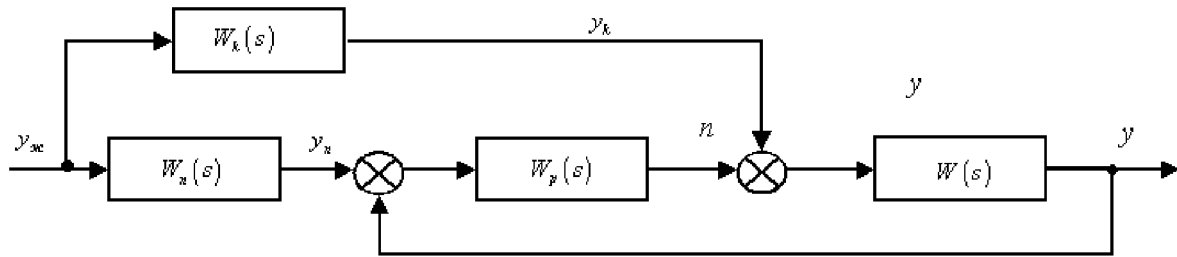


Рис. 2.3.5

### 2.3.5. Следящие системы

Рассмотрим теперь случай, когда задающее воздействие – произвольная ограниченная функция, а не ступенчатое воздействие (2.3.5), как это было до сих пор. Учтём теперь важное обстоятельство, состоящее в том, что задающее воздействие – функция, хотя и неизвестная заранее, но измеряемая в процессе работы системы.

Это обстоятельство позволяет организовать дополнительные (компенсирующие) связи для уменьшения ошибки слежения. На рис. 2.3.5 приведена структурная схема с компенсирующими связями, с передаточными функциями  $w_n(s)$  и  $w_k(s)$ .

Из рис. 2.3.5 следует

$$y = w(s)[w_k(s)y_{жс} + w_p(s)(y + w_n(s)y_{жс})].$$

Отсюда

$$y = \frac{w(s)}{1 - w(s)w_p(s)} [w_k(s) + w_p(s)w_n(s)] y_{жс}. \quad (2.3.42)$$

Ошибка слежения

$$\varepsilon = y_{жс} - y = \frac{1 - w(s)[w_p(s) + w_p(s)w_n(s) + w_k(s)]}{1 - w(s)w_p(s)} y_{жс}. \quad (2.3.43)$$

Эта ошибка равна нулю, если передаточные функции  $w_n(s)$  и  $w_k(s)$  удовлетворяют условию

$$\frac{1}{w(s)} = w_k(s) + w_p(s)[1 + w_n(s)]. \quad (2.3.44)$$

Рассмотрим частные случаи.

При  $w_n(s) = -1$

$$w_k(s) = \frac{1}{w(s)}. \quad (2.3.45)$$

При  $w_k(s) = 0$

$$w_n(s) = \frac{1 - w(s)w_p(s)}{w(s)w_p(s)}. \quad (2.3.46)$$

Полученные передаточные функции – нереализуемы, так как степени их числителей превышают степени знаменателей.

Реализуемые структуры компенсирующих связей будут рассмотрены в следующей главе.

Приложения к главе 2

## 2.П. Параметрические возмущения и запасы устойчивости

### 2.П.1. Запасы устойчивости

Обобщим понятие запаса устойчивости по фазе на случай неединственной частоты среза.

Напомним, что

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \text{mod} w_{pas}(j\omega) = \sqrt{\text{Re}^2 w_{pas}(j\omega) + \text{Im}^2 w_{pas}(j\omega)}, \\ \varphi(\omega) &= \text{Arg} w_{pas}(j\omega). \end{aligned} \quad (2.П.1)$$

Главное значение  $\text{Arg} w_{pas}(j\omega)$  обозначается  $\text{arg} w_{pas}(j\omega)$ ,

Это значение  $\text{arg} w_{pas}(j\omega) \triangleq \psi(\omega)$  находится как наименьшее по абсолютной величине число  $\psi(\omega)$ , удовлетворяющее одновременно двум уравнениям

$$\cos \psi(\omega) = \frac{\text{Re} w_{pas}(j\omega)}{a(\omega)}, \quad \sin \psi(\omega) = \frac{\text{Im} w_{pas}(j\omega)}{a(\omega)}. \quad (2.П.2)$$

Отметим, что  $-\pi \leq \text{arg} w_{pas}(j\omega) \leq \pi$ , а  $\text{Arg} w_{pas}(j\omega) = \psi \pm 2\pi k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Определение 2.П.1. Множество положительных вещественных чисел  $\omega_{cp}$ , удовлетворяющее уравнению

$$a(\omega_{cp}) = 1, \quad (2.П.3)$$

называется множеством частот среза. Оно обозначается далее  $\Omega_{cp}$ . ■

Представим множество  $\Omega_{cp}$ , как два множества  $\Omega_{cp}^{(1)}$ ,  $\Omega_{cp}^{(2)}$  ( $\Omega_{cp}^{(1)} \cup \Omega_{cp}^{(2)} = \Omega_{cp}$ ). Первое из них содержит частоты, для которых

$$\text{Im} w_{pas}(j\omega_{cp}) < 0, \quad (2.П.4)$$

а второе состоит из частот

$$\text{Im} w_{pas}(j\omega_{cp}) > 0. \quad (2.П.5)$$

Первое из этих соотношений означает, что

$$-\pi \leq \text{arg} w_{pas}(j\omega_{cp}^{(1)}) \leq 0, \quad \omega_{cp}^{(1)} \in \Omega_{cp}^{(1)}, \quad (2.П.4')$$

а второе

$$0 \leq \text{arg} w_{pas}(j\omega_{cp}^{(2)}) \leq \pi, \quad \omega_{cp}^{(2)} \in \Omega_{cp}^{(2)}. \quad (2.П.5')$$

Геометрический смысл последних неравенств состоит в том, что точки пересечения АФЧХ с окружностью единичного радиуса с центром в точке  $(0, j0)$  находятся

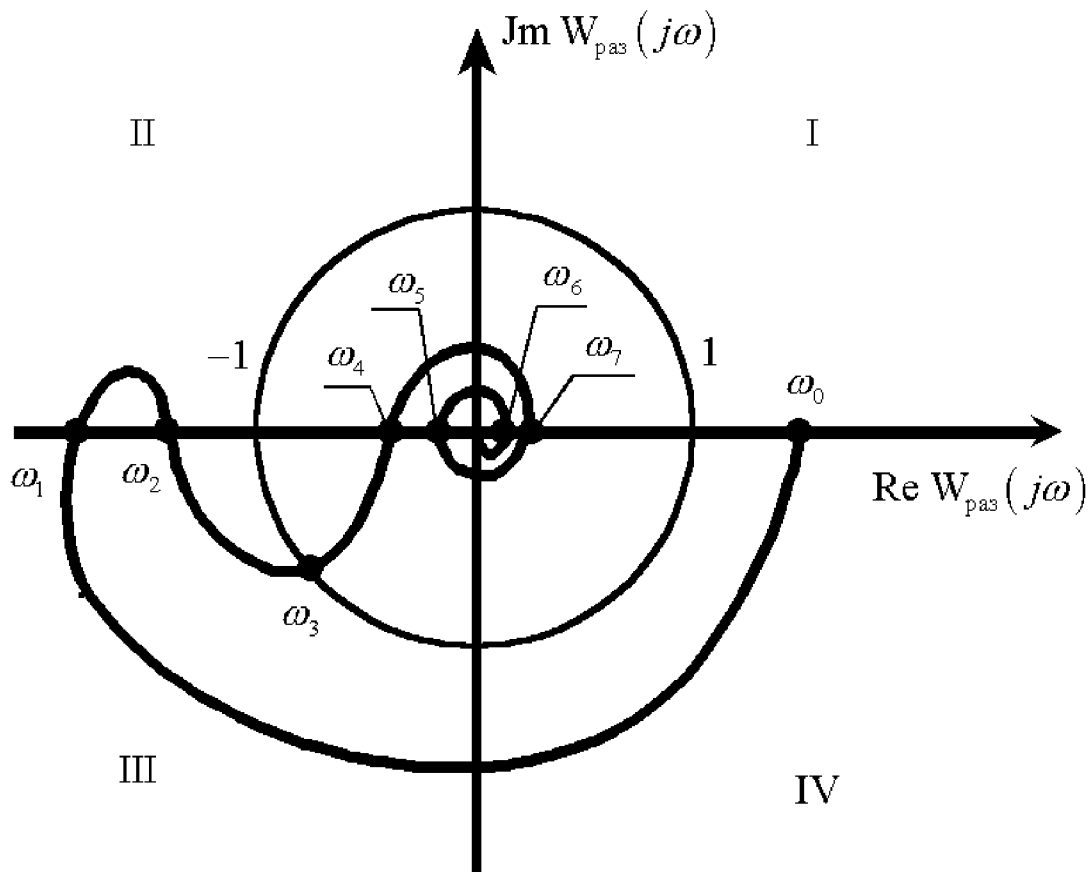


Рис. 2.П.1

для частот  $\omega_{cp}^{(2)}$  в первом и во втором квадрантах (квадранты указаны римскими цифрами на рис. 2.П.1), а для частот  $\omega_{cp}^{(1)}$  – в третьем и четвёртом.

Определение 2.П.2. Множество положительных вещественных чисел  $\omega_\phi$ , удовлетворяющих уравнению

$$\text{Im } w_{paz}(j\omega_\phi) = 0, \quad (2.П.6)$$

называется множеством фазовых частот. Оно обозначается далее  $-\Omega_\phi$ . ■

Разобьем множество  $\Omega_\phi$  на три подмножества:  $\Omega_\phi^{(1)}$ ,  $\Omega_\phi^{(2)}$ ,  $\Omega_\phi^{(3)}$ . В первое из них включим те частоты, для которых

$$\text{Re } w_{paz}(j\omega) < -1. \quad (2.П.7)$$

Множество  $\Omega_\phi^{(2)}$  содержит частоты, при которых

$$-1 < \text{Re } w_{paz}(j\omega) \leq 0, \quad (2.П.8)$$

а множество  $\Omega_\phi^{(3)}$  определим как множество частот, в которых

$$\text{Re } w_{paz}(j\omega) > 0. \quad (2.П.9)$$

Определение 2.П.3. Если множество  $\Omega_{\phi}^{(2)}$  пусто, то АФЧХ системы называется АФЧХ первого рода, в противном случае АФЧХ системы называется АФЧХ второго рода. ■

Пример 2.П.1. Рассмотрим годограф АФЧХ второго рода, приведённый рис. 2.П.1

Там же тонкой линией показана окружность единичного радиуса с центром в точке  $(0, j0)$  и отмечены частоты, при которых годограф пересекает ось  $\text{Re} w_{\text{раз}}(j\omega)$  и окружность единичного радиуса.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае множество  $\Omega_{c_p}$  состоит из одной частоты  $\omega_3$ , множество  $\Omega_{\phi}^{(1)}$  содержит две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , множество  $\Omega_{\phi}^{(2)}$  – частоты  $\omega_4$  и  $\omega_5$ , а множество  $\Omega_{\phi}^{(3)}$  – частоты  $\omega_0, \omega_6, \omega_7$ . ■

Определение 2.П.4. Запасом по фазе  $\varphi$  называется наименьшая из градусных (угловых) мер дуг окружности единичного радиуса с центром в точке  $(0, j0)$ , отсчитываемых от точки  $(-1, j0)$  до точки пересечения годографа АФЧХ с этой окружностью единичного радиуса. ■

Выражение запаса по фазе, соответствующее этому определению, имеет вид

$$\varphi = \min_{\substack{\omega_{c_p}^{(1)} \in \Omega_{c_p}^{(1)} \\ \omega_{c_p}^{(2)} \in \Omega_{c_p}^{(2)}}} \left\{ 180^\circ + \arg w_{\text{раз}}(j\omega_{c_p}^{(1)}), 180^\circ - \arg w_{\text{раз}}(j\omega_{c_p}^{(2)}) \right\}. \quad (2.П.10)$$

Пример 2.П.2. Пусть годограф АФЧХ разомкнутой системы протекает как показано на рис. 2.П.2. Значение запаса по фазе определяется при  $\omega_{c_p} = \omega_4$ , так как при других значениях частот  $\omega_i \in \Omega_{c_p}$  ( $i = 2, 3, 5, 6, 7, 8$ ) градусная мера дуги окружности, отсчитываемой от точки  $(-1, j0)$ , превышает её значение при  $\omega_{c_p} = \omega_4$ . ■

Отметим, что часто множество  $\Omega_{c_p}$  состоит из одной частоты  $\omega_{c_p}$  (уравнение (2.П.3) имеет единственное решение), называемой частотой среза. В этом случае для систем, асимптотически устойчивых в разомкнутом состоянии, запас по фазе

$$\varphi_s = 180^\circ + \varphi(\omega_{c_p}). \quad (2.П.11)$$

Определение 2.П.5. Запасом по модулю  $L$  называется число

$$L = \min_{\substack{\omega_{\phi}^{(1)} \in \Omega_{\phi}^{(1)} \\ \omega_{\phi}^{(2)} \in \Omega_{\phi}^{(2)}}} \left\{ a(\omega_{\phi}^{(1)}), \frac{1}{a(\omega_{\phi}^{(2)})} \right\}. \quad (2.П.12)$$

Из этого определения следует, что запасом по модулю является наименьшее из двух чисел. Первое из этих чисел – это наименьшее из расстояний, отсчитываемых вдоль вещественной оси влево от критической точки до точек пересечения АФЧХ с вещественной осью. Второе число характеризует расстояние до ближайшей точки пересечения АФЧХ с вещественной осью, если двигаться вправо от критической

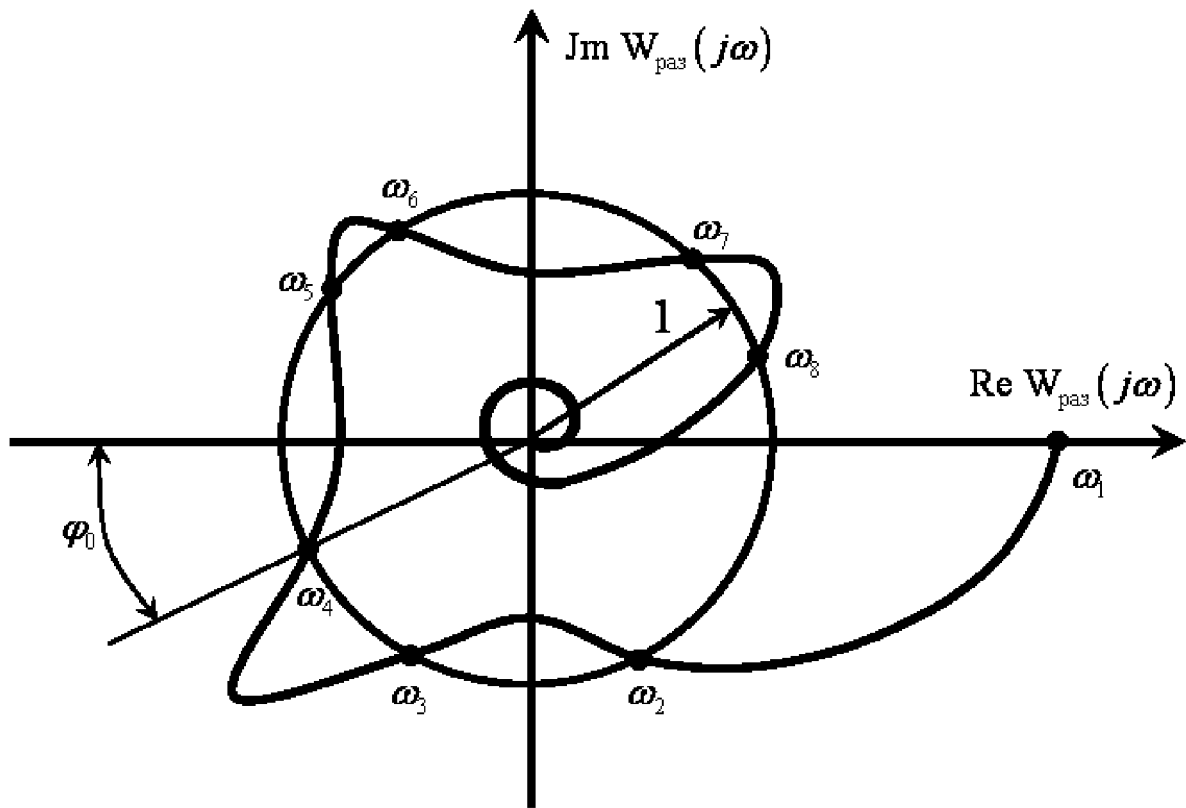


Рис. 2.П.2

точки. Это «расстояние» определяется как обратная величина расстояния точки пересечения АФЧХ с вещественной осью) от точки  $(0, j0)$ .

Пример 2.П.3. Определим запас по модулю системы, АФЧХ которой приведено на рис. 2.П.1

Очевидно, что

$$L = \min \left\{ a(\omega_2); \frac{1}{a(\omega_4)} \right\}. \quad (2.П.13)$$

Пример 2.П.4. Исследуем запасы устойчивости системы (1.П.80), (1.П.83) из примера 1.П.2, обладающей малой степенью грубости. Для определения запаса по фазе найдём множество частот среза. В связи с этим запишем

$$w_{раз}(s) = \frac{-148.5s + 0.4}{s^2 + 150s + 0.1} = \frac{0.4(-396s + 1)}{0.1 \left( \frac{1}{150}s + 1 \right) (1500s + 1)}.$$

Тогда

$$a(\omega) = |w_{раз}(j\omega)| = \frac{4\sqrt{396^2\omega^2 + 1}}{\sqrt{0.0066^2\omega^2 + 1}\sqrt{1500^2\omega^2 + 1}} \quad (2.П.14)$$

Нетрудно проверить, что при

$$\omega = 0.0177, \quad (2.П.15)$$

$$a(\omega) = 1. \quad (2.П.16)$$

Запас устойчивости по фазе

$$\varphi_3 = 180^\circ - \arctg 1500\omega_{cp} - \arctg \frac{1}{150}\omega_{cp} - \arctg 396\omega_{cp} = 11^\circ. \quad (2.П.17)$$

Для определения запаса устойчивости по модулю найдём на основе (2.П.6)

$$\omega_{1\phi}^{(2)} = \sqrt{2}, \quad \omega_{1\phi}^{(3)} = 0. \quad (2.П.18)$$

Значение

$$\operatorname{Re} w_{paz} (j\omega_{1\phi}^{(2)}) = -0.99 \quad (2.П.19)$$

и поэтому

$$L = 1.01. \quad (2.П.20)$$

■

Определение 2.П.6. Система (2.1.1), (2.1.2) называется *грубой по частотным показателям*, если её запасы устойчивости по фазе и модулю удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_3 \geq 30^\circ, \quad L \geq 2. \quad (2.П.21)$$

■

Если для системы (2.1.1), (2.1.2) не выполняется хотя бы одного из этих неравенств, то она называется *негрубой по частотным показателям*.

## 2.П.2. Параметрические возмущения и запасы устойчивости по фазе и модулю

Границы запаса устойчивости в (2.П.21) установлены на основе большого опыта эксплуатации систем регулирования. Вместе с тем полезно найти явную связь между значениями этих границ и уровнем параметрических возмущений.

Переходя к установлению таких связей, будем полагать систему (2.1.1), (2.1.2) асимптотически устойчивой в разомкнутом состоянии. Кроме того, пусть для простоты корни полиномов  $k(s)$  и  $d^c(s)$  вещественны и различны. Тогда передаточную функцию разомкнутой системы (2.1.1), (2.1.2) можно записать как

$$w_{paz}(s) = \frac{k(s)}{d^c(s)} = k_{paz} \frac{\prod_{\delta=1}^{\varkappa} (T_\delta s + 1) \prod_{\mu=\varkappa+1}^{n_c} (\tilde{T}_\mu s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_c} (\tilde{T}_i s + 1)}, \quad (2.П.22)$$

где  $T_\delta, \tilde{T}_\mu, \tilde{T}_i$  ( $\delta = \overline{1, \varkappa}, \mu = \overline{\varkappa+1, n_c}, i = \overline{1, n_c}$ ) – постоянные времени: при этом  $T_\delta < 0$  ( $\delta = \overline{1, \varkappa}$ ), а остальные постоянные времени положительные числа;

$$k_{paz} = \frac{k_0}{d_0^c}.$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики, соответствующие передаточной функции, имеют вид

$$a(\omega) = k_{paz} \prod_{\delta=1}^{\infty} \sqrt{T_{\delta}^2 \omega^2 + 1} \cdot \prod_{\mu=\infty+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_{\mu}^2 \omega^2 + 1} / \prod_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_i^2 \omega^2 + 1}, \quad (2.П.23)$$

$$\varphi(\omega) = - \sum_{\delta=1}^{\infty} \operatorname{arctg} |T_{\delta}| \omega + \sum_{\mu=\infty+1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_{\mu} \omega - \sum_{i=1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_i \omega. \quad (2.П.24)$$

Если ограничимся случаем, когда множество  $\Omega_{\mathcal{F}}^{(1)}$  – пусто, а множество  $\Omega_{\mathcal{F}}^{(2)}$  состоит из единственной частоты  $\bar{\omega}$ , то запас по модулю

$$L = \frac{1}{a(\bar{\omega})} = \frac{\prod_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_i^2 \bar{\omega}^2 + 1}}{k_{paz} \prod_{\delta=1}^{\infty} \sqrt{T_{\delta}^2 \bar{\omega}^2 + 1} \cdot \prod_{\mu=\infty+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_{\mu}^2 \bar{\omega}^2 + 1}}, \quad (2.П.25)$$

где  $\bar{\omega}$  является решением уравнения

$$\varphi(\bar{\omega}) = -\pi. \quad (2.П.26)$$

Из (2.П.24), (2.П.26) следует, что  $\bar{\omega}$  практически не зависит от изменения (в несколько раз) тех значений постоянных времени, для которых выполняются неравенства

$$|T_{\delta}| \gg \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad \tilde{T}_{\mu} \gg \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad \tilde{T}_i \gg \frac{1}{\bar{\omega}} \quad (\delta = \overline{1, \gamma_1}; \mu = \overline{\infty + 1, \gamma_2}; i = \overline{1, \gamma_3}). \quad (2.П.27)$$

Действительно, для этих постоянных времени  $\operatorname{arctg} T\omega \approx 90^\circ$  и значительные изменения  $T$  мало изменяют значение  $\operatorname{arctg} T\omega$ .

Если выполняются неравенства (2.П.27), то можно записать

$$L = \frac{\prod_{i=1}^{\gamma_3} (\tilde{T}_i^2 \bar{\omega}^2) \prod_{i=\gamma_3+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_i^2 \bar{\omega}^2 + 1}}{k_{paz} \prod_{\delta=1}^{\gamma_1} (T_{\delta}^2 \bar{\omega}^2) \prod_{\delta=\gamma_1+1}^{\infty} \sqrt{T_{\delta}^2 \bar{\omega}^2 + 1} \cdot \prod_{\mu=\infty+1}^{\gamma_2} (\tilde{T}_{\mu}^2 \bar{\omega}^2) \prod_{\mu=\gamma_2+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_{\mu}^2 \bar{\omega}^2 + 1}}. \quad (2.П.28)$$

Из этого выражения следует, что запас по модулю изменяется пропорционально изменению  $\gamma_3$  постоянных времени  $\tilde{T}_i$  ( $i = \overline{1, \gamma_3}$ ) и обратно пропорционально изменению  $\gamma_1$  постоянных времени  $T_{\delta}$  ( $\delta = \overline{1, \gamma_1}$ ) и  $\gamma_2 - \infty - 1$  постоянных времени  $\tilde{T}_{\mu}$  ( $\mu = \overline{\infty + 1, \gamma_2}$ ). При этом частоты, соответствующие этим постоянным времени, лежат далеко влево от частоты  $\bar{\omega}$ .

Используя связь (2.П.28), можно найти то значение  $L$ , при котором вариации постоянных времени (2.П.27) в заданных пределах не приведут к нарушению устойчивости системы. Установим теперь аналогичную связь для запаса устойчивости по фазе. Рассмотрим выражение

$$\varphi_s = 180^\circ - \sum_{\delta=1}^{\infty} \operatorname{arctg} |T_{\delta}| \omega_{cp} + \sum_{\mu=\infty+1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_{\mu} \omega_{cp} - \sum_{i=1}^{n_c} \operatorname{arctg} \tilde{T}_i \omega_{cp}, \quad (2.П.29)$$



где  $\omega_{cp}$  пусть также единственная частота, при которой

$$a(\omega_{cp}) = \frac{k_{paz} \prod_{\delta=1}^{\infty} \sqrt{T_{\delta}^2 \omega_{cp}^2 + 1} \cdot \prod_{\mu=\infty+1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_{\mu}^2 \omega_{cp}^2 + 1}}{\prod_{i=1}^{n_c} \sqrt{\tilde{T}_i^2 \omega_{cp}^2 + 1}} = 1. \quad (2.П.30)$$

Нетрудно видеть, что значение  $\omega_{cp}$  практически не зависит от постоянных времени, для которых выполняются неравенства

$$|T_{\delta}| < \frac{1}{\omega_{cp}}, \quad \tilde{T}_{\mu} < \frac{1}{\omega_{cp}}, \quad \tilde{T}_i < \frac{1}{\omega_{cp}} (\delta = 1, \gamma_4; \mu = \infty + 1, \gamma_5; i = 1, \gamma_0). \quad (2.П.31)$$

Значение же  $\varphi_3$  изменяется почти пропорционально изменению этих постоянных.

### 2.П.3. Свойства АФЧХ систем с нулевой либо малой степенями грубости

Утверждение 2.П.1. Годограф АФЧХ системы (2.1.1), (2.1.2), обладающей нулевой степенью грубости, проходит через критическую точку  $(-1, j0)$ . ■

**Доказательство.** Запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$w_{paz}(s) = \frac{k(s)}{d^c(s)} = \frac{k(s)d^c(-s)}{d^c(s)d^c(-s)} = \frac{\left[ \sum_{i=0}^{n_c} k_i s^i \right] \left[ \sum_{j=0}^{n_c} d_j^c (-s)^j \right]}{\left[ \sum_{i=0}^{n_c} d_i^c s^i \right] \left[ \sum_{j=0}^{n_c} d_j^c (-s)^j \right]} = \frac{\sum_{\mu=0}^{2n_c} l_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{\mu=0}^{2n_c} t_{\mu} s^{\mu}}, \quad (2.П.32)$$

где

$$l_{\mu} = \sum_{j=0}^{n_c} k_j d_{\mu-j}^c (-1)^{\mu-j}, \quad t_{\mu} = \sum_{j=0}^{n_c} d_j^c d_{\mu-j}^c (-1)^{\mu-j} \quad \mu = \overline{0, 2n_c}. \quad (2.П.33)$$

Нетрудно проверить, что для нечётных  $\mu$  значения  $t_{\mu} = 0$ . При  $s = j\omega$  получим

$$w_{paz}(j\omega) = \frac{l_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum_{\alpha=0}^{n_c-1} l_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^{\alpha}}{t_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum_{\alpha=0}^{n_c-1} t_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^{\alpha}} + j \frac{\sum_{\alpha=1}^{n_c} l_{2\alpha-1} \omega^{2(\alpha-1)} (-1)^{2\alpha-1}}{t_{2n_c} \omega^{2n_c} (-1)^{n_c} + \sum_{\alpha=0}^{n_c-1} t_{2\alpha} \omega^{2\alpha} (-1)^{\alpha}}. \quad (2.П.34)$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} w_{paz}(j\omega) = \frac{l_{2n_c}}{t_{2n_c}} = \frac{k_{n_c} d_{n_c}^c}{d_{n_c}^c} = \frac{k_{n_c}}{d_{n_c}^c}, \quad (2.П.35)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} w_{paz}(j\omega) = 0. \quad (2.П.36)$$

Пусть в соответствии с алгебраическим критерием нулевой степени грубости

$$k_{n_c} = -d_{n_c}^c. \quad (2.П.37)$$

Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} w_{\text{пас}}(j\omega) = -1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} w_{\text{пас}}(j\omega) = 0, \quad (2.П.38)$$

следовательно, годограф АФЧХ достигает критической точки  $(-1, j0)$ , что и доказывает утверждение 2.П.1.

Рассмотрим теперь случай, когда система (2.1.1), (2.1.2) обладает малой степенью грубости.

Пусть в соответствии с алгебраическим критерием малой степени грубости

$$k_\rho = -d_\rho^c + \varepsilon_\rho, \quad (2.П.39)$$

где  $\rho$  – фиксированное число, а  $\varepsilon_\rho$  – удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon_\rho \ll |k_\rho|, |d_\rho^c|. \quad (2.П.40)$$

Дополнительно к этим условиям будем полагать, что  $k_\rho$  и  $d_\rho$  достаточно большие числа по сравнению с остальными коэффициентами полиномов  $k(s)$  и  $d^c(s)$  соответственно. Другими словами

$$|k_\rho| \gg |k_\alpha|, \quad |d_\rho^c| \gg |d_\alpha^c| \quad \alpha = 0, 1, \dots, \rho - 1, \rho + 1, \dots, n_c. \quad (2.П.41)$$

При этом условии полином  $k(s)$  можно представить в виде

$$k(s) = \sum_{i=0}^{n_c} k_i s^i \approx \left( \frac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + \frac{k_{n_c-1}}{k_\rho} s^{n_c-\rho-1} + \dots + \frac{k_{\rho-1}}{k_\rho} s + 1 \right) \cdot (k_\rho s^\rho + \dots + k_1 s + k_0), \quad (2.П.42)$$

где

$$T_1 = \frac{k_{n_c}}{k_\rho}. \quad (2.П.43)$$

Последнее из соотношений (2.П.42) следует из того, что корни многочлена

$$\frac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + \frac{k_{n_c-1}}{k_\rho} s^{n_c-\rho-1} + \dots + \frac{k_{\rho-1}}{k_\rho} s + 1$$

стремятся при  $k_\rho \rightarrow \infty$  к корням полинома  $\frac{k_{n_c}}{k_\rho} s^{n_c-\rho} + 1$ .

Рассуждая аналогично, получим

$$d(s) \approx \left( T_2 s^{n_c-\rho} + 1 \right) \left( d_\rho^c s^\rho + \dots + d_1^c s + d_0^c \right). \quad (2.П.44)$$

Пренебрегая малыми постоянными времени  $T_1, T_2$  имеем

$$w_{\text{пас}}(s) \approx \frac{k_\rho s^\rho + \dots + k_1 s + k_0}{d_\rho^c s^\rho + \dots + d_1^c s + d_0^c}. \quad (2.П.45)$$

Полагая  $s = j\omega$  и повторяя преобразования (2.П.32), (2.П.36) заключаем, что всегда существует достаточно большая частота  $\omega^*$  (и достаточно большие числа  $k_\rho$  и  $d_\rho$  такие, что можно пренебречь постоянными  $T_1$  и  $T_2$  на этой частоте), что

$$\operatorname{Re} w_{pas}(j\omega^*) = \frac{k_\rho}{d_\rho^c} = \frac{-d_\rho^c + \varepsilon_\rho}{d_\rho^c} = -1 + \frac{\varepsilon_\rho}{d_\rho^c}, \quad \operatorname{Im} w_{pas}(j\omega^*) = 0. \quad (2.П.46)$$

Так как в соответствии с (2.1.18)  $\varepsilon_\rho \ll |d_\rho|$ , то (2.П.46) означает, что годограф АФЧХ системы, обладающей малой степенью грубости, проходит в малой окрестности критической точки  $(-1, j0)$ .

Пример 2.П.5. Исследуем свойства АФЧХ системы, построенной в примере 1.П.2. Передаточная функция этой системы, обладающей малой степенью грубости, имеет вид

$$w_{pas}(s) = \frac{-148.5s + 0.4}{s^2 + 150s + 0.1}. \quad (2.П.47)$$

Годограф АФЧХ рассматриваемой системы строится на основе

$$\operatorname{Re} w_{pas}(j\omega) = \frac{-148.5 \cdot 150\omega^2 + 0.04}{\omega^4 + 150^2\omega^2 + 0.01}, \quad \operatorname{Im} w_{pas}(j\omega) = \frac{148.5\omega^3 - 74.85\omega}{\omega^4 + 150^2\omega^2 + 0.01}.$$

При  $\omega = 0.4$  получим

$$\operatorname{Re} w_{pas}(j0.4) = -0.99, \quad \operatorname{Im} w_{pas}(j0.4) = -5.5 \cdot 10^{-3}, \quad (2.П.48)$$

и следовательно, при этой частоте годографа АФЧХ проходит в малой окрестности критической точки. ■

## **2.П.4. Связь показателей качества переходного процесса с частотными характеристиками системы**

Решение уравнений (2.3.1), (2.3.2) можно найти, используя обратное преобразование Лапласа функции

$$y(s) = \Phi(s)y_{ж}(s), \quad (2.П.49)$$

где в соответствии с (2.3.3)

$$\Phi(s) = \frac{w_{pas}(s)}{1 + w_{pas}(s)}. \quad (2.П.50)$$

Для ступенчатого задающего воздействия  $y_{ж}(s) = \frac{\bar{y}_{ж}}{s}$ , и поэтому

$$y(s) = \frac{\Phi(s)}{s} \bar{y}_{ж}.$$

Полагая для простоты  $\bar{y}_{ж} = 1$ , запишем искомое решение

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\Phi(s)}{s} e^{st} ds. \quad (2.П.51)$$

После ряда преобразований этого выражения найдём

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (2.П.52)$$

где  $P(\omega) = \operatorname{Re} \Phi(j\omega)$ .

Переходный процесс (решение  $y(t)$ ) можно также описать через мнимую часть передаточной функции замкнутой системы

$$y(t) = \Phi(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{S(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega, \quad (2.П.53)$$

где  $S(\omega) = \operatorname{Im} \Phi(j\omega)$ .

Обычно используют выражение (2.П.52). Способ построения  $P(\omega)$  по ЛАЧХ и ФЧХ приведён ниже в разделе 2.П.5. Для вычисления интеграла (2.П.52) аппроксимируют  $P(\omega)$  суммой трапеций, как показано на рис. 2.П.3.

Часто вещественную частотную характеристику можно аппроксимировать двумя трапециями (см. рис. 2.П.4).

Эта аппроксимирующая функция характеризуется параметрами: основным наклоном  $\varepsilon = \frac{\omega_d}{\omega_n}$ , коэффициентом формы  $\lambda = \frac{\omega_b}{\omega_n}$ , наклоном  $\varepsilon_a = \frac{\omega_a}{\omega_0}$ , числами  $p_{\max}$  и  $\omega_n$ .

На рис. 2.П.5 приведены зависимости времени регулирования и перерегулирования от  $p_{\max}$ .

Эти зависимости получены эмпирически в результате анализа и усреднения большого числа кривых  $y(t)$ , порождаемых аппроксимирующей функцией при различных значениях  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_a$ .

Примечание 2.П.1. Обозначим  $P^A(\omega)$  ломаную линию, аппроксимирующую вещественную частотную характеристику  $P(\omega)$ . Переходный процесс, соответствующий функции  $P^A(\omega)$ ,

$$y^A(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P^A(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (2.П.54)$$

■

Разность между точным  $y(t)$  и приближённым  $y^A(t)$  решением

$$\Delta y(t) = y(t) - y^A(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Delta P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (2.П.55)$$

где  $\Delta P(\omega) = P(\omega) - P^A(\omega)$ .

Пусть, например,

$$\Delta P(\omega) = \alpha \sin \beta \omega \quad (\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}), \quad (2.П.56)$$

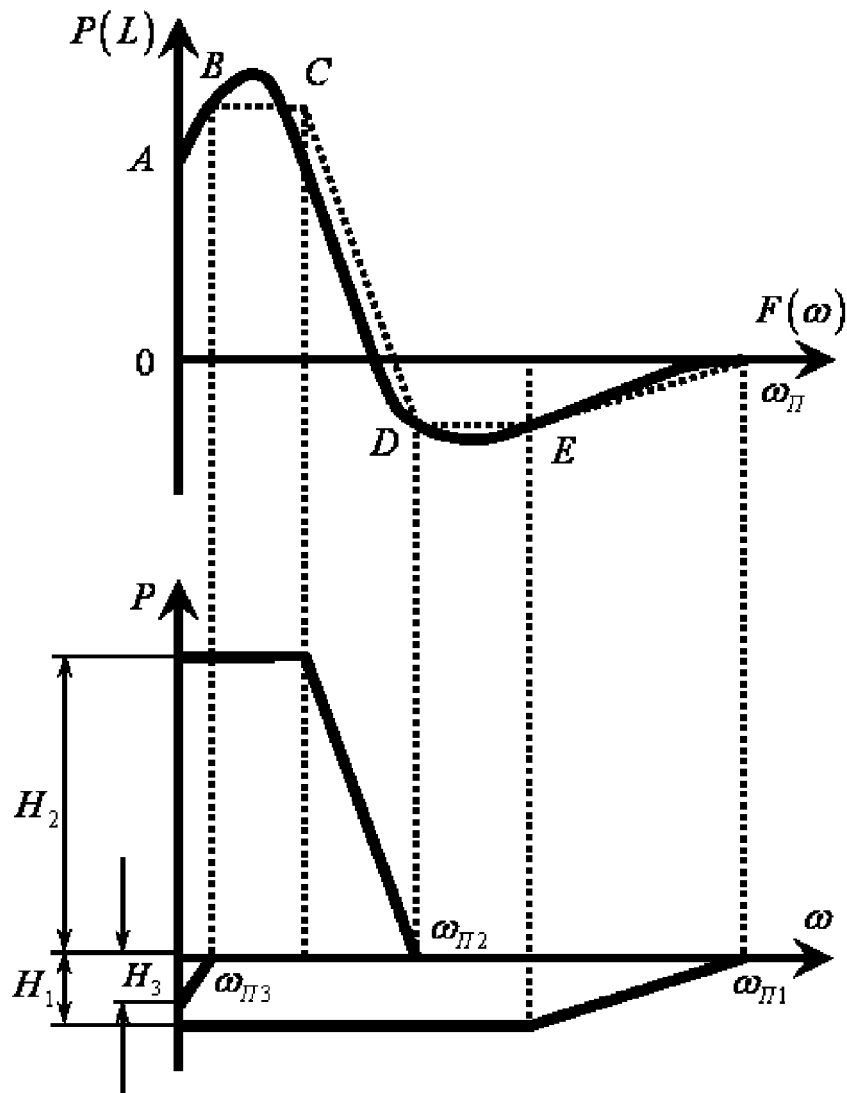


Рис. 2.П.3

тогда

$$\Delta y(t) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta \omega \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{(\beta + t)^2}{(\beta - t)^2}. \quad (2.П.57)$$

При  $t \rightarrow \beta$  значение  $\Delta y(t) \rightarrow \infty$ .

Этот пример показывает, что сколь угодно малые погрешности аппроксимации вещественной частотной характеристики могут приводить к сколь угодно большим ошибкам при вычислении переходного процесса.

## 2.П.5. Определение вещественной частотной характеристики по ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы

Выразим  $P(\omega)$  через амплитудно-частотную  $a(\omega)$  и фазо-частотную  $\varphi(\omega)$  характеристики разомкнутой системы.

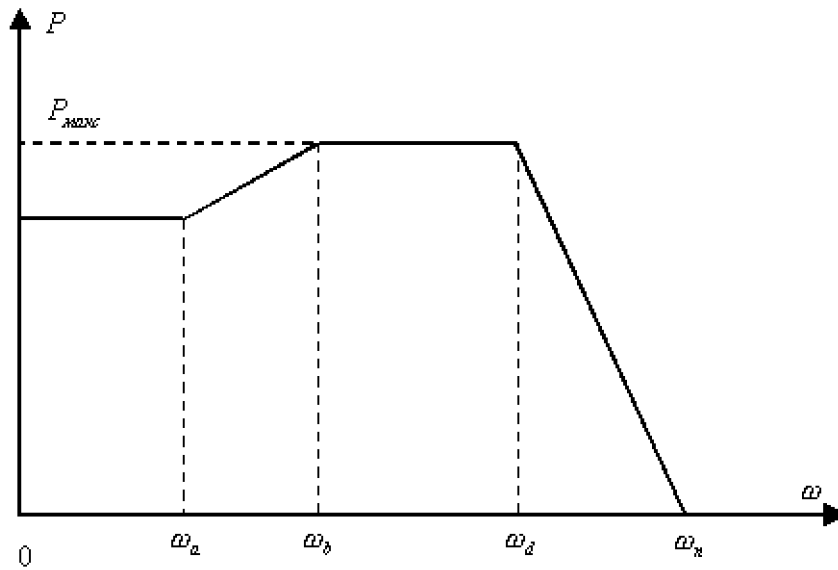


Рис. 2.П.4

Запишем (2.П.50) при  $s = j\omega$

$$\Phi(j\omega) = \frac{a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{1 + a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}} = \frac{a(\omega) \cos \varphi(\omega) + ja(\omega) \sin \varphi(\omega)}{1 + a(\omega) \cos \varphi(\omega) + ja(\omega) \sin \varphi(\omega)} = P(\omega) + jS(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{a^2(\omega) + a(\omega) \cos \varphi(\omega)}{a^2(\omega) + 2a(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}. \quad (2.П.58)$$

Построим в плоскости с осью ординат и осью абсцисс геометрическое место точек  $P(\omega) = P_c = \text{const}$ .

Эти кривые, имеющие своеобразную форму в виде симметричных восьмёрки, приведены на рис. 2.П.6.

Нанесём на рис. 2.П.6 (логарифмическую) амплитудно-фазовую характеристику.

Это осуществляется так. Для некоторой фиксированной частоты  $\omega_1$  определяем по ЛАЧХ числа  $20 \lg a(\omega_1)$  и  $\varphi(\omega_1)$ . Отмечаем на рис. 2.П.6 точку с такими координатами. Повторяем эту операцию для  $\omega = \omega_2$  и т.д. Соединяя эти точки, получаем АФХ разомкнутой системы. Определяем частоты в точках пересечения АФХ с линиями  $P_c = \text{const}$ , получаем графики.

Если построенную функцию  $P(\omega)$  можно аппроксимировать двумя трапециями, то определяют

$$P_{\max} = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} P(\omega)$$

и находят по номограммам рис. 2.П.5 значения  $t_{peg}$  и  $\sigma$ .

Таким образом можно сформировать процедуру определения показателей качества переходных процессов в системе по её ЛАЧХ и ФЧХ в разомкнутом состоянии. Эта процедура состоит из операций:

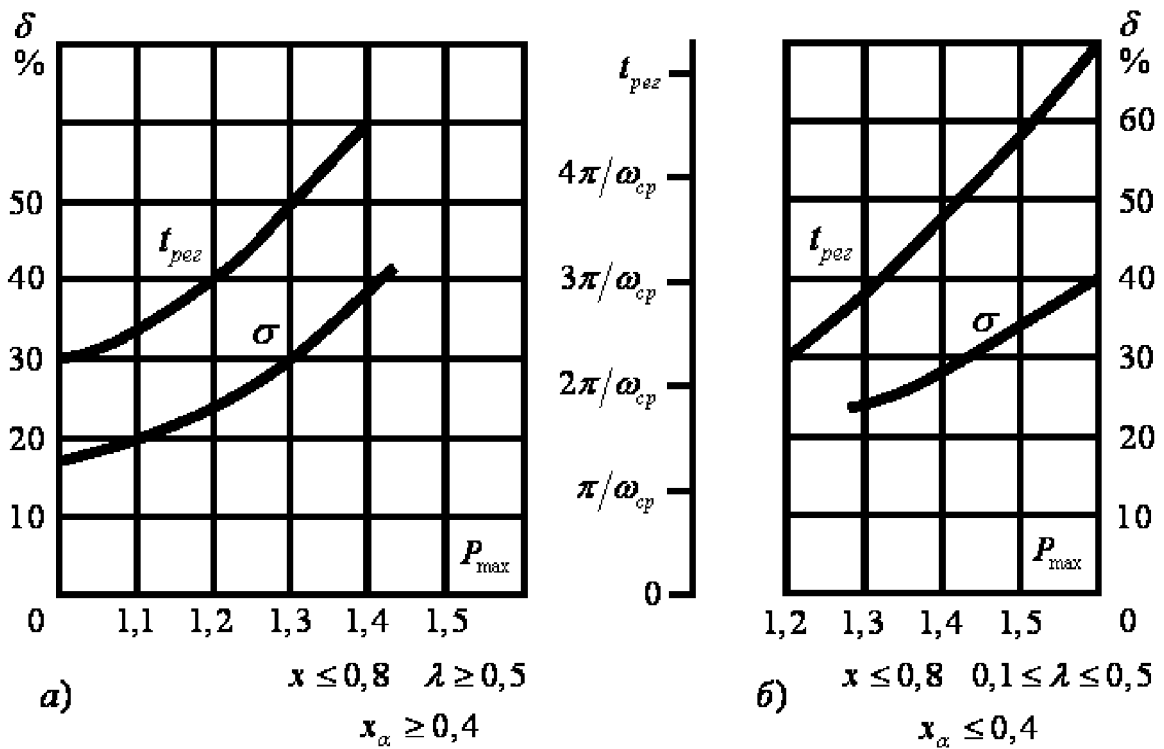


Рис. 2.П.5

- а) построение  $P(\omega)$  по ЛАЧХ и ФЧХ, используя номограмму рис. 2.П.6,
- б) определение параметров  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_\alpha$  аппроксимирующей функции,
- в) определение на основе номограмм рис. 2.П.5а или рис. 2.П.5б показателей качества  $t_{рег}$  и  $\sigma$ .

## 2.П.6. Уточнение желаемой ЛАЧХ

Для уточнения среднечастотной части желаемой ЛАЧХ используются приведённые выше операции. Изменяется их последовательность.

### Процедура 2.П.1.

Осуществляется в следующей последовательности:

1. по заданному перерегулированию  $\sigma = \sigma^*$  ( $\sigma^* = \underline{\sigma}$  либо  $\sigma^* = \overline{\sigma}$ ). Определяем по одной из номограмм рис. 2.П.5 число  $p_{\max}$ , из этой же номограммы определяем параметр  $k$  в формуле  $t_{рег} = \frac{k\pi}{\omega_{cp}}$ , из которой находим  $\omega_{cp} = \frac{k\pi}{t_{рег}}$ ,
2. на монограмме рис. 2.П.6 выделяем запретную для АФХ область, ограниченную линиями  $p_{\max}$  и  $p_{\min} = p_{\max} - 1$ ,
3. формируем среднечастотную часть ЛАЧХ так, чтобы АФХ не пересекала запретной области.

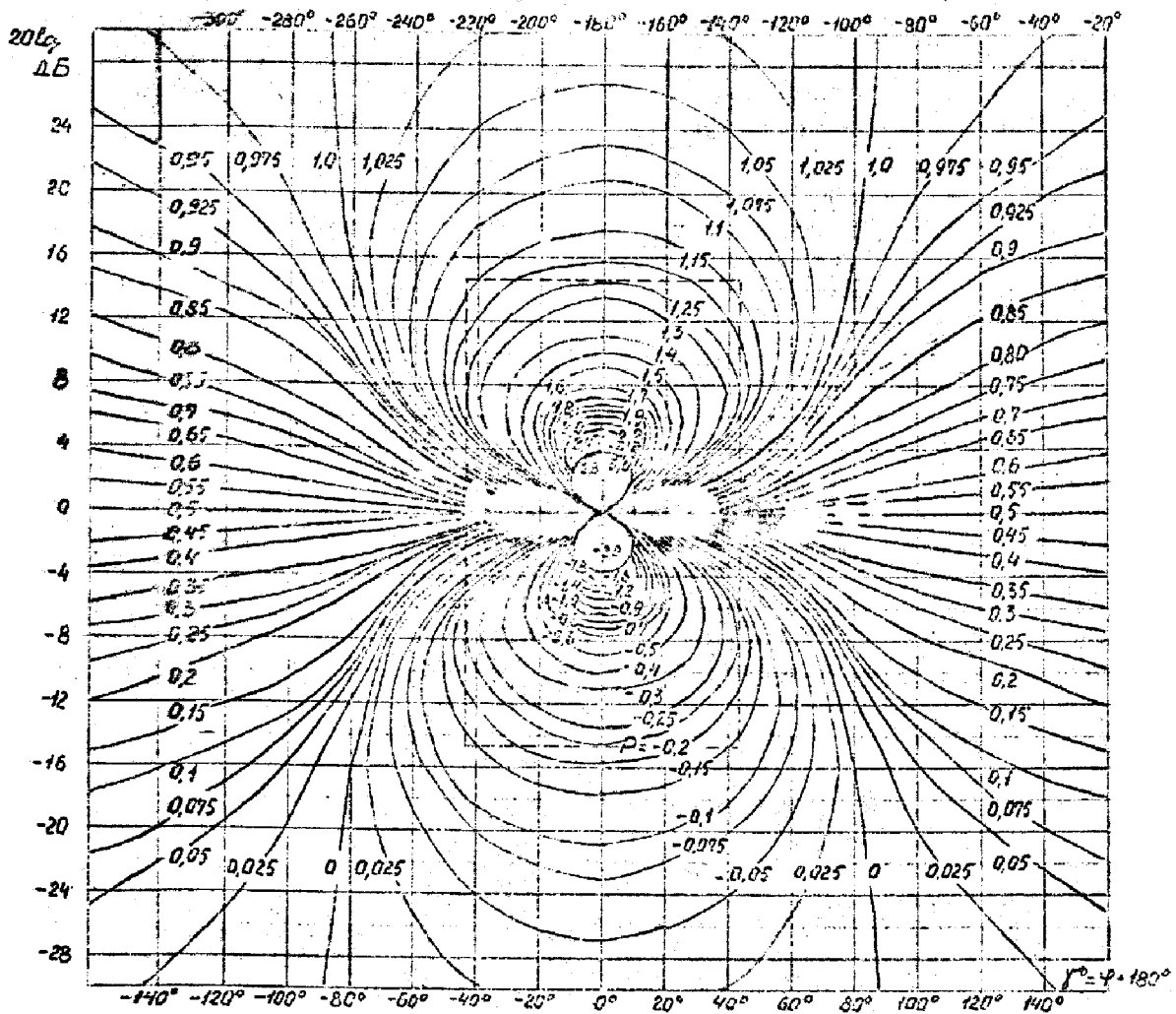


Рис. 2.П.6

Пример 2.П.5. Уточним среднечастотную часть ЛАЧХ, построенной в примере 2.3.1. Выполним первую операцию процедуры 2.П.1 при  $\sigma = 30\%$ . Находим из графика рис. 2.П.5а  $p_{\max} = 1.27$ . Этому значению  $p_{\max}$  соответствует  $t_{peg} = \frac{3,7\pi}{\omega_{cp}} = 0,8$ . Отсюда  $\omega_{cp} = \frac{3,7\pi}{0,8} = 14,5 \frac{1}{сек}$ . Принимаем, как и ранее,  $\omega_{cp} = 15 \frac{1}{сек}$ . Результатом второй операции является запретный прямоугольник, выделенный на рис. 2.П.6 пунктиром. Эта запретная область построена при  $p_{\max} = 1,27$  и  $p_{\min} = 0,27$  и имеет стороны  $\pm 14$  дБ и  $\pm 40^\circ$ .

Переходя к третьей операции, рассмотрим рис. 2.П.7а, на котором приведена уточнённая желаемая ЛАЧХ. Длина её среднечастотной части выбрана так, чтобы она целиком лежала в трубке  $\pm 14$  дБ. Избыток фазы  $\gamma(\omega) = 180^\circ + \varphi(\omega)$  на частоте  $\omega_x$  составляет  $70^\circ$ , а на частоте  $\omega = 100$  1/сек равен  $38,4^\circ$ . Между этими частотами  $\gamma(\omega) \geq 40^\circ$ . Это означает, что АФХ не пересекает запретной области.



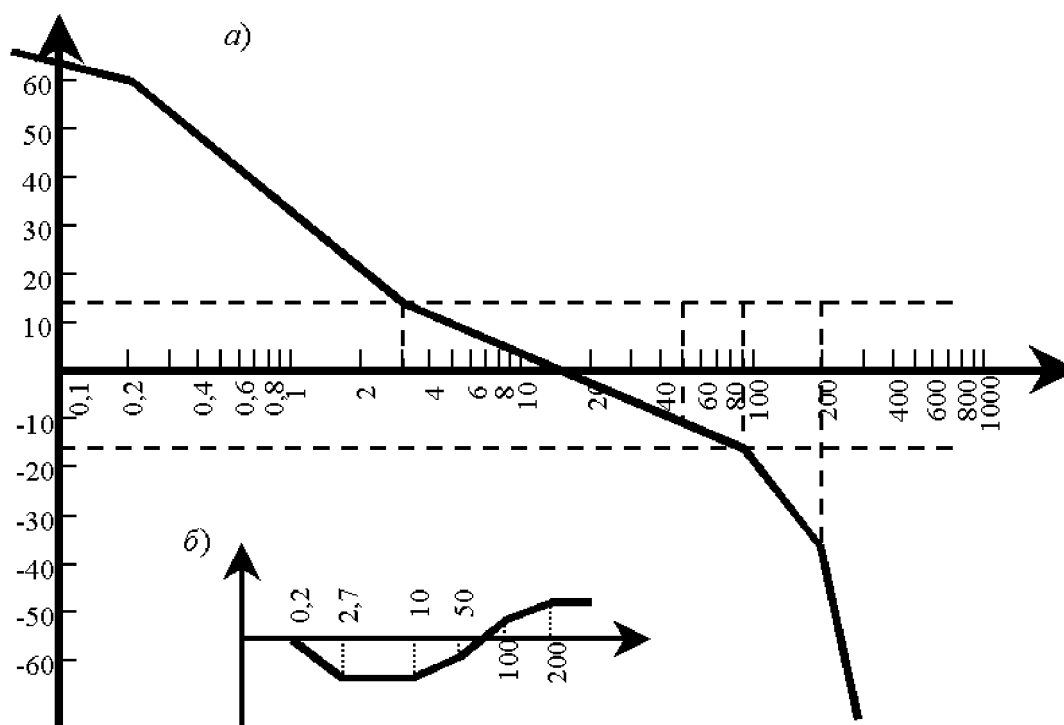


Рис. 2.П.7

Построенная желаемая ЛАЧХ обеспечивает показатели качества (2.3.26). Правда, передаточная функция корректирующего контура (регулятор) усложняется по сравнению с (2.3.27).

Она имеет вид

$$w_p(s) = \frac{(0.4s + 1)(0.1s + 1)(0.02s + 1)}{(5s + 1)(0.01s + 1)(0.005s + 1)}.$$

Эта передаточная функция получена из ЛАЧХ, приведённой на рис. 2.П.7б. ■

## Доказательства к главе 2

### 2.Д.1. Доказательство утверждения 2.2.1

Убедимся вначале, что при выполнении неравенства (2.2.30) имеет место соотношение

$$|\eta_{ym}^2(\omega) - \eta^2(\omega)| \leq \varepsilon_s \quad 0 \leq \omega \leq \omega_n, \quad (2.Д.1)$$

где  $\eta^2(\omega) = |1 + w_{pas}(j\omega)|^2$ ,  $\eta_{ym}^2(\omega) = |1 + w_{pas.ym}(j\omega)|^2$ .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |\eta_{ym}^2(\omega) - \eta^2(\omega)| &= \left| 2a_{ym}(\omega) \cos \varphi_{ym}(\omega) - 2a(\omega) \cos \varphi(\omega) + a_{ym}^2(\omega) - a^2(\omega) \right| \leq \\ &\leq 2 |a_{ym}(\omega) \cos \varphi_{ym}(\omega) - a(\omega) \cos \varphi(\omega)| + |a_{ym}^2(\omega) - a^2(\omega)|. \end{aligned} \quad (2.Д.2)$$

Используя неравенства (2.2.28) и учитывая, что  $|\cos \varphi(\omega)| \leq 1$ ,  $|\sin \varphi(\omega)| \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} |\cos \varphi_{ym}(\omega) - \cos \varphi(\omega)| &= \left| 2 \sin \frac{\varphi_{ym}(\omega) + \varphi(\omega)}{2} \sin \frac{\varphi_{ym}(\omega) - \varphi(\omega)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \sin \frac{\varphi_{ym}(\omega) - \varphi(\omega)}{2}, \end{aligned}$$

запишем для первого слагаемого в (2.Д.2)

$$\begin{aligned} &|a_{ym}(\omega) \cos \varphi_{ym}(\omega) - a(\omega) \cos \varphi(\omega)| \leq \\ &\leq |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot |\cos \varphi_{ym}(\omega)| + a(\omega) |\cos \varphi_{ym}(\omega) - \cos \varphi(\omega)| \leq \\ &\leq |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| + 2a(\omega) \sin \frac{|\varphi_{ym}(\omega) - \varphi(\omega)|}{2} \leq \\ &\leq a(\omega) \varepsilon_1 + 2a(\omega) \sin \frac{\varepsilon_2}{2}. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (2.Д.2) имеем

$$\begin{aligned} |a_{ym}^2(\omega) - a^2(\omega)| &= |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot |a_{ym}(\omega) + a(\omega)| \leq \\ &\leq |a_{ym}(\omega) - a(\omega)| \cdot [|a_{ym}(\omega) - a(\omega)| + 2a(\omega)] \leq |a^2(\omega) \varepsilon_1^2 + 2a^2(\omega) \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Подставляя эти уравнения в (2.Д.2) и учитывая (2.2.30), получим (2.Д.1). Из (2.Д.1) следует, что

$$\eta_{ym}^2(\omega) \geq \eta^2(\omega) - \varepsilon_3 \geq \min_{0 \leq \omega \leq \omega_n} \eta^2(\omega) - \varepsilon_3,$$

и таким образом,

$$\min_{0 \leq \omega \leq \omega_n} \eta_{ym}^2(\omega) \geq \min_{0 \leq \omega \leq \omega_n} \eta^2(\omega) - \varepsilon_3 \quad 0 \leq \omega \leq \omega_n. \quad (2.Д.3)$$

Оценим  $r_{ym}(\omega)$  в диапазоне  $[\omega_n, \infty]$  при условиях (2.2.29), (2.2.31)

$$r_{ym}^2(\omega) = 1 + 2a_{ym}(\omega) \cos \varphi_{ym}(\omega) + a_{ym}^2(\omega) \geq 1 - 2a_{ym}(\omega) \geq 0.6.$$

Из этого неравенства и (2.Д.3) следует  $r_{ym} \geq 0.75$ , что и подтверждает справедливость утверждения.

## Заключение к главе 2

Резюмируем изложенное в этой главе, основное содержание которой составляют традиционные разделы частотной теории автоматического регулирования:

- понятие амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, её логарифмические амплитудно- и фазо-частотные характеристики,
- критерий Найквиста (теоремы 2.1.2, 2.1.3),

- понятия статической ошибки, времени регулирования и перерегулирования при ступенчатом задающем воздействии (определения 2.3.1 и 2.3.2), а также показателя колебательности (2.3.16),
- метод ЛАЧХ, разрешающий задачу 2.3.1 синтеза регуляторов по требованиям к точности и качеству переходных процессов при ступенчатом задающем воздействии, а также к грубости, определяемой частотными показателями – запасами устойчивости по фазе и модулю.

Наряду с этим в главе приводятся нетрадиционные понятия и результаты.

1. Введены понятия радиуса (2.2.7) запасов устойчивости системы, структурных показателей, структурных возмущений и структурной грубости (определение 2.2.2).
2. Введены понятия установившееся ошибки, времени регулирования и перерегулирования при ступенчатом внешнем возмущении (определения 2.3.3 и 2.3.4).
3. (П) Установлены связи (2.П.28), (2.П.29) параметрических возмущений с запасами устойчивости по фазе и модулю.
4. (П) Показано, что системы с нулевой либо малой степенями грубости имеют малые значения частотных показателей грубости (п. 2.П.3).

---

## Часть II. Аналитический синтез регуляторов при известных параметрах объекта

Достоинства метода ЛАЧХ (наглядность и эффективность) во многом определяются его графоаналитическим характером. Последнее служит также и причиной недостатков метода.

Первый из них состоит в трудности автоматизации расчётов и использованием ЭВМ, второй – в ориентации на одномерные системы.

Эти обстоятельства привели к аналитическим методам: аналитическому конструированию регуляторов (АКОР) и модальному управлению, которые часто называют *методами пространства состояний*. Их аналитичность удобна для применения ЭВМ, и они в равной мере пригодны как для одномерных, так и многомерных систем.

Цели управления описываются в методах пространства состояний с помощью квадратичного функционала либо корней характеристического полинома системы. Область применения этих методов: системы стабилизации (регулятор в таких системах обеспечивает лишь асимптотическую устойчивость объекта, возбуждённого начальными отклонениями), системы регулирования и слежения при случайных внешних возмущениях и помехах с известными статистическими характеристиками.

Для применения методов пространства состояний к синтезу регуляторов, обеспечивающих заданную точность при ограниченных внешних возмущениях (задачи 1.1.1 и 1.1.2), необходимо найти связь целей управления в этих методах и точностью регулирования.

Такая связь служит центральным вопросом этой части. После его решения оба метода доставляют сходные результаты. Различие состоит в том, что при аналитическом конструировании регуляторов можно указать конструктивные условия, при которых синтезируемая система грубая по частотным показателям, а для модального управления – лишь интуитивные рекомендации. (О возможной негрубости систем, синтезируемых с помощью методов пространства состояний, свидетельствуют примеры п. 1.П.6 и п. 1.П.7 приложения к главе 1).

Таким образом, аналитический синтез регуляторов – это методы построения реализуемых регуляторов, обеспечивающих грубость системы и требуемую точность при ограниченных внешних возмущениях и помехах, основанные на методах пространства состояний.

Для одномерных объектов аналитический синтез разрешает, в частности, задачи, охватываемые методом ЛАЧХ.

Полученные в этой части результаты развиваются в главе 9 на многомерный случай и служат основой для построения частотного управления в главах 6 и 7.

## Глава 3. Модальное управление

Традиционный путь построения стабилизирующего управления, обеспечивающего заданные корни характеристического полинома системы, складывается из двух процедур: синтеза управления в предположении полной измеряемости его вектора переменных состояния и построения наблюдателя Люенбергера для восстановления переменных состояния по измеряемой переменной. Результатом этих процедур служат уравнения регулятора.

Возможен другой путь построения этого регулятора: приведение уравнений объекта к форме «вход-выход» и построение модального управления исходя из этой формы. Хотя такой путь требует исследования существования и единственности модального управления, а также его реализуемости, он открывает новые возможности для установления связи точности системы с её характеристическим полиномом. Такая связь необходима для решения задач 1.1.1 и 1.1.2.

Цель этой главы:

- установление структуры и параметров характеристического полинома системы, при которых удовлетворяются требования к её точности,
- построение на основе такой связи реализуемых управлений, разрешающих задачи регулирования и слежения для объектов второго вида при внешних возмущениях (задачи 3.2.1 и 3.3.1),
- развитие этих результатов на объекты первого вида, регуляторы которых реализуют обратную связь по состоянию (задача 3.4.2),
- исследование причин негрубости систем со стабилизирующим управлением при традиционном его построении (с наблюдателем).

### 3.1. Стабилизация объектов второго вида

#### 3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый объект регулирования

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad \gamma < n \quad (3.1.1)$$

параметры  $d_i$ ,  $b_j$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ,  $j = \overline{0, \gamma}$ ) которого заданы.

Пусть этот объект замкнут регулятором

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y. \quad (3.1.2)$$

Характеристический полином рассматриваемой системы

$$d^u(s) = d(s)g(s) - b(s)r(s) = d_{2n-1}^u s^{2n-1} + d_{2n-2}^u s^{2n-2} + \dots + d_1^u s + d_0^u, \quad (3.1.3)$$

где

$$g(s) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i s^i, \quad r(s) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i s^i. \quad (3.1.4)$$

Задача 3.1.1. (Задача модального управления). Для заданного объекта (3.1.1) найти параметры  $g_i, r_j$  ( $i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, n-1}$ ) регулятора (3.1.2) такие, чтобы характеристический полином системы имел заданные корни  $s_i$  ( $i = \overline{1, 2n-1}$ ). ■

### 3.1.2. Процедура решения

Выразим коэффициенты характеристического полинома через параметры системы. Нетрудно видеть, что

$$d_\alpha^u = \sum_{i=0}^n d_i g_{\alpha-i} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}, \quad (3.1.5)$$

где

$$g_{\alpha-i} = 0, \quad \text{если } \alpha - i < 0 \text{ и } \alpha - i > n - 1; \quad (3.1.6)$$

$$r_{\alpha-l} = 0, \quad \text{если } \alpha - l < 0 \text{ и } \alpha - l > n - 1. \quad (3.1.7)$$

Приведём очевидную процедуру решения задачи 3.1.1.

Процедура 3.1.1. (Процедура решения задачи модального управления).

**Операция 1:** Сформировать желаемый (модальный) полином

$$\delta(s) = \delta_{2n-1} \prod_{i=1}^{2n-1} (s - s_i^*) = \delta_{2n-1} s^{2n-1} + \delta_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + \delta_1 s + \delta_0. \quad (3.1.8)$$

**Операция 2:** Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях полиномов  $d^u(s)$  и  $\delta(s)$ , получить систему уравнений

$$\sum_{i=0}^n d_i g_{\alpha-i} - \sum_{l=0}^{\gamma} b_l r_{\alpha-l} = \delta_\alpha \quad \alpha = \overline{0, 2n-1}. \quad (3.1.9)$$

**Операция 3:** Решить систему линейных алгебраических уравнений (3.1.9) и определить параметры регулятора (3.1.2). ■

Пример 3.1.1. Рассмотрим задачу модального управления велосипедом (1.3.6)

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (3.1.10)$$

с параметрами

$$d_0 = -16, \quad b_1 = 5, \quad b_0 = 30. \quad (3.1.11)$$

Требуется найти коэффициенты регулятора

$$g_1 \dot{u} + g_0 u = r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad (3.1.12)$$

при которых характеристический полином системы (3.1.10), (3.1.12) имеет корни

$$s_1^* = -6, \quad s_2^* = -7, \quad s_3^* = -7. \quad (3.1.13)$$

Для решения задачи сформируем (при  $\delta_3 = 5$ ) желаемый полином

$$\delta(s) = \delta_3 s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0 = 5(s+6)(s+7)^2 = 5s^3 + 100s^2 + 665s + 1470. \quad (3.1.14)$$

Характеристический полином системы (3.1.10), (3.1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} d^u(s) &= (s^2 + d_0)(g_1 s + g_0) - (b_1 s + b_0)(r_1 s + r_0) = \\ &= g_1 s^3 + (g_0 - b_1 r_1) s^2 + (d_0 g_1 - b_0 r_1 - b_1 r_0) s + d_0 g_0 - b_0 r_0. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Из равенства  $d^u(s) = \delta(s)$  получим систему уравнений

$$g_1 = \delta_3, \quad g_0 - b_1 r_1 = \delta_2, \quad d_0 g_1 - b_0 r_1 - b_1 r_0 = \delta_1, \quad d_0 g_0 - b_0 r_0 = \delta_0. \quad (3.1.16)$$

В матричной форме эта система примет вид

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 & 0 \\ d_0 & 0 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & d_0 & 0 & -b_0 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_0 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.17)$$

Используя численные значения коэффициентов, запишем

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ -16 & 0 & -30 & -5 \\ 0 & -16 & 0 & -30 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_0 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 100 \\ 665 \\ 1470 \end{pmatrix}. \quad (3.1.18)$$

Решение этой системы

$$g_1 = 5, \quad g_0 = 30; \quad r_1 = -14, \quad r_0 = -65. \quad (3.1.19)$$

■

### 3.1.3. Существование решения

Найдём условия существования решения системы (3.1.9). Эта система получена из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \delta(s), \quad (3.1.20)$$

которое будем называть *модальным тождеством*.

Если существуют полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$ , удовлетворяющие уравнению (3.1.20), то существует и решение системы алгебраических уравнений (3.1.9).

Пусть, для общности, полиномы  $g(s)$ ,  $r(s)$ ,  $\delta(s)$  имеют степени  $n_p$ ,  $\gamma_p$  и  $\rho$  соответственно ( $\gamma_p \leq n_p$ ). Будем обозначать степень полинома, например  $g(s)$ , как  $\deg g(s)$ . Таким образом

$$\deg g(s) = n_p, \quad \deg r(s) = \gamma_p, \quad \deg \delta(s) = \rho.$$

Определим наименьшие числа  $n_p$  и  $\gamma_p$ , при которых уравнения (3.1.9) совместны.

Число уравнений (3.1.9), порождаемых тождеством (3.1.20), равно  $n + n_p + 1$ , а число неизвестных коэффициентов полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  составляет  $n_p + \gamma_p + 2$ .

Для совместности системы (3.1.9) достаточно принять  $\gamma_p = n - 1$  и тогда из условия реализуемости ( $n_p \geq \gamma_p$ ) получим минимальные степени  $n_p = \gamma_p = n - 1$ . Следовательно, условие совместности имеет вид

$$n_p \geq n - 1, \quad \gamma_p \geq n - 1. \quad (3.1.21)$$

Второе условие существования доставляет следующая теорема.

**Теорема 3.1.1.** Пусть  $d(s)$ ,  $b(s)$  и  $\delta(s)$  – заданные полиномы с действительными коэффициентами. Для существования полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ , удовлетворяющих тождеству (3.1.20), необходимо и достаточно, чтобы полином  $\delta(s)$  делился нацело на наибольший общий делитель  $\nu(s)$  полиномов  $d(s)$  и  $b(s)$ . ■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.1.

Если объект (3.1.1) полностью управляем, то  $\nu(s) = 1$  и очевидно следствие теоремы 3.1.1.

**Следствие 3.1.1.** Для существования полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ , удовлетворяющих модальному тождеству (3.1.20), необходима и достаточна полная управляемость объекта (3.1.1). ■

### 3.1.4. Условия единственности

Пусть  $g^*(s)$  и  $r^*(s)$  – некоторое решение уравнения (3.1.20). Нетрудно проверить, что полиномы

$$g(s) = g^*(s) - k(s)b(s), \quad r(s) = r^*(s) - k(s)d(s). \quad (3.1.22)$$

(где  $k(s)$  – произвольный полином) также является решением (3.1.20).

Это означает, что если существует хотя бы одно решение уравнения (3.1.20), то можно построить сколь угодно много решений, добавляя или вычитая из него многочлены  $g(s)$  и  $r(s)$  с одинаковым полиномиальным сомножителем.



Теорема 3.1.2. Если соотношение (3.1.20) разрешимо, то полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$  определяются однозначно при любом из следующих условий

$$\deg g(s) < \deg [b(s)\nu^{-1}(s)], \quad (3.1.23)$$

$$\deg r(s) < \deg [d(s)\nu^{-1}(s)]. \quad (3.1.24)$$

Если выполнено неравенство

$$\deg \delta(s) < \deg d(s) + \deg b(s) - \deg \nu(s), \quad (3.1.25)$$

то каждое из условий (3.1.23), (3.1.24) приводит к одной и той же паре полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ . ■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.2.

Следствие 3.1.2. Процедура 3.1.1 доставляет однозначно регулятор вида (3.1.2). ■

Действительно, регулятор (3.1.2) существует, так как объект (3.1.1) полностью управляем (см. следствие 3.1.1) и выполняется условие (3.1.21). Этот регулятор единственный в силу соотношения

$$\deg r(s) = n - 1 < n = \deg d(s). \quad (3.1.26)$$

Пример 3.1.2. Вычислим определитель системы (3.1.17), разрешающей задачу модального управления велосипедом

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & 0 \\ 0 & -b_0 & -b_1 \\ d_0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -b_0 & -b_1 \\ 0 & -b_0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -b_1 & 0 \\ -b_0 & -b_1 \end{pmatrix} d_0 = b_0^2 + d_0 b_1^2. \quad (3.1.27)$$

Выясним смысл соотношения

$$d_0 = -\frac{b_0^2}{b_1^2}, \quad (3.1.28)$$

при котором  $\Delta = 0$  и, следовательно, решение системы (3.1.17) не единственно либо не существует (уравнения (3.1.17) не совместны).

При выполнении (3.1.28) полиномы  $d(s)$  и  $b(s)$  имеют общий делитель  $\nu(s) = s + \sqrt{|d_0|}$  (объект (3.1.10) не вполне управляем). Из-за этого нарушаются условия (3.1.23) и (3.1.24). Действительно

$$\begin{aligned} \deg g(s) &= 1, & \text{а} & \quad \deg [b(s)\nu^{-1}(s)] = 0; \\ \deg r(s) &= 1, & \text{а} & \quad \deg [d(s)\nu^{-1}(s)] = \deg \left[ \frac{(s - \sqrt{|d_0|})(s + \sqrt{|d_0|})}{s + \sqrt{|d_0|}} \right] = 1. \end{aligned}$$

■

### 3.1.5. Структурное модальное управление

Пусть модальный полином  $\delta(s)$  имеет структуру

$$\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s), \quad (3.1.29)$$

где

$$\tilde{\psi}(s) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0. \quad (3.1.30)$$

Это означает, что в задаче модального управления заданы лишь  $n$  корней характеристического полинома (3.1.3). Из них формируется полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0. \quad (3.1.31)$$

Модальное тождество (3.1.20) принимает вид

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\tilde{\psi}(s). \quad (3.1.32)$$

Этому уравнению удовлетворяют полиномы

$$g^c(s) = b(s), \quad r^c(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s). \quad (3.1.33)$$

которые определяют *структурное модальное управление*.

Исследуем устойчивость системы с таким управлением. Пусть  $\operatorname{Re} s_i^* < 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), тогда для устойчивости нужно, чтобы объект (3.1.1) был устойчивым по управлению.

**Определение 3.1.1.** Объект (3.1.1) называется *устойчивым по управлению*, если полином  $b(s)$  при управлении имеет корни  $s_i^b$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ ) с отрицательными вещественными частями ( $\operatorname{Re} s_i^b < 0$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ )). ■

Решение (3.1.33) – единственное решение уравнения (3.1.32). Действительно, из структуры полинома  $r(s)$  следует, что  $\deg r(s) < n = \deg d(s)$ .

**Пример 3.1.2.** Покажем, что управление, построенное в примере (3.1.1) – структурное модальное управление. При численных значениях параметров (3.1.11) можно записать полином (3.1.14) в виде

$$\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s), \quad (3.1.34)$$

где  $b(s) = 5(s + 6)$ ,  $\tilde{\psi}(s) = (s + 7)^2$ .

Тогда, используя формулы (3.1.33), получим полиномы регулятора

$$g^c(s) = b(s) = 5s + 30, \quad r^c(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s) = (s^2 - 16) - (s^2 + 14s + 49) = -14s - 65,$$

параметры которых совпадают с (3.1.19). ■

### 3.1.6. Реализация структурного управления

Пусть степень  $\gamma$  полинома  $b(s)$  меньше  $n - 1$  и  $\tilde{\psi}_{n-1} \neq d_{n-1}$ . В этом случае регулятор

$$b(s)u = [d(s) - \tilde{\psi}(s)]y \quad (3.1.35)$$

не реализуем, так как  $\gamma < \deg [d(s) - \tilde{\psi}(s)]$ .

В связи с этим примем структуру полинома

$$\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s), \quad (3.1.36)$$

где многочлен

$$\varepsilon^0(s) = \varepsilon_\alpha^0 s^\alpha + \varepsilon_{\alpha-1}^0 s^{\alpha-1} + \dots + \varepsilon_1^0 s + \varepsilon_0^0 \quad (3.1.37)$$

имеет степень

$$\alpha = n - \gamma - 1. \quad (3.1.38)$$

Решение уравнения

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s) \quad (3.1.39)$$

будем искать в виде

$$g(s) = b(s)\rho(s), \quad (3.1.40)$$

где  $\rho(s) = \rho_\alpha s^\alpha + \rho_{\alpha-1} s^{\alpha-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0$ ,  $\alpha = n - \gamma - 1$ .

Подставляя (3.1.40) в (3.1.39), получим

$$d(s)\rho(s) - r(s) = \varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s). \quad (3.1.41)$$

Положим

$$\varepsilon^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma-1}. \quad (3.1.42)$$

Утверждение 3.1.1. Всегда существует достаточно малое число  $\varepsilon^0$ , что уравнение (3.1.41) имеет решение

$$\rho(s) = \varepsilon^0(s) + o^\varepsilon(s), \quad r(s) = r^0(s) + o^r(s), \quad (3.1.43)$$

в котором  $o^\varepsilon(s)$  и  $o^r(s)$  – полиномы степеней  $n - \gamma - 1$  и  $n - 1$  соответственно, имеют сколь угодно малые коэффициенты  $o_\alpha^\varepsilon, o_{\alpha-1}^\varepsilon, \dots, o_1^\varepsilon, o_0^\varepsilon; o_{n-1}^r, \dots, o_1^r, o_0^r$ . ■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.3. Это утверждение было использовано в примере 1.1.3.

Из (3.1.40) и (3.1.43) получим

$$\deg g(s) = \deg b(s) + \deg \rho(s) = n - 1, \quad \deg r(s) = n - 1, \quad (3.1.44)$$

и, следовательно, регулятор

$$b(s)[\varepsilon^0(s) + o^\varepsilon(s)]u = [d(s) - \tilde{\psi}(s) + o^r(s)]y \quad (3.1.45)$$

реализуем.

## 3.2. Регулирование

### 3.2.1. Постановка задачи

Объект (3.1.1) при внешних возмущениях описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad (3.2.1)$$

где  $m(s) = m_\alpha s^\alpha + \dots + m_1 s + m_0$  ( $\alpha < n$ ) – заданный многочлен, корни которого  $s_i^f$  ( $i = \overline{1, \alpha}$ ) имеют отрицательные вещественные части ( $\text{Re} s_i^f < 0$  ( $i = \overline{1, \alpha}$ )).

Определение 3.2.1. Если корни полинома  $m(s)$  имеют отрицательные вещественные части, то объект (3.2.1) называется *устойчивым по возмущению*. ■

Будем рассматривать три вида внешних возмущений: ступенчатое

$$f(t) = \begin{cases} \bar{f} & \text{при } t \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

гармоническое возмущение

$$f(t) = f_{\text{гарм}} \sin \omega^f t, \quad (3.2.3)$$

и произвольное ограниченное

$$|f(t)| \leq f^*. \quad (3.2.4)$$

В этих выражениях  $\bar{f}$ ,  $f_{\text{гарм}}$ ,  $f^*$  – заданные числа.

Задача 3.2.1. Пусть задан объект (3.2.1), устойчивый по управлению и возмущению. Требуется найти регулятор

$$g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad (3.2.5)$$

такой, чтобы система (3.2.1), (3.2.5):

- а) была асимптотически устойчивой,
- б) удовлетворяла требованию к точности

$$|y(t)| \leq y^*, \quad t \geq t_{\text{рег}}, \quad (3.2.6)$$

- в) имела показатели качества

$$\underline{t}_{\text{рег}} \leq t_{\text{рег}} \leq \bar{t}_{\text{рег}}, \quad \sigma \leq \bar{\sigma}, \quad (3.2.7)$$

где  $y^*$ ,  $\underline{t}_{\text{рег}}$ ,  $\bar{t}_{\text{рег}}$ ,  $\bar{\sigma}$  – заданные числа. ■

Время регулирования в этой задаче может определяться различным образом в зависимости от вида внешнего возмущения. Если  $f(t)$  – ступенчатое возмущение, то  $t_{\text{рег}}$  совпадает с введённым определением 2.3.3. При возмущениях (3.2.3) и (3.2.4)  $t_{\text{рег}}$  – это время, через которое переходный процесс не выходит за пределы «трубки» (1.2.6).

### 3.2.2. Процедура решения

Найдём связь выхода системы (3.2.1), (3.2.5) с внешним возмущением. Исключая переменную  $u(t)$  из этих уравнений, получим

$$y = \frac{m(s)g(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)}f. \quad (3.2.8)$$

Определим параметры регулятора (3.2.5) из модального тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = \delta(s). \quad (3.2.9)$$

Тогда связь (3.2.8) примет вид

$$y = \frac{m(s)g(s)}{\delta(s)}f. \quad (3.2.10)$$

В общем случае полином  $g(s)$  неявно зависит от полинома  $\delta(s)$  и поэтому трудно указать способ определения параметров полинома  $\delta(s)$ , при которых удовлетворяется требование (3.2.6) к точности системы (3.2.1), (3.2.5).

В связи с этим используем структурное модальное управление (3.1.33), которое построено при  $\delta(s) = b(s)\tilde{\psi}(s)$ .

Соотношение (3.2.10) примет в этом случае вид

$$y = \frac{m(s)}{\tilde{\psi}(s)}f. \quad (3.2.11)$$

При  $\gamma < n - 1$  принимаем (для реализуемости регулятора) полином  $\delta(s) = b(s) \cdot \varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s)$ , при этом  $g(s) = b(s)\rho(s)$ .

Тогда

$$y = \frac{m(s)\rho(s)}{\tilde{\psi}(s)\varepsilon^0(s)}f. \quad (3.2.12)$$

Используя утверждение 3.1.1, заключаем, что это соотношение приближается к (3.2.11) при достаточно малых коэффициентах полинома  $\varepsilon^0(s)$ .

Из выражения (3.2.10) следует, что решение задачи 3.2.1 сводится при использовании модального управления к определению параметров полинома  $\tilde{\psi}(s)$  управления качества (желаемой модели замкнутой системы)

$$(s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0)y = (m_\alpha s^\alpha + \dots + m_1s + m_0)f. \quad (3.2.13)$$

Параметры  $\tilde{\psi}(s)$  будем находить так, чтобы выполнялись требования (3.2.6), (3.2.7).

Процедура 3.2.1. (процедура решения задачи 3.2.1) состоит из операций

а) найти полином  $\tilde{\psi}(s)$  уравнения качества (3.2.13),

- б) сформировать полином  $\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}(s)$ ,
- в) на основе модального тождества (3.1.39) построить систему линейных алгебраических уравнений,
- г) решить эту систему уравнений и определить параметры регулятора (3.2.5).

■

### 3.2.3. Уравнение качества при ступенчатых и гармонических возмущениях

При ступенчатом внешнем возмущении из (3.2.10) следует

$$y_{cm}^f = \frac{m_0}{\tilde{\psi}_0} \bar{f}. \quad (3.2.14)$$

Для выполнения требования (3.2.6) к точности достаточно принять

$$\tilde{\psi}_0 \geq \frac{m_0}{y^*} \bar{f}. \quad (3.2.15)$$

При гармоническом воздействии амплитуда выходной переменной

$$y_{гарм} = f_{гарм} \frac{|m(j\omega^f)|}{|\tilde{\psi}(j\omega^f)|}.$$

Если принять простейшую структуру

$$\tilde{\psi}(s) = \tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^n (\tilde{T}_i s + 1), \quad (3.2.16)$$

то достаточно выбрать для выполнения требования (3.2.6) к точности постоянные  $\tilde{T}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) из неравенства

$$\tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^n \sqrt{\tilde{T}_i^2 (\omega^f)^2 + 1} \geq \frac{|m(j\omega^f)|}{y^*} f_{гарм}. \quad (3.2.17)$$

Оценим время регулирования  $t_{рег}$  замкнутой системы при ступенчатом внешнем возмущении. Его оценка по выражению (3.2.11) затруднена тем, что время регулирования зависит как от полюсов передаточной функции  $w_{yf}(s) = \frac{m(s)}{\tilde{\psi}(s)}$ , так и от её нулей. В связи с этим примем

$$\tilde{\psi}(s) = m(s)\tilde{\tilde{\psi}}(s), \quad (3.2.18)$$

где

$$\tilde{\tilde{\psi}}(s) = s^{n-\alpha} + \tilde{\tilde{\psi}}_{n-\alpha-1} s^{n-\alpha-1} + \dots + \tilde{\tilde{\psi}}_1 s + \tilde{\tilde{\psi}}_0. \quad (3.2.19)$$

Тогда

$$y = \frac{\bar{f}}{\tilde{\psi}(s)s} \quad (3.2.20)$$

При этом аналогично (3.2.14)

$$\tilde{\psi}_0 \geq \frac{\bar{f}}{y^*}. \quad (3.2.21)$$

Положим

$$\tilde{\psi}(s) = \tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^{n-\alpha} (\tilde{T}_i s + 1), \quad (3.2.22)$$

где для определённости примем

$$\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2 > \dots > \tilde{T}_{n-\alpha-1} > \tilde{T}_{n-\alpha}. \quad (3.2.23)$$

Пусть  $T_1$  значительно больше  $T_2$ , тогда постоянная времени  $T_1$ , являясь доминирующей, определяет время переходного процесса

$$t_{peg} \approx 3\tilde{T}_1. \quad (3.2.24)$$

Если найти оригинал изображения (3.2.19) с учётом выражения (3.2.21) и неравенств (3.2.22), то из приводимого далее утверждения 3.П.4 следует, что перерегулирование  $\sigma = 0$ . Это утверждение устанавливает границы переменной  $y(t)$  при произвольном внешнем воздействии из множества (3.2.3). Так, для решений уравнения  $\tilde{\psi}(s)y = f$  при различных вещественных  $T_i$  ( $i = \overline{1, n - \alpha}$ ) справедлива оценка  $|y(t)| \leq \frac{f^*}{\tilde{\psi}}$ . Она совпадает со статической ошибкой, и поэтому  $\sigma = 0$ .

Процедура 3.2.2. (процедура построения уравнения качества) состоит из операций:

а) определяем число  $\tilde{\psi}_0$  из неравенства (3.2.1),

б) находим постоянную времени  $\tilde{T}_1 = \frac{t_{peg}}{3}$  и задаёмся положительными числами

$$\tilde{T}_i \quad (i = \overline{2, n - \alpha}), \text{ меньшими } \tilde{T}_1, \text{ так, чтобы } \tilde{\psi}_0 \prod_{i=1}^{n-\alpha} \tilde{T}_i s = 1 \text{ и строим полином} \quad (3.2.2),$$

в) формируем полином  $\tilde{\psi}(s) = m(s)\tilde{\psi}(s)$ .

Если  $f(t)$  – гармоническое воздействие, то в операциях а) и б) вместо (3.2.20) используется (3.2.16).

Если  $f(t)$  – произвольное внешнее возмущение, то в (3.2.20) следует заменить  $\bar{f}$  на  $f^*$ . ■

Таким образом, решение задачи 3.2.1 осуществляется на основе процедур 3.2.2 и 3.2.1.

### 3.2.4. Уравнение качества грубых регуляторов

Процедура 3.1.1 может приводить к негрубым системам. Действительно, в примере 1.П.2 построен регулятор на основе процедуры модального управления. При этом  $\tilde{\psi}(s) = (s + 1)(s + 0.5)$ .

Затем в примере 2.П.4 исследованы запасы устойчивости системы с этим регулятором. Показано, что  $\varphi_s = L = 1.01$ . Такие запасы устойчивости означают, что синтезированная система будет практически неработоспособной. Чтобы избежать подобной ситуации, наложим дополнительные ограничения на выбор полинома  $\psi(s)$ . Представим характеристический полином (3.1.3) как

$$d^u(s) = d^c(s) + k(s), \quad (3.2.25)$$

где

$$d^c(s) = d(s)g(s) = d_{2n-1}^c s^{2n-1} + \dots + d_1^c s + d_0^c, \quad (3.2.26)$$

$$k(s) = -b(s)r(s) = k_{2n-\gamma} s^{2n-\gamma} + \dots + k_1 s + k_0. \quad (3.2.27)$$

Рекомендация 3.2.1. Для обеспечения грубости синтезируемой системы необходимо коэффициенты полинома  $\delta(s) = b(s)\psi(s)$  выбирать так, чтобы они были соизмеримы с модулями коэффициентов при соответствующих степенях полиномов  $d^c(s)$  и  $k(s)$ .

Другими словами, не должно возникать ситуации, когда

$$\delta_i \ll |d_i^c|, \quad \delta_i \ll |k_i| \quad i = \overline{0, 2n-1}. \quad (3.2.28)$$

При структурном управлении эти недопустимые соотношения принимают вид

$$\tilde{\psi}_i \ll |d_i| \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (3.2.29)$$

■

Обоснование этой рекомендации следует из результатов, приведенных в 1.П.2, 2.П.3.

Проверка соотношений (3.2.28) может быть осуществлена лишь после решения задачи синтеза, а неравенства (3.2.29) носят слишком общий необходимый характер.

В связи с этим построим полином  $\tilde{\psi}(s)$  так, чтобы процедура 3.2.1 гарантировала запас устойчивости.

Рассмотрим полином

$$\Delta(s) = d(s)d(-s) + q, \quad (3.2.30)$$

где  $d(-s) = (-1)^n s^n + (-1)^{n-1} d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_2 s^2 - d_1 s + d_0$  – полином, сопряжённый с  $d(s)$ ,  $q$  – некоторое положительное число.



Полином  $\Delta(s)$  содержит лишь чётные степени  $s$ , и поэтому его корни имеют структуру  $s_1, -s_1; s_2, -s_2; \dots, s_n, -s_n$ . Очевидно, что его можно представить как

$$\Delta(s) = \tilde{\psi}(s)\tilde{\psi}(-s),$$

где

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i). \quad (3.2.31)$$

Этот полином имеет корни с отрицательными действительными частями.

Параметр  $q$  в (3.2.30) определим исходя из требований (3.2.6) к точности.

На основе (3.2.30), (3.2.14) запишем условие (3.2.6)

$$(y_{cm}^f)^2 = \frac{m_0^2}{\tilde{\psi}_0^2} \bar{f}^2 = \frac{m_0^2}{d_0^2 + q} \bar{f}^2 \leq y^{*2}. \quad (3.2.32)$$

Отсюда

$$q \geq \frac{\bar{f}^2}{y^{*2}} m_0^2 - d_0^2. \quad (3.2.33)$$

Процедура 3.2.3. (процедура построения уравнения качества) состоит из операций:

- а) вычислить параметр  $q$  по формуле (3.2.33),
- б) сформировать полином (3.2.30),
- в) найти корни этого полинома и выделить из них  $n$  корней с отрицательными вещественными частями,
- г) построить искомый многочлен (3.2.31).

■

Утверждение 3.2.1. Если полином  $\tilde{\psi}(s)$  уравнения качества (3.2.12) построен в соответствии с процедурой 3.2.2, то регулятор (3.2.5), получаемый в результате процедуры 3.2.1, обеспечивает запасы устойчивости

$$\varphi_a \geq 60^\circ, \quad L \geq 2. \quad (3.2.34)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.2.

### 3.2.5. ПИД-регулятор\*

Регулятор (3.2.5) содержит составляющую, пропорциональную отклонению измеряемой (регулируемой) переменной от желаемого значения, равного нулю, и составляющие, зависящие от производных этого отклонения. Такие регуляторы называются ПД-регуляторами (пропорционально-дифференцирующими регуляторами). Наряду со структурой (3.2.5) используются регуляторы, содержащие интеграл, измеряемой переменной. Они называются ПИД-регуляторами (пропорционально-интегрально-дифференцирующими регуляторами) и описываются уравнением

$$\bar{g}_n u^{(n)} + \dots + \bar{g}_1 \dot{u} + \bar{g}_0 u = \bar{r}_n y^{(n-1)} + \dots + \bar{r}_2 \dot{y} + \bar{r}_1 y + \bar{r}_0 \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau. \quad (3.2.35)$$

При такой структуре регулятора установившаяся ошибка в системе (3.2.1), (3.2.35) при ступенчатом внешнем возмущении равна нулю.

Действительно,

$$y = \frac{b(s)}{d(s)} u + \frac{m(s)}{d(s)} f = \frac{b(s)}{d(s)} \times \frac{\tilde{r}(s)}{\bar{g}(s)} y + \frac{m(s)}{d(s)} f, \quad (3.2.36)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g}(s) &= \sum_{i=0}^n \bar{g}_i s^i, \\ \tilde{r}(s) &= \bar{r}_n s^{n-1} + \dots + \bar{r}_2 s + \bar{r}_1 + \frac{\bar{r}_0}{s} = \frac{\bar{r}(s)}{s}, \\ \bar{r}(s) &= \sum_{i=0}^n \bar{r}_i s^i. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Из этого выражения следует

$$y = \frac{\bar{g}(s)m(s)}{d(s)\bar{g}(s) - b(s)\tilde{r}(s)} f = \frac{s\bar{g}(s)m(s)}{sd(s)\bar{g}(s) - b(s)\bar{r}(s)} f. \quad (3.2.38)$$

Изображение ступенчатого внешнего возмущения  $f(s) = \frac{\bar{f}}{s}$ , и поэтому по теореме о конечном значении

$$y_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = 0. \quad (3.2.39)$$

Для построения регулятора (3.2.35) будем решать задачу управления (задачу 3.1.1) для «расширенного объекта»

$$d(s)y = b(s)u, \quad \dot{y} = y, \quad (3.2.40)$$

который можно записать в виде

$$\bar{d}(s)\bar{y} = b(s)u, \quad (3.2.41)$$

где

$$\bar{d}(s) = d(s)s. \quad (3.2.42)$$

Если  $b(0) \neq 0$ , то «объект» (3.2.40) полностью управляем.

Зададимся модальным полиномом степени  $2n + 1$

$$\bar{\delta}(s) = b(s)\bar{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s), \quad (3.2.43)$$

где  $\bar{\varepsilon}^0(s)$  и  $\tilde{\psi}(s)$  – полиномы степеней  $n - \gamma$  и  $n + 1$  соответственно, и рассмотрим модальное тождество

$$\bar{d}(s)\bar{g}(s) - b(s)\bar{r}(s) = \bar{\delta}(s). \quad (3.2.44)$$

Из него получим полиномы (3.2.37) регулятора

$$\bar{g}(s)u = \bar{r}(s)\bar{y}. \quad (3.2.45)$$

Исключим переменную  $\bar{y}$  и приходим к регулятору (3.2.35). Реакция системы (3.2.1), (3.2.35) с модальным ПИД-регулятором имеет, в соответствии с (3.2.38) и (3.2.43), вид

$$y = \frac{s\bar{g}(s)m(s)}{b(s)\bar{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s)}f. \quad (3.2.46)$$

Если в полиноме  $\bar{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}$  число  $\varepsilon^0$  достаточно мало, то

$$y = \frac{sm(s)}{\tilde{\psi}(s)}f, \quad (3.2.47)$$

и, следовательно, качество регулирования определяется многочленами  $\tilde{\psi}(s)$  и  $sm(s)$ .

Заметим, что передаточные функции разомкнутых систем (3.2.40), (3.2.45) и (3.2.1), (3.2.35) совпадают. Действительно, первая из этих передаточных функций

$$\bar{w}_{раз}(s) = -\frac{b(s)\bar{r}(s)}{\bar{d}(s)\bar{g}(s)},$$

а вторая

$$w_{раз}(s) = -\frac{b(s)\tilde{r}(s)}{d(s)\bar{g}(s)} = -\frac{b(s)\bar{r}(s)}{sd(s)\bar{g}(s)}.$$

### 3.2.6. Анализ структурной грубости\*

Пусть известна уточнённая модель объекта, описанного ранее рабочей моделью (3.2.1),

$$d_{ym}(s)y = b_{ym}(s)u + m_{ym}(s)f, \quad (3.2.48)$$

где

$$d_{ym}(s) = \prod_{i=N_1^0+1}^{N_{1yr}^0} (T_i^0 s + 1) \prod_{j=N_2^0+1}^{N_{2yr}^0} (\tilde{T}_j^{02} s^2 + 2\tilde{\xi}_j^0 \tilde{T}_j^0 s + 1) d(s) = d_{ооэ}(s)d(s) \quad (3.2.49)$$

$$b_{ym}(s) = \prod_{i=\alpha_1^0+1}^{\alpha_{1yr}^0} (\tilde{T}_i^0 s + 1) \prod_{j=\alpha_2^0+1}^{\alpha_{2yr}^0} (\hat{T}_j^{02} s^2 + 2\hat{\xi}_j^0 \hat{T}_j^0 s + 1) b(s) = b_{ооэ}(s)b(s), \quad (3.2.50)$$

$$m_{ym}(s) = m_{ооэ}(s)m(s). \quad (3.2.51)$$

Здесь, как и ранее в п. 2.2.4, структурные возмущения носят мультипликативный характер. Кроме того, для простоты будем полагать, что все постоянные времени структурных возмущений – положительны.

Проанализируем устойчивость модели (3.2.42) с регулятором (3.2.5), разрешающим задачу 3.2.1. Если система (3.2.48), (3.2.5) неустойчива, то изменим рабочую модель с помощью следующей процедуры.

Процедура 3.2.4. (Процедура построения структурно-грубого регулятора). Она состоит из операций:

**Операция 1.** Сформировать рабочую модель

$$d^I(s)y = b^I(s)u + m^I(s)f, \quad (3.2.52)$$

в которой

$$d^I(s) = (T^0 s + 1) d(s) \quad \text{либо} \quad d^I(s) = (\tilde{T}^{02} s^2 + 2\tilde{\xi}^0 \tilde{T}^0 s + 1) d(s), \quad \text{где} \quad (3.2.53)$$

$$T^0 = \max \{T_{N_1^0+1}^0, T_{N_1^0+2}^0, \dots, T_{N_{1\text{YT}}}^0\}, \quad \tilde{T}^0 = \max \{\tilde{T}_{N_2^0+1}^0, \tilde{T}_{N_2^0+2}^0, \dots, \tilde{T}_{N_{2\text{YT}}}^0\} \quad (3.2.54)$$

$$b^I(s) = (\hat{T}^0 s + 1) b(s) \quad \text{либо} \quad b^I(s) = (\hat{T}^{02} s^2 + 2\hat{\xi}^0 \hat{T}^0 s + 1) b(s), \quad \text{где} \quad (3.2.55)$$

$$\check{T}^0 = \min \{\check{T}_{\alpha_1^0+1}^0, \check{T}_{\alpha_1^0+2}^0, \dots, \check{T}_{\alpha_{1\text{YT}}}^0\}, \quad \hat{T}^0 = \min \{\hat{T}_{\alpha_2^0+1}^0, \hat{T}_{\alpha_2^0+2}^0, \dots, \hat{T}_{\alpha_{2\text{YT}}}^0\}. \quad (3.2.56)$$

Выбор полиномов в (3.2.52) осуществляется так: если  $T^0 > \tilde{T}^0$ , то принимается первый полином, если  $\tilde{T}^0 > T^0$  – второй. В (3.2.55) – наоборот:  $\tilde{T}^0 > \hat{T}^0$ , то принимается второй полином.

**Операция 2.** Решить задачу 3.2.1, используя процедуру 3.2.1 и найти регулятор

$$g_{n_1}^I u^{(n_1)} + \dots + g_1^I \dot{u} + g_0^I u = r_{n_1}^I y^{(n_1)} + \dots + r_1^I \dot{y} + r_0^I y, \quad (3.2.57)$$

где  $n_1 = n + 1$  либо  $n_1 = n + 2$ .

**Операция 3.** Проанализировать устойчивость системы (3.2.42), (3.2.57). Если она неустойчива, то вернуться к операции 1, построить  $d^{II}(s)$ ,  $b^{II}(s)$ ,  $m^{II}(s)$  и т.д. ■

Очевиден более простой путь построения структурно-грубого регулятора: решить задачу 3.2.1 сразу, для уточнённой модели (3.2.47). Такой путь приводит к уравнению регулятора  $N_{ym} - 1$  порядка. Столь сложный регулятор часто не вызван условиями (3.2.6), (3.2.7) задачи 3.2.1, а является следствием неудачного выбора рабочей модели объекта.

Процедура 3.2.3 доставляет регулятор минимальной сложности (минимального порядка дифференциального уравнения регулятора), определяемый требованиями к точности и качеству синтезируемой системы. Он сохраняет асимптотическую устойчивость системы при уточнении модели объекта, и, следовательно, рабочая модель

системы является структурно грубой. Будем его называть *структурно грубым регулятором*.

Примечание 3.2.1. Понятие структурной грубости, введённое определением 2.2.2, характеризует зависимость свойства устойчивости от структуры модели системы. Аналогичным образом можно ввести понятие структурной грубости точности и структурной грубости показателей качества, которые будут отражать зависимость точности и качества системы от структурных возмущений.

Для построения систем, структурно грубых по точности, либо структурно грубых по качеству регулирования, применима процедура 3.2.4, если при выполнении операции 3 определять (наряду с устойчивостью) значение  $y^f$  либо  $t_{рег}^f$ ,  $\sigma^f$  и сравнивать их с требуемыми. ■

### 3.3. Слежение

#### 3.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим следящую систему, описываемую уравнениями

$$d(s)y = b(s)(u + u_1), \quad (3.3.1)$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v, \quad (3.3.2)$$

$$g^k(s)u_1 = r^k(s)v, \quad (3.3.3)$$

где  $v(t)$  – задающее воздействие,  $u_1(t)$  – дополнительное управление,

$$r^n(s) = r_{\beta_1}^n s^{\beta_1} + r_{\beta_1-1}^n s^{\beta_1-1} + \dots + r_1^n s + r_0^n,$$

$$r^k(s) = r_{\beta_2}^k s^{\beta_2} + r_{\beta_2-1}^k s^{\beta_2-1} + \dots + r_1^k s + r_0^k, \quad g^k(s) = g_{\beta_3}^k s^{\beta_3} + g_{\beta_3-1}^k s^{\beta_3-1} + \dots + g_1^k s + g_0^k$$

– полиномы с неизвестными параметрами ( $\beta_2 \leq \beta_3$ ).

До сих пор функция  $y_{жс}(t)$  использовалась для описания, во-первых, цели управления и, во-вторых, для описания задающего воздействия. В общем случае задающее воздействие  $v(t)$  может не совпадать с  $y_{жс}(t)$ . Эти функции связаны уравнением слежения

$$\psi_m(s)y_{жс} = l_m(s)v. \quad (3.3.4)$$

Оно является желаемой моделью системы (3.3.1)-(3.3.3). В этом уравнении  $\psi_m(s)$  и  $l_m(s)$  – заданные полиномы степеней  $n_\psi$  и  $n_l < n - 1$  соответственно.

Для удобства будем представлять

$$\psi_m(s) = \varepsilon^0(s)\tilde{\psi}_m(s), \quad (3.3.5)$$

где  $\tilde{\psi}_m(s) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}^m s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1^m s + \tilde{\psi}_0^m$ , а  $\varepsilon^0(s)$  – полином (3.1.42) с достаточно малым  $\varepsilon^0$  и следовательно  $\deg \psi_m(s) = 2n - \gamma - 1$ .

Пусть, в частности, в (3.3.2) полином  $r^n(s) = r(s)\delta^n(s)$ , где  $\delta^n(s)$  – некоторый многочлен.

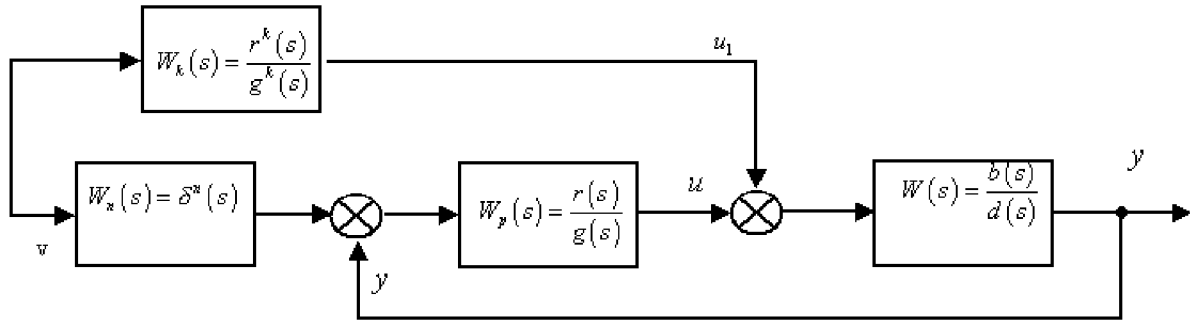


Рис. 3.3.1

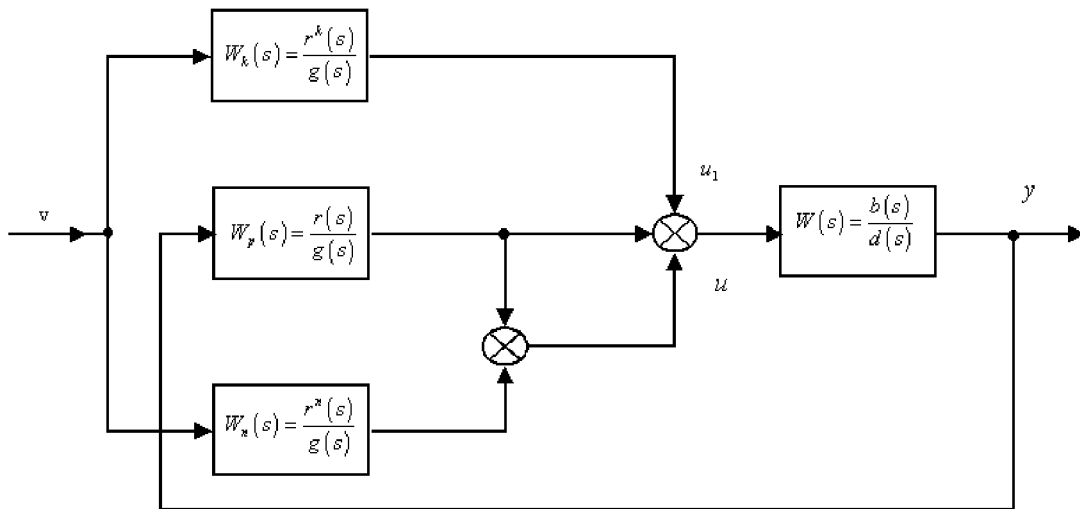


Рис. 3.3.2

Структурная схема следящей системы (3.3.1)-(3.3.3) для этого случая приведена на рис. 3.3.1. Она совпадает со схемой рис. 2.3.5, если в последней заменить  $y_{ж}(t)$  на  $v(t)$ .

Задающее воздействие, приложенное к регулятору, будем называть *последовательным*, а к объекту – *параллельным задающим воздействием*.

Далее вместо структурной схемы рис. 3.3.1 будем рассматривать схему рис. 3.3.2. В этой схеме на структуру оператора  $r^n(s)$  не накладывается ограничение  $r^n(s)r(s)\delta^n(s)$ .

Найдём связь выходной переменной  $y(t)$  системы (3.3.1)-(3.3.3) с задающим воздействием.

На основе (2.3.42) получим

$$y = w_v(s)v,$$

где

$$w_v(s) = \frac{b(s)[r^k(s)g(s) + r^n(s)g^k(s)]}{[d(s)g(s) - b(s)r(s)]g^k(s)}. \quad (3.3.6)$$

С другой стороны, передаточная функция желаемой модели (3.3.4)

$$w_m(s) = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)}. \quad (3.3.7)$$

**Задача 3.3.1.** (Задача синтеза следящих систем). Пусть объект (3.3.1) устойчив по управлению. Требуется найти регулятор (3.3.2) и уравнение (3.3.3) параллельной передачи задающего воздействия такие, чтобы выполнялось тождество

$$w_v(s) = w_m(s). \quad (3.3.8)$$

Очевидно, что при этом условии выход системы

$$y(t) = y_{ж}(t).$$

■

Рассмотрим различные варианты решения этой задачи и исследуем условия их реализуемости. При этом будем выделять случай, когда  $v(t) = y_{ж}(t)$ . В этом случае  $w_m(s) = 1$  или

$$l_m(s) = \psi_m(s). \quad (3.3.9)$$

### 3.3.2. Последовательное задающее воздействие

**Алгоритм.** Пусть  $u_1 = 0$ . Тогда система принимает вид

$$d(s)y = b(s)u, \quad (3.3.10)$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \quad (3.3.11)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае передаточная функция

$$w_v(s) = \frac{r^n(s)b(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)}. \quad (3.3.12)$$

Из тождества

$$\frac{r^n(s)b(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)} = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)} \quad (3.3.13)$$

следует, что полином  $l_m(s)$  должен иметь структуру  $l_m(s) = b(s)\tilde{l}_m(s)$ . Чтобы избежать этого ограничения, будем определять коэффициенты полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_m(s). \quad (3.3.14)$$

Тогда

$$r^n(s) = l_m(s). \quad (3.3.15)$$

**Реализуемость.** Регулятор (3.3.11) реализуем, если

$$\deg g(s) \geq \deg r(s), \quad \deg g(s) \geq \deg r^n(s). \quad (3.3.16)$$

Первое из этих неравенств выполняется при условиях

$$\deg[b(s)\psi_m(s)] \geq 2n - 1, \quad \deg r(s) = n - 1. \quad (3.3.17)$$

Второе условие реализуемости удовлетворяется, так как

$$\deg l_m(s) \leq \deg g(s) = n - 1.$$

Рассмотрим **случай**  $v(t) = y_{ж}(t)$ .

В этом случае  $l_m(s) = b(s)\psi_m(s)$

$$\deg l_m(s) = 2n - 1 > \deg g(s), \quad (3.3.18)$$

и поэтому в случае  $v(t) = y_{ж}(t)$  регулятор (3.3.11) при  $r^n(s) = b(s)\psi_m(s)$  нереализуем.

Пусть равенство  $v(t) = y_{ж}(t)$  нарушается лишь для высокочастотных составляющих  $v(t)$ . Математически это означает, например, что переменные  $v(t)$  и  $y_{ж}(t)$  связаны уравнением

$$(\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma} y_{ж} = v, \quad (3.3.19)$$

где  $\varepsilon^0$  – достаточно малое положительное число.

Примем передаточную функцию желаемой модели системы

$$w_m(s) = \frac{l_m(s)}{\psi_m(s)} = \frac{\tilde{\psi}(s)}{\tilde{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s)}, \quad (3.3.20)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}, \quad \tilde{\psi}(s) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0. \quad (3.3.21)$$

В этом случае искомые полиномы регулятора (3.3.11) находятся из уравнений

$$r^n(s) = \tilde{\psi}(s), \quad (3.3.22)$$

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\tilde{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s). \quad (3.3.23)$$

Так как  $\deg \psi_m(s) = 2n$ , то  $\deg g(s) = n = \deg \tilde{\psi}(s) = \deg l_m(s)$  и, следовательно, регулятор реализуем. Он обеспечивает при задающем воздействии  $y_{ж}(t)$  выход

$$y = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^0(s)} y_{ж}, \quad (3.3.24)$$

который лишь на высоких частотах отличается от желаемого.

### 3.3.3. О классической задаче регулирования\*

Рассмотрим задачу 2.3.1, в которой  $v(t) = y_{ж}(t)$ .

Регулятор, разрешающий эту задачу, будем искать не в виде (2.3.2), а в более общей форме (3.3.11). Когда  $r^n(s) \neq r(s)$ . Полиномы этого регулятора находим на основе (3.3.22), (3.3.23), где  $\tilde{\psi}(s)$  – произвольный гурвицев полином.



При этом  $\sigma \approx 0$ , так как  $\check{\varepsilon}^0(s) = (\varepsilon^0 s + 1)^{n-\gamma}$ . Кроме того, из (3.3.24) следует, что  $\varepsilon_{cm} = 0$ .

Выполнение требований к точности (при гармонических задающих воздействиях) и времени регулирования достигается выбором достаточно малого числа  $\varepsilon^0$ .

### 3.3.4. Принцип разделения

Рассмотрим следящую систему (3.3.10), (3.3.11) при внешних возмущениях

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \quad (3.3.25)$$

Движение этой системы

$$y(t) = y_{ж}(t) + y^f(t) + \varepsilon(t) = y_{ж}(t) + \varepsilon^f(t), \quad (3.3.26)$$

где  $y^f(t)$  – погрешность регулирования, вызванная внешним возмущением,  $\varepsilon(t)$  – ошибка слежения при  $f = 0$ ,  $\varepsilon^f(t)$  – ошибка слежения.

Если параметры регулятора определены на основе (3.3.14), (3.3.15), то  $\varepsilon(t) = 0$ .

При задающем воздействии  $v(t) = y_{ж}(t)$  получим из (3.3.24)

$$\varepsilon^f = y_{ж} - y = \frac{\check{\varepsilon}^0(s) - 1}{\check{\varepsilon}^0(s)} y_{ж}. \quad (3.3.27)$$

Процедура 3.3.1. (Процедура построения следящей системы при внешних возмущениях):

а) определим полином  $\check{\varepsilon}^0(s)$  по заданной ошибке слежения  $\varepsilon^*$  так, чтобы

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*,$$

б) используем при условии  $|y^f(t)| \leq y^*$  процедуры 3.2.1 и 3.2.2 и найдём полиномы  $g(s)$  и  $r(s)$  регулятора системы (3.3.25). При этом, осуществляя первую операцию процедуры 3.2.1, полагаем  $\varepsilon^0(s) = \check{\varepsilon}^0(s)$ .

в) Сформируем

$$r^n(s) = \tilde{\psi}(s).$$

Если  $v(t) \neq y_{ж}(t)$ , то полагаем  $\delta(s) = b(s)\varepsilon^0(s)\tilde{\psi}_{м}(s)\frac{\tilde{\psi}_0}{\tilde{\psi}_{0м}}$ , а  $r^n(s) = l_{м}(s)$ .

■

В последнем случае полином  $r^n(s)$  не зависит от полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$  (а при  $v(t) = y_{ж}(t)$  эта зависимость малосущественна).

Эта независимость выражает *принцип разделения*, который состоит в том, что полиномы  $g(s)$ ,  $r(s)$  и оператор  $r^n(s)$  при задающем воздействии находятся независимо по заданным ошибкам регулирования и слежения соответственно.

Пример 3.3.1. Рассмотрим следящий привод подачи станков с числовым программным управлением (станков с ЧПУ). Двигатель постоянного тока с якорным управлением (объект управления) описывается уравнением

$$(T_m T s^3 + T_m s^2 + s)y = k_g u - k_m(1 + Ts)f, \quad (3.3.28)$$

где  $y(t)$  – относительное перемещение (угол поворота),  $u(t)$  – относительное напряжение якорной цепи,  $f(t)$  – относительный момент сопротивления движению.

Желаемое относительное перемещение  $y_{жс}(t)$  зависит от обрабатываемой на станке детали и задаётся некоторым программным устройством. Сигнал  $y_{жс}(t)$  сравнивается с фактическим  $y(t)$ . Таким образом, задающее последовательное воздействие  $v(t) = y_{жс}(t)$ . Внешнее возмущение  $f(t)$  будем полагать для простоты ступенчатой функцией.  $T$  и  $T_m$  – электромагнитная и электромеханическая постоянные времени привода,  $k_g$  и  $k_m$  – коэффициенты передачи управления и внешнего возмущения.

Запишем уравнение (3.3.28) в виде

$$(s^3 + d_2 s^2 + d_1 s)y = b_0 u + (m_1 s + m_0)f, \quad (3.3.29)$$

где  $d_2 = \frac{1}{T}$ ,  $d_1 = \frac{1}{T_m T}$ ,  $b_0 = \frac{k_g}{T_m T}$ ,  $m_1 = \frac{k_m}{T_m}$ ,  $m_0 = \frac{k_m}{T_m T}$ .

Пусть даны параметры уравнения привода (3.3.28). Требуется найти такой регулятор, чтобы при  $y_{жс}(t) = 1 \cdot \sin \omega_{жс} t$  выполнялись неравенства

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*, \quad |y^f(t)| \leq y^*, \quad (3.3.30)$$

в которых  $\varepsilon^*$  и  $y^*$  – заданные числа.

Для решения задачи найдём полиномы  $\tilde{\psi}(s)$  и  $\tilde{\varepsilon}^0(s)$  в уравнениях (3.3.22), (3.3.23). Полином  $\tilde{\psi}(s)$  будем определять по формулам (3.2.17), (3.2.16), используя второе из неравенств (3.3.30), определяющего точность регулирования при  $y_{жс}(t) = 0$

$$\tilde{\psi}(s) = (m_1 s + m_0) \left( \tilde{\psi}_2 s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0 \right); \quad (3.3.31)$$

$$\tilde{\psi}_2 > 0, \quad \tilde{\psi}_1 > 0, \quad \tilde{\psi}_0 > \frac{f_{зап.м.}}{y^*}. \quad (3.3.32)$$

Погрешность слежения при  $f(t) = 0$  определяется коэффициентом в многочлене  $\tilde{\varepsilon}^0(s)$ . Для его определения рассмотрим уравнение вида (3.3.24)

$$(\varepsilon^0 s + 1)^2 y = y_{жс} = 1 \cdot \sin \omega_{жс} t \quad (3.3.33)$$

и найдём достаточно малое число  $\varepsilon^0$ , при котором

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*.$$

■

**3.3.5. Параллельное задающее воздействие\***

Пусть в (3.3.2) слагаемое  $r^n(s)v = 0$ , тогда уравнения (3.3.1)-(3.3.3) примут вид

$$d(s)y = b(s) \left[ u + \frac{r^k(s)}{g^k(s)}v \right], \quad (3.3.34)$$

$$g(s)u = r(s)y. \quad (3.3.35)$$

Передаточная функция этой системы

$$w_v(s) = \frac{r^k(s)g(s)b(s)}{[d(s)g(s) - b(s)r(s)]g^k(s)}. \quad (3.3.36)$$

Определим коэффициенты регулятора из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_m(s). \quad (3.3.37)$$

Затем для выполнения (3.3.8) положим

$$g^k(s) = g(s), \quad (3.3.38)$$

$$r^k(s) = l_m(s). \quad (3.3.39)$$

Управление  $u_1 = \frac{r^k(s)}{g^k(s)}v$  можно осуществить, так как

$$\deg g^k(s) = \deg g(s) = n - 1, \quad \text{а} \quad \deg r^k(s) = \deg l_m(s) = n - 1. \quad (3.3.40)$$

При  $v(s) = y_{ж}(t)$  управление  $u_1$  не реализуемо. Однако, если функции  $v(s)$  и  $y_{ж}(t)$  связать уравнением (3.3.19) и сформировать модель (3.3.20), то параметры регулятора и управления  $u_1$  найдём из уравнений

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\tilde{\varepsilon}^0(s)\tilde{\psi}(s), \quad g^k(s) = g(s), \quad r^k(s) = \tilde{\psi}(s). \quad (3.3.41)$$

**3.3.6. Последовательно-параллельное задающее воздействие\***

Пусть уравнения (3.3.1)-(3.3.3) имеют вид

$$d(s)y = b(s)u + r^k(s)v, \quad (3.3.42)$$

$$g(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \quad (3.3.43)$$

Объект (3.3.42) существенно отличается от объекта (3.3.1) по физическому смыслу. Во-первых, он имеет два входа, во-вторых, предполагается, что полином  $r^k(s)$  не задан и его можно изменить.

Передаточная функция системы (3.3.42), (3.3.43)

$$w_v(s) = \frac{r^k(s)g(s) + b(s)r^n(s)}{d(s)g(s) - b(s)r(s)}. \quad (3.3.44)$$

Будем, как и ранее, определять полиномы регулятора  $g(s)$  и  $r(s)$  из тождества

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = b(s)\psi_m(s), \quad (3.3.45)$$

а многочлены  $r^k(s)$  и  $r^n(s)$  при задающем воздействии  $v$  найдём из соотношения

$$g(s)r^k(s) + b(s)r^n(s) = l_m(s). \quad (3.3.46)$$

Для реализуемости достаточно принять

$$\deg r^n(s) < \deg g(s), \quad \deg r^k(s) \leq n. \quad (3.3.47)$$

Рассмотрим **случай**  $v(t) = y_{ж}(t)$ . Примем в (3.3.46)

$$l_m(s) = b(s)\psi_m(s) \quad (3.3.48)$$

и тогда соотношение (3.3.46) запишется как

$$g(s)r^k(s) + b(s)r^n(s) = b(s)\psi_m(s). \quad (3.3.49)$$

Полагая

$$\deg r^k(s) = n, \quad \deg r^n(s) = n - 2, \quad (3.3.50)$$

находим единственное решение (3.3.49).

### 3.3.7. Компенсационная схема (1-й вариант)\*

На рис. 3.3.3 приведена компенсационная схема следящей системы. В ней

$h^{(1)}(s) = h_{n_1-1}^{(1)}s^{n_1-1} + \dots + h_1^{(1)}s + h_0^{(1)}$ ,  
 $h^{(2)}(s) = h_{n_2-1}^{(2)}s^{n_2-1} + \dots + h_1^{(2)}s + h_0^{(2)}$ ,  $g(s) = g_{n_3}s^{n_3} + \dots + g_1s + g_0$  – неизвестные полиномы; причем  $g(s)$  имеет корни с отрицательными вещественными частями.

Пусть для определённости,

$$n_1 \leq n - 1, \quad n_2 \leq n - 1, \quad n_3 = n - 1. \quad (3.3.51)$$

Объект (3.3.10) представим в виде

$$d(s)p = u, \quad (3.3.52)$$

$$y = b(s)p, \quad (3.3.53)$$

где  $p(t)$  – некоторая промежуточная переменная.

Из схемы следует выражение

$$u = kv + q^{-1}(s) [h^{(1)}(s)y + h^{(2)}(s)u], \quad (3.3.54)$$

в котором  $k$  – заданное число.

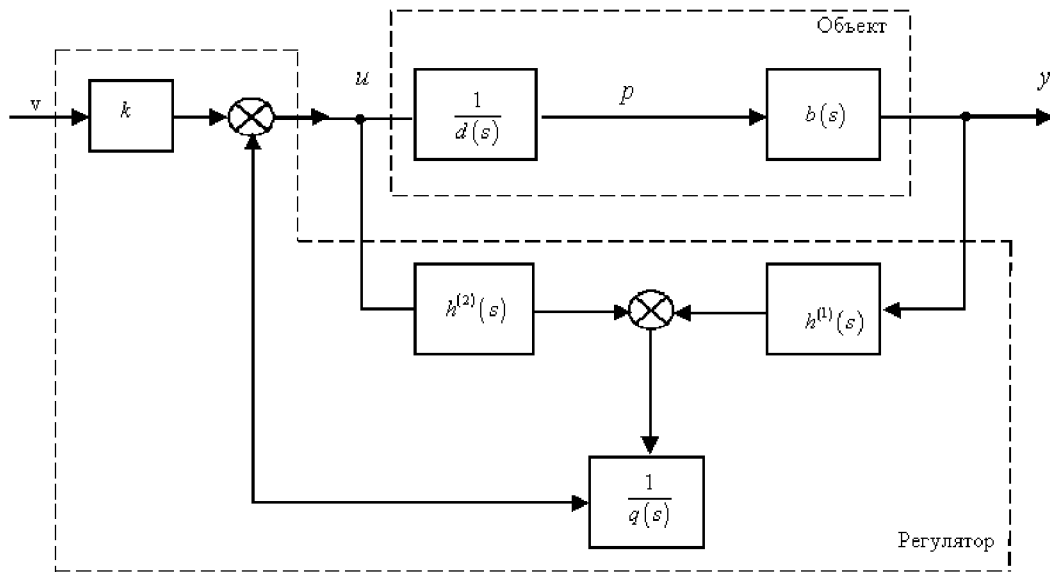


Рис. 3.3.3

Преобразуя (3.3.54), получим

$$u = \frac{h^{(1)}(s)}{q(s) - h^{(2)}(s)}y + \frac{q(s)k}{q(s) - h^{(2)}(s)}v. \quad (3.3.55)$$

Из (3.3.52), (3.3.53), (3.3.54) находим окончательно

$$y = \frac{b(s)q(s)k}{d(s)q(s) - d(s)h^{(2)}(s) - b(s)h^{(1)}(s)}v. \quad (3.3.56)$$

Коэффициенты полиномов  $h^{(1)}(s)$  и  $h^{(2)}(s)$  будем определять из тождества

$$d(s)h^{(2)}(s) + b(s)h^{(1)}(s) = q(s)\alpha(s), \quad (3.3.57)$$

где  $\alpha(s)$  – некоторый полином степени  $n - 1$ , а  $q(s)$  – произвольный устойчивый многочлен степени  $n - 1$ .

Тогда

$$y = \frac{b(s)k}{d(s) - \alpha(s)}v. \quad (3.3.58)$$

Если определить  $\alpha(s)$  из равенства

$$d(s) - \alpha(s) = b(s)\tilde{\varepsilon}^0(s)k_1 \quad \left(k_1 = \frac{1}{b_0\varepsilon^0}\right) \quad (3.3.59)$$

и принять  $k = k_1$ , то

$$y = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^0(s)}v. \quad (3.3.60)$$

При  $v(t) = y_{ж}(t)$  можно получить необходимую точность слежения, выбирая  $\varepsilon^0$  соответствующим образом.

### 3.3.8. Компенсационная схема (2-й вариант)\*

Существует ещё один путь определения полиномов  $h^{(1)}(s)$ ,  $h^{(2)}(s)$  и  $q(s)$  компенсационной схемы рис. 3.3.3.

Пусть в модели (3.3.4)  $\deg \psi_m(s) = n$  [для этого положим  $\psi_m(s) = \tilde{\psi}(s)$ ], а  $\deg l_m(s) = \deg b(s) = n - 1$ .

Тогда положим

$$q(s) = l_m(s), \quad (3.3.61)$$

а коэффициенты полиномов  $h^{(1)}(s)$  и  $h^{(2)}(s)$  будем искать из тождества

$$d(s) [q(s) - h^{(2)}(s)] - b(s)h^{(1)}(s) = b(s)\tilde{\psi}(s). \quad (3.3.62)$$

Тогда (при  $k = 1$ ) выражение (3.3.56) принимает желаемый вид

$$y = \frac{l_m(s)}{\tilde{\psi}(s)} v. \quad (3.3.63)$$

Пример 3.3.2. Пусть задан объект

$$(s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0) y = (s^2 + b_1s + b_0) u. \quad (3.3.64)$$

Требуется найти параметры компенсационного регулятора такие, чтобы передаточная функция замкнутой системы совпадала с заданной

$$w_m(s) = \frac{s^2 + l_1^m s + l_0^m}{s^3 + \tilde{\psi}_2 s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0}. \quad (3.3.65)$$

Для решения задачи положим

$$q(s) = s^2 + l_1^m s + l_0^m \quad (3.3.66)$$

а  $h^{(1)}(s)$  и  $h^{(2)}(s)$  найдём из тождества

$$(s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0) (s^2 + l_1^m s + l_0^m - h_1^{(2)}s - h_0^{(2)}) - (s^2 + b_1s + b_0) \cdot (h_2^{(1)}s^2 + h_1^{(1)}s + h_0^{(1)}) = (s^2 + b_1s + b_0) (s^3 + \tilde{\psi}_2 s^2 + \tilde{\psi}_1 s + \tilde{\psi}_0). \quad (3.3.67)$$

■

### 3.3.9. Влияние внешних возмущений на компенсационную схему\*

При внешних возмущениях уравнения (3.3.52)-(3.3.54) примут вид

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad (3.3.68)$$

$$u = q^{-1}(s) [h^{(1)}(s)y + h^{(2)}(s)u]. \quad (3.3.69)$$

В уравнении регулятора опущено задающее воздействие, поскольку влияние внешних возмущений и задающих воздействий можно исследовать независимо.

Из (3.3.68), (3.3.69) следует

$$y = \frac{m(s) [q(s) - h^{(2)}(s)]}{d(s) [q(s) - h^{(2)}(s)] - b(s)h^{(1)}(s)} f. \quad (3.3.70)$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (3.2.8). Рассмотрим его структуру для обоих вариантов компенсационных схем.

**1 вариант.** С учётом (3.3.57), (3.3.59) получим

$$y = \frac{m(s) [q(s) - h^{(2)}(s)]}{[d(s) - \alpha(s)]q(s)} f = \frac{m(s) [q(s) - h^{(2)}(s)]}{b(s)\varepsilon^0(s)k_1q(s)} f. \quad (3.3.71)$$

В этом выражении полином  $h^{(2)}(s)$  зависит неявно от коэффициентов полиномов  $b(s)$ ,  $\varepsilon^0(s)$ ,  $q(s)$ , и поэтому погрешность  $y^f(t)$ , вызванная внешним возмущением, может оказаться недопустимо большой.

**2 вариант.** Учитывая (3.3.62), запишем (3.3.71) как

$$y = \frac{m(s) [q(s) - h^{(2)}(s)]}{b(s)\tilde{\psi}(s)} f = \frac{m(s) [l_m(s) - h^{(2)}(s)]}{b(s)\tilde{\psi}(s)} f. \quad (3.3.72)$$

Полином  $h^{(2)}(s)$  в этом выражении неявно зависит от полиномов  $l_m(s)$ ,  $b(s)$ ,  $\tilde{\psi}(s)$ . Поэтому, как и в первом варианте, погрешность  $y^f(t)$  может оказаться недопустимой.

Рассмотрим это обстоятельство более подробно.

Выходной сигнал любой следящей системы имеет вид (3.3.26). Требования к точности следящей системы выражаются с помощью неравенств

$$|y_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^*, \quad |y^f(t)| \leq y^*, \quad (3.3.73)$$

где  $\varepsilon^*$  и  $y^*$  – числа, задаваемые независимо одно от другого. При последовательном, параллельном и последовательно-параллельном задающих воздействиях использовалось структурное модальное управление и было показано, что можно выбрать параметры регулятора так, чтобы выполнялись требования (3.3.73).

При использовании компенсационной схемы числа  $\varepsilon^*$  и  $y^*$  не могут задаваться независимо друг от друга. Это означает, что для компенсационных схем не применим принцип разделения.

## 3.4. Обратная связь по состоянию

### 3.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (3.4.1)$$

$$u = c'x, \quad (3.4.2)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  –  $n$ -мерный вектор измеряемых переменных объекта (3.4.1),  $A$  – матрица чисел размеров  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  –  $n$ -мерные вектора чисел.

Характеристический полином этой системы

$$d^u(s) = \det(Es - A - \mathbf{bc}') = s^n + d_{n-1}^u s^{n-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u. \quad (3.4.3)$$

Задача 3.4.1. (Задача модального управления). Для объекта (3.4.1) с заданными матрицей  $A$  и вектором  $\mathbf{b}$  найти вектор  $\mathbf{c}$  регулятора (3.4.2) такой, чтобы характеристический полином (3.4.3) имел заданные корни  $s_i^*$  ( $i = \overline{1, n}$ ). ■

Решение этой задачи сводится к процедуре 3.1.1 после преобразования объекта (3.4.1) к канонической форме управляемости.

### 3.4.2. Каноническая форма

Объект (3.4.1) в канонической форме управляемости (форме Фробениуса) имеет вид

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{A}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}u, \quad (3.4.4)$$

где

$$\check{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Эти матрицы можно записать в более компактной форме

$$\check{A} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & E_{n-1} \\ \hline & -\check{\mathbf{d}} \end{array} \right), \quad \check{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{d}} = [ -d_0 \quad -d_1 \quad -d_2 \quad \dots \quad -d_{n-1} ]. \quad (3.4.6)$$

В (3.4.5)  $d_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) – коэффициенты характеристического полинома объекта (3.4.1)  $d(s) = \det(Es - A)$ .

Для преобразования (3.4.1) к виду (3.4.4) введём вектор

$$\check{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}, \quad (3.4.7)$$

где  $T$  – неособая матрица ( $\det T \neq 0$ ) чисел размеров  $n \times n$ .

Подставляя  $\mathbf{x} = T^{-1}\check{\mathbf{x}}$  в (3.4.1) получим

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = TAT^{-1}\check{\mathbf{x}} + T\mathbf{b}u. \quad (3.4.8)$$

Необходимо найти матрицу такую, чтобы

$$TAT^{-1} = \check{A}, \quad T\mathbf{b} = \check{\mathbf{b}}. \quad (3.4.9)$$



Теорема 3.4.1. Если объект (3.4.1) полностью управляем, то матрица  $T$  его преобразования (3.4.7) к канонической форме (3.4.4) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{b}} & \check{A}\check{\mathbf{b}} & \dots & \check{A}^{n-1}\check{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \dots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.4.10)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 3.Д.4.

Выражение (3.4.10) в более компактной форме имеет вид

$$T = \check{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{-1}, \quad (3.4.11)$$

где

$$\check{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{b}} & \check{A}\check{\mathbf{b}} & \dots & \check{A}^{n-1}\check{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (3.4.12)$$

– матрица управляемости модели (3.4.4), а

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \dots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

– матрица управляемости (3.4.1).

Процедура 3.4.1. (процедура приведения уравнения к канонической форме управляемости) состоит из операций:

1. Построить характеристический полином объекта

$$d(s) = \det(Es - A),$$

и сформировать вектор  $\check{\mathbf{d}}$  матрицы  $\check{A}$  (3.4.6).

2. Сформировать матрицы  $\check{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k}$  по формулам (3.4.12), (3.4.13) и вычислить матрицу

$$T = \check{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{-1}$$

преобразования (3.4.7).

■

Пример 3.4.1. Пусть имеем объект управления

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + 5u, \quad (3.4.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = 3\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 + 6u. \quad (3.4.15)$$

Приведём эти уравнения к канонической форме. В соответствии с первой операцией найдём

$$d(s) = \det \begin{pmatrix} s - 1 & -2 \\ -3 & s - 4 \end{pmatrix} = s^2 - 5s - 2; \quad \check{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}. \quad (3.4.16)$$

Затем сформируем

$$\check{\mathbf{k}} = (\check{\mathbf{b}}, \check{A}\check{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 6 & 39 \end{pmatrix}$$

и вычислим

$$T = \check{\mathbf{k}}\mathbf{k}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{93}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Нетрудно проверить, что

$$\check{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{b}} = T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4.18)$$

■

### 3.4.3. Построение управления

Из структуры уравнения (3.4.4) заключаем, что компоненты вектора  $\check{\mathbf{x}}$

$$\check{x}_2 = \dot{\check{x}}_1, \quad \check{x}_3 = \ddot{\check{x}}_1, \quad \dots, \quad \check{x}_n = \check{x}_1^{(n-1)}, \quad (3.4.19)$$

и поэтому относительно переменной  $\check{x}_1$  оно запишется как

$$d(s)\check{x}_1 = u. \quad (3.4.20)$$

Регулятор (3.4.2) имеет теперь вид

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{c}'T^{-1}\check{\mathbf{x}} = (\check{c}_n s^{n-1} + \dots + \check{c}_1 s + \check{c}_1)\check{x}_1 = \check{c}(s)\check{x}_1. \quad (3.4.21)$$

Здесь  $\check{c}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – компоненты вектора  $\check{\mathbf{c}} = [\check{c}_1 \quad \check{c}_2 \quad \dots \quad \check{c}_n]$ , который определяется как

$$\check{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}'T^{-1}, \quad (3.4.22)$$

и обратно, если известен вектор  $\check{\mathbf{c}}$ , то искомый вектор

$$\mathbf{c}' = \check{\mathbf{c}}'T. \quad (3.4.23)$$

Уравнения (3.4.20) и (3.4.21) являются частным случаем уравнений (3.1.1) и (3.1.2), когда в последних

$$b(s) = 1, \quad g(s) = 1. \quad (3.4.24)$$

Поэтому решение задачи 3.4.1 сводится к процедурам 3.1.1 и 3.4.1.

Процедура 3.4.2. (процедура построения модального управления).

**Операция 1.** На основе процедуры 3.4.1 найти полином  $d(s)$  уравнения (3.4.20) и матрицу  $T$ .

**Операция 2.** Сформировать желаемый полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*) = s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0. \quad (3.4.25)$$

**Операция 3.** Находим полином регулятора (3.4.21) из тождества

$$d(s) - \check{c}(s) = \tilde{\psi}(s) \quad (3.4.26)$$

и формируем вектор

$$\check{c} = \begin{bmatrix} d_0 - \tilde{\psi}_0 & d_1 - \tilde{\psi}_1 & \dots & d_{n-1} - \tilde{\psi}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4.27)$$

**Операция 4.** Вычисляем искомый вектор  $c'$  по формуле (3.4.23). ■

Пример 3.4.2. Найти регулятор

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (3.4.28)$$

для объекта (3.4.14), (3.4.15) так, чтобы характеристический полином объекта, замкнутого регулятором, имел корни

$$s_1^* = -1, \quad s_2^* = -2. \quad (3.4.29)$$

Полином  $d(s)$  и матрица  $T$ , разрешающие эту задачу, были определены ранее и имеют вид (3.4.16) и (3.4.17).

Осуществляя вторую операцию, находим

$$\tilde{\psi}(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2. \quad (3.4.30)$$

Затем определяем полином

$$\check{c}(s) = d(s) - \tilde{\psi}(s) = -8s - 4 \quad (3.4.31)$$

и формируем вектор

$$\check{c} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix}. \quad (3.4.32)$$

Вычислим коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  регулятора (3.4.28)

$$c' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \check{c}T = \begin{bmatrix} -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{93} = \begin{bmatrix} -48 & -84 \end{bmatrix} \frac{1}{93}. \quad (3.4.33)$$

Нетрудно проверить, что при таком регуляторе характеристический полином объекта (3.4.14), (3.4.15), замкнутого регулятором

$$u = -\frac{48}{93}x_1 - \frac{84}{93}x_2,$$

имеет вид

$$d^u(s) = \det(Es - A - bc') = s^2 + 3s + 2. \quad (3.4.34) \quad \blacksquare$$

### 3.4.4. Проблема синтеза

Пусть на объект (3.4.1) действуют внешние возмущения. Тогда он описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{m}f, \quad (3.4.35)$$

где  $\mathbf{m}$  – заданный  $n$ -мерный вектор.

Динамику такого объекта будем оценивать регулируемой переменной

$$z(t) = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad (3.4.36)$$

где  $\mathbf{l}$  – заданный  $n$ -мерный вектор.

Задача 3.4.2. Пусть задан объект (3.4.35), у которого

$$\mathbf{m} = \mathbf{b}. \quad (3.4.37)$$

Требуется найти регулятор (3.4.2) такой, чтобы, начиная с момента времени  $t_{рег}$ , выполнялось условие

$$|z(t)| \leq z^*, \quad (3.4.38)$$

где  $z^*$  – заданное число, характеризующее точность регулирования. ■

Эта задача аналогична задаче 3.2.1. В ней, как и ранее, внешнее возмущение может быть трёх видов – (3.2.2), (3.2.3) либо (3.2.4).

Для решения задачи найдём связь регулируемой переменной системы (3.4.35), (3.4.2) с внешним возмущением

$$z = \mathbf{l}'\mathbf{x} = \mathbf{l}'(Es - A - \mathbf{b}\mathbf{c}')^{-1}\mathbf{m}f = \frac{\mathbf{l}'(Es - \widetilde{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}')\mathbf{m}}{d^u(s)}f = \frac{m^c(s)}{d^u(s)}f, \quad (3.4.39)$$

где

$$m^c(s) = \mathbf{l}'(Es - \widetilde{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}')\mathbf{m}. \quad (3.4.40)$$

Будем определять вектор  $\mathbf{c}'$ , используя процедуру 3.4.2, из тождества

$$d^u(s) = \widetilde{\psi}(s). \quad (3.4.41)$$

Тогда

$$z = \frac{m^c(s)}{\widetilde{\psi}(s)}f. \quad (3.4.42)$$

В этом выражении полином  $m^c(s)$  зависит от компонент вектора  $\mathbf{c}'$  и, следовательно, он неявно зависит от коэффициентов  $\widetilde{\psi}(s)$ . В общем случае трудно указать способ определения этих коэффициентов, при которых выполняется требование (3.4.38) к точности, и это составляет основную проблему при синтезе регуляторов. Эта проблема разрешается при  $\mathbf{m} = \mathbf{b}$ , так как при этом условии полином  $m^c(s)$  не зависит от вектора  $\mathbf{c}'$ .

Убедимся в этом.

Утверждение 3.4.1. Вектора

$$\beta(s) = (Es - A)^{-1}\mathbf{b} \quad \text{и} \quad \beta^z(s) = (Es - A - \mathbf{bc}')^{-1}\mathbf{b} \quad (3.4.43)$$

связаны соотношением

$$\beta^z(s) = \frac{\beta(s)}{1 + w_{paz}(s)}, \quad (3.4.44)$$

где

$$w_{paz}(s) = -\mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.4.45)$$

■

Доказательство утверждения несложно. Действительно, подставляя управление (3.4.2) в уравнение объекта (3.4.35) при  $\mathbf{m} = \mathbf{b}$ , получим

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{bc}')\mathbf{x} + \mathbf{b}f.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}(s) = (Es - A - \mathbf{bc}')^{-1}\mathbf{b}f, \quad (3.4.46)$$

с другой стороны, из (3.4.35) при  $\mathbf{m} = \mathbf{b}$  следует

$$\mathbf{x}(s) = (Es - A)^{-1}\mathbf{b}(u + f) = \beta(s)(u + f). \quad (3.4.47)$$

Подставляя это выражение в (3.4.2), находим

$$u(s) = \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}(u + f) = -w_{paz}(s)(u + f),$$

или

$$u(s) = -\frac{w_{paz}(s)}{1 + w_{paz}(s)}f. \quad (3.4.48)$$

Исключая переменную  $u$ , представленную этим соотношением, из (3.4.47), получим (3.4.44).

Используя доказанное утверждение, находим

$$\mathbf{z} = \mathbf{l}'(Es - A - \mathbf{bc}')^{-1}\mathbf{m}f = \frac{\mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}}{1 - \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}}f. \quad (3.4.49)$$

### 3.4.5. Процедура синтеза

Почти очевидны соотношения

$$\mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{l}'T^{-1}(Es - \check{A})^{-1}\check{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}'T^{-1}(Es - \check{A})^{-1}\check{\mathbf{b}}, \quad (3.4.50)$$

в справедливости которых можно убедиться, подставляя в их правые части выражения (3.4.9).

Вводя вектор

$$\tilde{\mathbf{m}}' = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_\gamma \end{bmatrix} = \mathbf{l}'T^{-1} \quad (3.4.51)$$

и учитывая (3.4.22), получим

$$z = \frac{\tilde{\mathbf{m}}' (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}}}{1 - \check{\mathbf{c}}' (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}}} f = \frac{b_z(s)}{d(s) - \check{c}(s)} f, \quad (3.4.52)$$

где

$$b_z(s) = b_{z,\gamma_z} s^{\gamma_z} + \dots + b_{z,1} s + b_{z,0} = \mathbf{l}'(Es - A)^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.4.53)$$

Определяя  $r(s)$  из тождества (3.4.26), находим

$$z = \frac{b_z(s)}{\tilde{\psi}(s)} f. \quad (3.4.54)$$

Параметры полинома  $\tilde{\psi}(s)$  определяем, исходя из требования (3.4.38) к точности на основе неравенств (3.2.14) или (3.2.16), полагая в них  $z^*$  вместо  $y^*$ .

Если полином  $b_z(s)$  устойчив, то можно принять аналогично (3.2.17)

$$\tilde{\psi}(s) = b_z(s) \tilde{\psi}(s). \quad (3.4.55)$$

Это позволит оценить время регулирования.

Для обеспечения грубости синтезируемой системы нужно руководствоваться соотношением (3.2.28) рекомендации 3.2.1 либо использовать для построения  $\tilde{\psi}(s)$  процедуру 3.2.2.

### 3.4.6. Следящие системы

При последовательном задающем воздействии следящая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad (3.4.56)$$

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + kv, \quad (3.4.57)$$

Желаемое значение  $z_{\text{жс}}(t)$  регулируемой переменной связано с задающим воздействием  $v(t)$  уравнением качества слежения

$$\tilde{\psi}_{\text{жс}}(s) z_{\text{жс}} = l_{\text{жс}}(s) v. \quad (3.4.58)$$

Регулируемая переменная системы (3.4.56), (3.4.57) описывается соотношением

$$z = \frac{b_z(s)k}{d(s) - \check{c}(s)} v, \quad (3.4.59)$$

которое следует из (3.4.52), если заменить  $f$  на  $kv$ .

Сравнивая эти два выражения, заключаем, что при последовательном задающем воздействии нельзя получить наперёд заданный полином  $l_m(s)$ .

При параллельном задающем воздействии система принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + u_1), \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (3.4.60)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^k = \check{A}^k \check{\mathbf{x}}^k + \check{\mathbf{b}}^k v, \quad u_1 = \mathbf{r}^k \check{\mathbf{x}}^k, \quad (3.4.61)$$

где  $\check{\mathbf{x}}^k$  —  $\beta_3 + 1$  — мерный вектор

$$\check{A}^k = \left( \begin{array}{c|c} 0 & E_{\beta_3} \\ \hline -\mathbf{g}^k & \end{array} \right), \quad \check{\mathbf{b}}^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.62)$$

$$\check{\mathbf{g}}^k = [g_0^k \quad g_1^k \quad \dots \quad g_{\beta_3}^k], \quad \check{\mathbf{r}}^k = [r_0^k \quad r_1^k \quad \dots \quad r_{\beta_2}^k].$$

Нетрудно проверить, что передаточные функции  $\frac{u_1(s)}{v(s)}$ , получаемые из (3.4.61) и (3.3.3), совпадают.

Из (3.4.60), (3.4.61) следует выражение, аналогичное (3.3.36)

$$z = \frac{b_z(s)r^k(s)}{[d(s) - \check{c}(s)]g^k(s)}v. \quad (3.4.63)$$

Если  $b_z(s)$  гурвицев полином, а

$$\deg b_z(s) \geq \deg l_m(s), \quad (3.4.64)$$

вектор  $\mathbf{c}$  регулятора и векторы  $\mathbf{g}^k$ ,  $\mathbf{r}^k$  уравнения (3.4.61) определяется из уравнений

$$d(s) - \check{c}(s) = \check{\psi}_m(s), \quad g^k(s) = b_z(s), \quad r^k(s) = l_m(s). \quad (3.4.65)$$

Первое из этих уравнений доставляет вектор  $\check{\mathbf{c}}$ , используя который находим  $\mathbf{c}' = \check{\mathbf{c}}'T$ , из второго следует  $r_i^k = l_i^m$  ( $i = \overline{0, n_l}$ ), из третьего получим  $g_i^k = b_{z,i}$  ( $i = \overline{0, \gamma_z}$ ).

### 3.4.7. Система с эталонной моделью\*

Если задана эталонная модель

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m \mathbf{x}_m + \mathbf{b}_m v, \quad z_m = \mathbf{l}' \mathbf{x}_m, \quad (3.4.66)$$

то управление объектом (3.4.56) будем искать в виде

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{c}'_m \mathbf{x}_m, \quad (3.4.67)$$

где  $\mathbf{x}_m(t)$  —  $n$ -мерный вектор измеряемых переменных состояния эталонной модели,  $A_m$  и  $\mathbf{b}_m$  — заданная матрица и вектор её параметров.

Будем искать векторы  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}'_{\mathcal{M}}$  такие, чтобы разность регулируемых переменных эталонной модели и объекта

$$\varepsilon = z - z_{\mathcal{M}} = 0. \quad (3.4.68)$$

Для решения этой задачи подставим управление (3.4.67) в уравнение объекта (3.4.56) и найдём, учитывая (3.4.44),

$$z = \mathbf{l}'(Es - A - \mathbf{bc}')\mathbf{bc}'_{\mathcal{M}}\mathbf{x}_{\mathcal{M}} = \frac{\mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{bc}'_{\mathcal{M}}}{1 - \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}}\mathbf{x}_{\mathcal{M}}. \quad (3.4.69)$$

С другой стороны, из уравнений эталонной модели следует

$$z_{\mathcal{M}} = \mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}_{\mathcal{M}}v. \quad (3.4.70)$$

Составим разность

$$\varepsilon = z - z_{\mathcal{M}} = \left[ \frac{\mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{bc}'_{\mathcal{M}}}{1 - \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}}(Es - A_{\mathcal{M}})^{-1}\mathbf{b}_{\mathcal{M}} - \mathbf{l}'(Es - A_{\mathcal{M}})^{-1}\mathbf{b}_{\mathcal{M}} \right] v \quad (3.4.71)$$

и найдём условие, когда она равна нулю. Это условие имеет вид

$$\mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{bc}'_{\mathcal{M}}(Es - A_{\mathcal{M}})^{-1}\mathbf{b}_{\mathcal{M}} - [1 - \mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}]\mathbf{l}'(Es - A_{\mathcal{M}})^{-1}\mathbf{b}_{\mathcal{M}} = 0. \quad (3.4.72)$$

Используем преобразование (3.4.9) и аналогичное преобразование эталонной модели

$$T_{\mathcal{M}}A_{\mathcal{M}}T_{\mathcal{M}}^{-1} = \check{A}_{\mathcal{M}}, \quad T_{\mathcal{M}}\mathbf{b}_{\mathcal{M}} = \check{\mathbf{b}}_{\mathcal{M}}, \quad (3.4.73)$$

где  $T_{\mathcal{M}}$  определяется выражением (3.4.10), в котором добавляется индекс «м» при матрицах и векторах, а  $\check{A}_{\mathcal{M}}$  и  $\check{\mathbf{b}}_{\mathcal{M}}$  – матрица и вектор структуры (3.4.6).

Тогда (3.4.72) примет вид

$$\check{\mathbf{l}}'(Es - \check{A})^{-1}\check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{c}}'_{\mathcal{M}}(Es - \check{A}_{\mathcal{M}})^{-1}\check{\mathbf{b}}_{\mathcal{M}} - [1 - \check{\mathbf{c}}'(Es - \check{A})^{-1}\check{\mathbf{b}}]\check{\mathbf{l}}'(Es - \check{A}_{\mathcal{M}})^{-1}\check{\mathbf{b}}_{\mathcal{M}} = 0, \quad (3.4.74)$$

или

$$\check{\mathbf{l}}'(s)\check{\mathbf{c}}_{\mathcal{M}}(s) - [d(s) - \check{\mathbf{c}}(s)]\check{\mathbf{l}}_{\mathcal{M}}(s) = 0, \quad (3.4.75)$$

где

$$\check{\mathbf{l}}'(s) = \check{l}_n s^{n-1} + \dots + \check{l}_2 s + \check{l}_1, \quad \check{\mathbf{c}}_{\mathcal{M}}(s) = \check{c}_{\mathcal{M},n} s^{n-1} + \dots + \check{c}_{\mathcal{M},2} s + \check{c}_{\mathcal{M},1}, \quad (3.4.76)$$

$$\check{\mathbf{l}}_{\mathcal{M}}(s) = \check{l}_{\mathcal{M},n} s^{n-1} + \dots + \check{l}_{\mathcal{M},2} s + \check{l}_{\mathcal{M},1}, \quad (3.4.77)$$

а вектора  $\check{\mathbf{l}}' = [\check{l}_1 \ \check{l}_2 \ \dots \ \check{l}_n]'$ ,  $\check{\mathbf{c}}'_{\mathcal{M}} = [\check{c}_{\mathcal{M},1} \ \check{c}_{\mathcal{M},2} \ \dots \ \check{c}_{\mathcal{M},n}]'$ ,  $\check{\mathbf{l}}_{\mathcal{M}} = [\check{l}_{\mathcal{M},1} \ \check{l}_{\mathcal{M},2} \ \dots \ \check{l}_{\mathcal{M},n}]'$  связаны с исходными векторами соотношениями

$$\mathbf{l}' = \check{\mathbf{l}}'T, \quad \mathbf{c}' = \check{\mathbf{c}}'T, \quad \mathbf{l}'_{\mathcal{M}} = \check{\mathbf{l}}'T_{\mathcal{M}}, \quad \mathbf{c}'_{\mathcal{M}} = \check{\mathbf{c}}'T_{\mathcal{M}}. \quad (3.4.78)$$

Будем полагать, что эталонная модель такова, что

$$\check{l}_{\mathcal{M},n} = 0. \quad (3.4.79)$$



Это означает, что полином в числителе передаточной функции эталонной модели

$$w_m(s) = l'(Es - A_m)^{-1}b_m = \frac{l'(Es - A_m)b_m}{\det(Es - A_m)} \quad (3.4.80)$$

имеет степень

$$\gamma_{n_s} \leq n - 2. \quad (3.4.81)$$

Запишем (3.4.75) в форме модального тождества (3.1.20)

$$l'(s)\check{c}_m(s) - \check{l}_m(s)\check{c}(s) = \delta(s), \quad (3.4.82)$$

где

$$\delta(s) = d(s)\check{l}_m(s). \quad (3.4.83)$$

Выбором параметров эталонной модели всегда можно получить полиномы  $\check{l}(s)$  и  $\check{l}_m(s)$ , не содержащие общего делителя. Тогда существуют многочлены  $\check{c}_m(s)$  и  $\check{c}(s)$ , удовлетворяющие тождеству (3.4.82). Правда, эти полиномы не единственны. Действительно, из тождества (3.4.82) следует система (3.1.9) из  $2n - 1$  уравнений для определения  $2n$  неизвестных составляющих векторов  $\check{c}'$  и  $\check{c}'_m$ .

### 3.4.8. Анализ структурной грубости\*

Пусть задача 3.4.2 решена и получена система

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad z = l'x, \quad (3.4.84)$$

$$u = c'x, \quad (3.4.85)$$

которая при действии внешних возмущений удовлетворяет требованию (3.4.38) к точности.

Наряду с рабочей моделью (3.4.84), (3.4.85) существует уточнённая её модель

$$\dot{x}^{(1)} = A^{(1)}x^{(1)} + A^{(2)}x^{(2)} + b^{(1)}u, \quad (3.4.86)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A^{(3)}x^{(1)} + A^{(4)}x^{(2)} + b^{(2)}u, \quad z = l^{(2)}x^{(1)} + l^{(1)}x^{(2)} + l^{(3)}u, \quad (3.4.87)$$

$$u = c'x^{(2)}, \quad (3.4.88)$$

где  $x^{(1)}(t)$  и  $x^{(2)}(t)$  составляют  $n_{ym}$ -мерный вектор  $x_{ym}(t)$  состояний объекта (3.4.86), (3.4.87),  $x^{(2)}(t)$  —  $n$ -мерный вектор, матрицы  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $A^{(3)}$ ,  $A^{(4)}$ , векторы  $b^{(1)}$ ,  $b^{(2)}$ ,  $l^{(1)}$ ,  $l^{(2)}$  и число  $l^{(3)}$  — заданы.

Рабочая модель получается из уточнённой путём приравнивания производной вектора  $x^{(1)}(t)$  нулю ( $\dot{x}^{(1)}(t) = 0$ ).

Следовательно, матрицы рабочей модели объекта связаны с матрицами уточнённой модели соотношениями

$$\begin{aligned} A &= A^{(4)} - A^{(3)} [A^{(1)}]^{-1} A^{(2)}, & b &= b^{(2)} - A^{(3)} [A^{(1)}]^{-1} b^{(1)}, \\ l' &= l^{(2)'} - l^{(1)'} [A^{(1)}]^{-1} A^{(2)}, & l^{(3)} &= l^{(1)'} [A^{(1)}]^{-1} b^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.4.89)$$

Уравнения (3.4.86) назовём *структурными возмущениями рабочей модели* (3.4.84).

Определение 3.4.1. Рабочая модель (3.4.84), (3.4.85) называется структурно грубой, если структурные возмущения (3.4.86) не нарушают её асимптотической устойчивости. ■

Это определение служит развитием определения 2.2.2 на объекты первого вида.

Для анализа структурной грубости модели (3.4.84), (3.4.85) должны быть заданы матрицы  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $A^{(3)}$ ,  $A^{(4)}$ , векторы  $\mathbf{b}^{(1)}$ ,  $\mathbf{b}^{(2)}$  и  $\mathbf{l}^{(1)}$ ,  $\mathbf{l}^{(2)}$  и число  $l^{(3)}$  уточнённой модели. Если окажется, что уточнённая модель (3.4.86)-(3.4.88) неустойчива, то нужно изменить рабочую модель, используя следующую процедуру, которая является развитием процедуры 3.2.4.

Процедура 3.4.3 (процедура построения структурно-грубого регулятора). Она состоит из операций:

**Операция 1.** Заменить в уравнениях (3.4.86), (3.4.87) размерность вектора  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ , равную  $n$ , на  $n + 1$ . Тогда эти уравнения примут вид

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A_I^{(1)} \mathbf{x}^{(1)} + A_I^{(2)} \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}_I^{(1)} u, \quad \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A_I^{(3)} \mathbf{x}^{(1)} + A_I^{(4)} \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}_I^{(2)} u, \quad (3.4.90)$$

где  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$  –  $n + 1$ -мерный вектор, а  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$  –  $n_{ym} - n - 1$ -мерный вектор.

**Операция 2.** Сформировать рабочую модель объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A_I \mathbf{x} + \mathbf{b}_I u, \quad z = \mathbf{l}'_I \mathbf{x}, \quad (3.4.91)$$

параметры которой определяются по формулам (3.4.89). При этом матрицы и векторы в правых частях этих формул нужно заменить матрицами и векторами модели (3.4.90).

**Операция 3.** Вновь решить задачу 3.4.2 с рабочей моделью (3.4.91) и найти вектор  $\mathbf{c}'_I$  управления

$$u = \mathbf{c}'_I \mathbf{x}. \quad (3.4.92)$$

**Операция 4.** Проанализировать устойчивость уточнённой модели (3.4.84)-(3.4.86), заменив в ней вектор  $\mathbf{c}'$  на вектор  $\mathbf{c}'_I$ . Если эта система неустойчива, то вернуться к операции 1, полагая размерность вектора  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ , равной  $n + 2$  и т.д. ■

## Приложения к главе 3

## 3.П.1. Системы с наблюдателями

## 3.П.1.1. Восстановление (наблюдение) переменных состояния объекта управления

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^{(0)}, \\ y &= \mathbf{d}\mathbf{x}.\end{aligned}\tag{3.П.1}$$

Пусть требуется восстановить  $n$ -мерный вектор его переменных состояния  $\mathbf{x}(t)$  по доступным непосредственному измерению переменным  $y(t)$  и  $u(t)$ .

Простейшее устройство восстановления (наблюдения) описывается уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)},\tag{3.П.2}$$

в котором  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния наблюдателя.

Такое устройство можно использовать лишь для асимптотически устойчивых объектов. Действительно, вычитая (3.П.2) и (3.П.1), получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}^{(0)},\tag{3.П.3}$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  – ошибка восстановления вектора переменных состояния, которая исчезает со временем, если объект асимптотически устойчив.

В связи с этим воспользуемся измеряемой переменной  $y(t)$  и, используя разность  $y(t) - \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}(t)$ , построим наблюдатель

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{k}_y(y - \mathbf{d}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}u,\tag{3.П.4}$$

где  $\mathbf{k}_y$  –  $n$ -мерный вектор чисел, который определяется из условия устойчивости наблюдателя.

Утверждение 3.П.1. Если объект (3.П.1) полностью наблюдаем, то существует вектор  $\mathbf{k}_y$ , при котором матрица  $A - \mathbf{k}_y\mathbf{d}$  имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями. Более того, можно указать процедуру нахождения такого вектора  $\mathbf{k}_y$ , что характеристический полином наблюдателя

$$d^n(s) = \det(Es - A + \mathbf{k}_y\mathbf{d})\tag{3.П.5}$$

имеет наперёд заданные корни  $s_i^n$  ( $i = \overline{1, n}$ ). ■

Доказательство этого утверждения и указанная в нём процедура приведены в 3.Д.5.

Итак, пусть найден вектор  $\mathbf{k}_y$ , при котором наблюдатель

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - \mathbf{k}_y \mathbf{d})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{k}_y y + \mathbf{b}u, \quad (3.П.6)$$

асимптотически устойчив.

Построим уравнение для ошибки  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  восстановления. Вычитая (3.П.4) из (3.П.1), получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - \mathbf{k}_y \mathbf{d})\tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.П.7)$$

По построению  $\mathbf{k}_y$  вектор  $\tilde{\mathbf{x}}$  исчезает при  $t \rightarrow \infty$  и поэтому,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] = 0.$$

Приложим к объекту (3.4.60) управление

$$u = \mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.П.8)$$

Тогда уравнение (4.4.60) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{b}\mathbf{c}')\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.П.9)$$

Из этого уравнения и уравнения (4.4.72) следует, что характеристический полином системы (4.5.1), (4.5.4), (4.5.8) с наблюдателем имеет вид

$$\tilde{d}(s) = d^u(s)d^n(s). \quad (3.П.10)$$

Из этого выражения следует, что, если задан полином

$$\psi^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*) \prod_{j=1}^n (s - s_j^n), \quad (3.П.11)$$

то вектора  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{k}_y$  можно находить независимо друг от друга, определяя вектор  $\mathbf{c}'$  с помощью процедуры 3.4.2, а вектор  $\mathbf{k}_y$  – на основе процедуры 3.Д.1.

### 3.П.1.2. Следящая система с наблюдателем

Она описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}; \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - \mathbf{k}_y \mathbf{d})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{k}_y y + \mathbf{b}u; \quad (3.П.12)$$

$$u = \mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} + kv. \quad (3.П.13)$$

Найдём связь измеряемой переменной с задающим воздействием. Исключая переменную  $u$ , получим

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{b}\mathbf{c}')\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}kv, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (3.П.14)$$

Кроме того, перепишем (3.П.7)

$$\dot{\tilde{x}} = (A - k_y d)\tilde{x}. \quad (3.П.15)$$

Используя блочные матрицы, запишем эти уравнения как

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + bc' & -bc' \\ 0 & A - k_y d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bk \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v, \quad y = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}. \quad (3.П.16)$$

Отсюда

$$y = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Es - A - bc' & bc' \\ 0 & Es - A + k_y d \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} bk \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v = d[Es - A - bc']^{-1}bkv. \quad (3.П.17)$$

Последнее равенство нетрудно получить, если использовать выражение (2.1.36) обратной матрицы для специфической блочной матрицы (3.П.17). Это соотношение не зависит от наблюдателя. Это объясняется тем, что в системе (3.П.14), (3.П.15) вектор  $\tilde{x}$  не зависит от  $v$  ( $\tilde{x}$  полностью неуправляем переменной  $v$ ), и поэтому при выводе (3.П.17) произошло сокращение полинома  $d^n(s)$ .

В действительности связь (3.П.17) имеет вид

$$y = d[Es - A - bc']^{-1}bk \frac{d^n(s)}{d^n(s)} v. \quad (3.П.18)$$

Это следует из выражения (3.П.10) для характеристического полинома системы с наблюдателем.

Структура полученной связи позволяет использовать при построении регулятора для объекта с одной измеряемой переменной процедуру п. 3.4.5, в которой все переменные состояния объекта измеряются. При этом полагаем  $y = z$  ( $l' = d$ ).

### 3.П.1.3. Наблюдатель пониженного порядка

Интуитивно ясно, что размерность  $n$  вектора состояний наблюдателя (3.П.4) может быть уменьшена на число измеряемых переменных. Такой наблюдатель называется наблюдателем пониженного порядка (редуцированным наблюдателем). Он описывается уравнениями

$$\hat{x} = \tilde{s}y + \tilde{\Phi}x_p, \quad (3.П.19)$$

$$\dot{x}_p = \Theta x_p + \tilde{f}y + \tilde{T}bu, \quad (3.П.20)$$

где  $x_p(t)$  –  $n - 1$ -мерный вектор состояния наблюдателя,  $\hat{x}(t)$  –  $n$ -мерный вектор выхода наблюдателя,  $\tilde{s}$  и  $\tilde{f}$  –  $n$ - и  $n - 1$ -мерные вектора чисел соответственно,  $\Theta$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{\Phi}$  – матрицы чисел размеров  $(n - 1) \times (n - 1)$ ,  $(n - 1) \times n$  и  $n \times n$  соответственно.

Вектор  $\tilde{s}$  и матрица  $\Phi$  определяются из уравнения

$$\tilde{s}d + \Phi\tilde{T} = E_n, \quad (3.П.21)$$

в котором матрица  $\tilde{T}$  является решением уравнения

$$\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}' = \tilde{f}d, \quad (3.П.22)$$

где  $\tilde{f}$  – произвольный вектор, а  $\Theta$  – произвольная матрица, собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части.

Пример 3.П.1. Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1u, \quad \dot{x}_2 = b_2u. \quad (3.П.23)$$

Пусть непосредственному измерению доступна переменная  $y = x_1$ .

Требуется построить наблюдатель пониженного порядка для восстановления переменной  $x_2$ .

В соответствии с (3.П.19), (3.П.20) искомый наблюдатель описывается уравнениями

$$\hat{x}_1 = \tilde{s}_1y + \varphi_{11}x_{p1}, \quad \hat{x}_2 = \tilde{s}_2y + \varphi_{21}x_{p1}, \quad (3.П.24)$$

$$\dot{x}_{p1} = \theta_{11}x_{p1} + \tilde{f}_1y + (\tilde{t}_1b_1 + \tilde{t}_2b_2)u, \quad (3.П.25)$$

параметры которых находятся из матричных уравнений (3.П.21), (3.П.22). Эти уравнения имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \theta_{11} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 \end{bmatrix} &= \tilde{f}_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений

$$\tilde{s}_1 = 1, \quad \tilde{s}_2 = -\frac{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}, \quad \varphi_{11} = 0, \quad \varphi_{21} = \frac{1}{\tilde{t}_2}, \quad \tilde{t}_1 = -\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}}, \quad \tilde{t}_2 = -\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}^2}. \quad (3.П.26)$$

Таким образом, наблюдатель (3.П.24), (3.П.25) имеет вид

$$\hat{x}_1 = y_1, \quad \hat{x}_2 = -\theta_{11}y - \frac{\theta_{11}^2}{\tilde{f}_1}x_{p1}, \quad (3.П.27)$$

$$\dot{x}_{p1} = \theta_{11}x_{p1} + \tilde{f}_1y + \left( -\frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}}b_1 - \frac{\tilde{f}_1}{\theta_{11}^2}b_2 \right)u. \quad (3.П.28)$$

■

### 3.П.1.4. Передаточная функция разомкнутой системы с наблюдателем

Рассмотрим следящую систему с наблюдателем пониженного порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}; \quad (3.П.29)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{s}}y + \Phi\mathbf{x}_p, \quad \dot{\mathbf{x}}_p = \Theta\mathbf{x}_p + \tilde{\mathbf{f}}y + \tilde{T}\mathbf{b}u; \quad (3.П.30)$$

$$u = \mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} + kv. \quad (3.П.31)$$

Преобразуем её по Лапласу при нулевых начальных условиях. Очевидно, что

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{s}}y + \Phi\mathbf{x}_p = \tilde{\mathbf{s}}y + \Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}y + \Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}\mathbf{b}u. \quad (3.П.32)$$

Тогда

$$u = \mathbf{c}'\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}'\tilde{\mathbf{s}}y + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}y + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}\mathbf{b}u.$$

Отсюда при  $k = 0$  получаем уравнение регулятора

$$\left[1 + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}\mathbf{b}\right]u = \left[\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}\right]y. \quad (3.П.33)$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$w_{pas}(s) = - \left[1 + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}\mathbf{b}\right]^{-1} \left[\mathbf{c}'\tilde{\mathbf{s}} + \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}\right] \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.П.34)$$

Преобразуем это выражение. Используя (3.П.22), запишем

$$(Es - \Theta)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}\mathbf{d}(Es - A)^{-1} = (Es - \Theta)^{-1}[\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}](Es - A)^{-1}.$$

Используем тождества

$$A(Es - A)^{-1} = (Es - A)^{-1}s - E, \quad (Es - \Theta)^{-1}\Theta = (Es - \Theta)^{-1}s - E, \quad (3.П.35)$$

которые нетрудно доказать, умножая их справа на  $(Es - A)$  и  $(Es - \Theta)$  соответственно.

Тогда

$$\begin{aligned} (Es - \Theta)^{-1}[\tilde{T}A - \Theta\tilde{T}](Es - A)^{-1} &= (Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}A(Es - A)^{-1} - \\ &- (Es - \Theta)^{-1}\Theta\tilde{T}(Es - A)^{-1} = \tilde{T}(Es - A)^{-1} - (Es - \Theta)^{-1}\tilde{T}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.П.34), получим с учётом (3.П.21)

$$w_{pas}(s) = \frac{-\mathbf{c}'(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}d^n(s) + \mathbf{c}'\Phi(\widetilde{Es - \Theta})\tilde{T}\mathbf{b}d(s)}{d(s)d^n(s) - \mathbf{c}'\Phi(\widetilde{Es - \Theta})\tilde{T}\mathbf{b}d(s)}, \quad (3.П.36)$$

где  $(\widetilde{Es - A}) = (Es - A)^{-1}d(s)$ ,  $(\widetilde{Es - \Theta}) = (Es - \Theta)^{-1}d^n(s)$ .

### 3.П.1.5. О негрубости систем с наблюдателями

Введём в рассмотрение полином

$$\rho(s) = \mathbf{c}'\Phi(\widetilde{Es - \Theta})\tilde{T}\mathbf{b}d(s). \quad (3.П.37)$$

Тогда передаточная функция (3.П.36) примет вид

$$w_{раз}(s) = \frac{-\mathbf{c}'(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}d^n(s) + \rho(s)}{d(s)d^n(s) - \rho(s)} = \frac{k(s)}{d^c(s)}. \quad (3.П.38)$$

Характеристический полином системы с наблюдателем пониженного порядка

$$\tilde{d}^u(s) = d^c(s) + k(s) = [d(s) - \mathbf{c}'(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}]d^n(s) = d^u(s)d^n(s) \quad (3.П.39)$$

совпадает с (3.П.10).

Заметим, что при построении полинома (3.П.39) произошло взаимное уничтожение полиномов  $\rho(s)$  в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой системы. Если хотя бы один из коэффициентов этого полинома существенно превышает коэффициенты при соответствующей степени полиномов  $d^u(s)d^n(s)$  и  $\mathbf{c}'(\widetilde{Es - A})\mathbf{b}$ , то имеет место неполная аддитивная компенсация, рассмотренная в 1.П.2. Частотные свойства систем с неполной аддитивной компенсацией исследованы и показано, что такие системы могут обладать малой степенью грубости (малыми запасами устойчивости по фазе и модулю).

Пример 3.П.2. Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1u, \quad \dot{x}_2 = b_2u, \quad u = c_1x_1 + c_2x_2, \quad (3.П.40)$$

с параметрами

$$b_1 = -10, \quad b_2 = 1; \quad c_1 = -10, \quad c_2 = -200. \quad (3.П.41)$$

Пусть реализация закона управления в этой системе затруднена тем, что переменная  $x_2$  не измеряется, а измеряется переменная

$$y = x_1. \quad (3.П.42)$$

Для восстановления переменной состояния  $x_2$  используем наблюдатель (3.П.27), (3.П.28) и сформируем

$$u = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2. \quad (3.П.43)$$

Определяем запасы устойчивости построенной системы (3.П.23), (3.П.42), (3.П.43), (3.П.27), (3.П.28).

Найдём вначале уравнение регулятора. Для этого исключим из (3.П.43) переменную  $\hat{x}_2$  с помощью (3.П.27), (3.П.28). Получим

$$\dot{u} - (\theta_{11} + c_2\theta_1b_1 + c_2b_2)u = -c_1\theta_1 + y + (c_1 - c_2\theta_{11})\dot{y}. \quad (3.П.44)$$



Передаточная функция объекта (3.П.23), (3.П.42) имеет вид

$$w(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2},$$

и, таким образом, передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$\begin{aligned} w_{paz}(s) &= -\frac{[(c_1 - c_2 \theta_{11})s - c_1 \theta_{11}](b_1 s + b_2)}{s^2(s - \theta_{11} - c_2 \theta_{11} b_1 + c_2 b_2)} = \\ &= -\frac{[(c_1 b_1 + c_2 b_2)s + c_1 b_2](s - \theta_{11}) + (c_2 \theta_{11} b_1 + c_2 b_2)s^2}{s^2(s - \theta_{11}) - (c_2 \theta_{11} b_1 + c_2 b_2)s^2}. \end{aligned} \quad (3.П.45)$$

При  $\theta_{11} = -20$  и численных значениях параметров (3.П.41) получим

$$w_{paz}(s) = \frac{(100s + 10)(s - 20) - 402 \cdot 10^2 s^2}{s^3 + 20s^2 + 402 \cdot 10^2 s^2} \approx \frac{(20s + 1)(-10s + 1)}{200s^2 \left( \frac{1}{4 \cdot 10^4} s + 1 \right)}.$$

При  $\omega = j1.56$  находим  $\operatorname{Re} w_{paz}(j\omega) = -0.999$ ,  $\operatorname{Im} w_{paz}(j\omega) = -0.32 \cdot 10^{-1}$  и, следовательно, запас устойчивости по фазе  $\varphi_3 = 2^\circ$ .

Заметим, что исходная система (3.П.40) без наблюдателя имеет передаточную функцию

$$w_{paz}(s) = -\frac{(c_1 b_1 + c_2 b_2)s + c_1 b_2}{s^2} = \frac{100s + 10}{s^2}. \quad (3.П.46)$$

Запасы устойчивости, полученные на её основе  $\varphi_3 \approx 90^\circ$ ,  $L \rightarrow \infty$ , что свидетельствует о грубости системы без наблюдателя. Введение наблюдателя приводит к существенному снижению запасов устойчивости. В рассмотренном примере коэффициент при  $s^2 b$  в полиноме  $\rho(s) = 402 \cdot 10^2 s^2$  значительно превышает коэффициент при  $s^2$  в полиномах  $d(s)d^n(s) = s^2(s + 20)$  и  $\mathbf{c}'(E\mathbf{s} - A)\mathbf{b}d^n(s) = (100s + 10)(s + 20)$ .

■

### 3.П.1.6. Описание компенсационной схемы в пространстве состояний

Система, представленная на рис. 3.3.2, описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}; \quad (3.П.47)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p^{(1)} = \check{A}_p^{(1)}\mathbf{x}_p^{(1)} + \check{\mathbf{b}}y, \quad \dot{\mathbf{x}}_p^{(2)} = \check{A}_p^{(2)}\mathbf{x}_p^{(2)} + \check{\mathbf{b}}u; \quad (3.П.48)$$

$$u = \check{\mathbf{h}}^{(1)}\mathbf{x}_p^{(1)} + \check{\mathbf{h}}^{(2)}\mathbf{x}_p^{(2)} + kv, \quad (3.П.49)$$

где

$$\check{\mathbf{h}}^{(1)} = \left[ \check{h}_0^{(1)} \quad \check{h}_1^{(1)} \quad \dots \quad \check{h}_{n-2}^{(1)} \right], \quad \check{\mathbf{h}}^{(2)} = \left[ \check{h}_0^{(2)} \quad \check{h}_1^{(2)} \quad \dots \quad \check{h}_{n-2}^{(2)} \right], \quad (3.П.50)$$

$$\check{A}_p^{(1)} = \check{A}_p^{(2)} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & E_{n-2} \\ \hline & -\mathbf{q} \end{array} \right), \quad \check{\mathbf{b}} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right], \quad \check{\mathbf{q}} = \left[ q_0 \quad q_1 \quad \dots \quad q_{n-2} \right]. \quad (3.П.51)$$

При структуре управления (3.П.49) полиномы  $\mathbf{h}^{(1)}(s)$  и  $\mathbf{h}^{(2)}(s)$  на схеме рис. 3.3.2 имеют степень  $n - 2$ . Эта степень повышается до  $n - 1$  при

$$u = f_p^{(1)}y + \tilde{\mathbf{h}}^{(1)} \mathbf{x}_p^{(1)} + f_p^{(2)}u + \tilde{\mathbf{h}}^{(2)} \mathbf{x}_p^{(2)} + kv. \quad (3.П.52)$$

В этом случае

$$\mathbf{h}^{(1)}(s) = f_p^{(1)}\mathbf{q}(s) + \tilde{\mathbf{h}}^{(1)}(s), \quad \mathbf{h}^{(2)}(s) = f_p^{(2)}\mathbf{q}(s) + \tilde{\mathbf{h}}^{(2)}(s). \quad (3.П.53)$$

Объект (3.П.47) имеет передаточную функцию

$$w(s) = \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = \frac{b(s)}{d(s)}. \quad (3.П.54)$$

**Первый вариант** компенсационной схемы описывается в пространстве состояний управлением (3.П.49). Вектора  $\tilde{\mathbf{h}}^{(1)}$  и  $\tilde{\mathbf{h}}^{(2)}$  определяются из тождества (3.3.57), а параметр  $k = k_1$ . Вектор  $\mathbf{q}$  в (3.П.51) – произвольный вектор, при котором собственные числа матрицы  $\check{A}_p^{(1)}$  имеют отрицательные вещественные части (матрица – устойчивая).

Во **втором варианте** компенсационной схемы вектор

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} l_0^m & l_1^m & \dots & l_{n-2}^m \end{pmatrix}. \quad (3.П.55)$$

Это следует из (3.3.60). Управление описывается суммой (3.П.52) при  $f_p^{(2)} = 0$ , а  $\mathbf{h}^{(1)}(s)$  и  $\mathbf{h}^{(2)}(s)$  находятся из (3.3.62).

**Пример 3.П.3.** Опишем в пространстве состояний регулятор, полученный в примере 3.3.2. Система с таким регулятором приведена на рис. 3.П.1. ■

### 3.П.1.7. Компенсационные схемы и системы с наблюдателями

Покажем, что компенсационные схемы являются формой представления систем с наблюдателями.

Действительно, выражение (3.П.32) можно записать как

$$u = f_p^{(1)}y + \frac{b^{(1)}(s)}{b^n(s)}y + \frac{b^{(2)}(s)}{b^n(s)}u + kv. \quad (3.П.56)$$

где  $f_p^{(1)} = \mathbf{c}'\tilde{\mathbf{s}}$ ,  $b^{(1)}(s) = \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)\tilde{\mathbf{f}} = b_{n-2}^{(1)}s^{n-2} + \dots + b_1^{(1)}s + b_0^{(1)}$ ,  
 $b^{(2)}(s) = \mathbf{c}'\Phi(Es - \Theta)\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{b} = b_{n-2}^{(2)}s^{n-2} + \dots + b_1^{(2)}s + b_0^{(2)}$ ,  
 $d^n(s) = \det(Es - \Theta) = s^{n-1} + d_{n-2}^n s^{n-2} + \dots + d_1^n s + d_0^n$ .

Полагая

$$b_i^{(1)} = \tilde{h}_i^{(1)}(i = \overline{0, n-2}), \quad b_j^{(2)} = \tilde{h}_j^{(2)}(j = \overline{0, n-2}), \quad d_k^n = q_k(k = \overline{0, n-2}), \quad (3.П.57)$$

получим вместо уравнений (3.П.30), (3.П.31) уравнения (3.П.48), (3.П.52) при  $f_p^{(2)} = 0$ .



Утверждение 3.П.2. Решение неоднородного уравнения (3.П.58) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \eta(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3.П.61)$$

где импульсная переходная функция  $\eta(t)$  является решением однородного уравнения

$$\eta^{(n)} + \tilde{\psi}_{n-1} \eta^{(n-1)} + \dots + \tilde{\psi}_1 \dot{\eta} + \tilde{\psi}_0 \eta = 0 \quad (3.П.62)$$

при начальных условиях

$$\eta^{(n-1)}(0) = 1, \quad \eta^{(n-2)}(0) = \dots = \dot{\eta}(0) = \eta(0) = 0. \quad (3.П.63)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.6.

Зафиксируем  $t = T$  и найдём ограниченную функцию  $f(t)$ , при которой

$$y(T) = \int_0^T \eta(T - \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.П.64)$$

достигает максимального значения  $y_{\max}(T)$ . Эта задача называется *задачей о накоплении возмущений*.

Очевидно, что искомая функция имеет вид

$$f(t) = f^* \operatorname{sign} \eta(T - t) \quad (3.П.65)$$

( $\operatorname{sign} a = 1$ , при  $a > 0$  и  $\operatorname{sign} a = -1$ , при  $a < 0$ ).

Выражение (3.П.65) является *наиболее благоприятным внешним возмущением* на интервале  $[0, T]$ .

Подставляя его в (3.П.64), находим

$$y_{\max}(T) = f^* \int_0^T |\eta(T - \tau)| d\tau = f^* \int_0^T |\eta(\tau)| d\tau \leq f^* \int_0^\infty |\eta(\tau)| d\tau. \quad (3.П.66)$$

Таким образом, задача 3.П.1 состоит в определении таких коэффициентов  $\tilde{\psi}_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) уравнения (3.П.58), чтобы выполнялось равенство

$$y_{\max}(\infty) < y^*. \quad (3.П.67)$$

### 3.П.2.2. Выбор корней характеристического полинома

Пусть уравнение (3.П.58) имеет характеристический полином

$$\tilde{\psi}(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i), \quad (3.П.68)$$

где  $s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – вещественные, отрицательные и различные числа.

Импульсная функция имеет в этом случае вид

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t}, \quad (3.П.69)$$

где вещественные константы  $c_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) подобраны так, чтобы выполнялись условия (3.П.63).

Утверждение 3.П.3. (Первое утверждение Н.Г. Чеботарёва). Функция (3.П.70), удовлетворяющая условиям (3.П.63), не обращается в нуль при  $t \neq 0$ . ■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.7.

В соответствии с утверждением рассматриваемая функция не изменяет знак на интервале  $[0, \infty]$ , и поэтому с точностью до этого знака

$$\eta(t) = |\eta(t)|. \quad (3.П.70)$$

Отсюда следует

$$y_{\max}(\infty) = f^* \int_0^{\infty} |\eta(\tau)| d\tau = f^* \int_0^{\infty} \eta(\tau) d\tau = f^* \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i \tau} d\tau = -f^* \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i}. \quad (3.П.71)$$

Утверждение 3.П.4. (Второе утверждение Н.Г. Чеботарёва). Если корни характеристического полинома уравнения (3.П.68) вещественны, отрицательны и различны, то при наиболее неблагоприятном внешнем возмущении

$$y_{\max}(\infty) = \frac{f^*}{\tilde{\psi}_0}. \quad (3.П.72)$$

Доказательство утверждения сводится к доказательству выражения

$$-\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i} = \frac{1}{\tilde{\psi}_0} \quad (3.П.73)$$

и приведено в 3.Д.8.

Из (3.П.72) следует, что для выполнения требования (3.П.60) к точности при произвольном ограниченном внешнем возмущении достаточно построить полином  $\tilde{\psi}(s)$  с вещественными отрицательными и различными корнями, на которые положено лишь одно ограничение

$$\prod_{i=1}^n |s_i| \geq \frac{f^*}{y^*}. \quad (3.П.74)$$

### 3.П.2.3. Оценка максимального отклонения

Рассмотрим теперь общий случай, когда уравнение качества имеет вид (3.2.13)

$$y^{(n)} + \tilde{\psi}_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \tilde{\psi}_1\dot{y} + \tilde{\psi}_0y = m_\alpha f^{(\alpha)} + \dots + m_1\dot{f} + m_0f, \quad (3.П.75)$$

где  $m_i$  ( $i = \overline{0, \alpha}$ ) – заданное число.

Решение этого уравнения при нулевых начальных условиях имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^{\alpha} m_i \eta^{(i)}(t - \tau) \right] f(\tau) d\tau, \quad (3.П.76)$$

где  $\eta^{(i)}(t - \tau) = \frac{d^i}{d\tau^i} \eta(t - \tau)$ .

Отсюда следует выражение наиболее неблагоприятного внешнего возмущения

$$f(t) = f^* \operatorname{sign} \left[ \sum_{i=0}^{\alpha} m_i \eta^{(i)}(T - t) \right]. \quad (3.П.77)$$

Максимальное отклонение

$$\begin{aligned} y_{\max}(T) &= f^* \int_0^T \left| \sum_{i=0}^{\alpha} m_i \eta^{(i)}(T - \tau) \right| d\tau \leq \\ &\leq f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| \int_0^T \left| \eta^{(i)}(T - \tau) \right| d\tau = f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| \int_0^T \left| \eta^{(i)}(\tau) \right| d\tau. \end{aligned} \quad (3.П.78)$$

Вводя обозначения интегралов модулей производных импульсных функций

$$J_i = \int_0^{\infty} \left| \eta^{(i)}(\tau) \right| d\tau \quad (i = \overline{0, \alpha}),$$

запишем, что

$$|y_{\max}(\infty)| \leq f^* \sum_{i=0}^{\alpha} |m_i| J_i. \quad (3.П.79)$$

Корни полинома  $\tilde{\psi}(s)$  примем, как и ранее, вещественными и различными. При этом пронумеруем их так, чтобы выполнялись неравенства

$$|s_1| < |s_2| < \dots < |s_n|. \quad (3.П.80)$$

Утверждение 3.П.5. Интегралы модулей производных импульсных функций удовлетворяют неравенствам

$$J_i = \int_0^{\infty} \left| \eta^{(i)}(\tau) \right| d\tau \leq 2^i \frac{|s_1 s_2 \dots s_i|}{\tilde{\psi}_0} \quad i = \overline{0, \alpha}, \quad (3.П.81)$$

из которых следуют оценки максимального отклонения

$$|y_{\max}(\infty)| \leq f^* \left[ \frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0} + 2 \frac{|m_1 s_1|}{\tilde{\psi}_0} + \dots + 2^\alpha \frac{|m_\alpha s_1 \dots s_\alpha|}{\tilde{\psi}_0} \right]. \quad (3.П.82)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 3.Д.8.

Если учесть, что  $\tilde{\psi}_0 = \prod_{i=1}^n |s_i|$ , то неравенство (3.П.82) можно записать в более конструктивной форме

$$|y_{\max}(\infty)| \leq f^* \left[ 2^\alpha \frac{|m_\alpha|}{\prod_{i=\alpha+1}^n |s_i|} + \dots + 2^2 \frac{|m_2|}{\prod_{i=3}^n |s_i|} + 2 \frac{|m_1|}{\prod_{i=2}^n |s_i|} + \frac{|m_0|}{\prod_{i=1}^n |s_i|} \right] =$$

$$= f^* \frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0} \left[ 2^\alpha \frac{|m_\alpha|}{|m_0|} |s_1 \dots s_\alpha| + \dots + 2^2 \frac{|m_2|}{|m_0|} |s_1 s_2| + 2 \frac{|m_1|}{|m_0|} |s_1| + 1 \right]. \quad (3.П.83)$$

Примем

$$|s_1| < \frac{1}{2} \frac{|m_0|}{|m_1|}, \quad |s_1 s_2| < \frac{1}{2^2} \frac{|m_0|}{|m_2|}, \quad \dots, \quad |s_1 \dots s_\alpha| < \frac{1}{2^\alpha} \frac{|m_0|}{|m_\alpha|}, \quad (3.П.84)$$

тогда

$$y_{\max}(\infty) \leq \alpha f^* \frac{|m_0|}{\tilde{\psi}_0}. \quad (3.П.85)$$

Представляя

$$\tilde{\psi}_0 = \prod_{i=1}^{\alpha} |s_i| \prod_{j=\alpha+1}^n |s_j|$$

определим корни  $s_{\alpha+1}, \dots, s_n$  из условия

$$\prod_{j=\alpha+1}^n |s_j| \geq \alpha \frac{f^* |m_0|}{y^* \prod_{i=1}^{\alpha} |s_i|}. \quad (3.П.86)$$

Совокупность неравенств (3.П.84), (3.П.86) обеспечивает выполнение требования (3.П.60) к точности.

Пример 3.П.4 Определить коэффициенты  $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  уравнением качества

$$\ddot{y} + \tilde{\varphi}_2 \dot{y} + \tilde{\varphi}_1 \dot{y} + \tilde{\varphi}_0 y = 0.8 \dot{f} - 0.15 f, \quad (3.П.87)$$

такие, чтобы при

$$|f(t)| \leq 0.1 \quad (3.П.88)$$

максимальное отклонение

$$|y_{\max}(\infty)| \leq 1.1. \quad (3.П.89)$$

Переходя к решению этой задачи, определим из (3.П.84)

$$|s_1| \leq \frac{1}{2} \frac{|m_0|}{|m_1|} = \frac{1}{2} \frac{|-0.15|}{0.8} = 0.094. \quad (3.П.90)$$

Примем

$$|s_1| \leq 0.09.$$

На основе (3.П.86) получим

$$|s_2||s_3| \geq \alpha \frac{f^*|m_0|}{y^*|s_1|} = 2 \frac{0.1 \cdot |-0.15|}{1.1 \cdot 0.09} = 0.3.$$

Примем

$$|s_2| = 0.4, \quad |s_3| = 0.76. \quad (3.П.91)$$

Искомые коэффициенты

$$\tilde{\varphi}_2 = |s_1 + s_2 + s_3| = 1.25, \quad \tilde{\varphi}_1 = |s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1| = 0.4084, \quad \tilde{\varphi}_0 = |s_1s_2s_3| = 0.0273,$$

и, таким образом, уравнение качества имеет вид

$$\ddot{y} + 1.25\dot{y} + 0.4084y + 0.0273y = 0.8\dot{f} - 0.15f. \quad (3.П.92)$$

Для этого уравнения было определено наиболее неблагоприятное внешнее возмущение (3.П.65). В результате решения уравнения (3.П.92) при таком внешнем воздействии получено

$$|y_{\max}(\infty)| = 0.52. \quad (3.П.93)$$

■

### Доказательства к главе 3

## 3.Д. Доказательства теорем и утверждений

### 3.Д.1. Доказательство теоремы 3.1.1

а) **Алгоритм Эвклида.** Обозначим  $d(s) = d_0(s)$ , а  $b(s) = d_1(s)$ . Пусть  $q_1(s)$  – частное, а  $d_2(s)$  – остаток деления  $d_0(s)$  на  $d_1(s)$ , т.е.

$$d_0(s) = d_1(s)q_1(s) + d_2(s), \quad (3.Д.1)$$

где  $\deg d_2(s) < \deg d_1(s)$ .

Разделим  $d_1(s)$  на  $\deg d_2(s)$ :

$$d_1(s) = d_2(s)q_2(s) + d_3(s) \quad [\deg d_3(s) < \deg d_2(s)]. \quad (3.Д.2)$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\begin{array}{l} d_2(s) = d_3(s)q_3(s) + d_4(s) \quad [\deg d_4(s) < \deg d_3(s)] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ d_{\alpha-3}(s) = d_{\alpha-2}(s)q_{\alpha-2}(s) + d_{\alpha-1}(s) \quad [\deg d_{\alpha-1}(s) < \deg d_{\alpha-2}(s)] \\ d_{\alpha-2}(s) = d_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-1}(s) + d_{\alpha}(s) \quad [\deg d_{\alpha}(s) < \deg d_{\alpha-1}(s)] \\ d_{\alpha-1}(s) = d_{\alpha}(s)q_{\alpha}(s) + d_{\alpha+1}(s) \quad [\deg d_{\alpha+1}(s) < \deg d_{\alpha}(s)] \\ d_{\alpha+1}(s) = 0, \end{array} \quad (3.Д.3)$$



где  $d_{\alpha+1}(s)$  – первый многочлен, тождественно равный нулю. Поскольку  $\deg d_0(s) > \deg d_1(s) > \deg d_2(s) > \dots > \deg d_{n+1}(s)$ , этот процесс завершится за конечное число шагов. Этот процесс последовательного деления полиномов называется *алгоритмом Эвклида*.

Покажем, что многочлены  $q_1(s)$  и  $d_2(s)$  в (3.Д.1) определяются однозначно. Пусть существуют ещё многочлены  $\bar{q}_1(s)$  и  $\bar{d}_2(s)$ , удовлетворяющие равенству

$$d_0(s) = d_1(s)\bar{q}_1(s) + \bar{d}_2(s) \quad [\deg \bar{d}_2(s) < \deg d_1(s)]. \quad (3.Д.4)$$

Приравнивая правые части равенств (3.Д.1) и (3.Д.4), получим

$$d_1(s)[q_1(s) - \bar{q}_1(s)] = \bar{d}_2(s) - d_2(s).$$

Степень правой части этого равенства меньше степени  $d_1(s)$ , степень же левой части была бы при  $q_1(s) - \bar{q}_1(s)$  больше или равна степени  $d_1(s)$ . Поэтому должно быть  $q_1(s) - \bar{q}_1(s) = 0$ , а тогда и  $\bar{d}_2(s) = d_2(s)$ . Аналогично доказывается однозначность последующих полиномов в алгоритме Эвклида.

Пример 3.Д.1. Опишем последовательное деление для полиномов примера 3.1.1, в котором

$$d_0(s) = s^2 - 16, \quad d_1(s) = 5s + 30.$$

**Первый шаг деления:**

$$s^2 - 16 = (5s + 30)\frac{1}{5}s - 6s - 16.$$

Таким образом

$$q_1(s) = \frac{1}{5}s, \quad d_2(s) = -6s - 16.$$

**Второй шаг:**

$$5s + 30 = (-6s - 16)\frac{-5}{6} + 30 + \frac{5 \cdot 16}{6},$$

и, следовательно,

$$q_2(s) = -\frac{5}{6}, \quad d_3(s) = \frac{260}{6}.$$

**Третий шаг:**

$$-6s - 16 = \left(\frac{260}{6}\right)\left(-\frac{36}{260}s\right) - 16.$$

Нетрудно видеть, что

$$q_3(s) = -\frac{36}{260}s, \quad d_4(s) = -16.$$

**Четвертый шаг:**

$$\frac{260}{6} = (-16)\left(-\frac{6 \cdot 16}{260}\right) + 0,$$

и, следовательно,

$$q_4(s) = -\frac{96}{260}, \quad d_5(s) = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае процесс последовательного деления закончился на пятом шаге ( $\alpha = 4$ ). ■

**б)** Покажем, что  $d_\alpha(s)$  является наибольшим общим делителем полиномов  $d(s)$  и  $b(s)$ .

Полином  $d_{\alpha-1}(s)$  делится на  $d_\alpha(s)$ , так как  $d_{\alpha+1}(s) = 0$ , и поэтому  $d_\alpha(s)$  является наибольшим общим делителем полиномов  $d_\alpha(s)$  и  $d_{\alpha-1}(s)$ . Из (3.Д.3) получим

$$d_{\alpha-2}(s) = d_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-1}(s) + d_\alpha(s) = d_\alpha(s)q_\alpha(s)q_{\alpha-1}(s) + d_\alpha(s) = d_\alpha(s)[q_\alpha(s)q_{\alpha-1}(s) + 1], \quad (3.Д.5)$$

и, следовательно,  $d_\alpha(s)$  является делителем полиномов  $d_{\alpha-1}(s)$  и  $d_{\alpha-2}(s)$ . Притом их наибольшим делителем.

Для того, чтобы убедиться в последнем предположим, что это не так и существует наибольший общий делитель  $v(s) \neq d_\alpha(s)$  такой, что

$$d_{\alpha-2}(s) = d_{\alpha-1}(s)v(s).$$

Тогда из (3.Д.3) получим  $d_\alpha(s) = 0$ , что противоречит предположению, что алгоритм Эвклида заканчивается при  $d_{\alpha+1}(s) = 0$ .

Повторяя эти рассуждения, заключаем, что  $d_\alpha(s)$  является наибольшим общим делителем полиномов  $d_0(s)$  и  $d_1(s)$ .

**в)** Так как  $d_\alpha(s)$  является делителем полиномов  $d(s)$  и  $b(s)$ , то соотношение (3.1.20) можно переписать в виде

$$d(s)g(s) - b(s)r(s) = [\bar{d}(s)g(s) - \bar{b}(s)r(s)] d_\alpha(s) = \delta(s). \quad (3.Д.6)$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решения, если  $d_\alpha(s)$  не является делителем  $\delta(s)$ .

**г)** Найдём, используя алгоритм Эвклида, полиномы  $g^{(\delta)}(s)$  и  $r^{(\delta)}(s)$ , удовлетворяющие уравнению (3.1.20) при произвольном полиноме  $\delta(s)$ .

Если  $d_\alpha(s)$  является делителем  $\delta(s)$ , то обе части (3.1.20) можно разделить на  $d_\alpha(s)$ , и получим уравнение, в котором  $\bar{d}(s)$  и  $\bar{b}(s)$  не будут иметь общих делителей. В этом случае алгоритм Эвклида даёт общий делитель  $d_\alpha(s) = 1$ .

Тогда на основе (3.Д.3) запишем

$$1 = d_\alpha(s) = d_{\alpha-2}(s) - q_{\alpha-1}(s) + d_{\alpha-1}(s).$$

Из уравнения, предшествующего приведённому, следует

$$d_{\alpha-1}(s) = d_{\alpha-3}(s) - q_{\alpha-2}(s)d_{\alpha-2}(s).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 &= d_{\alpha-2}(s) - q_{\alpha-1}(s)d_{\alpha-1}(s) = \\ &= d_{\alpha-2}(s) - q_{\alpha-1}(s)[d_{\alpha-3}(s) - q_{\alpha-2}(s)d_{\alpha-2}(s)] = \\ &= -q_{\alpha-1}(s)d_{\alpha-3}(s) + [1 + q_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-2}(s)]d_{\alpha-2}(s) = \\ &= d_{\alpha-2}(s)q^{(\alpha-3)}(s) - d_{\alpha-3}(s)r^{(\alpha-3)}(s), \end{aligned}$$

где

$$q^{(\alpha-3)}(s) = [1 + q_{\alpha-1}(s)q_{\alpha-2}(s)], \quad r^{(\alpha-3)}(s) = q_{\alpha-1}(s).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$1 = d_0(s)q^{(1)}(s) - d_1(s)r^{(1)}(s),$$

или, с учётом обозначений,

$$d(s)q^{(1)}(s) - b(s)r^{(1)}(s) = 1. \quad (3.Д.7)$$

Из однозначности полиномов алгоритма Эвклида следует единственность  $q^{(1)}(s)$  и  $r^{(1)}(s)$ .

Умножим тождество (3.Д.7) на  $\delta(s)$  и получим искомое решение  $q^{(\delta)}(s) = q^{(1)}(s)\delta(s)$  и  $r^{(\delta)}(s) = r^{(1)}(s)\delta(s)$ .

### 3.Д.2. Доказательство теоремы 3.1.2

**а) Предварительные сведения.** При доказательстве ограничимся, для простоты, случаем  $v(s) = 1$ .

Рассмотрим частные случаи уравнений (3.1.20), когда  $\delta(s) = 0$  и  $\delta(s) = 1$ .

Решения таких уравнений будем обозначать как  $g^{(0)}(s)$ ,  $r^{(0)}(s)$  и  $g^{(1)}(s)$ ,  $r^{(1)}(s)$  соответственно. Это означает, что выполняются соотношения

$$d(s)g^{(0)}(s) - b(s)r^{(0)}(s) = 0, \quad (3.Д.8)$$

$$d(s)g^{(1)}(s) - b(s)r^{(1)}(s) = 1. \quad (3.Д.9)$$

Решение уравнения (3.Д.8) имеет вид

$$g^{(0)}(s) = k(s)b(s), \quad r^{(0)}(s) = k(s)d(s), \quad (3.Д.10)$$

где  $k(s)$  – произвольный полином.

Очевидно, что решение уравнения (3.Д.7) связано с решением  $g^{(\delta)}(s)$ ,  $r^{(\delta)}(s)$  уравнения (3.1.20) соотношениями

$$g^{(\delta)}(s) = g^{(1)}(s)\delta(s), \quad r^{(\delta)}(s) = r^{(1)}(s)\delta(s), \quad (3.Д.11)$$

которые следуют из сравнения (3.1.20) и (3.Д.7) после умножения последнего на  $\delta(s)$ .

**б) Вывод условия (3.1.24).** Представим на основе (3.1.22) решение (3.1.20) в виде

$$g(s) = g^{(\delta)}(s) + k(s)b(s), \quad r(s) = r^{(\delta)}(s) + k(s)d(s). \quad (3.Д.12)$$

Убедимся, что при условии (3.1.24)

$$\deg r(s) < \deg d(s), \quad (3.Д.13)$$

из второго уравнения (3.Д.11) однозначно находим полином  $k(s)$ .

Из неравенства (3.Д.12) следует, что

$$\deg k(s) = \deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s). \quad (3.Д.14)$$

(Если  $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) < 0$ , то  $k(s) = 0$ ).

Пусть  $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) = 2$ , тогда

$$\begin{aligned} r^{(\delta)}(s) + k(s)d(s) &= r_{n+2}^{(\delta)}s^{n+2} + r_{n+1}^{(\delta)}s^{n+1} + r_n^{(\delta)}s^n + r_{n-1}^{(\delta)}s^{n-1} + \dots + r_1^{(\delta)}s + r_0^{(\delta)} + \\ &+ (k_2s^2 + k_1s + k_0)(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0). \end{aligned} \quad (3.Д.15)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при  $s^{n+2}$ ,  $s^{n+1}$ ,  $s^n$  получим рекуррентную систему уравнений для определения  $k(s)$

$$-r_{n+2}^{(\delta)} = k_2, \quad -r_{n+1}^{(\delta)} = k_1 + k_2d_{n-1}, \quad -r_n^{(\delta)} = k_0 + k_1d_{n-1} + k_2d_{n-2}. \quad (3.Д.16)$$

Если  $\deg r^{(\delta)}(s) - \deg d(s) > 2$ , то получим аналогичную систему. Система (3.Д.15) имеет единственное решение и поэтому при условии (3.1.24)  $r(s)$  – единственно. Аналогично, доказывается единственность  $g(s)$  при выполнении неравенства (3.1.23).

**в) Вывод условия (3.1.25).** Пусть

$$\deg \delta(s) = \deg d(s) + \deg b(s) \quad (3.Д.17)$$

и выполнено (3.1.23).

В этом случае из (3.1.20) следует

$$b(s)r(s) = d(s)g(s) - \delta(s)$$

и

$$\deg b(s) + \deg r(s) = \deg b(s)r(s) \leq \max[\deg d(s)g(s), \deg \delta(s)] < \deg d(s) + \deg b(s). \quad (3.Д.18)$$

Следовательно,

$$\deg r(s) < \deg d(s),$$

что совпадает с (3.1.24).

Поэтому условия (3.1.23) и (3.1.24) приводят к одной и той же паре полиномов  $g(s)$  и  $r(s)$ .

### 3.Д.3. Доказательство утверждения 3.1.1

Ограничимся для простоты случаем  $\alpha = 2$ . В этом случае уравнение (3.1.41) примет вид

$$\begin{aligned} (s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \dots + d_2s^2 + d_1s + d_0)(\rho_2s^2 + \rho_1s + \rho_0) - r(s) = \\ = (\varepsilon^{02}s^2 + 2\varepsilon^0s + 1) \left( s^n + \tilde{\psi}_{n-1}s^{n-1} + \tilde{\psi}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \tilde{\psi}_1s + \tilde{\psi}_0 \right). \end{aligned} \quad (3.Д.19)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях этого равенства, получим уравнения для параметров полиномов  $\rho(s)$  и  $r(s)$

$$\begin{array}{llll} s^{n+2} & : & \rho_2 - \varepsilon^{02} & = 0 & = o_2^\varepsilon, \\ s^{n+1} & : & \rho_1 - 2\varepsilon^0 & = \tilde{\psi}_{n-1}\varepsilon^{02} - d_{n-1}\rho_2 & = o_1^\varepsilon, \\ s^n & : & \rho_0 - 1 & = \tilde{\psi}_{n-1}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-2}\varepsilon^{02} - d_{n-1}\rho_1 - d_{n-2}\rho_2 & = o_0^\varepsilon, \\ s^{n-1} & : & d_{n-1}\rho_0 - r_{n-1} - \tilde{\psi}_{n-1} & = \tilde{\psi}_{n-2}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-3}\varepsilon^{02} - d_{n-2}\rho_1 - d_{n-3}\rho_2 \\ \vdots & : & \vdots & : & \vdots \\ s^2 & : & d_2\rho_0 - r_2 - \tilde{\psi}_2 & = \tilde{\psi}_12\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_0\varepsilon^{02} - d_1\rho_1 - d_0\rho_2 \\ s^1 & : & d_1\rho_0 - r_1 - \tilde{\psi}_1 & = \tilde{\psi}_02\varepsilon^0 - d_0\rho_1 \\ s^0 & : & d_0\rho_0 - r_0 - \tilde{\psi}_0 & = & = o_0^r. \end{array}$$

Из уравнений для коэффициентов при  $s^{n+2}$ ,  $s^{n+1}$ ,  $s^n$  следует

$$\rho_2 = \varepsilon^{02}, \quad \rho_1 = 2\varepsilon^0 + o_1^\varepsilon(\varepsilon^{02}), \quad \rho_0 = 1 + o_0^\varepsilon(\varepsilon^0), \quad (3.Д.20)$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o_1^\varepsilon(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} o_0^\varepsilon(\tau) = 0. \quad (3.Д.21)$$

Из уравнений для коэффициентов при  $s^{n-1}$ , ...,  $s^2$ ,  $s^1$ ,  $s^0$  получим соответственно

$$r_{n-1} = \tilde{\psi}_{n-1} - d_{n-1} + o_{n-1}^r = r_{n-1}^c + o_{n-1}^r,$$

где  $o_{n-1}^r = \tilde{\psi}_{n-2}2\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_{n-3}\varepsilon^{02} - d_{n-2}[2\varepsilon^0 + o_1^\varepsilon(\tau^2)] - d_{n-1}o_0^\varepsilon$ ;

⋮

$$r_2 = \tilde{\psi}_2 - d_2 + o_2^r = r_2^c + o_2^r, \text{ где } o_2^r = \tilde{\psi}_12\varepsilon^0 + \tilde{\psi}_0\varepsilon^{02} - d_0\varepsilon^{02} - d_1[2\varepsilon^0 + o_1^\varepsilon(\varepsilon^{02})] - d_2o_0^\varepsilon;$$

$$r_1 = \tilde{\psi}_1 - d_1 + o_1^r = r_1^c + o_1^r, \text{ где } o_1^r = \tilde{\psi}_02\varepsilon^0 - d_0[2\varepsilon^0 + o_1^\varepsilon(\varepsilon^{02})] - d_1o_0^\varepsilon;$$

$$r_0 = \tilde{\psi}_0 - d_0 + o_0^r = r_0^c + o_0^r, \text{ где } o_0^r = d_0o_0^\varepsilon;$$

Очевидно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} o_i^r = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} r_i = r_i^c \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.Д.22)$$

### 3.Д.4. Доказательство теоремы 3.4.1

Представим выражение (3.4.9) с учётом (3.4.11), как

$$\check{A} = TAT^{-1} = \check{K}K^{-1}AK\check{K}^{-1}. \quad (3.Д.23)$$

Введём матрицу

$$\bar{A} = K^{-1}AK. \quad (3.Д.24)$$

Тогда

$$\check{A} = \check{K}\bar{A}\check{K}^{-1}. \quad (3.Д.25)$$

Рассмотрим (3.Д.23). Используя (3.4.13), получим

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^n\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n & -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_i$  –  $i$ -тый столбец единичной матрицы,  $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_n]'$  – некоторый вектор

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}^{-1} A^n\mathbf{b}. \quad (3.Д.26)$$

Представим

$$A^n = -Ed_0 - Ad_1 - A^2d_2 - \cdots - A^{n-1}d_{n-1}. \quad (3.Д.27)$$

Это равенство следует из теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема 3.Д.4. (Теорема Гамильтона-Кэли). Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. ■

Характеристическое уравнение для матрицы  $A$  имеет вид  $s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0 = 0$ . Заменяя в нём параметр  $s$  матрицей  $A$ , получим (3.Д.25).

Используя (3.Д.25), запишем

$$\begin{aligned} E\mathbf{g} &= - \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -d_0\mathbf{b} & -d_1A\mathbf{b} & \cdots & -d_{n-1}A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d_0\mathbf{e}_1 & d_1\mathbf{e}_2 & \cdots & d_{n-1}\mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \text{diag} \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.Д.28)$$

Рассмотрим поочерёдно части равенства, получаемого из (3.Д.24)

$$\check{A}\check{K} = \check{K}\bar{A}. \quad (3.Д.29)$$

С одной стороны, используя (3.Д.12), имеем

$$\check{A}\check{K} = \begin{pmatrix} \check{A}\check{\mathbf{b}} & \check{A}^2\check{\mathbf{b}} & \cdots & \check{A}^n\check{\mathbf{b}} \end{pmatrix}. \quad (3.Д.30)$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \check{K}\bar{A} &= \check{K} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n & -\mathbf{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{K}\mathbf{e}_2 & \check{K}\mathbf{e}_3 & \cdots & \check{K}\mathbf{e}_n & -\check{K}\mathbf{g} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \check{A}\check{\mathbf{b}} & \check{A}^2\check{\mathbf{b}} & \cdots & \check{A}^{n-1}\check{\mathbf{b}} & -\check{K}\mathbf{g} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.Д.31)$$

На основе (3.Д.26) заключаем, в силу теоремы 3.Д.4, что

$$-\check{K}\mathbf{g} = -\check{K} [d_0 \ d_1 \ \cdots \ d_{n-1}]' = (-Ed_0 - \check{A}d_1 \cdots - \check{A}^{n-1}d_{n-1})\mathbf{b} = \check{A}^n\mathbf{b}, \quad (3.Д.32)$$

и таким образом равенство (3.Д.27) доказано.

### 3.Д.5. Доказательство утверждения 3.П.1

По заданным корням  $s_i^n$  ( $i = \overline{1, n}$ ) сформируем желаемый характеристический полином наблюдателя

$$\psi^n(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^n). \quad (3.Д.33)$$

Введём в рассмотрение вспомогательную систему управления

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = A'\boldsymbol{\mu}'' + \mathbf{d}'u, \quad (3.Д.34)$$

$$u = -\mathbf{k}'_y \boldsymbol{\mu}, \quad (3.Д.35)$$

где  $\boldsymbol{\mu}$  –  $n$ -мерный вектор состояния.

«Объект» (3.Д.34) полностью управляем, если объект (3.П.1) полностью наблюдаем.

Её характеристический полином

$$\det(Es - A'\mathbf{d}'\mathbf{k}'_y) = \det(Es - A + \mathbf{k}_y\mathbf{d}) = d^n(s). \quad (3.Д.36)$$

Отсюда следует, что для построения вектора  $\mathbf{k}_y$  можно применить процедуру 3.4.2, полагая в ней

$$A = A', \quad \mathbf{b} = \mathbf{d}'. \quad (3.Д.37)$$

Получив в результате этой процедуры вектор  $\mathbf{c}$ , находим

$$\mathbf{k}_y = -\mathbf{c}. \quad (3.Д.38)$$

### 3.Д.6. Доказательство утверждения 3.П.2

Используя формулу дифференцирования по параметру

$$z(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha, \tau) d\tau, \quad \dot{z}(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \dot{\varphi}(\alpha, \tau) d\tau \quad (3.Д.39)$$

и начальные условия, которым удовлетворяет функция  $\eta(t, \tau)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \eta & (0)f(t) + \int_0^t \dot{\eta} & (t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t \dot{\eta} & (t-\tau)f(\tau) d\tau, \\ \ddot{y} &= \dot{\eta} & (0)f(t) + \int_0^t \ddot{\eta} & (t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t \ddot{\eta} & (t-\tau)f(\tau) d\tau, \\ &\vdots & & & \\ y^{(n-1)} &= \eta^{(n-2)}(0)f(t) + \int_0^t \eta^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t \eta^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau) d\tau, \\ y^{(n)} &= \eta^{(n-1)}(0)f(t) + \int_0^t \eta^{(n)}(t-\tau)f(\tau) d\tau = f(t) + \int_0^t \eta^{(n)}(t-\tau)f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Умножая выражения  $y^{(n)}$  на 1,  $y^{(n-1)}$  на  $\tilde{\psi}_{n-1}$ ,  $y^{(n-2)}$  на  $\tilde{\psi}_{n-2}$  и т.д., затем складывая их, получим с учётом (3.П.62)

$$\int_0^t \left[ \sum_{i=0}^n \tilde{\psi}_i \eta^i(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau + f(t) = f(t). \quad (3.Д.40)$$

### 3.Д.7. Доказательство утверждения 3.П.3

Из (3.П.63) следует, что  $t = 0$  является  $(n-1)$ -кратным корнем функции

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t}. \quad (3.Д.41)$$

Допустим, что при некотором  $\mu_0 \neq 0$

$$\eta(\mu_0) = 0. \quad (3.Д.42)$$

Нормируем функцию  $\eta(t)$  так, чтобы она содержала независящее от  $t$  (постоянное) слагаемое. Пусть

$$\eta_1(t) = e^{-s_1 t} \eta(t) = c_1 + \sum_{i=2}^n c_i e^{(s_i - s_1)t}. \quad (3.Д.43)$$

Функция  $\eta_1(t)$  имеет  $(n-1)$ -кратный корень  $t = 0$  и  $t = \mu_0$ . Производная  $\dot{\eta}_1(t)$  будет иметь  $(n-2)$ -кратный корень  $t = 0$  и, кроме того, корень  $t = \mu_1$  на интервале  $(0, \mu_0)$ . (Корень  $t = \mu_1$  следует из теоремы Роля, согласно которой между двумя корнями функции лежит корень её производной.)

Заметим, что  $\dot{\eta}_1(t)$  содержит уже  $n-1$  членов вместо  $n$  членов функции  $\eta(t)$ .

Нормируем  $\dot{\eta}_1(t)$  так, чтобы функция

$$\eta_2(t) = e^{-(s_2 - s_1)t} \dot{\eta}_1(t) \quad (3.Д.44)$$

содержала постоянное слагаемое. Тогда функция  $\dot{\eta}_2(t)$ , имея  $n-2$  слагаемых, будет иметь в точке  $t = 0$   $(n-3)$ -кратный корень и один корень  $t = \mu_2$  в интервале  $(0, \mu_1)$ . Продолжая процесс, придём к функции  $\eta_{n-2}(t) = k + l e^{\beta t}$ , имеющей простой корень  $t = 0$  и некоторый корень  $t = \mu_{n-2} \neq 0$ . Функция

$$\dot{\eta}_{n-2}(t) = \beta l e^{\beta t}$$

должна иметь корень в интервале  $(0, \mu_{n-1})$ . Но это невозможно.

### 3.Д.8. Доказательство утверждения 3.П.4

Запишем уравнения для констант  $c_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в функции (3.П.73), при которых эта функция удовлетворяет начальным условиям (3.П.63)

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i s_i^2 = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n c_i s_i^{n-2} = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i s_i^{n-1} = 1. \quad (3.Д.45)$$



Так как  $s_i$  – корни полинома  $\tilde{\psi}(s)$ , то

$$\frac{1}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0} s_i^{n-1} - \frac{\tilde{\psi}_{n-1}}{\tilde{\psi}_0} s_i^{n-2} - \dots - \frac{\tilde{\psi}_2}{\tilde{\psi}_0} s_i - \frac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_0} \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.Д.46)$$

Умножая эти равенства на  $c_i$  и суммируя по  $i$ , получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0} \sum_{i=1}^n c_i s_i^{n-1} - \frac{\tilde{\psi}_{n-1}}{\tilde{\psi}_0} \sum_{i=1}^n c_i s_i^{n-2} - \dots - \frac{\tilde{\psi}_2}{\tilde{\psi}_0} \sum_{i=1}^n c_i s_i - \frac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_0} \sum_{i=1}^n c_i.$$

Отсюда, принимая во внимание (3.Д.42), находим

$$\sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s_i} = -\frac{1}{\tilde{\psi}_0}. \quad (3.Д.47)$$

### 3.Д.9. Доказательство утверждения 3.П.5

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{\psi}^{(1)}(s)y = 0, \quad (3.Д.48)$$

в котором

$$\tilde{\psi}^{(1)}(s) = \prod_{i=2}^n (s - s_i) = s^{n-1} + \tilde{\psi}_{n-2}^{(1)} s^{n-2} + \dots + \tilde{\psi}_1^{(1)} s + \tilde{\psi}_0^{(1)}. \quad (3.Д.49)$$

Другими словами

$$\tilde{\psi}(s) = (s - s_1)\tilde{\psi}^{(1)}(s) \quad (3.Д.50)$$

решение уравнения (3.Д.48) при начальных условиях

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-3)}(0) = 0, \quad y^{(n-2)}(0) = 1 \quad (3.Д.51)$$

обозначим, как

$$y(t) = \tilde{\eta}_1(t). \quad (3.Д.52)$$

Утверждение 3.Д.1. Решение  $\eta(t)$  уравнения (3.П.62) при начальных условиях (3.П.63) и решение  $\tilde{\eta}_1(t)$  уравнения (3.Д.48) при начальных условиях (3.Д.51) связаны уравнением

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{\eta}_1(t) + s_1 \eta(t). \quad (3.Д.53)$$

■

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n c_i s_i e^{s_i t} = s_1 \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} + \sum_{i=1}^n c_i (s_i - s_1) e^{s_i t} = \mu(t) + s_1 \eta(t), \quad (3.Д.54)$$

где

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n c_i (s_i - s_1) e^{s_i t} = \sum_{i=2}^n c_i (s_i - s_1) e^{s_i t} = \sum_{i=1}^n c_i^{(1)} e^{s_i t}. \quad (3.Д.55)$$

Убедимся, что  $\mu(t) = \tilde{\eta}_1(t)$ .

Действительно, во-первых,  $\mu(t)$  удовлетворяет уравнению (3.Д.48), так как полином  $\tilde{\psi}^{(1)}(s)$  имеет корни  $s_2, s_3, \dots, s_n$ , во-вторых,  $\mu(t)$  отвечает начальным условиям (3.Д.51):  $\mu(0) = \dot{\eta}(0) - s_1\eta(0) = 0$ ,  $\dot{\mu}(0) = \ddot{\eta}(0) - s_1\dot{\eta}(0) = 0, \dots$ ,  $\mu^{(n-3)}(0) = \eta^{(n-2)}(0) - s_1\eta^{(n-3)}(0) = 0$ ,  $\mu^{(n-2)}(0) = \eta^{(n-1)}(0) - s_1\eta^{(n-2)}(0) = 1$ , и, таким образом, утверждение 3.Д.1 доказано.

Переходя непосредственно к доказательству (3.П.81), найдём

$$J_1 = \int_0^{\infty} |\dot{\eta}(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |\tilde{\eta}_1(\tau) + s_1\eta(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\infty} |\tilde{\eta}_1(\tau)| d\tau + |s_1| \int_0^{\infty} |\eta(\tau)| d\tau. \quad (3.Д.56)$$

Повторяя изложенное в 3.Д.7, 3.Д.8, находим

$$\int_0^{\infty} |\tilde{\eta}_1(\tau)| d\tau = \frac{1}{\tilde{\psi}_0^{(1)}} = \frac{1}{\prod_{i=2}^n |s_i|} = \frac{|s_1|}{\tilde{\psi}_0}, \quad (3.Д.57)$$

и тогда, с учётом (3.П.71), (3.П.73), получаем

$$J_1 = 2 \frac{|s_1|}{\tilde{\psi}_0}. \quad (3.Д.58)$$

Теперь найдём  $J_2 = \int_0^{\infty} |\ddot{\eta}(\tau)| d\tau$ .

Представим

$$\ddot{\eta} = \dot{\tilde{\eta}}_1 + s_1\dot{\eta} = (\tilde{\eta}_2 + s_2\tilde{\eta}_1) + s_1(\tilde{\eta}_1 + s_1\eta) = \tilde{\eta}_2 + (s_1 + s_2)\tilde{\eta}_1 + s_1^2\eta, \quad (3.Д.59)$$

где  $\tilde{\eta}_2(t)$  – решение при начальных условиях  $y(0) = \dot{y}(0) = y^{(n-4)}(0) = 0$ ,  $y^{(n-3)}(0) = 1$  уравнения

$$\tilde{\psi}^{(2)}(s)y = 0, \quad (3.Д.60)$$

в котором

$$\tilde{\psi}^{(2)}(s) = \prod_{i=3}^n (s - s_i) = s^{n-2} + \tilde{\psi}_{n-3}^{(2)}s^{n-3} + \dots + \tilde{\psi}_1^{(2)}s + \tilde{\psi}_0^{(2)}. \quad (3.Д.61)$$

Используя (3.Д.56), получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\infty} |\ddot{\eta}(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\infty} |\tilde{\eta}_2(\tau)| d\tau + (|s_1| + |s_2|) \int_0^{\infty} |\tilde{\eta}_1(\tau)| d\tau + s_1^2 \int_0^{\infty} |\eta(\tau)| d\tau = \\ &= \frac{1}{|\tilde{\psi}_0^{(2)}|} + (|s_1| + |s_2|) \frac{1}{|\tilde{\psi}_0^{(1)}|} + s_1^2 \frac{1}{|\tilde{\psi}_0|} = \frac{1}{|\tilde{\psi}_0|} [s_1^2 + |s_1||s_2|]. \end{aligned} \quad (3.Д.62)$$

Определим  $J_3 = \int_0^{\infty} |\ddot{\eta}(\tau)| d\tau$ .

Представим на основе (3.Д.56)

$$\begin{aligned}\ddot{\eta} &= \dot{\tilde{\eta}}_2 + (s_1 + s_2)\dot{\tilde{\eta}}_1 + s_1^2\dot{\eta} = (\tilde{\eta}_3 + s_3\tilde{\eta}_2) + (s_1 + s_2)(\tilde{\eta}_2 + s_2\tilde{\eta}_1) + s_1^2(\tilde{\eta}_1 + s\eta) = \\ &= \tilde{\eta}_3 + (s_1 + s_2 + s_3)\tilde{\eta}_2 + (s_1^2 + s_1s_2 + s_2^2)\tilde{\eta}_1 + s_1^3\eta.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}J_3 &= \int_0^\infty |\ddot{\eta}(\tau)| d\tau \leq \int_0^\infty |\tilde{\eta}_3(\tau)| d\tau + (|s_1| + |s_2| + |s_3|) \int_0^\infty |\tilde{\eta}_2(\tau)| d\tau + \\ &+ (s_1^2 + |s_1||s_2| + s_2^2) \int_0^\infty |\tilde{\eta}_1(\tau)| d\tau + |s_1|^3 \int_0^\infty |\eta(\tau)| d\tau = \\ &= \frac{1}{|\tilde{\psi}_0|} \left[ |s_1||s_2||s_3| + (|s_1| + |s_2| + |s_3|)|s_1||s_2| + (s_1^2 + |s_1||s_2| + s_2^2)|s_1| + |s_1|^3 \right] = \\ &= 2 \frac{|s_1|}{|\tilde{\psi}_0|} \left( s_1^2 + |s_1||s_2| + |s_2||s_3| + s_2^2 \right).\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned}J_4 &= \int_0^\infty |\eta^{(4)}(\tau)| d\tau \leq 2 \frac{|s_1|}{|\tilde{\psi}_0|} \times \\ &\times \left( |s_2|^3 + |s_2^2s_3| + |s_2s_3^2| + |s_2s_3s_4| + |s_1|^3 + |s_1^2s_2| + |s_1s_2^2| + |s_1s_2s_3| \right).\end{aligned}$$

Учитывая неравенства (3.П.80), приходим к соотношениям (3.П.81), и, таким образом, (3.П.85) доказано для  $\alpha = 4$ . Для  $\alpha > 4$  доказательство аналогично.

## Заключение к главе 3

Подведём итоги этой главы.

1. Найдена структура (3.1.29) модального (желаемого) полинома, при которой можно установить явную связь между требуемой точностью и коэффициентами этого полинома для ступенчатых – (3.2.2), гармонических – (3.2.3) и неопределённых внешних возмущений.
2. На основе этих связей построена процедура 3.2.1 решения задачи регулирования для объектов второго вида, устойчивых по управлению.
3. Сформулирована рекомендация 3.2.1 и процедура 3.2.4, обеспечивающие параметрическую и структурную грубость системы.
4. Сформирована процедура 3.3.1 построения следящих систем, основанная на независимом (раздельном) построении операторов регулирования и оператора при задающем воздействии (принцип разделения).

5. (\*) Исследованы известные компенсационные схемы построения следящих систем, и показано, что для них нарушается принцип разделения. Это ограничивает их возможности при внешних возмущениях.
6. Построена процедура 3.4.3 синтеза регуляторов для объектов первого вида (обратная связь по состоянию).
7. (П) Исследованы системы с наблюдателями, установлена их связь с компенсационными схемами. Показано, что эти системы могут обладать малыми запасами устойчивости. Причиной этого является аддитивная компенсация.

## Глава 4. Оптимальное управление

Цель этой главы, как и предыдущей, состоит в построении управления, обеспечивающего необходимую точность и качество регулирования и слежения при внешних возмущениях. Однако задачи этой главы, аналогичные задачам 3.4.2 и 3.2.1, содержат требование грубости синтезируемой системы.

Для решения этих задач необходимо исследовать:

- связь структуры и параметров функционала оптимизации при аналитическом конструировании регуляторов с точностью и качеством оптимальной системы при внешних возмущениях,
- границы частотных показателей грубости аналитически сконструированных систем.

Эти исследования опираются на известное условие оптимальности в частотной форме. Оно вместе с указанной выше связью составляет основу метода построения регуляторов по частотным параметрам, изложенного в главе 7, где получен также критерий устойчивости систем по частотным параметрам. Этот критерий основан на решении обратной задачи АКОР, приведённой в конце настоящей главы.

### 4.1. Аналитическое конструирование регуляторов

#### 4.1.1. Процедура АКОР

Задача 4.1.1. (задача АКОР).

Пусть имеем полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (4.1.1)$$

все переменные состояния которого доступны измерению.

Требуется найти вектор  $\mathbf{c}$  регулятора

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (4.1.2)$$

такой, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (4.1.1), (4.1.2), возбуждённой произвольными начальными отклонениями  $\mathbf{x}^{(0)}$ , минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + u^2) dt, \quad (4.1.3)$$

в котором  $Q$  – заданная положительно-определённая матрица. ■

Решение этой задачи об аналитическом конструировании регуляторов (задачи АКОР) заключается в следующем.

Процедура 4.1.1. (Процедура АКОР). Искомый вектор

$$\mathbf{c} = -P\mathbf{b}, \quad (4.1.4)$$

где положительно-определённая матрица  $P$  является решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A'P - P\mathbf{b}\mathbf{b}'P + Q = 0. \quad (4.1.5)$$

■

Приведём два метода решения этого уравнения. Рассмотрим первый метод (метод Репина-Третьякова).

Теорема 4.1.1. Если пара  $(P, B)$  полностью управляема, а матрица  $Q$  – положительно-определённая, то положительно-определённая матрица  $P$ , являющаяся решением уравнения (4.1.5), единственна и находится путём решения дифференциального уравнения (матричного уравнения Риккати)

$$\dot{\tilde{P}} = \tilde{P}A + A'\tilde{P} - \tilde{P}\mathbf{b}\mathbf{b}'\tilde{P} + Q, \quad \tilde{P}(t_0) = 0, \quad (4.1.6)$$

в результате которого искомая матрица

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(t). \quad (4.1.7)$$

■

Второй метод (метод квазилинеаризации, метод Ньютона-Рафсона) базируется на теореме.

Теорема 4.1.2. Если выполняются условия теоремы 4.1.1, то нахождение единственной матрицы  $P > 0$  сводится к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается уравнение Ляпунова

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)'}P^{(\alpha+1)} = -Q - \mathbf{c}^{(\alpha)}\mathbf{c}^{(\alpha)'} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (4.1.8)$$

в котором

$$\mathbf{c}^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}\mathbf{b}, \quad (4.1.9)$$

$$A^{(\alpha)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(\alpha)'}, \quad (4.1.10)$$

и, если собственные числа  $-\lambda_i(A^{(0)})$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – матрицы  $A^{(0)} = A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{(0)'}$  таковы, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A^{(0)}) < 0 \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.1.11)$$

то последовательность матриц  $P^{(\alpha)}$  обладает свойством

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P^{(\alpha)} = P. \quad (4.1.12)$$

■

Доказательство этой теоремы приведено в 4.Д.1.

Примечание 4.1.1. Требование положительно-определённой матрицы  $Q$  в функционале оптимизации (4.1.3) можно ослабить. Пусть  $Q$  – неотрицательная матрица (форма  $\mathbf{x}'Q\mathbf{x} \geq 0$ ), тогда её можно представить

$$Q = H'H, \quad (4.1.13)$$

где  $H$  – прямоугольная матрица размеров  $\varkappa \times n$ ,  $\varkappa$  – ранг матрицы  $Q$  (если  $Q$  – положительно-определённая матрица, то  $\varkappa = n$ ).

Функционал (4.1.3) примет вид

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'H'H\mathbf{x} + u^2) dt = \int_0^{\infty} [(H\mathbf{x})'(H\mathbf{x}) + u^2] dt. \quad (4.1.14)$$

Если не накладывать на матрицу  $H$  никаких ограничений, то может случиться так, что функционал (4.1.14) принимает наименьшее значение (равное нулю), когда

$$u = 0, \quad H\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.1.15)$$

Для того чтобы избежать такого тривиального ( $u = 0$ ) решения, наложим на матрицу  $H$  условие  $H\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} H' & A'H' & \dots & (A^{n-1})'H' \end{bmatrix} = n. \quad (4.1.16)$$

■

Примечание 4.1.2. Можно ослабить также требование полной управляемости объекта в задаче АКОР. Если объект (4.1.1) стабилизируем, то процедура 4.1.1 по-прежнему разрешает задачу АКОР. ■

Пример 4.1.1. Пусть дан объект управления

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -d_0x_1 - d_1x_2 + bu, \quad (4.1.17)$$

параметры которого  $d_0 = 200$ ,  $d_1 = 30$ ,  $b = 1$ . (4.1.18)

Требуется найти вектор  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$  регулятора

$$u = c_1x_1 + c_2x_2, \quad (4.1.19)$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + u^2) dt \quad (4.1.20)$$

с коэффициентами  $q_{11} = 8 \cdot 10^6$ ,  $q_{22} = 3 \cdot 10^4$ . (4.1.21)

Уравнения Риккати, разрешающие эту задачу АКОР, имеют вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} p_{12}b \\ p_{22}b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{12}b & p_{22}b \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.1.22)$$

а искомые коэффициенты регулятора (4.1.19)

$$c_1 = -p_{12}b, \quad c_2 = -p_{22}b. \quad (4.1.23)$$

Решим уравнение (4.1.20) с помощью метода Ньютона-Рафсона. Положим, для простоты, что объект (4.1.17) асимптотически устойчив. Тогда, полагая  $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{0}$ , запишем на первом шаге итерационной процедуры уравнение  $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{12}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{12}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.1.24)$$

Его можно записать как систему

$$2p_{12}^{(1)}d_0 = q_{11}, \quad 2(p_{12}^{(1)} - p_{22}^{(1)}d_1) = -q_{22}, \quad p_{11}^{(1)} - p_{12}^{(1)}d_1 - p_{22}^{(1)}d_0 = 0. \quad (4.1.25)$$

Отсюда

$$p_{12}^{(1)} = \frac{q_{11}}{2d_0}, \quad p_{22}^{(1)} = \frac{q_{11}}{2d_0d_1} + \frac{q_{22}}{2d_1}. \quad (4.1.26)$$

Подставляя эти выражения в (4.1.23), получим при численных значениях параметров (4.1.18), (4.1.21)

$$c_1^{(1)} = -2 \cdot 10^4, \quad c_2^{(1)} = -1.166 \cdot 10^3. \quad (4.1.27)$$

Рассмотрим вторую итерацию  $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{12}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0^{(1)} & -d_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0^{(1)} \\ 1 & -d_1^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{12}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \\ = - \begin{pmatrix} q_{11} + c_1^{(1)2} & c_1^{(1)}c_2^{(1)} \\ c_1^{(1)}c_2^{(1)} & q_{22} + c_2^{(1)2} \end{pmatrix}.$$

Заменяя в (4.1.26)  $q_{ii}$  на  $q_{ii} + c_i^{(1)2}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ),  $d_0$  на  $d_0^{(1)}$ ,  $d_1$  на  $d_1^{(1)}$ , получим

$$p_{12}^{(2)} = \frac{q_{11} + c_1^{(1)2}}{2d_0^{(1)}}, \quad p_{22}^{(2)} = \frac{q_{11} + c_1^{(1)2}}{2d_0^{(1)}d_1^{(1)}} + \frac{q_{22} + c_2^{(1)2}}{2d_1^{(1)}}, \quad (4.1.28)$$

где  $d_0^{(1)} = d_0 - c_1^{(1)}$ ,  $d_1^{(1)} = d_1 - c_2^{(1)}$ .



Подставляя (4.1.27) в (4.1.23), получим

$$c_1^{(2)} = -10^4, \quad c_2^{(2)} = -5.58 \cdot 10^2. \quad (4.1.29)$$

Теперь уравнения Ляпунова примут вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} \\ p_{12}^{(3)} & p_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_0^{(2)} & -d_1^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d_0^{(2)} \\ 1 & -d_1^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} \\ p_{12}^{(3)} & p_{22}^{(3)} \end{pmatrix} = \\ & = - \begin{pmatrix} q_{11} + c_1^{(2)2} & c_1^{(2)} c_2^{(2)} \\ c_1^{(2)} c_2^{(2)} & q_{22} + c_2^{(2)2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$p_{12}^{(3)} = \frac{q_{11} + c_1^{(2)2}}{2d_0^{(2)}}, \quad p_{22}^{(3)} = \frac{q_{11} + c_1^{(2)2}}{2d_0^{(2)}d_1^{(2)}} + \frac{q_{22} + c_2^{(2)2}}{2d_1^{(2)}}, \quad (4.1.30)$$

где  $d_0^{(2)} = d_0 - c_1^{(2)}$ ,  $d_1^{(2)} = d_1 - c_2^{(2)}$ .

Подставим (4.1.30) в (4.1.23) и вычислим

$$c_1^{(3)} = -0.5 \cdot 10^4, \quad c_2^{(3)} = -2.8 \cdot 10^2. \quad (4.1.31)$$

Искомые параметры регулятора (4.1.19)

$$c_1 = -2.63 \cdot 10^3, \quad c_2 = -1.6 \cdot 10^2. \quad (4.1.32)$$

Это нетрудно проверить, решая уравнение (4.1.22), которое запишем как систему трёх нелинейных уравнений

$$-2p_{12}d_0 - (p_{12}b)^2 + q_{11} = 0, \quad 2p_{12} - 2p_{22}d_1 - (p_{22}b)^2 + q_{22} = 0. \quad (4.1.33)$$

Отсюда

$$p_{12} = -d_0 + \sqrt{d_0^2 + q_{11}}, \quad p_{22} = -d_1 + \sqrt{d_1^2 + q_{22} + 2p_{12}}.$$

■

#### 4.1.2. Критерий обобщённой работы

Пусть объект (4.1.1) асимптотически устойчив и полностью управляем.

Построим функцию Ляпунова для него при  $u = 0$  как решение уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = - \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (4.1.34)$$

где  $q_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) – элементы матрицы  $Q$ , которая является положительно-определённой либо не отрицательной, но удовлетворяющей условию (4.1.16) наблюдаемости пары  $(H, A)$ .

Определим уравнение как

$$u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i. \quad (4.1.35)$$

Построенное таким образом управление обладает тем свойством, что на движениях системы (4.1.1), (4.1.35) достигает минимума функционал

$$J = \int_0^{\infty} \left[ \mathbf{x}' Q \mathbf{x} + u^2 + \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_i \right)^2 \right] dt, \quad (4.1.36)$$

который называется *функционалом обобщенной работы*, и поэтому решение уравнения Ляпунова (4.1.34) и нахождение по функции Ляпунова уравнения (4.1.35) называется *аналитическим конструированием регуляторов по критерию обобщенной работы* либо синтезом регуляторов на основе функций Ляпунова.

Решение уравнения Ляпунова (4.1.34) будем искать в виде

$$v = \mathbf{x}' P^{(1)} \mathbf{x}, \quad (4.1.37)$$

тогда вектор  $\mathbf{c}$  управления

$$u = \mathbf{c}' \mathbf{x}, \quad (4.1.38)$$

оптимального в смысле функционала обобщенной работы, находится на основе процедуры, которая следует из (4.1.34), (4.1.35).

Процедура 4.1.2. (Процедура АКОР по критерию обобщенной работы)

Вектор  $\mathbf{c}$  управления (4.1.37) находится из равенства

$$\mathbf{c} = -P^{(1)} \mathbf{b}, \quad (4.1.39)$$

где  $P^{(1)}$  – положительно-определенная матрица, являющаяся решением уравнения Ляпунова

$$P^{(1)} A + A' P^{(1)} + Q = 0. \quad (4.1.40)$$

■

Из теоремы 4.Д.1 следует существование и единственность матрицы  $P^{(1)} > 0$ , удовлетворяющей уравнению (4.1.40). Это уравнение в отличие от алгебраического уравнения Риккати является линейным и поэтому его численное решение значительно проще.

Процедура 4.1.2 является первым шагом ( $\alpha = 0$ ) итерационной процедуры (4.1.8) решения уравнения Риккати.

Пример 4.1.2.

Пусть для объекта (4.1.17) требуется найти вектор  $\mathbf{c}$  регулятора (4.1.19) такой, чтобы минимизировался функционал обобщенной работы

$$J = \int_0^{\infty} \left[ q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + u^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} b \right)^2 \right] dt, \quad (4.1.41)$$

где  $v = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$  – решение уравнения (4.1.24).

Процедура решения этой задачи заключается в решении уравнений (4.1.25) и вычисления компонент вектора  $\mathbf{c}$  по формуле (4.1.23). Таким образом, искомое уравнение

$$u = -2 \cdot 10^2 x_1 - 1.166 \cdot 10^3 x_2.$$

■

### 4.1.3. Объекты второго вида

Пусть имеем объект управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = u \quad (4.1.42)$$

и требуется найти регулятор

$$u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y, \quad (4.1.43)$$

такой, чтобы на движениях системы (4.1.42), (4.1.43), возбуждённых произвольными начальными отклонениями

$$y(0) = y_{10}, \quad \dot{y}(0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n0}, \quad (4.1.44)$$

минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}y^2 + q_{22}\dot{y}^2 + \dots + q_{\delta\delta}y^{(\delta-1)^2} + u^2) dt, \quad (4.1.45)$$

с  $\delta < n$ ,  $q_{ii} > 0$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ).

Для решения этой задачи АКОР введём переменные

$$\check{x}_1 = y, \quad \check{x}_2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad \check{x}_n = y^{(n-1)},$$

и тогда уравнения объекта и функционал примут вид

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{A}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}u, \quad (4.1.46)$$

$$J = \int_0^{\infty} (\check{\mathbf{x}}' \check{Q} \check{\mathbf{x}} + u^2) dt, \quad (4.1.47)$$

где  $\check{\mathbf{x}} = [\check{x}_1 \ \check{x}_2 \ \dots \ \check{x}_n]$ ,  $Q = \text{diag} [q_{11} \ q_{22} \ \dots \ q_{\delta\delta} \mid 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ , матрица  $\check{A}$  и вектор  $\check{\mathbf{b}}$  имеют вид (3.4.5).

Используя процедуру 4.1.1, найдём вектор  $\check{\mathbf{c}}$ , компоненты которого

$$\check{c}_i = r_{i-1} \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.1.48)$$

#### 4.1.4. Реализуемость

Для получения реализуемого регулятора для объекта (4.1.42) используем функционал

$$J = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} y^{(i-1)2} + u^2 + \varepsilon_1^2 \dot{u}^2 + \dots + \varepsilon_{\psi}^2 u^{(\psi)2} \right) dt, \quad \psi \geq n-1, \quad (4.1.49)$$

где  $q_{ii} > 0$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ).

Покажем, что регулятор, разрешающий задачу АКОР с таким функционалом, имеет вид

$$g_{\psi} u^{(\psi)} + \dots + g_1 \dot{u} + g_0 u = \tilde{r}_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \tilde{r}_1 \dot{y} + \tilde{r}_0 y. \quad (4.1.50)$$

Введём дополнительно к (4.1.45) переменные

$$\check{x}_{n+1} = u, \quad \check{x}_{n+2} = \dot{u}, \quad \dots, \quad \check{x}_{n+\psi} = u^{(\psi-1)}, \quad \check{u} = \varepsilon_{\psi} u^{(\psi)}. \quad (4.1.51)$$

Эти переменные связаны уравнением

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{\mathbf{A}} \check{\mathbf{x}}, \quad (4.1.52)$$

где

$$\check{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \check{x}_{n+1} \\ \check{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{x}_{n+\psi} \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{\psi-1} \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.1.53)$$

Вводя вектор

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{x}}' & \check{\mathbf{x}}' \end{bmatrix}', \quad (4.1.54)$$

запишем функционал (4.1.49) как

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{u}^2) dt, \quad (4.1.55)$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{Q}} = \text{diag} \left[ q_{11} \quad q_{22} \quad \dots \quad q_{\delta\delta} \mid 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \mid 1 \quad \varepsilon_1^2 \quad \dots \quad \varepsilon_{\psi}^2 \right]. \quad (4.1.56)$$

Объединяя уравнения (4.1.46), (4.1.52) получим «объект»

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}} \tilde{u}, \quad (4.1.57)$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \begin{array}{c|c|c} \check{\mathbf{A}} & \check{\mathbf{b}} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & E_{\psi-1} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (\varepsilon_{\psi})^{-1} \end{array} \right]. \quad (4.1.58)$$

Полагая в процедуре 4.1.1 матрицу  $A = \tilde{A}$ , вектор  $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{b}}$ , найдём вектор  $\tilde{\mathbf{c}}$  управления

$$\tilde{u} = \tilde{\mathbf{c}}' \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{c}}' \dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}}' \ddot{\mathbf{x}}. \quad (4.1.59)$$

Используя обозначения (4.1.45), (4.1.51), приходим к уравнению (4.1.50), которое при  $\psi \geq n - 1$  – реализуемо.

Пример 4.1.3.

Пусть дан объект управления

$$\ddot{y} + d_2 \dot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = u \quad (4.1.60)$$

и требуется найти регулятор

$$g_2 \ddot{u} + g_1 \dot{u} + g_0 u = r_2 \ddot{y} + r_1 \dot{y} + r_0 y, \quad (4.1.61)$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11} y^2 + u^2 + \varepsilon_1^2 \dot{u}^2 + \varepsilon_2^2 \ddot{u}^2) dt. \quad (4.1.62)$$

Для решения этой задачи АКОР введём обозначения

$$\check{x}_1 = y, \quad \check{x}_2 = \dot{y}, \quad \check{x}_3 = \ddot{y}, \quad \check{x}_4 = u, \quad \check{x}_5 = \dot{u}, \quad \check{u} = \varepsilon_2 \ddot{u}. \quad (4.1.63)$$

и сформируем «объект»

$$\dot{\check{x}}_1 = \check{x}_2, \quad \dot{\check{x}}_2 = \check{x}_3, \quad \dot{\check{x}}_3 = -d_0 \check{x}_1 - d_1 \check{x}_2 - d_2 \check{x}_3 + \check{x}_4 \quad (4.1.64)$$

$$\dot{\check{x}}_4 = \check{x}_5, \quad \dot{\check{x}}_5 = \frac{1}{\varepsilon_2} \check{u}. \quad (4.1.65)$$

Функционал (4.1.62) с учётом введённых обозначений примет вид

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11} \check{x}_1^2 + \check{x}_4^2 + \varepsilon_1^2 \check{x}_5^2 + \check{u}^2) dt. \quad (4.1.66)$$

Решая задачу об оптимальном в смысле этого функционала управлении для «объекта» (4.1.64), (4.1.65), находим

$$\sum_{i=1}^5 \tilde{c}_i \check{x}_i = \tilde{c}_1 y + \tilde{c}_2 \dot{y} + \tilde{c}_3 \ddot{y} + \tilde{c}_4 u + \tilde{c}_5 \dot{u}. \quad (4.1.67)$$

Заменяя в левой части этого выражения  $\check{u}$  на  $\sqrt{\varepsilon_2}$ , приходим к искомому регулятору (4.1.61). ■

Примечание 4.1.3. Для общего случая объекта второго вида, когда он описывается уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + d_1 \dot{y} + d_0 y = b_{\gamma} u^{(\gamma)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad \gamma < n, \quad (4.1.68)$$

следует привести это уравнение к форме  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$  и заменить в матрице  $\tilde{A}$  матрицу  $\check{A}$  на  $A$ , а вектор  $\check{\mathbf{b}}$  на  $\mathbf{b}$ . Кроме того, возможен и другой путь решения задачи АКОР для объекта (4.1.68). Действительно, используя обозначения (4.1.45), (4.1.51), запишем уравнение объекта в виде

$$\dot{\check{x}}_1 = \check{x}_2, \quad \dot{\check{x}}_2 = \check{x}_3, \quad \dots, \quad \dot{\check{x}}_n = -\sum_{i=1}^n d_{i-1}\check{x}_i + \sum_{i=1}^{\gamma-1} b_i\check{x}_{n+i} + b_\gamma\check{x}_{n+\gamma} \quad (4.1.69)$$

(если  $\gamma = \psi$ , то в последнем слагаемом следует заменить  $\check{x}_{n+\gamma}$  на  $\frac{1}{\varepsilon_\psi}\tilde{u}$ ).

Используя процедуру 4.1.1 для этого объекта, дополненного уравнением (4.1.52), и функционала (4.1.55), получим регулятор (4.1.30). ■

#### 4.1.5. Эталонная модель\*

Пусть имеется эталонная модель, асимптотическое устойчивое движение которой описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m\mathbf{x}_m, \quad z_m = \mathbf{l}'\mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_m(t_0) = \mathbf{x}_m^{(0)}, \quad (4.1.70)$$

где  $\mathbf{x}_m(t)$  –  $n$ -мерный вектор измеряемых переменных состояния,  $A_m$  – заданная матрица,  $z_m(t)$  – выход модели,  $\mathbf{l}$  – заданный вектор.

Объект управления описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (4.1.71)$$

которые отличаются от (4.1.1) заданием регулируемой переменной  $z(t)$ .

Задача 4.1.2. (Задача АКОР с эталонной моделью). Найти вектора  $\mathbf{c}'$  и  $\mathbf{c}'_m$  регулятора

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{c}'_m\mathbf{x}_m, \quad (4.1.72)$$

такие, чтобы на движениях системы (4.1.70)-(4.1.72), возбуждённых произвольными начальными отклонениями  $\mathbf{x}_m^{(0)}$ ,  $\mathbf{x}^{(0)}$ , минимизировался функционал

$$J = \int_0^\infty [q(z - z_m)^2 + u^2] dt, \quad q > 0. \quad (4.1.73)$$

Этот функционал можно записать, как

$$J = \int_0^\infty [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)'Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) + u^2] dt, \quad (4.1.74)$$

где  $Q = \mathbf{U}'q$ .

Такая матрица  $Q$  удовлетворяет условию (4.1.16), если (4.1.70) и (4.1.71) полностью наблюдаемы по сигналам  $z_m(t)$  и  $z(t)$  соответственно.

Для решения задачи 4.1.2 введём вектор

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{x}'_{\mathcal{M}} \end{bmatrix}', \quad (4.1.75)$$

и запишем уравнения (4.1.70), (4.1.71) в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u, \quad (4.1.76)$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.1.77)$$

При этом функционал (4.1.74) представляется как

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{\mathbf{x}}' \bar{Q} \bar{\mathbf{x}} + u^2) dt, \quad (4.1.78)$$

где

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}. \quad (4.1.79)$$

Используя процедуру 4.1.1, получим искомое управление

$$u = \bar{\mathbf{c}}' \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}' \mathbf{x} + \mathbf{c}'_{\mathcal{M}} \mathbf{x}_{\mathcal{M}}. \quad (4.1.80)$$

Заметим, что «объект» (4.1.76) не вполне управляем (так как управление не воздействует на модель (4.1.70)), но стабилизируем в силу асимптотической устойчивости эталонной модели. В связи с этим уравнение Риккати распадается на несколько алгебраических уравнений: линейных и нелинейных. Приведём часть этих уравнений. Запишем вначале уравнение (4.1.5)

$$P\bar{A} + \bar{A}'P - P\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}'A + Q = 0, \quad (4.1.81)$$

которое в развёрнутой форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} P_{11}\bar{\mathbf{b}} \\ P_{21}\bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \times \left[ (P_{11}\bar{\mathbf{b}}) \quad (P_{21}\bar{\mathbf{b}})' \right] + \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.82)$$

Искомый вектор

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}_{\mathcal{M}} \end{bmatrix} = - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11}\bar{\mathbf{b}} \\ P_{21}\bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix}. \quad (4.1.83)$$

Распишем подробнее (4.1.82)

$$P_{11}A + A'P_{11} - P_{11}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}'P_{11} = -Q, \quad (4.1.84)$$

$$P_{21}A + A'_{\mathcal{M}}P_{21} - P_{21}\bar{\mathbf{b}}(P_{11}\bar{\mathbf{b}})' = Q. \quad (4.1.85)$$

Из (4.1.82) следует ещё два матричных уравнения, которые опущены, поскольку их решения не влияют на формирование искомого вектора  $\bar{c}$ . Они приведены в п. 10.2.

Решая нелинейное уравнение (4.1.84) и подставляя  $P_{11}$  в (4.1.85), получим линейное уравнение для определения матрицы  $P_{21}$ .

## 4.2. Частотные свойства оптимальных систем

### 4.2.1. Условие оптимальности в частотной форме

Рассмотрим полностью управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4.2.1)$$

с управлением

$$u = c'x, \quad (4.2.2)$$

оптимальным в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u^2) dt, \quad (4.2.3)$$

где  $Q$  – положительно-определённая либо неотрицательная матрица, удовлетворяющая условию (4.1.16).

Уравнения (4.1.4), (4.1.5), с помощью которых было получено оптимальное управление (4.2.2), называются *алгебраическими условиями оптимальности*. Выведём частотную форму этих условий. Для этого прибавим и вычтем из левой части (4.1.5) матрицу  $sP$  и умножим полученное равенство слева на  $b'(-Es - A)^{-1}$ , а справа на  $(Es - A)^{-1}b$ . Тогда

$$\begin{aligned} & b'(-Es - A)^{-1}[-PA + Ps - A'P - sP + Pbb'P - Q](Es - A)^{-1}b = \\ & = b'(-Es - A)^{-1}Pb + b'P(Es - A)^{-1}b + b'(-Es - A)^{-1}Pbb'P(Es - A)^{-1}b - \\ & - b'(-Es - A)^{-1}Q(Es - A)^{-1}b = 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Представим  $Q = H'H$  и обозначим

$$h(s) = H(Es - A)^{-1}b, \quad (4.2.5)$$

$$w_{paz}(s) = -c'(Es - A)^{-1}b, \quad (4.2.6)$$

где  $w_{paz}(s)$  – передаточная функция системы (4.2.1), (4.2.2), разомкнутой на выходе объекта.

Соотношение (4.2.4) принимает с учётом этих обозначений вид

$$w_{paz}(-s) + w_{paz}(s) + w_{paz}(-s)w_{paz}(s) = \sum_{i=1}^n h_i(-s)h_i(s), \quad (4.2.7)$$



где  $h_i(-s)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – компоненты вектора  $\mathbf{h}(s)$ .

Прибавляя к обеим частям этого тождества единицу, получим связь передаточной функции разомкнутой системы с коэффициентами функционала оптимизации

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = 1 + \sum_{i=1}^n h_i(-s)h_i(s). \quad (4.2.8)$$

Положим  $s = j\omega$  и приходим к следующему заключению.

Утверждение 4.2.1. Условием оптимальности системы (4.2.1), (4.2.2) в системе функционала (4.2.3) в частотной форме является тождество

$$[1 + w_{paz}(-j\omega)][1 + w_{paz}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.2.9)$$

■

Пусть регулятор 4.2.2 получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы. Приведём условие оптимальности в частотной форме для этого случая.

Прибавим и вычтем из левой части (4.1.40) матрицу  $sP$  и умножим результат слева на  $\mathbf{b}'(-Es - A)^{-1}$ , а справа на  $(Es - A)^{-1}\mathbf{b}$ , тогда аналогично (4.2.4)-(4.2.6) получим тождество

$$w_{paz}(-j\omega) + w_{paz}(j\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.2.10)$$

которое называется *условием оптимальности по критерию обобщённой работы в частотной форме*.

#### 4.2.2. Запасы устойчивости

Запишем тождество (4.2.9) в виде следующих эквивалентных соотношений

$$w_{paz}(-j\omega) + w_{paz}(j\omega) + w_{paz}(-j\omega)w_{paz}(j\omega) = \psi(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.2.11)$$

$$2a(\omega) \cos \varphi(\omega) + a^2(\omega) = \psi(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.2.12)$$

где  $a(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  – амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики разомкнутой на входе объекта оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2)

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) = \sum_{i=1}^n |h_i(j\omega)|^2. \quad (4.2.13)$$

Очевидно, что

$$\psi(\omega) \geq 0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.2.14)$$

Из тождества (4.2.11), (4.2.12) нетрудно получить, учитывая неравенство (4.2.14), границы запасов устойчивости. Причём эти границы не зависят от численных значений параметров матрицы  $Q$  в функционале (4.2.3).

Теорема 4.2.1. Оптимальная, в смысле функционала (4.2.3), система (4.2.1), (4.2.2) обладает запасами устойчивости:

$$\text{по фазе:} \quad \varphi_3 \geq 60^\circ, \quad (4.2.15)$$

$$\text{по модулю:} \quad L \geq 2. \quad (4.2.16)$$

■

Доказательство теоремы приведено в 4.Д.2.

Утверждение 4.2.2. Радиус запасов устойчивости оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2)

$$r \geq 1. \quad (4.2.17)$$

■

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из (4.2.9). Действительно, левую часть этого тождества можно записать как

$$[1 + w_{paz}(-j\omega)][1 + w_{paz}(j\omega)] = [1 + \operatorname{Re} w_{paz}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{paz}(j\omega). \quad (4.2.18)$$

Учитывая, что  $\psi(\omega) \geq 0$ , заключаем

$$[1 + \operatorname{Re} w_{paz}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{paz}(j\omega) \geq 1. \quad (4.2.19)$$

Отсюда, в соответствии с определением 2.2.1, следует (4.2.17). Если использовать таблицу 2.2.1, то из (4.2.19) следуют границы (4.2.15), (4.2.16) запасов устойчивости.

Утверждение 4.2.3. Система (4.2.1), (4.2.2), регулятор (4.2.2) которой получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы, обладает запасами устойчивости

$$\varphi_3 \geq 90^\circ, \quad L \rightarrow \infty. \quad (4.2.20)$$

■

Доказательство утверждения следует непосредственно из тождества (4.2.10). Действительно, его левую часть можно представить, как

$$w_{paz}(-j\omega) + w_{paz}(j\omega) = 2 \operatorname{Re} w_{paz}(j\omega). \quad (4.2.21)$$

Учитывая (4.2.14), заключаем, что

$$\operatorname{Re} w_{paz}(j\omega) \geq 0. \quad (4.2.22)$$

Это неравенство означает, что годограф АФЧХ системы (4.2.1), (4.2.2) не выходит за пределы первого и четвертого квадрантов плоскости  $\operatorname{Re} w_{paz}(j\omega)$ ,  $\operatorname{Im} w_{paz}(j\omega)$ .

По определению запаса устойчивости по модулю отсюда следует, что  $L \rightarrow \infty$ .

На множестве частот  $a(\omega_{cp}) = 1$  можно записать неравенство (4.2.22) как

$$a(\omega_{cp}) \cos \varphi(\omega_{cp}) = \cos \varphi(\omega_{cp}) \geq 0.$$

Отсюда следует, что  $\varphi_3 \geq 90^\circ$ .

4.2.3. Объекты второго вида

Рассмотрим систему (4.1.42), (4.1.43), оптимальную в системе функционала (4.1.45).  
Её передаточная функция

$$w_{pas}(s) = -\check{c}'(Es - \check{A})^{-1}\check{b} \quad (4.2.23)$$

удовлетворяет соотношению (4.2.8), в котором

$$h(s) = H(Es - \check{A})^{-1}\check{b}, \quad (4.2.24)$$

где

$$H = \text{diag} \left[ \sqrt{q_{11}} \quad \sqrt{q_{22}} \quad \cdots \quad \sqrt{q_{\delta\delta}} \mid 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right]. \quad (4.2.25)$$

Нетрудно проверить, используя (3.4.5), что

$$\check{\beta}(s) = (Es - \check{A})^{-1}\check{b} = \left[ 1 \quad s \quad s^2 \quad \cdots \quad s^{n-1} \right] \frac{1}{d(s)}, \quad (4.2.26)$$

где

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1s + d_0 = \det(Es - \check{A}), \quad (4.2.27)$$

и, следовательно,

$$w_{pas}(s) = -\frac{\check{c}(s)}{d(s)}, \quad h(s) = \left[ \sqrt{q_{11}} \quad \sqrt{q_{22}}s \quad \cdots \quad \sqrt{q_{\delta\delta}}s^{\delta-1} \mid 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right], \quad (4.2.28)$$

где

$$\check{c}(s) = \sum_{i=1}^n \check{c}_i s^{i-1}. \quad (4.2.29)$$

Подставим эти выражения в (4.2.8). Тогда

$$\left[ 1 - \frac{\check{c}(-s)}{d(-s)} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\check{c}(s)}{d(s)} \right] = 1 + \frac{1}{d(-s)d(s)} \sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} s^{2(i-1)} (-1)^{i-1}. \quad (4.2.30)$$

Умножая на  $d(-s)d(s)$ , получим соотношение

$$[d(-s) - \check{c}(-s)][d(s) - \check{c}(s)] = d(-s)d(s) + \sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} s^{2(i-1)} (-1)^{i-1}, \quad (4.2.31)$$

связывающее характеристический полином  $d(s) - \check{c}(s)$  оптимальной системы с коэффициентами функционала оптимизации.

Рассмотрим объект (4.1.42) с реализуемым регулятором (4.1.50).

Передаточная функция этой системы

$$w_{pas}(s) = -\frac{\tilde{r}(s)}{d(s)g(s)}. \quad (4.2.32)$$

Утверждение 4.2.4. Передаточная функция (4.2.32) системы (4.1.42), (4.1.50), оптимальной в смысле функционала (4.1.49), удовлетворяет тождеству

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = \left[ \frac{1 + \sum_{i=1}^{\psi} \varepsilon_i^2 s^{2i} (-1)^i}{g(-s)g(s)} + \frac{\sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} s^{2(i-1)} (-1)^{(i-1)}}{d(-s)d(s)g(-s)g(s)} \right]. \quad (4.2.33)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.3.

Очевидно, что запасы устойчивости оптимальной системы (4.1.42), (4.1.43) удовлетворяют неравенствам (4.2.15), (4.2.16). Для системы (4.1.42), (4.1.50) трудно доказать, что она обладает такими запасами устойчивости. Эта трудность состоит в проверке неравенства

$$\left[ \frac{1 + \sum_{i=1}^{\psi} \varepsilon_i \omega^{2i}}{g(-j\omega)g(j\omega)} + \frac{\sum_{i=1}^{\delta} q_{ii} \omega^{2(i-1)}}{d(-j\omega)d(j\omega)g(-j\omega)g(j\omega)} \right] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.2.34)$$

в котором коэффициенты полинома  $g(s)$  неявно зависят от  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) и  $q_{ii}$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ).

#### 4.2.4. Эталонная модель\*

Найдём связь векторов  $\mathbf{c}_q$  и  $\mathbf{c}_m$  управления (4.1.80) с коэффициентом  $q$  функционала оптимизации (4.1.73). Эти вектора

$$\mathbf{c} = -P_{11}\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_m = -P_{21}\mathbf{b}, \quad (4.2.35)$$

где  $P_{11}$  и  $P_{21}$  – решения матричных уравнений (4.1.84), (4.1.85). Исключим матрицы  $P_{11}$  и  $P_{21}$  из этих уравнений и равенств (4.2.35). Уравнение (4.1.84) с точностью до обозначений совпадает с (4.1.5), и поэтому справедливо тождество (4.2.8), которое запишем в более подробной форме

$$[1 + \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-s)][1 + \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(s)] = 1 + q\boldsymbol{\beta}'(-s)\mathbf{U}'\boldsymbol{\beta}(s), \quad (4.2.36)$$

где  $\boldsymbol{\beta}(s) = (Es - A)^{-1}\mathbf{b}$ .

Уравнение (4.1.85) представим как

$$P_{21}A^3 + A'_m P_{21} = Q, \quad (4.2.37)$$

где

$$A^3 = A - \mathbf{b}(P_{11}\mathbf{b})' = A + \mathbf{b}\mathbf{c}'. \quad (4.2.38)$$

Запишем (4.2.37) в виде

$$P_{21}(Es - A^3) + (-Es - P_m)'P_{21} + Q = 0.$$

Умножим это тождество слева на  $\mathbf{k}'(-Es - P_m)^{-1'}$ , а справа на  $(Es - A^3)^{-1}\mathbf{b}$ . Тогда получим

$$\mathbf{k}'(-Es - P_m)^{-1'}[(Es - P_m)'P_{21} + P_{21}(Es - A^3) + Q](Es - A^3)^{-1}\mathbf{b} = 0. \quad (4.2.39)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  – произвольный  $n$ -мерный вектор, удовлетворяющий лишь условию полной управляемости пары  $(\mathbf{k}, P_m)$ .

Из (4.2.39) следует, что

$$\mathbf{k}'P_{21}(Es - A^3)^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{k}'(-Es - P_m)^{-1}P_{21}\mathbf{b} + \mathbf{k}'(-Es - P_m)^{-1'}Q(Es - A^3)^{-1}\mathbf{b} = 0.$$

Введя обозначения

$$\beta^3(s) = (Es - A^3)^{-1}\mathbf{b}, \quad \beta_m(s) = (Es - P_m)^{-1}\mathbf{k}, \quad (4.2.40)$$

получим окончательно

$$-\delta'\beta^3(s) - \mathbf{c}'_m\beta^m(-s) + q\beta^m(-s)l'\beta^3(s) = 0, \quad (4.2.41)$$

где

$$\delta = -P'_{21}\mathbf{k}. \quad (4.2.42)$$

Таким образом, тождества (4.2.36) и (4.2.41) связывают вектора  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{c}_m$  с коэффициентом  $q$  функционала оптимизации.

### 4.3. Точность и качество

#### 4.3.1. Установившиеся ошибки (ступенчатые воздействия)

Пусть оптимальная, в смысле функционала (4.2.3), система (4.2.1), (4.2.2) подвержена ступенчатым внешним возмущениям в местах приложения управления.

Тогда она описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + f), \quad u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad z = l'\mathbf{x}. \quad (4.3.1)$$

Регулируемая переменная  $z(t)$  связана с внешним возмущением соотношением (3.4.49)

$$z = \frac{l'\beta(s)}{1 + w_{pa3}(s)} \cdot \frac{f^*}{s}, \quad (4.3.2)$$

из которого следует установившаяся ошибка

$$z_{cm} = \lim_{s \rightarrow \infty} sz(s) = \frac{l'\beta(0)}{1 + w_{pa3}(0)} \cdot f^*. \quad (4.3.3)$$

Далее будем полагать, что функционал (4.2.3) имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} (qz^2 + u^2) dt, \quad q > 0. \quad (4.3.4)$$

В этом случае связь передаточной функции разомкнутой оптимальной системы с числом  $q$  записывается в соответствии с (4.2.8) как

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = 1 + q\beta'(-s)\mathbf{l}'\beta(s). \quad (4.3.5)$$

Подставляя это выражение при  $s = 0$  в (4.3.3), находим выражение установившейся ошибки через коэффициент  $q$  функционала оптимизации (4.3.4)

$$z_{cm}^2 = \frac{[\mathbf{l}'\beta(0)]^2}{1 + q[\mathbf{l}'\beta(0)]^2} \cdot f^{*2}. \quad (4.3.6)$$

Для объектов второго вида

$$\mathbf{l}'\beta(s) = \frac{1}{d(s)} \quad (4.3.7)$$

(это следует из (4.2.26) и равенства  $z = y$ ). Тогда установившаяся ошибка (4.3.6)

$$z_{cm}^2 = \frac{f^{*2}}{d^2(0) + q}. \quad (4.3.8)$$

Пусть регулятор системы (4.2.1), (4.2.2) получен в результате процедуры 4.1.2 АКОР по критерию обобщённой работы. Тогда передаточная функция этой системы удовлетворяет тождеству (4.2.10)

$$w_{paz}(-s) + w_{paz}(s) = \sum_{i=1}^n h_i(-s)h_i(s). \quad (4.3.9)$$

Примем в уравнении Ляпунова (4.1.39) процедуры 4.1.2

$$Q = q\mathbf{l}'. \quad (4.3.10)$$

Тождество (4.3.7) запишется так

$$w_{paz}(-s) + w_{paz}(s) = q'\beta'(-s)\mathbf{l}'\beta(s). \quad (4.3.11)$$

Установившаяся ошибка в этой системе имеет (после подстановки (4.3.9) при  $s = 0$  в (4.3.3)) вид

$$z_{cm} = \frac{\mathbf{l}'\beta(0)}{1 + 0.5q[\mathbf{l}'\beta(0)]^2} \cdot f^*. \quad (4.3.12)$$

### 4.3.2. Переходные процессы

Запишем выражение (4.3.2) для регулируемой переменной как

$$z = \frac{b(s)}{d^u(s)} f(s), \quad (4.3.13)$$

где

$$b(s) = \mathbf{n}'(Es - A)\mathbf{b} = \mathbf{n}'\boldsymbol{\beta}(s)\frac{1}{d(s)}, \quad (4.3.14)$$

$$d^u(s) = d(s) - \mathbf{c}'(Es - A)\mathbf{b}. \quad (4.3.15)$$

При этих обозначениях тождество (4.3.5) принимает вид

$$d^u(-s)d^u(s) = d(-s)d(s) + qb(-s)b(s). \quad (4.3.16)$$

Рассмотрим полином в правой части этого тождества.

Представим

$$b(s) = b_\gamma \prod_{i=1}^{\gamma} (s - \nu_i), \quad (4.3.17)$$

где  $\nu_i$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ ) – корни полинома  $b(s)$ .

Пусть

$$\operatorname{Re} \nu_i \leq 0 \quad i = \overline{1, \gamma}. \quad (4.3.18)$$

Утверждение 4.3.1. При  $q \rightarrow \infty$  из  $n$  корней характеристического полинома  $d^u(s)$  замкнутой оптимальной системы  $\gamma$  корней приближаются к  $\nu_i$  ( $i = \overline{1, \gamma}$ ), оставшиеся  $n - \gamma$  корней этого полинома приближаются к прямым линиям, которые пересекаются в начале координат и образуют с отрицательной осью углы, равные

$$\left. \begin{array}{l} \pm l \frac{\pi}{n - \gamma} \quad l = 0, \frac{n - \gamma - 1}{2} \quad \text{если } n - \gamma - \text{нечётное число} \\ \pm \left( l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n - \gamma} \quad l = 0, \frac{n - \gamma}{2} - 1 \quad \text{если } n - \gamma - \text{чётное число} \end{array} \right\}. \quad (4.3.19)$$

Эти корни удалены от начала координат на расстояние

$$\omega_0 = \left( b^2 \gamma q \right)^{\frac{1}{2(n - \gamma)}}. \quad (4.3.20)$$

■

Указанное в утверждении распределение (4.3.19) называется *размещением (распределением) Баттерворта* порядка  $n - \gamma$  с радиусом  $\omega_0$ . На рис. 4.3.1 приведено размещение (4.3.19) для нескольких  $n - \gamma$ .

Полиномы Баттерворта, имеющие корни, показаны на рис. 4.3.1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1(s) &= s + \omega_0, \\ \mathfrak{x}_2(s) &= s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2, \\ \mathfrak{x}_3(s) &= s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3, \\ \mathfrak{x}_4(s) &= s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

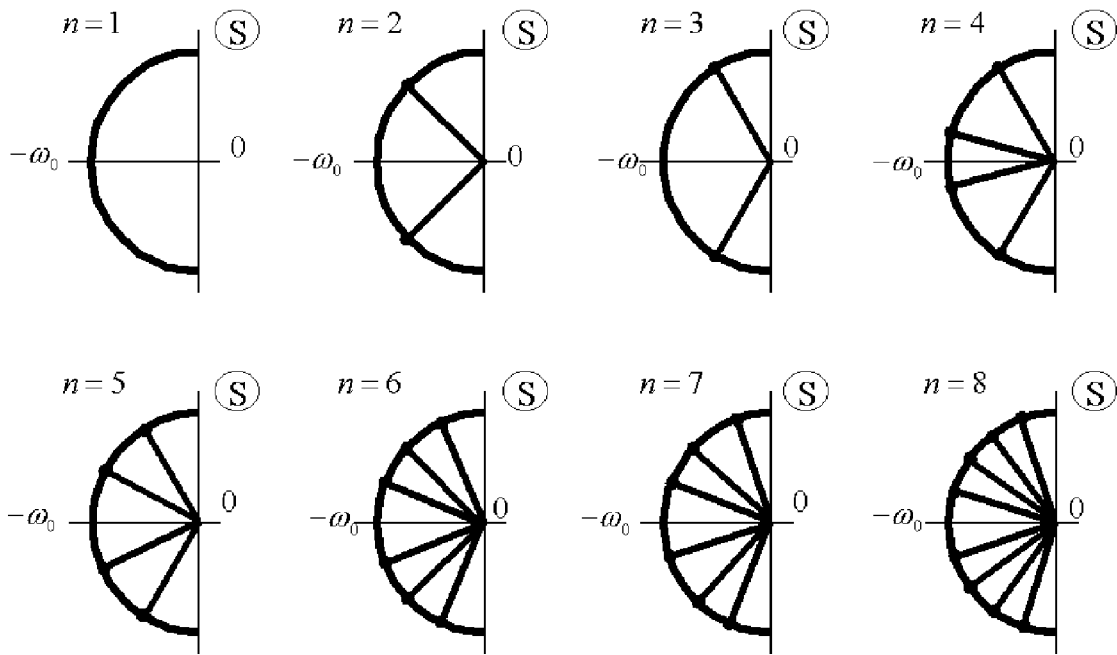


Рис. 4.3.1

Реакции систем, имеющих характеристический полином Баттерворта, на ступенчатое воздействие приведены на рис. 4.3.2.

Итак, при  $q \rightarrow \infty$

$$d^u(s) = \frac{1}{b_\gamma} b(s) \alpha_{n-\gamma}(s), \quad (4.3.22)$$

где  $\alpha_{n-\gamma}(s)$  – полином Баттерворта степени  $n - \gamma$ .

Подставляя это выражение в (4.3.13), получим

$$z = \frac{f(s) b_\gamma}{\alpha_{n-\gamma}(s)}. \quad (4.3.23)$$

Очевидно, что установившаяся ошибка

$$z_{cm} = \frac{f^*}{\sqrt{q}}. \quad (4.3.24)$$

Проанализируем графики, приведённые на рис. 4.3.2.

Нетрудно заметить, что при изменении  $n - \gamma$  от 2 до 8 время регулирования  $t_{рег} = 6/\omega_0 \div 20/\omega_0$ , а перерегулирования  $\sigma = 5\% \div 20\%$ .

Используя эти значения, составим эмпирическую зависимость

$$t_{рег} \approx \frac{3(n - \gamma)}{\omega_0}, \quad (4.3.25)$$

$$\sigma \approx 3(n - \gamma)\%. \quad (4.3.26)$$



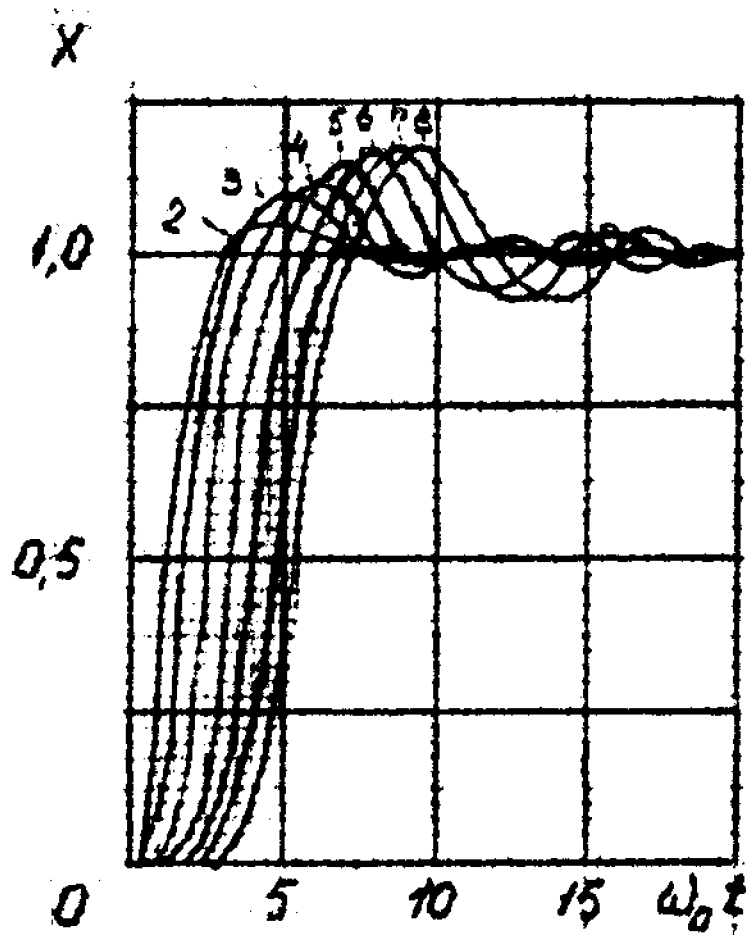


Рис. 4.3.2

### 4.3.3. Время регулирования

Столь явная зависимость времени регулирования от коэффициента  $q$  не всегда удобна. В связи с этим рассмотрим функционал

$$J = \int_0^{\infty} [q(z^2 + \tau^2 \dot{z}^2) + u^2] dt, \quad (4.3.27)$$

который отличается от (4.3.4) слагаемым, содержащим производную регулируемой переменной.

Пусть при этом объект (4.2.1) обладает дополнительным свойством

$$l'b = 0. \quad (4.3.27')$$

Покажем, что при таком функционале время регулирования оптимальной системы определяется (при достаточно больших  $q$ ) числом  $\tau$  ( $t_{рег} \approx 3\tau$ ).

Найдём условие оптимальности в смысле функционала (4.3.27) системы (4.2.1), (4.2.2) в частотной форме.

Вначале приведём этот функционал к стандартной форме (4.3.1). С учётом (4.3.22) найдём

$$\dot{z} = \mathbf{l}'\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{l}'(A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = \mathbf{l}'A\mathbf{x}.$$

Тогда (4.3.27) примет вид

$$J = \int_0^{\infty} [q\mathbf{x}'(\mathbf{U}' + \tau^2 A'\mathbf{U}'A)\mathbf{x}] dt. \quad (4.3.28)$$

Тождество (4.2.8) записывается для такого функционала как

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = 1 + q\mathbf{b}'(-Es - A)^{-1}(\mathbf{U}' + \tau^2 A'\mathbf{U}'A)(Es - A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.3.29)$$

Используя почти очевидное соотношение

$$A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E,$$

получим окончательно

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = 1 + q(1 - \tau^2 s^2)\boldsymbol{\beta}(-s)\mathbf{U}'\boldsymbol{\beta}(s).$$

Перепишем это тождество в форме

$$[d(-s) - c(-s)][d(s) - c(s)] = d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2)b(-s)b(s),$$

где  $c(s) = \mathbf{c}'(Es - A)\mathbf{b}$ .

Правая часть при достаточно больших  $q$  может быть представлена в виде

$$d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2)b(-s)b(s) \approx (1 + \tau s)b(s)(1 - \tau s)b(-s)\mathfrak{a}_{n-\gamma-1}(-s)\mathfrak{a}_{n-\gamma-1}(s).$$

Отсюда находим характеристический полином системы

$$d^u(s) \approx (1 + \tau s)b(s)\mathfrak{a}_{n-\gamma-1}(s). \quad (4.3.30)$$

Подставляя это выражение в (4.3.13), получим

$$z \approx \frac{f(s)}{(1 + \tau s)\mathfrak{a}_{n-\gamma-1}(s)}. \quad (4.3.31)$$

Отсюда следует, что время переходного процесса определяется полиномом Баттерворта (теперь уже степени  $n - \gamma - 1$ ) и величиной  $\tau$ .

Рассмотрим теперь системы с объектами второго вида.

Пусть функционал (4.1.45) имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} [q(y^2 + \tau^2 y^2) + u^2] dt. \quad (4.3.32)$$

Тогда тождество (4.2.31) запишется как

$$[d(-s) - \check{c}(-s)][d(s) - \check{c}(s)] = d(-s)d(s) + q(1 - \tau^2 s^2). \quad (4.3.33)$$

Аналогично (4.3.31) имеем

$$d^u(s) \approx (1 + \tau s)\mathfrak{a}_{n-1}(s), \quad (4.3.34)$$

и, следовательно,

$$z \approx \frac{f(s)}{(1 + \tau s)\mathfrak{a}_{n-1}(s)}. \quad (4.3.35)$$

#### 4.3.4. Гармонические воздействия

Пусть внешнее возмущение

$$f(t) = f_{zapm} \sin \omega^f t. \quad (4.3.36)$$

Амплитуда вынужденных колебаний системы (4.2.1), (4.2.2), оптимальной в смысле функционала (4.3.3), определяется на основе (4.3.23) как

$$z_{zapm} \approx \frac{f_{zapm} b_\gamma}{|\mathfrak{a}_{n-\gamma}(j\omega^f)|}. \quad (4.3.37)$$

Для систем оптимальных в смысле функционала (4.3.27), а также для систем с объектами второго вида нетрудно записать, на основе (4.3.31), (4.3.35), аналогичные выражения для амплитуды регулируемой переменной.

Рассмотрим систему оптимальную по критерию обобщённой работы. Вначале получим из (4.3.2) выражение

$$z_{zapm} = \frac{|l'\beta(j\omega^f)|}{|1 + w_{paz}(j\omega^f)|} \cdot f_{zapm}. \quad (4.3.38)$$

Представим (4.3.11) как

$$[1 + w_{paz}(-s)][1 + w_{paz}(s)] = 1 + w_{paz}(-s)w_{paz}(s) + q\beta'(-s)l'\beta(s). \quad (4.3.39)$$

Тогда

$$|1 + w_{paz}(j\omega)|^2 = 1 + |w_{paz}(j\omega)|^2 + q|l'\beta(j\omega)|^2 \geq 1 + q|l'\beta(j\omega_f)|^2, \quad (4.3.40)$$

и следовательно

$$z_{zapm} \leq \frac{|l'\beta(j\omega^f)|}{1 + q|l'\beta(j\omega_f)|^2} \cdot f_{zapm}. \quad (4.3.41)$$

4.3.5. Показатель колебательности

Управляющая переменная  $u(t)$  в системе (4.3.1) связана с внешним возмущением соотношением (3.4.48)

$$u = \frac{w_{paz}(s)}{1 + w_{paz}(s)} f.$$

При гармоническом воздействии (4.3.36) амплитуда установившихся колебаний по управлению

$$u_{zapm} = \frac{|w_{paz}(j\omega^f)|}{|1 + w_{paz}(j\omega^f)|} f_{zapm} = M(\omega^f) f_{zapm}, \quad (4.3.42)$$

где  $M(\omega^f)$  – значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы.

Аналогичным соотношением связана измеряемая переменная системы (4.1.42), (4.1.43) с объектом второго вида с задающим воздействием, приложенным ко входу регулятора. Действительно, эта система такого воздействия описывается уравнениями

$$d(s)y = u, \quad u = r(s)(y - v). \quad (4.3.43)$$

Следовательно,

$$y = -\frac{r(s)}{d(s) - r(s)} v = -\frac{w_{paz}(s)}{1 + w_{paz}(s)} v.$$

При  $v = v_{zapm} \sin \omega t$

$$y_{zapm} = \frac{|w_{paz}(j\omega^v)|}{|1 + w_{paz}(j\omega^v)|} v_{zapm} = M(\omega^v) v_{zapm}. \quad (4.3.44)$$

Максимальные (и не зависящие от  $\omega^f$  либо  $\omega^v$ ) значения  $u_{zapm}$  и  $y_{zapm}$  определяется показателем колебательности

$$M = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} M(\omega).$$

Утверждение 4.3.2. Система (4.2.1), (4.2.2), оптимальная в смысле функционала (4.2.3) имеет показатель колебательности

$$M \leq 2. \quad (4.3.45)$$

Если эта система оптимальна по критерию обобщённой работы, то

$$M \leq 1. \quad (4.3.46)$$

■

Докажем первое из этих неравенств.

В соответствии с определением

$$M = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \frac{|w_{paz}(j\omega)|}{|1 + w_{paz}(j\omega)|} = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \frac{a(\omega)}{\sqrt{[1 + w_{paz}(-j\omega)][1 + w_{paz}(j\omega)]}}. \quad (4.3.47)$$

Решая уравнение (4.2.12), находим

$$a(\omega) = -\cos \varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2 \varphi(\omega) + \psi(\omega)}. \quad (4.3.48)$$

Подставим это выражение, вместе с условием (4.2.9) оптимальности в частотной форме, в (4.3.47)

$$\begin{aligned} M &= \max_{0 \leq \omega \leq \infty} \frac{-\cos \varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2 \varphi(\omega) + \psi(\omega)}}{\sqrt{1 + \psi(\omega)}} \leq \\ &\leq \max_{\substack{-1 \leq \cos \varphi(\omega) \leq 1 \\ 0 \leq \psi(\omega) \leq \infty}} \frac{-\cos \varphi(\omega) + \sqrt{\cos^2 \varphi(\omega) + \psi(\omega)}}{\sqrt{1 + \psi(\omega)}} = \\ &= \max_{0 \leq \psi(\omega) \leq \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \psi(\omega)}}{\sqrt{1 + \psi(\omega)}} = \max_{0 \leq \psi(\omega) \leq \infty} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \psi(\omega)}} \right] = 2. \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

Для доказательства неравенства (4.3.46) рассмотрим выражение (4.3.47) с учётом условия (4.2.10) оптимальности по критерию обобщённой работы

$$\frac{a(\omega)}{\sqrt{1 + w_{paz}(-j\omega) + w_{paz}(j\omega) + a^2(\omega)}} = \frac{a(\omega)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) + a^2(\omega)}}. \quad (4.3.50)$$

Так как  $\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \geq 0$ , то  $M \leq 1$ .

#### 4.3.6. Частота среза (полоса пропускания)

Введём в рассмотрение некоторую частоту  $\bar{\omega}_{cp}$ , определяемую равенством

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\bar{\omega}_{cp})h_i(j\bar{\omega}_{cp}) = 1. \quad (4.3.51)$$

Будем называть  $\bar{\omega}_{cp}$  *прогнозируемой частотой среза*. Сравним эту частоту с частотой среза  $\omega_{cp}$  системы (4.2.1), (4.2.2). По определению

$$a(\omega_{cp}) = |w_{paz}(j\omega_{cp})| = 1. \quad (4.3.52)$$

Утверждение 4.3.3. Частота среза системы (4.2.1), (4.2.2), оптимальной в смысле функционала (4.2.3), отличается от прогнозируемой частоты  $\bar{\omega}_{cp}$  не более чем в 2.5 раза (на 0.4 декады). ■

Действительно, из (4.3.48) при  $\omega = \bar{\omega}_{cp}$  следует с учётом (4.2.13).

Из неравенств  $-1 \leq \cos \varphi(\bar{\omega}_{cp}) \leq 1$  следует, что  $0.4 \leq a(\bar{\omega}_{cp}) \leq 2.4$  или

$$\text{mod } 20 \lg a(\bar{\omega}_{cp}) \leq 8 \text{ дб.}$$

Предполагая, что наклон ЛАЧХ разомкнутой системы в окрестности не менее 20 дБ/дек, имеем

$$\text{mod } [\lg \bar{\omega}_{cp} - \lg \omega_{cp}] \leq 0.4 \text{ дек.} \quad \left( \text{mod } \lg \frac{\bar{\omega}_{cp}}{\omega_{cp}} \leq 0.4 \text{ дек.} \right).$$

Таким образом, при дополнительном предположении о наклоне ЛАЧХ утверждение доказано.

Если функционал оптимизации имеет вид (4.3.4), то уравнение (4.3.51) для определения частоты  $\bar{\omega}_{cp}$  записывается как

$$q\beta'(-j\bar{\omega}_{cp})\mathbf{U}'\beta(j\bar{\omega}_{cp}) = 1, \quad (4.3.53)$$

а для систем с объектами (4.1.42) второго вида это соотношение принимает простую форму

$$\frac{q}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1. \quad (4.3.54)$$

## 4.4. Синтез регуляторов

### 4.4.1. Объекты первого вида

Приведём решение классической задачи 2.3.1 синтеза регуляторов. Уточним её формулировку.

Задача 4.4.1. Для объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(u + f), \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x} \quad (4.4.1)$$

найти регулятор

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (4.4.2)$$

такой, чтобы система (4.4.1), (4.4.2):

- а) была асимптотически устойчивой (при  $f = 0$ );
- б) удовлетворяла требованию к точности

$$|z_{cm}| \leq z^* \quad (4.4.3)$$

( $z^*$  – заданное число);

- в) имела показатели качества переходных процессов по регулируемой переменной

$$t_{peg} \leq \bar{t}_{peg}, \quad \sigma \leq \bar{\sigma}, \quad (4.4.4)$$

где  $t_{peg}$  и  $\bar{\sigma}$  – заданные числа;

- г) была грубой (обладала запасами устойчивости  $\varphi_a \geq 30^\circ$ ,  $L \geq 2$ ).

Примечание 4.4.1. В задаче 3.3.1 имеется задающее воздействие, а внешнее возмущение отсутствует. Поэтому внешнее возмущение в уравнении (4.4.1) интерпретируем как задающее воздействие.

Действительно, систему (4.4.1), (4.4.2) можно записать в эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}, \quad u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + kv, \quad (4.4.5)$$

где  $kv = f$ , и поэтому  $t_{pez}$  и  $\sigma$  соответствуют определениям 2.3.1, 2.3.2.

Решение сформулированной задачи сводится к решению задачи АКОР с функционалом

$$J = \int_0^{\infty} (qz^2 + u^2) dt. \quad (4.4.6)$$

Действительно, пусть  $q$  – произвольное положительное число. Решая задачу АКОР, получим регулятор (4.4.2), который в соответствии с теоремой 4.2.1 обеспечивает выполнение требований а) и г) задачи 4.4.1.

Определим значение  $q$ , исходя из условий б) и в) этой задачи.

Из (4.3.6) и (4.3.3) следует, что при

$$q \geq \frac{f^{*2}}{z^{*2}}, \quad (4.4.7)$$

регулятор (4.4.2) обеспечивает требование к точности (4.4.3). При этом предполагается, что справедливо соотношение

$$q[l'\beta(0)]^2 \gg 1, \quad (4.4.8)$$

которое для астатических объектов выполняется автоматически.

Для выполнения неравенств (4.4.4) используем эмпирическое соотношение (4.3.25), которое, с учётом (4.3.20), принимает вид

$$t_{pez} = \frac{3(n - \gamma)}{(b_\gamma^2 q)^{\frac{1}{2(n-\gamma)}}}. \quad (4.4.9)$$

Отсюда

$$q \geq \frac{1}{b_\gamma^2} \left[ \frac{3(n - \gamma)}{t_{pez}} \right]^{2(n-\gamma)}. \quad (4.4.10)$$

Перерегулирование однозначно определяется степенью полинома Баттерворта. Если  $\bar{\sigma} = 10\%$ , а  $n - \gamma = 8$ , то необходимо вводить в функционал (4.4.6) производные регулируемой переменной и тогда степень полинома Баттерворта понижается.

Действительно, пусть функционал оптимизации имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} \left[ q \left( z + \tau_1 \dot{z} + \tau_2 \ddot{z} + \dots + \tau_\delta z^{(\delta)} \right)^2 + u^2 \right] dt, \quad (4.4.11)$$

где положительные коэффициенты  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ) таковы, что полином

$$\tau(s) = 1 + \tau_1 s + \tau_2 s^2 + \dots + \tau_\delta s^\delta \quad (4.4.12)$$

имеет отрицательные вещественные части.

Пусть также выполняются равенства

$$\mathbf{n}'\mathbf{b} = \mathbf{n}'A\mathbf{b} = \dots = \mathbf{n}'A^{\delta-1}\mathbf{b} = 0. \quad (4.4.13)$$

При этом условии получим, повторяя изложенное в п. 4.3.3, характеристический полином оптимальной, в смысле функционала (4.4.11), системы

$$d^\mu(s) = \tau(s)b(s)\mathfrak{x}_{n-\gamma-\delta}(s). \quad (4.4.14)$$

Параметры полинома  $\tau(s)$  выберем так, чтобы его корни были по модулю существенно больше числа  $\frac{1}{\bar{t}_{pez}}$ .

Примем

$$\tau(s) = (1 + \tau s)^\delta, \quad (4.4.15)$$

где

$$\tau < \bar{t}_{pez}. \quad (4.4.16)$$

Тогда время переходного процесса и перерегулирования в оптимальной системе будут определяться полиномом  $\mathfrak{x}_{n-\gamma-\delta}(s)$ .

Резюмируем изложенное в форме следующей процедуры.

Процедура 4.4.1. (Процедура аналитического синтеза регуляторов) состоит из операций

а) Найти передаточную функцию объекта (4.4.1)

$$w_{zf}(s) = \mathbf{l}'\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{b_z(s)}{d(s)}, \quad (4.4.17)$$

связывающую регулируемую переменную  $z$  и внешнее возмущение (или управляющее воздействие), и убедиться, что все корни полинома  $b_z(s)$  имеют отрицательные вещественные части.

б) По заданной величине перерегулирования  $\bar{\sigma}$  определить максимальную степень ( $\mu$ ) полинома Баттерворта и проверить неравенство

$$n - \gamma \leq \mu. \quad (4.4.18)$$

Если оно нарушается, то найти число  $\delta$  из (4.1.13) и убедиться в выполнении неравенства

$$n - \gamma - \delta \leq \mu. \quad (4.4.19)$$



в) Сформировать в соответствии (4.4.15), (4.4.16) полином  $\tau(s)$  и определить коэффициенты  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, \delta}$ ) функционала (4.4.11).

г) Найти коэффициент  $q$  этого функционала

$$q \geq \max \left\{ \frac{f^{*2}}{z^{*2}}, \frac{1}{[l'\beta(0)]^2}, \frac{1}{b_\gamma^2} \left[ \frac{3(n - \gamma - \delta)}{\bar{t}_{pez}} \right]^{2(n - \gamma - \delta)} \right\}. \quad (4.4.20)$$

д) Решить задачу АКОР для объекта (4.4.1) (при  $f = 0$ ) с функционалом (4.4.11), который после исключения производных с учётом (4.4.13) принимает вид

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + u^2) dt, \quad (4.4.21)$$

где

$$Q = q (\mathbf{n} + \tau_1 A' \mathbf{n} + \dots + \tau_\delta A^{(\delta-1)'} \mathbf{n}) (\mathbf{n}' + \tau_1 \mathbf{n}' A + \dots + \tau_\delta \mathbf{n}' A^{(\delta-1)}). \quad (4.4.22)$$

■

Пример 4.4.1. Продольное движение транспортного самолёта в крейсерском режиме описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.0158 & 0.02633 & -9.810 & 0 \\ -0.1571 & -1.030 & 0 & 120.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0005274 & -0.01652 & 0 & -1.466 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -9.496 \\ 0 \\ -5.565 \end{bmatrix} [u(t) + f(t)], \end{aligned}$$

где  $x_1(t)$  – приращение скорости по оси  $x$  (ось  $x$  – продольная ось самолёта),  $x_2(t)$  – скорость по оси  $z$  (ось  $z$  – перпендикулярна оси  $x$ ),  $x_3(t)$  – тангаж,  $x_4(t)$  – угловая скорость по тангажу,  $u(t)$  – отклонение руля высоты.

Регулируемой переменной является угол тангажа

$$z = x_3. \quad (4.4.23)$$

Порыв ветра моделируется ступенчатой функцией

$$|f(t)| \leq 1. \quad (4.4.24)$$

Требуется определить коэффициенты регулятора

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4. \quad (4.4.25)$$

такие, чтобы ошибка по учёту тангажа

$$|z_{cm}| \leq 0.1, \quad (4.4.26)$$

а время регулирования и перерегулирования не превышали значений

$$\bar{t}_{pez} = 1, \quad \bar{\tau} = 10\%. \quad (4.4.27)$$

**Операция а)** В соответствии с первой операцией процедуры 4.1.1 найдём передаточную функцию

$$w_{zf}(s) = -\frac{5.565s^2 + 5.663s + 0.1112}{s^4 + 2.51s^3 + 3.544s^2 + 0.06487s + 0.03079} = \frac{b_z(s)}{d(s)} \quad (4.4.28)$$

Полином

$$b_z(s) = -5.565 \left( s^2 + \frac{5.663}{5.565}s + \frac{0.1112}{5.565} \right) \quad (4.4.29)$$

имеет корни

$$\nu_1 = -0.02004, \quad \nu_2 = -0.9976. \quad (4.4.30)$$

**Операция б)** Из графиков рис. 4.3.2 находим максимальное значение ( $\mu = 4$ ) степени полинома Баттерворта, при которой  $\bar{\sigma} = 10\%$ , и убеждаемся, что неравенство (4.4.18) выполняется, так как  $n = 4$ , а  $\gamma = 2$ .

**Операция в)** На основе (4.4.18) полагаем  $\sigma = 0$ , и тогда  $\tau(s) = 1$ .

**Операция г)** Найдём коэффициент  $q$  функционала (4.4.6). Очевидно, что

$$\frac{f^{*2}}{z^{*2}} = 100, \quad \frac{1}{[\mathbf{n}'\beta(0)]^2} = \left( \frac{0.03079}{0.1112} \right)^2, \quad \frac{1}{b_\gamma^2} \left[ \frac{3(n-\gamma)}{\bar{t}_{pez}} \right]^{2(n-\gamma)} = \left( \frac{6}{1} \right)^4 \frac{1}{(5.565)^2} = 41.$$

Принимаем

$$q = 100.$$

**Операция д)** Решая задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^\infty (100x_3^2 + u^2) dt \quad (4.4.31)$$

на движениях объекта (4.4.22) при  $f = 0$ , получим искомое управление

$$u = 0.0001174x_1 + 0.002813x_2 - 10x_3 - 1.619x_4. \quad (4.4.32)$$

Проанализируем синтезированную систему. Её характеристический полином

$$d^u(s) = s^4 + 11.49s^3 + 66.43s^2 + 56.84s + 1.112 \quad (4.4.33)$$

имеет корни

$$s_1 = -0.02004, \quad s_2 = -0.9953, \quad s_{3,4} = 5.239 \pm j5.323. \quad (4.4.34)$$

Нетрудно заметить, что первые два корня близки к нулям передаточной функции (4.4.28).

Моделирование системы показало, что регулятор (4.4.33) обеспечивает выполнение требований к её точности и качеству. ■

#### 4.4.2. Объекты второго вида

Пусть дан объект управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = u + f \quad (4.4.35)$$

и требуется найти регулятор

$$u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y, \quad (4.4.36)$$

такой, чтобы удовлетворялись требования к точности

$$|y_{cm}| \leq y^*, \quad (4.4.37)$$

качеству

$$t_{peg} \leq \bar{t}_{peg}, \quad \sigma \leq \bar{\sigma}$$

и грубости

$$\varphi_3 \geq 30^\circ, \quad L \geq 2.$$

Используя обозначения п.4.1.3, сводим эту задачу к задаче 4.4.1 и затем используем процедуру 4.1.1. При этом, как нетрудно проверить, равенства (4.4.13) выполняются для всех  $\delta$  от 1 до  $n$ . Этим снимается ограничение (4.4.19) процедуры.

Для построения реализуемого регулятора изменим последнюю операцию процедуры 4.1.1, используя функционал

$$J = \int_0^\infty \left[ q \left( y + \tau_1\dot{y} + \tau_2\ddot{y} + \dots + \tau_\delta y^{(\delta)} \right)^2 + u^2 + \varepsilon_1^2 \dot{u}^2 + \dots + \varepsilon_\psi^2 u^{(\psi)2} \right] dt, \quad (4.4.38)$$

который отличается от (4.4.11) производными управлений. Искомый регулятор имеет вид

$$g_\psi u^{(\psi)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = \tilde{r}_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \tilde{r}_1\dot{y} + \tilde{r}_0y. \quad (4.4.39)$$

При произвольном выборе коэффициентов  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) в функционале (4.4.38) может случиться так, что система (4.4.35), (4.4.39) не будет удовлетворять требованиям к точности и качеству. Естественно ожидать, что при достаточно малых числах  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) свойства системы будут приближаться к требуемым. В связи с этим введём полином чётных степеней

$$\varepsilon(s^2) = 1 - \varepsilon_1^2 s^2 + \dots + (-1)^\psi \varepsilon_\psi^2 s^{2\psi}, \quad (4.4.40)$$

который представим как

$$\varepsilon(s^2) = \varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s),$$

где

$$\varepsilon^0(s) = 1 + \varepsilon_1^0 s + \dots + \varepsilon_{\psi-1}^0 s^{\psi-1} + \varepsilon_\psi^0 s^\psi. \quad (4.4.41)$$

Очевидно, что

$$(-1)^i \varepsilon_i^2 = \sum_{\mu=0}^{i-1} 2\varepsilon_\mu^0 \varepsilon_{2i-\mu}^0 (-1)^\mu + \varepsilon_i^{02} (-1)^i \quad i = \overline{1, \psi}. \quad (4.4.42)$$

Утверждение 4.4.1. Всегда существуют положительные числа  $\varepsilon_i^0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) удовлетворяющие условию

$$1 \gg \varepsilon_1^0 \gg \varepsilon_2^0 \gg \dots \gg \varepsilon_{\psi-1}^0 \gg \varepsilon_\psi^0 \quad (4.4.43)$$

такие, что

$$g_i \approx \varepsilon_i^0 \quad i = \overline{0, \psi}, \quad \tilde{r}_i \approx r_i \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (4.4.44)$$

■

Обоснование утверждения приведено в 4.Д.4.

Приведём рекомендации по выбору чисел  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) при решении практических задач.

Рекомендация 4.4.1. Корни полинома  $\varepsilon^0(s)$  следует выбирать так, чтобы они были в 5 ÷ 10 раз больше частоты среза системы (4.4.35), (4.4.36).

Примем

$$\varepsilon^0(s) = \left( \frac{\varepsilon^0 s}{\sqrt{\psi}} + 1 \right)^\psi, \quad (4.4.45)$$

где, в соответствии с рекомендацией 4.4.1,

$$\varepsilon^0 = \frac{\sqrt{\psi}}{(5 \div 10)\bar{\omega}_{cp}}. \quad (4.4.46)$$

Здесь вместо неизвестной (до синтеза) частоты  $\omega_{cp}$  используется прогнозируемая частота.

Из (4.4.45) и (4.4.41) получим

$$\varepsilon_i = \frac{c_\psi^i}{\psi^i} (\varepsilon^0)^{2i} \quad i = \overline{1, \psi}, \quad (4.4.47)$$

где  $c_\psi^i$  – число сочетаний из  $\psi$  элементов по  $i$ .

Вместо частоты  $\omega_{cp}$ , которая неизвестна до решения задачи синтеза, используем в (4.4.46) прогнозируемую частоту  $\bar{\omega}_{cp}$  из (4.3.54).

#### 4.4.3. $b(s) \neq 1$ , $m(s) \neq 1$ . Уравнение качества

Рассмотрим общий случай объекта (4.4.35), когда он описывается уравнением

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad (4.4.48)$$

где  $b(s)$  и  $m(s)$  – гурвицевы полиномы (объект устойчив по управлению и возмущению).

Введём новое управление

$$\tilde{u} = b(s)u, \quad (4.4.49)$$

тогда уравнение (4.4.48) примет вид

$$d(s)y = \tilde{u} + m(s)f.$$

Для выполнения требований к времени регулирования и перерегулированию примем вместо (4.4.38) функционал

$$J = \int_0^\infty \left[ q \left( \rho_0 y + \rho_1 \dot{y} + \dots + \rho_\delta y^{(\delta)} \right)^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon_1^2 \dot{\tilde{u}}^2 + \dots + \varepsilon_\psi^2 \tilde{u}^{(\psi)2} \right] dt, \quad (4.4.50)$$

где

$$\rho(s) = m(s) \left( 1 + \tau_1 s + \dots + \tau_{\delta-\alpha} s^\delta \right), \quad (4.4.51)$$

$$\psi = n - \gamma. \quad (4.4.52)$$

Пусть пока  $\varepsilon_i = 0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ). Характеристический полином оптимальной, в смысле функционала (4.4.50), системы

$$d(s)y = \tilde{u}, \quad \tilde{u} = r(s)y \quad (4.4.53)$$

можно записать аналогично (4.4.14) как

$$d^u(s) = m(s)\tau(s)\varkappa_{n-\delta-\alpha}(s), \quad (4.4.54)$$

где

$$\tau(s) = 1 + \tau_1 s + \dots + \tau_\delta s^\delta, \quad (4.4.55)$$

и тогда реакция системы (4.4.53) на внешнее возмущение  $m(s)f$  имеет, при достаточно большом  $q$ , вид

$$y = \frac{m(s)}{m(s)\tau(s)\varkappa_{n-\delta-\alpha}(s)} f = \frac{1}{\tau(s)\varkappa_{n-\delta-\alpha}(s)} f. \quad (4.4.56)$$

При  $\varepsilon_i \neq 0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ), но удовлетворяющих условию (4.4.43) оптимальная система (4.4.53) записывается как

$$d(s)y = \tilde{u}, \quad \bar{g}(s)\bar{u} = r(s)y.$$

Возвращаясь в ней к прежнему управлению, получим с учётом внешнего возмущения

$$d(s)y = b(s)u + m(s)f, \quad b(s)\bar{g}(s)u = r(s)y. \quad (4.4.57)$$

Резюмируем изложенное в форме следующей процедуры.

Процедура 4.4.2. (Синтез регуляторов для объектов второго вида)

а) Проверить гурвицевость полиномов  $b(s)$  и  $m(s)$  и сформировать полином  $\rho(s) = m(s)\tau(s)$ , где

$$\tau(s) = (1 - \tau s)^\delta, \quad (4.4.58)$$

при этом  $\tau < \bar{t}_{рег}$ , а  $\delta$  — определяется перегрупушированием  $\bar{\sigma}^f$ .

б) Найти прогнозируемую частоту из равенства

$$q \frac{\tau(-j\bar{\omega}_{cp})\tau(j\bar{\omega}_{cp})m(-j\bar{\omega}_{cp})m(j\bar{\omega}_{cp})}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1, \quad (4.4.59)$$

и определить на основе (4.4.46), (4.4.47) коэффициенты  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ),  $\psi = n - \gamma - 1$  функционала (4.4.50).

в) Определить коэффициент  $q$  из неравенств (4.4.20), где положить  $\gamma = 0$  ( $b_0 = 1$ ).

г) Решить задачу АКОР с функционалом (4.4.50). ■

Примечание 4.4.1.

Первая операция описанной процедуры — это построение уравнения качества. Действительно, из (4.4.57) следует

$$y = \frac{m(s)g(s)}{d(s)g(s) - r(s)}f. \quad (4.4.60)$$

Учитывая малость коэффициентов полинома  $g(s)$ , кроме  $g_0 = 1$ , запишем

$$y = \frac{m(s)}{d(s) - r(s)}f = \frac{m(s)}{\psi(s)}f. \quad (4.4.61)$$

Полином  $\psi(s)$  в уравнении качества

$$\psi(s)y = m(s)f \quad (4.4.62)$$

выберем так, чтобы его решения удовлетворяли требованиям точности и качеству. Очевидно, что

$$\psi(s) = m(s)\tau(s)\varkappa_{n-\delta-\alpha}(s). \quad (4.4.63)$$

При этом в полиноме Баттерворта расстояние  $\omega_0 = \frac{1}{q^{2(n-\delta-\alpha)}}$ . ■

#### 4.4.4. Ограничение полосы пропускания

Вернёмся к системе (4.4.35), (4.4.36), регулятор которой получен в результате процедуры 4.4.1. Прогнозируемая частота среза этой системы определяется в соответствии с (4.3.53) из уравнения

$$q \frac{\tau(-j\bar{\omega}_{cp})\tau(j\bar{\omega}_{cp})}{d(-j\bar{\omega}_{cp})d(j\bar{\omega}_{cp})} = 1, \quad (4.4.64)$$

При больших  $q$  эта частота может оказаться недопустимо большой. Более того, в ряде случаев требуется, чтобы полоса пропускания не превышала заданного числа  $\omega_{cp}$ .

Тогда неравенство

$$\bar{\omega}_{cp} < \omega_{cp} \quad (4.4.65)$$

и равенство (4.4.64) могут оказаться несовместными.

Несовместность выражает известное противоречие между высоким коэффициентом усиления разомкнутой системы и умеренной полосой её пропускания. Это противоречие преодолевается введением в систему инерционных звеньев, уменьшающих полосу её пропускания без изменения коэффициента усиления.

Объект (4.4.35), дополненный таким звеном, описывается уравнениями

$$d(s)y = (u + f), \quad \dot{\tilde{y}} = -t_1^{-1}\tilde{y} + t_1^{-1}y, \quad (4.4.66)$$

где  $t_1$  – неопределённая постоянная времени инерционного звена.

Исключая переменную  $y$ , получим

$$d(s) \left( s + t_1^{-1} \right) \tilde{y} = t_1^{-1} (u + f). \quad (4.4.67)$$

Уравнение (4.4.64) при заданном  $\omega_{cp}^*$  принимает для этого «расширенного объекта» вид

$$\frac{q}{t_1^2 \omega_{cp}^{*2} + 1} \cdot \frac{\tau(-j\omega_{cp}^*)\tau(j\omega_{cp}^*)}{d(-j\omega_{cp}^*)d(j\omega_{cp}^*)} = 1. \quad (4.4.68)$$

Отсюда находим постоянную времени  $t_1$ .

Применяя для «объекта» (4.4.67) процедуру 4.4.1 найдём «регулятор»

$$u = \left( \bar{r}_n s^n + \bar{r}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{r}_1 s + \bar{r}_0 \right) \tilde{y} = \bar{r}(s)\tilde{y}. \quad (4.4.69')$$

Исключим переменную  $\tilde{y}$  и получим окончательно регулятор

$$(t_1 s + 1)u = \bar{r}(s)y, \quad (4.4.69)$$

который обеспечивает частоту среза, близкую к требуемой.

Примечание 4.4.2. Процедура 4.4.1 обеспечивает требования к точности и качеству расчётной системы (4.4.67), (4.4.69'). Статика и динамика выхода у физической системы (4.4.35), (4.4.69) связаны с выходом  $y$  расчётной системы инерционным

звеном. Поэтому физическая система может не обладать перерегулированием и временем регулирования расчётной. Это расхождение будет тем большим, чем больше постоянная времени  $t_1$ . ■

Для объектов первого вида дополнительное инерционное звено описывается уравнением

$$\dot{x}_{n+1} = -t_1^{-1}x_{n+1} + t_1^{-1}z = -t_1^{-1}x_{n+1} + t_1^{-1}l'x, \quad (4.4.70)$$

где постоянная  $t_1$  находится из уравнения

$$\frac{q}{t_1^2\omega_{cp}^{*2} + 1} \cdot \beta'(-j\omega_{cp}^*)ll'\beta(j\omega_{cp}^*) = 1. \quad (4.4.71)$$

Это уравнение следует из (4.3.53).

#### 4.4.5. Следящие системы

Рассмотрим систему (4.4.57) при последовательном задающем воздействии, полагая в ней для простоты  $f(t) = 0$ ,

$$d(s)y = b(s)u, \quad b(s)\bar{g}(s)u = r(s)y + r^n(s)v. \quad (4.4.72)$$

Выход этой системы описывается в соответствии с (4.3.12) выражением

$$y = \frac{b(s)r^n(s)}{d(s)\bar{g}(s)b(s) - b(s)r(s)}v = \frac{r^n(s)}{d(s)\bar{g}(s) - r(s)}v. \quad (4.4.73)$$

Её характеристический полином

$$d^u(s) = d(s)\bar{g}(s) - r(s) = \varepsilon^0(s)m(s)\tau(s)\alpha_{n-\delta-\alpha}(s). \quad (4.4.74)$$

Последнее равенство следует из (4.4.55) утверждения 4.4.1 (точнее, соотношение (4.Д.47) доказательства этого утверждения).

Положим

$$r^n(s) = m(s)\tau(s)\sqrt{q}. \quad (4.4.75)$$

Тогда

$$y = \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon^0(s)\alpha_{n-\delta-\alpha}(s)}v = \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon^0(s)(s^{n-\delta-\alpha} + \dots + \sqrt{q})}v. \quad (4.4.76)$$

Корни полинома  $\varepsilon^0(s)$  значительно превышают  $\omega_{cp}$ . Это следует из (4.4.5).

Такое свойство корней полинома  $\varepsilon^0(s)$  опишем с помощью соотношения

$$|\varepsilon^0(j\omega)| = 1 + \delta^0, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_{cp}, \quad (4.4.77)$$

где  $\delta^0$  – достаточно малое число (которое выбором  $\varepsilon^0$  можно сделать по модулю, меньшим любого наперёд заданного положительного числа).



Аналогичное ограничение наложим на полином Баттерворта

$$|\mathfrak{x}_{n-\delta-\alpha}(j\omega)| = \sqrt{q} + \delta^{(1)}, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_{cp}, \quad (4.4.78)$$

где  $\delta^{(1)}$  – число значительно меньшее по модулю, чем  $\sqrt{q}$ .

Утверждение 4.4.2. Для того, чтобы в полосе пропускания системы выполнялось равенство (4.4.82), достаточно выбрать

$$q > 10^{2(n-\delta-\alpha)}\omega_{cp}. \quad (4.4.79)$$

■

Для доказательства утверждения заметим, что полином Баттерворта обладает свойством

$$\mathfrak{x}_{n-\delta-\alpha}(-s)\mathfrak{x}_{n-\delta-\alpha}(s) = s^{2(n-\delta-\alpha)}\omega_0^{2(n-\delta-\alpha)}, \quad (4.4.80)$$

где

$$\omega_0 = (\sqrt{q})^{\frac{1}{n-\delta-\alpha}}. \quad (4.4.81)$$

С учётом этих соотношений запишем (4.4.82) в виде

$$\sqrt{\omega^{2(n-\delta)}(-1)^{n-\delta-\alpha} + q} = \sqrt{q} + \delta^{(1)}. \quad (4.4.82)$$

Заменяя в этом равенстве  $\omega$  на  $\omega_{cp}$ , заключаем, что при  $q$ , удовлетворяющем неравенству (4.4.83)  $|\delta| \ll \sqrt{q}$ , и таким образом утверждение доказано. ■

Возвращаясь к (4.4.76), замечаем, что в полосе пропускания системы

$$y(t) \approx v(t).$$

Рассмотрим следящую систему с объектами первого вида. Она описывается уравнениями (4.4.5). Пусть регулятор этой системы получен с помощью процедуры 4.4.1. Аналогично (4.3.31) заключаем, что регулируемая переменная связана с задающим воздействием соотношением

$$z = \frac{kv}{\tau(s)\mathfrak{x}_{n-\gamma-\delta}(s)}. \quad (4.4.83)$$

Принимаем

$$k = \sqrt{q}. \quad (4.4.84)$$

и выбираем коэффициенты полиномов  $\tau(s)$  и  $\mathfrak{x}_{n-\gamma-\delta}(s)$  так, чтобы выполнялись условия, аналогичные (4.4.77), (4.4.78). Тогда в полосе пропускания системы сигнал  $z(t)$  воспроизводит задающее воздействие  $v(t)$  с наперёд заданной точностью, определяемой коэффициентами полиномов  $\tau(s)$  и  $\mathfrak{x}_{n-\gamma-\delta}(s)$ .

4.4.6. ПИ-регулятор\*

Если в задаче 4.4.1 снять ограничения (4.4.4) на качество переходных процессов, то при ступенчатом внешнем возмущении она разрешается в классе ПИ-регуляторов вида

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + c_{n+1} \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau. \quad (4.4.85)$$

Убедимся, что в системе (4.4.1), (4.4.85) статическая ошибка  $z_{cm} = 0$ .

Повторяя изложенное в п. 3.4.4, получим

$$z = \frac{m^c(s)}{d^u(s)} f + \frac{b_z(s)}{d^u(s)} c_{n+1} \frac{z}{s}, \quad (4.4.86)$$

где  $b_z(s) = \mathbf{l}'(Es - A)\mathbf{b}$ ,  $m_c(s) = \mathbf{l}'(Es - A - \mathbf{b}\mathbf{c}')\mathbf{m}$ .

Отсюда следует

$$z_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{s m^c(s)}{d^u(s)s - c_{n+1} b_z(s)} \cdot \frac{\bar{f}}{s} \right\} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов ПИ-регулятора будем решать задачу АКОР для «расширенного объекта»

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}; \quad (4.4.87)$$

$$\dot{x}_{n-1} = z. \quad (4.4.88)$$

При этом примем функционал оптимизации

$$J = \int_0^{\infty} (q x_{n+1}^2 + u^2) dt. \quad (4.4.89)$$

Решим задачу 4.1.1 и получим оптимальный регулятор

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} + c_{n+1} x_{n+1} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + c_{n+1} \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau. \quad (4.4.90)$$

Приведём условия существования и единственности решения этой задачи: полная управляемость «расширенного объекта» и равенство (4.1.16) для функционала оптимизации.

Утверждение 4.4.3. Если объект (4.4.87) полностью управляем, а свободный член полинома  $b_z(s)$  не равен нулю ( $b_{z,0} \neq 0$ ), то расширенный объект (4.4.87), (4.4.88) полностью управляем.

Если объект (4.4.87) полностью наблюдаем по сигналу  $z$ , то для функционала (4.4.89) выполняется равенство (4.1.16). ■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.5.

4.4.7. Построение структурно-грубых регуляторов\*

Пусть задача 4.4.1 решена и получена система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}; \quad (4.4.91)$$

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (4.4.92)$$

которая при действии внешних возмущений, удовлетворяет требованиям к точности, качеству и грубости (параметрической грубости).

Уточнённая модель объекта имеет вид (3.4.86), (3.4.87)

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A^{(1)}\mathbf{x}^{(1)} + A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}^{(1)}u, \quad (4.4.93)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A^{(3)}\mathbf{x}^{(1)} + A^{(4)}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}^{(2)}u, \quad z = \mathbf{l}^{(1)'}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{l}^{(2)'}\mathbf{x}^{(2)} + l^{(3)}u. \quad (4.4.94)$$

Если уточнённая система (4.4.93), (4.4.94), (4.4.92) неустойчива, то можно использовать процедуру 3.4.3 построения структурно-грубого регулятора, в которой операция 3 – это процедура 4.4.1 для объекта (3.4.91).

Такой путь построения структурно-грубого регулятора, разрешающего задачу 4.4.1, является слишком трудоёмким, поэтому ниже предлагается другой, менее обоснованный путь, позволяющий в ряде случаев избежать многократного использования трудоёмкой процедуры 4.4.1. Он основан на отдельных признаках структурной грубости, вытекающих из утверждения 2.2.1, и сравнении функций  $|h(j\omega)|$  и  $|h_{ym}(j\omega)|$ . Эти функции близки к амплитудно-частотным характеристикам  $|w_{paz}(j\omega)|$  и  $|w_{paz,ym}(j\omega)|$  разомкнутых систем, если число  $q$  в функционале оптимизации (4.4.6) либо (4.4.11) достаточно велико.

Длину полосы неразличимости найдём из неравенства, аналогичного (2.2.31)

$$|h(j\omega)| \leq 0.2. \quad (4.4.95)$$

Полученная из этого выражения частота  $\tilde{\omega}_n$  отличается от  $\bar{\omega}_n$  так же, как частота среза разомкнутой оптимальной системы отличается от частоты  $\bar{\omega}_{cp}$ , определённой равенством (4.3.51).

Потребуем, аналогично первому из соотношений (2.2.28), чтобы

$$\frac{|h(j\omega)| - |h_{ym}(j\omega)|}{|h(j\omega)|} \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq \omega \leq \tilde{\omega}_n. \quad (4.4.96)$$

Вычислим функции, входящие в этот признак структурной грубости. В соответствии с (4.2.5) и (4.4.21) запишем

$$h(s) = \mathbf{h}(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = q \left( \mathbf{l}' + \tau_1 \mathbf{l}'A + \dots + \tau_\delta \mathbf{l}'A^{(\delta-1)} \right) (Es - A)^{-1}\mathbf{b}.$$

Принимая во внимание соотношение  $A(Es - A)^{-1} = s(Es - A)^{-1} - E$  и равенства (4.4.13), получим выражение

$$\mathbf{l}'A^i(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = s^i \mathbf{l}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b} \quad i = \overline{0, \delta},$$

которое позволяет найти

$$h(s) = q \left( 1 + \tau_1 s + \dots + \tau_\delta s^{\delta-1} \right) \mathbf{l}' (Es - A)^{-1} \mathbf{b} = q\tau(s) \mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(s). \quad (4.4.97)$$

Если равенства (4.4.13) сохраняются для уточнённой модели объекта, то

$$\begin{aligned} h_{ym}(s) &= \mathbf{h} (Es - A_{ym})^{-1} \mathbf{b}_{ym} = \\ &= q \left( \mathbf{l}'_{ym} + \tau_1 \mathbf{l}'_{ym} A_{ym} + \dots + \tau_\delta \mathbf{l}'_{ym} A_{ym}^{\delta-1} \right) (Es - A_{ym})^{-1} \mathbf{b}_{ym} = q\tau(s) \mathbf{l}'_{ym} \boldsymbol{\beta}_{ym}(s), \end{aligned} \quad (4.4.98)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ym} &= \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ym} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_{ym} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}^{(1)} \\ \mathbf{l}^{(2)} \end{bmatrix}, \\ l^{(3)} &= 0, \quad \boldsymbol{\beta}_{ym}(s) = (Es - A_{ym})^{-1} \mathbf{b}_{ym}. \end{aligned} \quad (4.4.99)$$

и, таким образом, признак (4.4.96) принимает вид

$$\frac{|\mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(j\omega)| - |\mathbf{l}'_{ym} \boldsymbol{\beta}_{ym}(j\omega)|}{|\mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(j\omega)|} \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq \omega \leq \tilde{\omega}_n, \quad (4.4.100)$$

где частота  $\tilde{\omega}_n$  – наименьшая из частот, удовлетворяющих неравенству

$$q|\tau(j\omega)| |\mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(j\omega)| \leq 0.2. \quad (4.4.101)$$

Приведём ещё один признак грубости системы (4.4.91), (4.4.92), выраженной через свойства матриц уточнённой модели объекта. Ограничимся случаем, когда собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_{yt}-n}$  матрицы  $A^{(1)}$  вещественны и различны, вектор  $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{0}$ , и кроме того, вещественны и различны собственные числа  $\lambda_1^{(R)}, \lambda_2^{(R)}, \dots, \lambda_n^{(R)}$  матрицы

$$R = A^{(3)} \Psi \Lambda \Psi^{-1} A^{(2)}, \quad (4.4.102)$$

в которой  $\Lambda = \text{diag} \left[ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{n_{yt}-n} \right]$ , а  $\Psi$  – матрица преобразования  $A^{(1)}$  к диагональной форме  $\Lambda = \Psi^{-1} A^{(1)} \Psi$ .

Утверждение 4.4.4. Если

$$|\lambda_i| \gg \tilde{\omega}_n \quad i = \overline{1, n_{ym} - n}, \quad (4.4.103)$$

$$|\lambda_i^{(R)}| \ll 1 \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4.104)$$

то функции  $|\mathbf{l}' \boldsymbol{\beta}(j\omega)|$  и  $|\mathbf{l}'_{ym} \boldsymbol{\beta}_{ym}(j\omega)|$  достаточно близки при  $\omega < \tilde{\omega}_n$ . ■

Доказательство утверждения приведено в 4.Д.6.

#### 4.4.8. Условия структурной грубости для одного вида структурных возмущений\*

Рассмотрим случай, когда уточнённая модель оптимальной системы (4.1.1), (4.1.2) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u^{(1)}, \quad z = \mathbf{l}'\mathbf{x}; \quad (4.4.105)$$

$$d_{n_1}^{(1)} [u^{(1)}]^{(n_1)} + d_{n_1-1}^{(1)} [u^{(1)}]^{(n_1-1)} + \dots + d_1^{(1)} \dot{u}^{(1)} + d_0^{(1)} u^{(1)} = b_{\gamma_1}^{(1)} u_1^\gamma + \dots + b_1^{(1)} \dot{u} + b_0^{(1)} u, \quad (4.4.106)$$

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (4.4.107)$$

где уравнение (4.4.106) описывает структурные возмущения. В этом уравнении  $u^{(1)}(t)$  – функция управления объектом (4.4.105), а  $[u^{(1)}]^{(n_1-i)}$  ( $i = \overline{0, n_1}$ ) – её производные. Передаточная функция структурного возмущения

$$w_{\text{возм.1}}(s) = -\frac{b_{n_1}^{(1)}s^{n_1} + \dots + b_1^{(1)}s + b_0^{(1)}}{d_{n_1}^{(1)}s^{n_1} + \dots + d_1^{(1)}s + d_0^{(1)}} = \frac{b^{(1)}(s)}{d^{(1)}(s)}. \quad (4.4.108)$$

Приведём условия, накладываемые на эту функцию, при которых оптимальная система (4.1.1), (4.1.2) является структурно грубой.

Утверждение 4.4.5. Если регулятор системы (4.1.1), (4.1.2) получен в результате процедуры АКОР (процедуры 4.1.1), а для структурных возмущений выполняется условие

$$w_{\text{возм.1}}(-j\omega) + w_{\text{возм.1}}(j\omega) \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.4.109)$$

то система (4.4.105)-(4.4.107) асимптотически устойчива. ■

Утверждение 4.4.6. Если регулятор (4.1.2) оптимален по критерию обобщённой работы (построен на основе процедуры 4.1.2), а структурные возмущения обладают свойством

$$w_{\text{возм.1}}(-j\omega) + w_{\text{возм.1}}(j\omega) \geq 0, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.4.110)$$

то система (4.4.105)-(4.4.107) асимптотически устойчива. ■

Доказательство утверждений приведено в 4.Д.7.

## 4.5. Обратная задача АКОР

### 4.5.1. Функционал общего вида

Пусть имеем полностью управляемый объект

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \quad (4.5.1)$$

и требуется найти регулятор

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (4.5.2)$$

такой, чтобы минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + 2(\mathbf{l}'\mathbf{x})u + u^2] dt, \quad (4.5.3)$$

в котором заданная матрица  $\mathbf{Q}$  и вектор  $\mathbf{l}$  удовлетворяют условию

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{l}}' > 0, \quad (4.5.4)$$

положительной определённости квадратичной формы  $(n + 1)$  переменной  $\mathbf{x}$  и  $u$ .

При  $\tilde{l}' = 0$  эта задача совпадает с задачей 4.1.1. Применим для её решения процедуру 4.1.1. Для этого обозначим

$$\bar{u} = u + \tilde{l}'x, \quad \bar{A} = A - x\tilde{l}'. \quad (4.5.5)$$

Тогда уравнение объекта (4.5.1) и функционал (4.5.3) примут вид

$$\dot{x} = \bar{A}x + b\bar{u}, \quad (4.5.6)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + \bar{u}^2) dt. \quad (4.5.7)$$

Используя процедуру 4.1.1, получим

$$\bar{u} = \bar{c}'x, \quad (4.5.8)$$

где вектор  $\bar{c}'$  определяется из соотношения

$$\bar{c}' = -Pb, \quad (4.5.9)$$

в котором положительно-определённая матрица  $P$  является решением уравнения

$$P\bar{A} - \bar{A}'P - Pbb'P + \bar{Q} = 0. \quad (4.5.10)$$

Таким образом, искомое управление

$$u = (\bar{c} - \tilde{l}')'x = c'x. \quad (4.5.11)$$

Утверждение 4.5.1. Частотная форма условий оптимальности системы (4.5.1), (4.5.2) в смысле функционала (4.5.3) имеет вид

$$[1 + w_{pas}(-j\omega)][1 + w_{pas}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) + 2\operatorname{Re}\tilde{l}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (4.5.12)$$

где

$$\tilde{l}(j\omega) = \tilde{l}'(Ej\omega - A)^{-1}b = \tilde{l}'\beta(j\omega). \quad (4.5.13)$$

Для доказательства запишем алгебраические условия оптимальности (4.5.9), (4.5.10) с учётом выражений  $\bar{A}$  и  $\bar{c}$

$$c = -(Pb + \tilde{l}), \quad (4.5.14)$$

$$PA + A'P - (Pb + \tilde{l})(Pb + \tilde{l})' + Q = 0. \quad (4.5.15)$$

Повторяя изложенное в п. 4.2.1, получим тождество

$$b'(-Es - A)^{-1}Pb + b'P(Es - A)^{-1}b + b'(-Es - A)^{-1}c c'(Es - A)^{-1}b = h'(-s)h(s).$$

Прибавляя к обеим его частям функцию  $b'(-Es - A)^{-1}P\tilde{l} + \tilde{l}'(Es - A)^{-1}b$ , получим, при  $s = j\omega$ , искомое условие (4.5.12), которое при  $\tilde{l} = 0$  совпадает с (4.2.9).

### 4.5.2. Запасы устойчивости

Теорема 4.2.1 устанавливает границы запасов устойчивости оптимальных систем, когда в функционале оптимизации нет произведений переменных состояния и управления ( $\tilde{l} = 0$ ). Эти границы следуют из неравенства

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \geq 0.$$

В рассматриваемом случае аналогичное слагаемое в правой части условия оптимальности (4.5.12)

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) + 2 \operatorname{Re} \tilde{l}(j\omega) \quad (4.5.16)$$

может оказаться отрицательным. Построим пример, показывающий, что запасы устойчивости системы (4.5.1), (4.5.2), оптимальной в смысле положительно-определённого функционала общего вида (4.5.3), могут быть сколь угодно малы.

Пример 4.5.1. Пусть уравнения объекта (4.5.1) и функционал оптимизации (4.5.3) имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (4.5.17)$$

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2 + 2\tilde{l}_1x_1u + u^2) dt, \quad (4.5.18)$$

$$q_{11} - \tilde{l}_1^2 > 0.$$

Определим параметры оптимального управления

$$u = c_1x_1 + c_2x_2. \quad (4.5.19)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.5.20)$$

запишем на основе (4.5.14), (4.5.15)

$$c_1 = -p_{12} - \tilde{l}_1, \quad c_2 = -p_{22}, \quad (4.5.21)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} p_{12} + \tilde{l}_1 \\ p_{22} \end{bmatrix} \times [p_{12} + \tilde{l}_1 \quad p_{22}] + \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

В развёрнутой форме это матричное уравнение принимает вид

$$(p_{12} + \tilde{l}_1)^2 = q_{11}, \quad p_{11} - (p_{12} + \tilde{l}_1)p_{22} = 0, \quad 2p_{12} - p_{22}^2 = 0. \quad (4.5.23)$$

Учитывая (4.5.21), получим на основе первого и третьего из этих уравнений

$$c_1 = -\sqrt{q_{11}}, \quad c_2 = -\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}. \quad (4.5.24)$$

Передаточная функция разомкнутой оптимальной системы (4.5.1), (4.5.2)

$$w_{pas}(s) = \frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}s + \sqrt{q_{11}}}{s^2}. \quad (4.5.25)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики, соответствующие этой передаточной функции

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{(2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1)\omega^2 + q_{11}}}{\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}}{\sqrt{q_{11}}}\omega. \quad (4.5.26)$$

Из равенства  $a(\omega_{cp}) = 1$  получим уравнение для определения  $\omega_{cp}$

$$\omega_{cp}^4 - (2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1)\omega_{cp}^2 - q_{11} = 0.$$

Это уравнение имеет единственное вещественное положительное решение

$$\omega_{cp} = \sqrt{(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1) + \sqrt{(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1)^2 + q_{11}}}.$$

Подставляя это выражение в (4.5.26), найдём

$$\varphi_s = \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{2\sqrt{q_{11}} - 2\tilde{l}_1}}{\sqrt{q_{11}}} \cdot \sqrt{(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1) + \sqrt{(\sqrt{q_{11}} - \tilde{l}_1)^2 + q_{11}}} \right].$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_s \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tilde{l}_1 \rightarrow \sqrt{q_{11}}. \quad (4.5.27)$$

■

### 4.5.3. Обратная задача

Приведённый пример свидетельствует о возможности малых запасов устойчивости оптимальных систем. Более того, оказывается, что для любой (даже сколь угодно «плохой» с точки зрения проектировщика) асимптотически устойчивой системы всегда можно построить положительно-определённый функционал (4.5.3), в смысле которого эта система является оптимальной.

Построение такого функционала составляет обратную задачу оптимального управления.



**Задача 4.5.1. (Обратная задача оптимального управления).**

Найти матрицу  $Q$  и вектор  $\tilde{l}$  положительно-определённого (либо не отрицательного, но удовлетворяющего условию (4.1.16) функционала (4.5.3), в смысле которого заданная асимптотически устойчивая система

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = c^{*'}x \quad (4.5.28)$$

является оптимальной. Объект этой системы полностью управляем, а также наблюдаем по сигналу  $u(t)$ . Последнее означает, что  $\det \begin{pmatrix} c^* & Ac^* & \dots & A^{n-1}c^* \end{pmatrix} \neq 0$ . (Символом « $*$ » подчёркивается заданность вектора  $c$  регулятора). ■

Для изложения существа решения этой задачи запишем тождество (4.2.9) для системы (4.5.6), (4.5.8), оптимальной в смысле функционала (4.5.7),

$$[1 + \bar{w}_{pas}(-s)][1 + \bar{w}_{pas}(s)] = 1 + \sum_{i=1}^n \bar{h}_i(-s)\bar{h}_i(s), \quad (4.5.29)$$

$$\text{где } \bar{w}_{pas}(s) = -\bar{c}'(Es - \bar{A})^{-1}b, \quad \bar{h}(s) = \bar{H}(Es - \bar{A})^{-1}b, \quad \bar{H}'\bar{H} = \bar{Q}. \quad (4.5.30)$$

Преобразуем вектор  $(Es - \bar{A})^{-1}b$ . Используя утверждение 3.4.1, получим

$$(Es - \bar{A})^{-1}b = (Es - A + b\tilde{l}')^{-1}b = \beta(s) [1 + \tilde{l}'\beta(s)]^{-1}, \quad (4.5.31)$$

где  $\beta(s) = (Es - A)^{-1}b$ .

Подставим (4.5.31) в (4.5.29) с учётом выражения  $\bar{c} = c + l$

$$\left\{ 1 - (c + \tilde{l})' \beta(-s) [1 + \tilde{l}'\beta(-s)]^{-1} \right\} \left\{ 1 - (c + \tilde{l})' \beta(s) [1 + \tilde{l}'\beta(s)]^{-1} \right\} = \\ = 1 + \beta'(-s) [1 + \tilde{l}'\beta(-s)]^{-1} (Q - \tilde{l}\tilde{l}') \beta(s) [1 + \tilde{l}'\beta(s)]^{-1}. \quad (4.5.32)$$

Умножая это тождество на  $[1 + \tilde{l}'\beta(-s)][1 + \tilde{l}'\beta(s)]$ , получим

$$[1 - c'\beta(-s)][1 - c'\beta(s)] = [1 + \tilde{l}'\beta(-s)][1 + \tilde{l}'\beta(s)] + \\ + \beta'(-s) (Q - \tilde{l}\tilde{l}') \beta(s) = \beta'(-s)Q\beta(s). \quad (4.5.33)$$

При заданном векторе  $c$  отсюда следует выражение

$$\tilde{l}'\beta(-s) + \tilde{l}'\beta(s) + \beta'(-s)Q\beta(s) = c^{*'}\beta(-s) - c^{*'}\beta(s) + \beta'(-s)c^*c^{*'}\beta(s) \quad (4.5.34)$$

для определения вектора  $\tilde{l}$  и элементов матрицы  $Q$ .

**4.5.4. Существование решения**

Тождество (4.5.34) содержит полиномы чётных степеней  $s$ . Сравним коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений для определения  $n$  компонент вектора  $\tilde{l}$  и  $n^2$  коэффициентов матрицы

$Q$ . Множество решений этой системы алгебраических уравнений должно удовлетворять условию (4.5.4) положительной определённости функционала (4.5.3). Существование решения указанной системы линейных уравнений и системы  $n$  неравенств Сильвестера (для положительной определённости решений) устанавливает следующая теорема.

**Теорема 4.5.1.** Если задан любой вектор  $\mathbf{c}^*$ , при котором система (4.5.28) асимптотически устойчива, то существует матрица  $Q$  и вектор  $\tilde{\mathbf{l}}$ , удовлетворяющие условию (4.5.4) функционала (4.5.3), по отношению к которому эта система оптимальна. При этом объект системы (4.5.28) должен быть полностью управляем, а также наблюдаем по сигналу  $u(t)$ . ■

Доказательство теоремы приведено в 4.Д.5.

Приведём ещё один способ решения обратной задачи. Он выступает так же, как основа доказательства теоремы 4.5.1. Этот способ основан на тождестве (4.5.33), которое после преобразования уравнений (4.5.28) к канонической форме (3.4.4) принимает вид

$$\left[1 - \check{\mathbf{c}}^* \check{\beta}(-s)\right] \left[1 - \check{\mathbf{c}}^* \check{\beta}(s)\right] = \left[1 + \tilde{\mathbf{l}}' \check{\beta}(-s)\right] \left[1 + \tilde{\mathbf{l}}' \check{\beta}(s)\right] + \check{\beta}'(-s) \left(\check{Q} - \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{l}}'\right) \check{\beta}'(s), \quad (4.5.35)$$

где в соответствии с п. 3.4.2

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{c}}^{*'} &= \mathbf{c}^{*'} T^{-1}, & \check{\beta}(s) &= (Es - \check{A})^{-1} \mathbf{b}', & \check{A} &= TAT^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{l}}' &= \tilde{\mathbf{l}}' T^{-1}, & \check{\mathbf{b}} &= T\mathbf{b}, & \check{Q} &= T^{-1}AT. \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

Учитывая, что  $\check{\beta}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & \dots & s^{n-1} \end{pmatrix}' \frac{1}{d(s)}$ , где  $d(s) = \det(Es - \check{A}) = \det(Es - A)$ , запишем (4.5.35) после умножения на  $d(-s)d(s)$  как

$$\left[d(-s) - \check{\mathbf{c}}^*(-s)\right] \left[d(s) - \check{\mathbf{c}}^*(s)\right] - \left[d(-s) + \tilde{\mathbf{l}}(-s)\right] \left[d(s) + \tilde{\mathbf{l}}(s)\right] = \nu(-s)\nu(s). \quad (4.5.37)$$

Здесь

$$\check{\mathbf{c}}^*(s) = \sum_{i=1}^n \check{c}_i^* s^{i-1}, \quad \tilde{\mathbf{l}}(s) = \sum_{i=1}^n \tilde{l}_i s^{i-1}, \quad \nu(s) = \sum_{i=1}^n \nu_i s^{i-1}. \quad (4.5.38)$$

Последнее означает, что

$$\check{Q} - \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{l}}' = \nu \nu', \quad (4.5.39)$$

где  $\nu' = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}$ .

Запишем тождество (4.5.37) в более компактной форме

$$d^u(-s)d^u(s) - d^l(-s)d^l(s) = \nu(-s)\nu(s), \quad (4.5.40)$$

где  $d^l(s) = d(s) + \tilde{\mathbf{l}}(s)$ .

Обратная задача будет решена, если найти вектор  $\tilde{\mathbf{l}}$  такой, чтобы полином  $\theta(s) = d(-s)d(s) - d^l(-s)d^l(s)$  можно было представить в виде произведения  $\nu(-s)\nu(s)$ . Тогда матрица  $\check{Q} = \nu \nu' + \tilde{\mathbf{l}} \tilde{\mathbf{l}}'$ .

### 4.5.5. Процедура

Найдём условия, при которых можно представить полином

$$\theta(s) = \alpha_1(-s)\alpha_1(s). \quad (4.5.41)$$

Положим  $s = j\omega$ , тогда  $\theta(j\omega) = \theta(\omega^2)$  – полином относительно  $\omega^2$  с действительными коэффициентами.

**Лемма 4.5.1.** Пусть  $\theta(\omega^2)$  – полином относительно  $\omega^2$  с действительными коэффициентами, не принимающий отрицательных значений для всех действительных  $\omega$  ( $\theta(\omega^2) \geq 0$ ). Тогда существуют  $\gamma$  полиномов  $\alpha_k(j\omega)$  ( $1 \leq \gamma \leq n$ ) с действительными коэффициентами, таких что

$$\theta(\omega^2) = \sum_{k=1}^{\gamma} \alpha_k(-j\omega)\alpha_k(j\omega) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} |\alpha_k(j\omega)|^2.$$

Более того, всегда можно положить  $\gamma = 1$  и выбрать  $\alpha_1(j\omega)$  так, чтобы все корни этого полинома имели неположительные действительные части. При этих двух ограничениях получим определённое единственным образом разложение

$$\theta(\omega^2) = \alpha_1(-j\omega)\alpha_1(j\omega) = \alpha_1(-s)\alpha_1(s) \Big|_{s=j\omega}.$$

■

Используем лемму и будем искать вектор  $\check{d}$  так, чтобы полином

$$\theta(\omega^2) = d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) \geq 0. \quad (4.5.42)$$

При этом будем рассматривать два случая.

**Случай 1.** Корни известного полинома  $d^u(s) = d(s) - \check{c}^*(s)$  вещественные.

В этом случае можно записать

$$d^u(s) = s^n + d_{n-1}^u s^{n-1} + \dots + d_1^u s + d_0^u = \prod_{i=1}^n (s - s_i), \quad (4.5.43)$$

где  $s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни полинома  $d^u(s)$ .

Будем искать число  $\check{l}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) так, чтобы корни  $-\bar{s}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) полинома  $d^l(s)$  также были вещественными и выполнялось неравенство (4.5.42), которое запишем так

$$\prod_{i=1}^n (\omega^2 + s_i^2) > \prod_{i=1}^n (\omega^2 + \bar{s}_i^2).$$

Очевидно, что это неравенство выполняется, если

$$\bar{s}_i^2 = \varepsilon_i^2 s_i^2, \quad \varepsilon_i^2 < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5.44)$$

**Случай 2.** Часть корней полинома  $d^u(s)$  – комплексные.

В этом случае

$$d^n(s) = \prod_{i=1}^{\rho} (s^2 + 2\xi_i \varkappa_i s + \varkappa_i^2) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + s_i). \quad (4.5.45)$$

Будем искать

$$d^l(s) = \prod_{i=1}^{\rho} (s^2 + 2\bar{\xi}_i \bar{\varkappa}_i s + \bar{\varkappa}_i^2) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + \bar{s}_i). \quad (4.5.46)$$

Неравенство (4.5.42) принимает теперь вид

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{\rho} [\omega^4 - 2\varkappa_i^2 (1 - 2\xi_i^2) \omega^2 + \varkappa_i^4] \prod_{i=1}^{n-2\rho} (\omega^2 + s_i^2) > \\ & > \prod_{i=1}^{\rho} [\omega^4 - 2\bar{\varkappa}_i^2 (1 - 2\bar{\xi}_i^2) \omega^2 + \bar{\varkappa}_i^4] \prod_{i=1}^{n-2\rho} (\omega^2 + \bar{s}_i^2). \end{aligned} \quad (4.5.47)$$

Оно выполняется, если

$$\bar{s}_i^2 = \varepsilon_{1i}^2 s_i^2, \quad \varepsilon_{1i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, n-2\rho}, \quad (4.5.48)$$

$$\bar{\varkappa}_i^2 = \varepsilon_{2i}^2 \varkappa_i^2, \quad 1 > \varepsilon_{2i}^2 > \frac{1 - 2\xi_i^2}{1 - 2\bar{\xi}_i^2}, \quad \xi_i^2 < 0.5 \quad i = \overline{1, \rho}, \quad (4.5.49)$$

$$\bar{\xi}_i^2 < \xi_i^2 \quad i = \overline{1, \rho}. \quad (4.5.50)$$

Действительно, покажем, что при выполнении (4.5.49), (4.5.50)

$$\omega^4 - 2\varkappa_i^2 (1 - 2\xi_i^2) \omega^2 + \varkappa_i^4 > \omega^4 - 2\bar{\varkappa}_i^2 (1 - 2\bar{\xi}_i^2) \omega^2 + \bar{\varkappa}_i^4. \quad (4.5.51)$$

Это неравенство можно записать как

$$\left[ -(\varkappa_i^2 - \bar{\varkappa}_i^2) + 2(\varkappa_i^2 \xi_i^2 - \bar{\varkappa}_i^2 \bar{\xi}_i^2) \right] + \left[ \frac{\varkappa_i^4 - \bar{\varkappa}_i^4}{2} \right] > 0, \quad \frac{\varkappa_i^4 - \bar{\varkappa}_i^4}{2} > 0 \text{ при } \varepsilon_{2i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, \rho},$$

$$\left[ -(\varkappa_i^2 - \bar{\varkappa}_i^2) + 2(\varkappa_i^2 \xi_i^2 - \bar{\varkappa}_i^2 \bar{\xi}_i^2) \right] = \varkappa_i^2 \left[ -(1 - \varepsilon_{2i}^2) + 2(\xi_i^2 - \varepsilon_{2i}^2 \bar{\xi}_i^2) \right] > 0,$$

если

$$\varepsilon_{2i}^2 (1 - 2\bar{\xi}_i^2) > 1 - 2\xi_i^2. \quad (4.5.52)$$

Отсюда следует (4.5.49), а из условия  $\varepsilon_{2i}^2 < 1$  получим (4.5.50). Пусть теперь

$$1 > \xi_i^2 > 0.5. \quad (4.5.53)$$

Непосредственно из (4.5.51) следует, что неравенство (4.5.51) выполняется, когда

$$\bar{\xi}_i^2 = \xi_i^2, \quad \bar{\varkappa}_i^2 = \varepsilon_{2i}^2 \varkappa_i^2, \quad \varepsilon_{2i}^2 < 1 \quad i = \overline{1, \rho}. \quad (4.5.54)$$

Таким образом искомый вектор  $l$  находится так.

На основе неравенства (4.5.44) либо (4.5.48), (4.5.50) находим числа  $\bar{s}_i$ ,  $\bar{\varkappa}_i^2$ ,  $\bar{\xi}_i$  и формируем полином

$$d^l(s) = \prod_{i=1}^{\rho} (s^2 + 2\bar{\xi}_i \bar{\varkappa}_i s + \bar{\varkappa}_i^2) \prod_{i=1}^{n-2\rho} (s + \bar{s}_i) = s^n + d_{n-1}^l s^{n-1} + \dots + d_1^l s + d_0^l. \quad (4.5.55)$$

Сравним его с полиномом  $d(s) + \check{l}(s)$  и получим

$$\check{l}_{i+1} = d_i^l - d_i \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (4.5.56)$$

Переходя к нахождению матрицы  $\check{Q} - \mathbf{U}'$ , составим в соответствии с (4.5.42) разность

$$\theta(\omega^2) = d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) > 0$$

и, используя лемму, представим

$$\theta(\omega^2) = \nu(-s)\nu(s) \Big|_{s=j\omega}, \quad (4.5.57)$$

где  $\nu(s)$  – гурвицев полином, который запишем как

$$\nu(s) = \nu_{n-1}s^{n-1} + \dots + \nu_1s + \nu_0 = \boldsymbol{\nu}'(E_n \widetilde{s} - \check{A})\check{\mathbf{b}}. \quad (4.5.58)$$

Это означает, что

$$d^u(-j\omega)d^u(j\omega) = d^l(-j\omega)d^l(j\omega) + \check{\mathbf{b}}'(-E_n \widetilde{j\omega} - \check{A})\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}'(E_n \widetilde{j\omega} - \check{A})\check{\mathbf{b}}. \quad (4.5.59)$$

Сравнивая это выражение с (4.5.35), получим

$$\check{Q} = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}' + \check{\mathbf{l}}\check{\mathbf{l}}'. \quad (4.5.60)$$

Теперь используем (4.5.36) и получим искомые

$$\check{\mathbf{l}}' = \check{\mathbf{l}}'T, \quad Q = T'(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}' + \check{\mathbf{l}}\check{\mathbf{l}}')T. \quad (4.5.61)$$

Пример 4.5.2. Построим функционал, в смысле которого система (1.П.80), (1.П.83), рассмотренная в примере 1.П.2, является оптимальной. Запишем характеристический полином (1.П.81) этой системы

$$d^u(s) = (s + s_1)(s + s_2), \quad (4.5.62)$$

где

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 0.5. \quad (4.5.63)$$

Примем

$$d^l(s) = (s + 0.5s_1)(s + 0.5s_2) = s^2 + 0.5(s_1 + s_2)s + 0.25s_1s_2.$$

Вычислим при  $\varepsilon_i^2 = 0.5$  ( $i = \overline{1, 2}$ )

$$\begin{aligned} d^u(-j\omega)d^u(j\omega) - d^l(-j\omega)d^l(j\omega) &= (\omega^2 + s_1^2)(\omega^2 + s_2^2) - (\omega^2 + 0.25s_1^2)(\omega^2 + 0.25s_2^2) = \\ &= 0.75(s_1^2 + s_2^2)\omega^2 + 0.9375s_1^2s_2^2 = (\nu_1 - \nu_2j\omega)(\nu_1 + \nu_2j\omega) = \nu_1^2 + \nu_2^2\omega^2. \end{aligned} \quad (4.5.64)$$

Отсюда

$$\nu_1 = \sqrt{0.9375s_1^2s_2^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{0.75(s_1^2 + s_2^2)}, \quad (4.5.65)$$

используя формулы (4.5.56), получим

$$\tilde{l}_1 = 0.25s_1s_2 - d_0, \quad \tilde{l}_2 = 0.5(s_1 + s_2) - d_1. \quad (4.5.66)$$

Таким образом, искомый функционал имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} \left( \check{q}_{11}x_1^2 + 2\check{q}_{12}x_1x_2 + \check{q}_{22}x_2^2 + 2\tilde{l}_1x_1u + 2\tilde{l}_2x_2u + u^2 \right) dt, \quad (4.5.67)$$

где с учётом численных значений параметров объекта (1.П.80)  $d_0 = 0.4$ ,  $d_1 = 150$  и чисел (4.5.63)

$$\begin{aligned} \check{q}_{11} &= \nu_0^2 + \tilde{l}_1^2 = 0.9375 \cdot 0.25 + 0.275^2, & \tilde{l}_1 &= -0.275, \\ \check{q}_{12} &= \nu_0\nu_1 + \tilde{l}_1\tilde{l}_2 = \sqrt{0.9375 \cdot 0.25 \cdot 0.75 \cdot 1.25} + 149.25 \cdot 0.275, & \tilde{l}_2 &= -149.25, \\ \check{q}_{22} &= \nu_1^2 + \tilde{l}_2^2 = 0.75 \cdot 1.25 + 149.25^2, \end{aligned} \quad (4.5.68)$$

Нетрудно сделать проверку и убедиться, что оптимальный, в смысле функционала (4.5.67), с параметрами (4.5.68), регулятор для объекта (1.П.80) совпадает с (1.П.83). ■

#### 4.5.6. Объекты второго вида

Пусть задана асимптотически устойчивая система

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = b_\gamma u^{(\gamma)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (4.5.69)$$

$$u^{(n)} + g_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + g_1\dot{u} + g_0u = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y. \quad (4.5.70)$$

Её можно привести к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (4.5.71)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y, \quad u = \mathbf{d}_p\mathbf{x}_p, \quad (4.5.72)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{x}_p(t)$  –  $n$ -мерные векторы переменных состояния объекта (4.5.69) и регулятора (4.5.70).

Исключим измеряемую переменную и введём вектор  $\bar{\mathbf{x}}_c' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{x}'_p \end{bmatrix}$ . Получим уравнения

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_c = A_c\bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{b}_c u, \quad u = \mathbf{c}'_c\bar{\mathbf{x}}_c, \quad (4.5.73)$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathbf{b}_p\mathbf{d} & A_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d}_p \end{bmatrix}, \quad (4.5.74)$$

которые совпадают с (4.5.28). Используем приведённую выше процедуру решения обратной задачи оптимального управления, найдём функционал

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}'_c Q \mathbf{x}_c + 2\tilde{\mathbf{l}} \mathbf{x}'_c u + u^2] dt, \quad (4.5.75)$$

в смысле которого эта система оптимальная.

При переходе от уравнений (4.5.69), (4.5.70) к уравнениям (4.5.71), (4.5.72) вводится линейная зависимость векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_p$  от переменных  $y(t)$ ,  $u(t)$  и их производных. Используя эту зависимость, исключим вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_p$  в функционале (4.5.75).

Приведём ещё один способ построения такого функционала.

Запишем уравнение регулятора (4.5.70) в виде двух уравнений

$$u^{(n)} + \mu_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + \mu_1\dot{u} + \mu_0u = \ddot{y}, \quad (4.5.76)$$

$$\ddot{y} = r_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + r_1\dot{y} + r_0y + [\mu_{n-1} - g_{n-1}^*]u^{(n-1)} + \dots + [\mu_1 - g_1^*]\dot{u} + [\mu_0 - g_0^*]u, \quad (4.5.77)$$

где  $\mu_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) – произвольно задаваемые положительные числа, такие, что корни уравнения  $\mu(s) = s^n + \mu_{n-1}s^{n-1} + \dots + \mu_1s + \mu_0 = 0$  имеют отрицательные вещественные части.

Объединяя уравнения (4.5.69) и (4.5.76), получим новый «объект»

$$d(s)y = b(s)u, \quad \mu(s)u = \ddot{y}. \quad (4.5.78)$$

Введём обозначения

$$y = \check{x}_1, \dot{y} = \check{x}_2, \dots, y^{(n-1)} = \check{x}_n; \quad u = \check{x}_{n+1}, \dot{u} = \check{x}_{n+2}, \dots, u^{(n-1)} = \check{x}_{2n}; \quad (4.5.79)$$

$$r_{i-1}^* = \check{c}_i, \quad \mu_{i-1} - g_{i-1}^* = \check{c}_{n+i} \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5.80)$$

Тогда уравнения (4.5.78), (4.5.77), эквивалентные уравнениям (4.5.69), (4.5.70), примут вид

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{A}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}\ddot{y}, \quad \ddot{y} = \check{\mathbf{c}}^*\check{\mathbf{x}}, \quad (4.5.81)$$

где

$$\check{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \\ \vdots \\ \check{x}_n \\ \check{x}_{n+1} \\ \check{x}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{x}_{2n} \end{bmatrix}, \quad \check{A} = \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n-1} & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & \cdots & -\mu_{n-1} \end{array} \right), \quad \check{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \check{c}_1 \\ \check{c}_2 \\ \vdots \\ \check{c}_n \\ \check{c}_{n+1} \\ \check{c}_{n+2} \\ \vdots \\ \check{c}_{2n} \end{bmatrix}.$$

Решая теперь обратную задачу для системы (4.5.80), получим функционал, содержащий переменные  $y(t)$ ,  $u(t)$  и их производные.

## Доказательства к главе 4

### 4.Д. Доказательство теорем и утверждений

#### 4.Д.1. Доказательство теоремы 4.1.2

Теорема 4.1.2 опирается на следующую теорему Ляпунова.

Теорема 4.Д.1. Для асимптотической устойчивости системы

$$\dot{x} = Ax \quad (4.Д.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы решением матричного уравнения (матричного уравнения Ляпунова)

$$PA + A'P = -Q \quad (4.Д.2)$$

( $Q$  – положительно-определённая матрица) являлась положительно-определённая матрица  $P$ . ■

**Доказательство.** Достаточность условий теоремы следует из второго (прямого) метода Ляпунова, в соответствии с которым для асимптотической устойчивости системы достаточно существования положительно-определённой функции  $v$ , полная производная которой в силу уравнения (4.Д.1) – отрицательна.

Примем

$$v = x'Px > 0 \quad (4.Д.3)$$

и вычислим

$$\frac{dv}{dt} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(PA + A'P)x = -x'Qx. \quad (4.Д.4)$$

Для доказательства необходимости сформируем матрицу  $e^{A't}Pe^{At}$ , в которой

$$e^{At} = E_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots$$

Очевидно, что  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ . Вычислим

$$-\frac{d}{dt}(e^{A't}Pe^{At}) = -e^{A't}(A'P + PA)e^{At} = e^{A't}Qe^{At}. \quad (4.Д.5)$$

Интегрируя это соотношение получим, учитывая асимптотическую устойчивость (4.Д.1)

$$-\int_0^\infty \left( \frac{d}{dt}e^{A't}Pe^{At} \right) dt = \int_0^\infty e^{A't}Qe^{At} dt > 0,$$



и, таким образом,

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt > 0. \quad (4.Д.6)$$

Нетрудно проверить, что это значение  $P$  удовлетворяет уравнению (4.Д.2), и таким образом теорема Ляпунова доказана.

Рассмотрим более общий случай, когда  $u(t)$  –  $m$ -мерный вектор управления. Тогда уравнения (4.1.1), (4.1.2) объекта и регулятора имеют вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = C'x, \quad (4.Д.7)$$

где  $B$  и  $C$  – матрицы чисел размеров  $n \times m$ .

Уравнения Ляпунова (4.1.8) принимают вид

$$P^{(\alpha+1)}A^{(\alpha)} + A^{(\alpha)'}P^{(\alpha+1)} = -Q - C^{(\alpha)}C^{(\alpha)'} \quad \alpha = 0, 1, \dots, \quad (4.Д.8)$$

где

$$C^{(\alpha)} = -P^{(\alpha)}B, \quad (4.Д.9)$$

$$A^{(\alpha)} = A + BC^{(\alpha)'}. \quad (4.Д.10)$$

Переходя к доказательству теоремы 4.1.2, заметим также, что для полностью управляемого или стабилизируемого объекта (4.2.1) всегда можно найти (используя, например, методы модального управления) матрицу  $C^{(0)}$ , при которой выполняется условие  $A^{(0)} = A + BC^{(0)}$  теоремы.

Рассмотрим уравнение (4.Д.8) на первых шагах итерационного процесса.

При  $\alpha = 0$  это уравнение примет вид

$$P^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)'}P^{(1)} = -Q - C^{(0)}C^{(0)'}. \quad (4.Д.11)$$

Так как матрица  $A^{(0)}$  – гурвицева (по построению матрицы  $C^{(0)}$ ), то в соответствии с теоремой Ляпунова

$$P^{(1)} > 0 \quad (4.Д.12)$$

( $P^{(1)} > 0$  – сокращённое обозначение положительно-определённой матрицы), и тогда

$$C^{(1)} = -P^{(1)}B. \quad (4.Д.13)$$

Покажем теперь, что матрица  $A^{(1)} = A + BC^{(1)'}$  – гурвицева.

Другими словами, нужно показать, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i (A^{(1)}) < 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.Д.14)$$

Для этого рассмотрим сумму матриц  $P^{(1)}A^{(1)} + A^{(1)'}P^{(1)}$ , которую преобразуем с учётом (4.Д.11) и (4.Д.13)

$$\begin{aligned}
 P^{(1)}A^{(1)} + A^{(1)'}P^{(1)} &= P^{(1)}(A + BC^{(1)'}) + (A + BC^{(1)'})'P^{(1)} = \\
 &= P^{(1)}A + A'P^{(1)} - 2C^{(1)}C^{(1)'} = \\
 &= P^{(1)}(A + BC^{(0)'}) + (A + BC^{(0)'})'P^{(1)} + \\
 &+ C^{(1)}C^{(0)'} + C^{(0)}C^{(1)'} - 2C^{(1)}C^{(1)'} = \\
 &= -Q - (C^{(0)} - C^{(1)})(C^{(0)} - C^{(1)})' - C^{(1)}C^{(1)'} < 0.
 \end{aligned} \tag{4.Д.15}$$

Отсюда на основе теоремы Ляпунова заключаем, что матрица  $A^{(1)}$  – гурвицева. При  $\alpha = 1$  уравнение (4.1.8) записывается как

$$P^{(2)}A^{(1)} + A^{(1)'}P^{(2)} = -Q - C^{(1)}C^{(1)'}. \tag{4.Д.16}$$

В силу доказанного неравенства (4.Д.14) заключаем, как и ранее, что решение этого уравнения

$$P^{(2)} > 0, \tag{4.Д.17}$$

и тогда

$$C^{(2)} = -P^{(2)}B. \tag{4.Д.18}$$

Для доказательства того, что матрица  $A^{(2)} = A + BC^{(2)'}$  – гурвицева, рассмотрим сумму матриц  $P^{(2)}A^{(2)} + A^{(2)'}P^{(2)}$ , для которой, повторяя преобразование (4.Д.15), получим

$$P^{(2)}A^{(2)} + A^{(2)'}P^{(2)} = -Q - (C^{(1)} - C^{(2)})(C^{(1)} - C^{(2)})' - C^{(2)}C^{(2)'} = -Q < 0. \tag{4.Д.19}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A^{(2)}) < 0 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{4.Д.20}$$

Продолжая этот процесс получим последовательность положительно-определённых матриц  $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \dots$

Покажем теперь, что члены этой последовательности обладают свойством

$$P^{(k+1)} \leq P^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.Д.21}$$

Покажем вначале, что

$$P^{(2)} \leq P^{(1)}. \tag{4.Д.22}$$

Для этого вычтем (4.Д.16) из (4.Д.15). Тогда

$$(P^{(1)} - P^{(2)})A^{(1)} + A^{(1)'}(P^{(1)} - P^{(2)}) = -(C^{(0)} - C^{(1)})(C^{(0)} - C^{(1)})'.$$

Отсюда заключаем, что  $(P^{(1)} - P^{(2)}) \geq 0$ , так как  $A^{(1)}$  – гурвицева, а  $(C^{(0)} - C^{(1)})(C^{(0)} - C^{(1)})' \geq 0$ .

Доказательство (4.Д.21) при  $k = 2, 3, \dots$  аналогично.

Симметричность, определённая положительность и невозрастающий характер последовательности  $P^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) гарантирует существование предела

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{(k)}.$$

Докажем в заключение единственность полученного решения. Допустим, что существуют две матрицы  $P > 0$  и  $\bar{P} > 0$ , удовлетворяющие алгебраическому уравнению Риккати (4.1.5).

Этим матрицам соответствуют

$$C = -PB \quad \text{и} \quad \bar{C} = -\bar{P}B. \quad (4.Д.23)$$

На основе (4.1.5) получим

$$P(A + BC') + A'P = Q, \quad \bar{P}(A + B\bar{C}') + A'\bar{P} = Q.$$

Вычтем эти уравнения. Тогда, в силу их симметрии

$$\begin{aligned} 0 &= P(A + BC') + A'P - [\bar{P}(A + B\bar{C}') + A'\bar{P}] = \\ &= P(A + BC') - \bar{P}'A + \bar{P}BB'P - (A + B\bar{C}')'\bar{P} + A'P - \bar{P}BB'P = \\ &= (P - \bar{P})(A + BC') + (A + B\bar{C}')'(P - \bar{P}). \end{aligned} \quad (4.Д.24)$$

Это матричное уравнение имеет единственное решение  $P - \bar{P} = 0$ . Действительно, матрицы  $A + BC'$  и  $-A - B\bar{C}'$  не имеют общих собственных чисел, так как  $A + BC'$  и  $A + B\bar{C}'$  – гурвицевы, а уравнения

$$\dot{x} = (A + BC')x \quad \text{и} \quad \dot{x} = (A + B\bar{C}')x, \quad (4.Д.25)$$

в которых  $C$  и  $\bar{C}$  определяются на основе (4.Д.23), асимптотически устойчивы. В этом нетрудно убедиться, если принять

$$v = x'Px. \quad (4.Д.26)$$

Тогда, учитывая (4.1.5), получим

$$\frac{dv}{dt} = x'[(A + BC')P + P(A + BC')] = -x'Qx - x'CC'x < 0. \quad (4.Д.27)$$

Аналогично можно принять  $\bar{v} = x'\bar{P}x > 0$  и получить в силу второй из систем (4.Д.25), что  $\dot{\bar{v}} < 0$ .

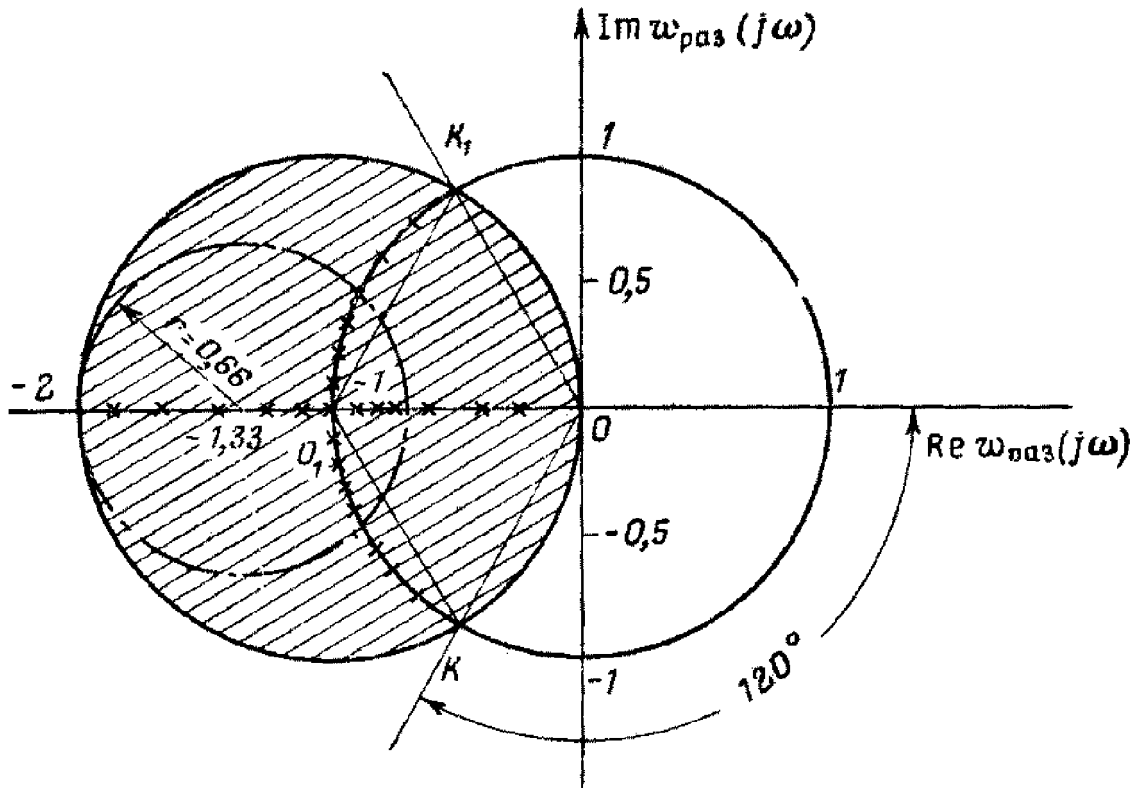


Рис. 4.Д.1

#### 4.Д.2. Доказательство теоремы 4.2.1

Приведём два способа её доказательства.

Первый способ основан на утверждении 4.2.2. Геометрическая интерпретация этого утверждения:

Годограф АФЧХ оптимальной системы (4.2.1), (4.2.2) не пересекает запретного круга единичного радиуса с центром в точке  $(-1, j0)$ .

На рис. 4.Д.1 указанный запретный круг заштрихован. Непосредственно из этого рисунка следуют неравенства (4.2.15), (4.2.16). Действительно, отрезок  $(0, -2)$  вещественной оси находится внутри запретного круга, а это означает (4.2.16). Рассматривая равносторонний треугольник  $AOB$ , получаем (4.2.15), так как дуги  $AB$  и  $AC$ , имеющие градусные меры равные  $60^\circ$ , находятся внутри запретного круга.

Во втором способе доказательства теоремы 4.2.1 не используется понятие радиуса запасов устойчивости и утверждение 4.2.2. Этот способ опирается на тождество (4.2.11), (4.2.12).

На множестве  $\Omega_{cp}$  частот среза  $a(\omega_{cp}) = 1$ , и тогда на этом множестве получим, используя (4.2.12), (4.2.14)

$$\cos \varphi(\omega_{cp}) \geq -0.5. \quad (4.Д.28)$$

Исследуем это неравенство.

Пусть вначале  $\cos \varphi(\omega_{cp}) = -0.5$ .

Тогда  $\varphi(\omega_{cp}) = \pm \arccos(-0.5) + 2n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\arccos(-0.5) = 120^\circ$  (так как  $0 \leq \arccos x \leq \pi$ ), а из неравенства (4.Д.28) следует, что

$$\arg w_{paz}(j\omega_{cp}) \geq -120^\circ \quad \text{при} \quad \omega_{cp} \in \Omega_{cp}^{(1)}, \quad (4.Д.29)$$

$$\arg w_{paz}(j\omega_{cp}) \leq 120^\circ \quad \text{при} \quad \omega_{cp} \in \Omega_{cp}^{(2)}. \quad (4.Д.30)$$

На основе (2.1.36) заключаем, что

$$\varphi \geq 60^\circ.$$

Переходя к доказательству свойства (4.2.16), запишем для множества частот  $\omega_\phi \in \Omega_\phi$ , на котором  $\text{Im} w_{paz}(j\omega_\phi) = 0$ , выражение (4.2.11)

$$2 \text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi) + \text{Re}^2 w_{paz}(j\omega_\phi) = \Psi(\omega_\phi), \quad (4.Д.31)$$

отсюда

$$\text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi) = -1 \pm \sqrt{1 + \Psi(\omega_\phi)}, \quad (4.Д.32)$$

и следовательно, в силу (4.2.14)

$$\text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi) \leq -2, \quad \text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi) \geq 0. \quad (4.Д.33)$$

Это означает, что АФЧХ оптимальной системы не пересекает интервала  $(-2, 0)$  вещественной оси. Кроме того, второе из неравенств (4.Д.33) свидетельствует о том, что на множестве  $\Omega_\phi^{(2)}$   $\text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi^{(2)}) = 0$ . Учитывая, что  $|\text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi)| = a(\omega_\phi)$  и, следовательно  $a(\omega_\phi^{(1)}) \leq 2$ ,  $a(\omega_\phi^{(2)}) = 0$ , заключаем, используя (2.1.38) что  $L \geq 2$ .

Если множество  $\Omega_\phi^{(1)}$  пусто (АФЧХ оптимальных систем является в соответствии с определением 2.П.3 – АФЧХ первого рода), то

$$L = \frac{1}{|\text{Re} w_{paz}(j\omega_\phi^{(2)})|} \rightarrow \infty. \quad (4.Д.34)$$

### 4.Д.3. Доказательство утверждения 4.2.4

Связь (4.2.8) для системы (4.1.57), (4.1.59), оптимальной в смысле функционала (4.1.55), имеет вид

$$\left[1 - \tilde{c}'(-Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}\right] \left[1 - \tilde{c}'(Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}\right] = 1 + \tilde{b}'(-Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{Q}(Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b}. \quad (4.Д.35)$$

Используя выражения (4.1.58), найдём

$$(Es - \tilde{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (Es - \tilde{A})^{-1} \left| (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} s^{-1} \right| (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} s^{-2} \right| \dots \left| (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{b} s^{-\psi} \right| \\ 0 & s^{-1} & s^{-2} & \dots & s^{-\psi} \\ 0 & 0 & s^{-1} & \dots & s^{-(\psi-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.Д.36)$$

В справедливости этого выражения нетрудно убедиться, умножая его справа (или слева) на матрицу

$$(Es - \tilde{A}) = \begin{pmatrix} Es - \check{A} & -\check{\mathbf{b}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}.$$

В результате такого умножения получаем единичную матрицу. На основе (4.Д.36) получим

$$(Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}} \\ 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{\psi-1} \end{bmatrix} \varepsilon_{\psi}^{-1} s^{-\psi}, \quad \check{H} (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \check{H} (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}} \\ 1 \\ \varepsilon_1 s \\ \varepsilon_2 s^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{\psi-1} s^{\psi-1} \end{bmatrix} \varepsilon_{\psi}^{-1} s^{-\psi}, \quad (4.Д.37)$$

$$\text{где } \check{H} = \text{diag} \left[ \sqrt{q_{11}} \quad \sqrt{q_{22}} \quad \cdots \quad \sqrt{q_{\gamma\gamma}} \mid 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right], \quad \check{H}' \check{H} = \check{Q}. \quad (4.Д.38)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{c}}' (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} &= \left[ \check{\mathbf{c}}' (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}} + \sum_{i=0}^{\psi-1} \check{c}_i s^i \right] \varepsilon_{\psi}^{-1} s^{-\psi}, \\ \tilde{\mathbf{b}}' (-Es - \tilde{A})^{-1} \check{H}' \check{H} (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} &= \\ &= \left[ \check{\mathbf{b}}' (-Es - \check{A})^{-1} \check{H}' \check{H} (Es - \check{A})^{-1} \check{\mathbf{b}} + 1 - \varepsilon_1^2 s^2 + \cdots + (-1)^{\psi-1} \varepsilon_{\psi-1}^2 s^{2(\psi-1)} \right] (-1)^{\psi} \varepsilon_{\psi}^{-2} s^{-2\psi}. \end{aligned} \quad (4.Д.39)$$

Подставляя эти выражения в (4.Д.35), получим, обозначая  $\check{c}(s) = r(s)$  тождество (4.2.33).

#### 4.Д.4. Доказательство утверждения 4.4.1

Представим тождество (4.2.33) с учётом (4.2.32) в виде

$$[d(-s)g(-s) - \tilde{r}(-s)][d(s)g(s) - \tilde{r}(s)] = d(-s)d(s)\varepsilon(s^2) + q(s^2), \quad (4.Д.40)$$

$$\varepsilon(s^2) = 1 + \sum_{i=1}^{\psi} (-1)^i \varepsilon_i^2 s^{2i}, \quad q(s^2) = \sum_{i=1}^{\delta} (-1)^{i-1} q_{ii} s^{2(i-1)}, \quad \psi \geq \delta. \quad (4.Д.41)$$

При  $\varepsilon_i = 0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) это тождество примет вид

$$[d(-s) - r(-s)][d(s) - r(s)] = d(-s)d(s) + q(s^2). \quad (4.Д.42)$$

Нужно доказать, что при достаточно малых  $\varepsilon_i^0$ , удовлетворяющих неравенствам (4.4.43), полиномы  $g(s)$  и  $\tilde{r}(s)$  удовлетворяющие (4.Д.40), приближаются соответственно к полиномам  $\varepsilon^0(s)$  и  $r(s)$ , где  $r(s)$  – решение (4.Д.42).

Запишем с учётом (4.4.41) полином в правой части (4.Д.40)

$$\Delta(s) = d(-s)d(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s) + q(s^2). \quad (4.Д.43)$$

Введём полином

$$\Delta_1(s) = d(-s)d(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s) + q(s^2) + q(s^2) \left[ -\varepsilon_1^2 s^2 + \dots + (-1)^\psi \varepsilon_\psi^2 s^{2\psi} \right],$$

который при  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  ( $i = \overline{1, \psi}$ ) приближается к (4.Д.43).

Представим правую часть (4.Д.42)

$$d(-s)d(s) + q(s^2) = \delta(-s)\delta(s), \quad (4.Д.44)$$

где  $\delta(s)$  – гурвицев полином степени  $n$ .

Тогда из равенства  $d^n(s) = \delta(s)$  следует

$$r(s) = d(s) - \delta(s). \quad (4.Д.45)$$

С другой стороны представим

$$\Delta_1(s) = \left[ d(-s)d(s) + q(s^2) \right] \varepsilon(s^2) = \delta(-s)\delta(s)\varepsilon^0(-s)\varepsilon^0(s). \quad (4.Д.46)$$

Сравнивая это выражение с левой частью (4.Д.40), получим тождество

$$d(s)g(s) - \varepsilon(s) = \delta(s)\varepsilon^0(s), \quad (4.Д.47)$$

и, используя утверждение 4.1.1 заключаем, что

$$g(s) = \varepsilon^0(s) + o^\varepsilon(s), \quad \tilde{r}(s) = r(s) + o^r(s), \quad (4.Д.48)$$

где  $o^\varepsilon(s)$  и  $o^r(s)$  – полиномы степеней  $\psi_n^{n-1}$  соответственно имеют при условии (4.4.43) достаточно малые коэффициенты.

### 4.Д.5. Доказательство утверждения 4.4.3

Введём обозначения

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ l' & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.Д.49)$$

и запишем уравнения (4.4.87), (4.4.88) в более компактной форме

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u.$$

Условие управляемости пары  $(\bar{A}, \bar{\mathbf{b}})$

$$\det \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} & \bar{A}\bar{\mathbf{b}} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{\mathbf{b}} & \bar{A}^n\bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \neq 0$$

представим с учётом обозначений (4.Д.49) в виде

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} & A^n\mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{l}'\mathbf{b} & \mathbf{l}'A\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{l}'A^{n-2}\mathbf{b} & \mathbf{l}'A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.Д.50)$$

Используем теорему Гамильтона-Кэли и запишем

$$A^n + d_{n-1}A^{n-1} + d_{n-2}A^{n-2} + \cdots + d_2A^2 + d_1A + d_0E = 0. \quad (4.Д.51)$$

Умножим первый столбец матрицы (4.Д.50) на  $d_0$  и прибавим к последнему, затем умножим второй столбец на  $d_1$  и прибавим к последнему, и т.д.

В результате (4.Д.50) примет вид

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} & 0 \\ 0 & \mathbf{l}'\mathbf{b} & \mathbf{l}'A\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{l}'A^{n-2}\mathbf{b} & \mathbf{l}'A_*\mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & A^2\mathbf{b} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l}'A_*\mathbf{b}, \quad (4.Д.52)$$

где  $A_* = \mathbf{l}'(Ed_1 + Ad_2 + \cdots + A^{n-2}d_{n-1} + A^{n-1})\mathbf{b}$ .

Покажем, что свободный член полинома  $b_z(s) = \mathbf{l}'(\widetilde{Es} - A)\mathbf{b}$  совпадает с  $\mathbf{l}'A_*\mathbf{b}$  ( $b_{z,0} = \mathbf{l}'A_*\mathbf{b}$ ).

В соответствии с (6.Д.45), (6.Д.46) присоединённая матрица

$$(\widetilde{Es} - A) = \sum_{\gamma=0}^{n-1} A_\gamma s^\gamma, \quad \text{где } A_\gamma = \sum_{i=0}^{n-\gamma-1} A^i d_{\gamma+i+1} \quad (\gamma = \overline{0, n-2}), \quad A_{n-1} = E.$$

При  $\gamma = 0$  получим из последнего выражения

$$A_0 = Ed_1 + Ad_2 + \cdots + A^{n-2}d_{n-1} + A^{n-1} = A_*. \quad (4.Д.53)$$

Определитель в правой части (4.Д.52) отличен от нуля, так как первый сомножитель не равен нулю из-за полной управляемости объекта (4.4.87), а второй сомножитель

$$\mathbf{l}'A_*\mathbf{b} = \mathbf{l}'A_0\mathbf{b} = b_{z,0} \neq 0.$$

Равенство (4.1.16) имеет в рассматриваемом случае вид

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \bar{H}' & \bar{A}'\bar{H}' & \bar{A}^{2'}\bar{H}' & \cdots & \bar{A}^{n'}\bar{H}' \end{pmatrix} = n, \quad (4.Д.54)$$

где  $\bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{A}' & \mathbf{l} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sqrt{q} \end{pmatrix}$ .

Вычислим

$$\bar{A}'\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{l}\sqrt{q} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^{2'}\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & A'\mathbf{l}\sqrt{q} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}^{n'}\bar{H}' = \begin{pmatrix} 0 & A^{n-1}\mathbf{l}\sqrt{q} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}.$$



Если объект (4.4.87) полностью наблюдаем, то следующие  $n$  столбцов линейно независимы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A'l\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A^{n-1}l\sqrt{q} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.Д.55)$$

#### 4.Д.6. Доказательство утверждения 4.4.4

Сравним частотные передаточные функции двух систем.

Во-первых, система (4.4.93), (4.4.94) с законом управления

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}^{(2)}, \quad (4.Д.56)$$

в котором матрица  $\mathbf{c}'$  совпадает с матрицей в управлении (4.4.92).

Передаточная функция системы (4.4.93), (4.4.94), (4.Д.56) в разомкнутом состоянии имеет вид

$$w_{ym}(j\omega) = -\mathbf{c}' \left[ E j\omega - A^{(4)} - A^{(3)} \left( E j\omega - A^{(1)} \right)^{-1} A^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(2)}, \quad (4.Д.57)$$

Во-вторых, система (4.4.91), (4.4.92), соответствующая передаточная матрица, которая записывается как

$$w(j\omega) = -\mathbf{c}' \left[ E j\omega + A^{(4)} + A^{(3)} \left( A^{(1)} \right)^{-1} A^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(2)}. \quad (4.Д.58)$$

Для удобства сравнения матриц (4.Д.57) и (4.Д.58) представим

$$\begin{aligned} \left[ E j\omega - A^{(1)} \right]^{-1} &= \left( E j\omega - \Psi \Lambda \Psi^{-1} \right)^{-1} = \Psi \left( E j\omega - \Lambda \right)^{-1} \Psi^{-1} = \\ &= \Psi \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{j\omega - \lambda_1} \quad \frac{1}{j\omega - \lambda_2} \quad \dots \quad \frac{1}{j\omega - \lambda_\delta} \right) \right] \Psi^{-1} = \\ &= \Psi \left[ \text{diag} \left( \frac{-\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2} \quad \frac{-\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \quad \dots \quad \frac{-\lambda_\delta}{\omega^2 + \lambda_\delta^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + j\omega \text{diag} \left( \frac{-1}{\omega^2 + \lambda_1^2} \quad \frac{-1}{\omega^2 + \lambda_2^2} \quad \dots \quad \frac{-1}{\omega^2 + \lambda_\delta^2} \right) \right] \Psi^{-1}, \end{aligned} \quad (4.Д.59)$$

где  $\delta = n_{ym} - n$ .

С учётом (4.Д.59) выражение (4.Д.57) примет вид

$$\begin{aligned} w_{ym}(j\omega) &= -\mathbf{c}' \left[ E j\omega + j\omega A^{(3)} \Psi \text{diag} \left( \frac{1}{\omega^2 + \lambda_1^2} \quad \frac{1}{\omega^2 + \lambda_2^2} \quad \dots \quad \frac{1}{\omega^2 + \lambda_\delta^2} \right) \Psi^{-1} A^{(2)} - \right. \\ &\quad \left. - A^{(4)} + A^{(3)} \Psi \text{diag} \left( \frac{\lambda_1}{\omega^2 + \lambda_1^2} \quad \frac{\lambda_2}{\omega^2 + \lambda_2^2} \quad \dots \quad \frac{\lambda_\delta}{\omega^2 + \lambda_\delta^2} \right) \Psi^{-1} A^{(2)} \right] \mathbf{b}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.Д.60)$$

С другой стороны, (4.Д.58) можно записать как

$$w(j\omega) = -\mathbf{c}' \left[ E j\omega - A^{(4)} - A^{(3)} \Psi \text{diag} \left[ \frac{1}{\lambda_1} \quad \frac{1}{\lambda_2} \quad \dots \quad \frac{1}{\lambda_\delta} \right] \Psi^{-1} A^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(2)}. \quad (4.Д.61)$$

Сравним последние два выражения. Нетрудно заметить, что, если  $|\lambda_i| \gg \tilde{\omega}_n$ , то в диапазоне частот  $\omega \in [0, \tilde{\omega}_n] - \frac{\lambda_i}{\omega^2 + \lambda_i^2} \approx \frac{1}{\lambda_i}$ , а это означает, что в этом диапазоне вещественные части передаточных матриц (4.Д.60) и (4.Д.61) близки.

Переходя к сравнению мнимых частей этих передаточных матриц, убедимся, что при выполнении условия (4.4.104) вторым слагаемым в (4.Д.60) можно пренебречь.

Действительно, матрица

$$j\omega \left[ E + A^{(3)}\Psi \operatorname{diag} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} \quad \frac{1}{\lambda_2^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{\lambda_s^2} \right) \Psi^{-1} A^{(2)} \right] = j\omega(E + R) = j\omega \Gamma (E + \Lambda^{(R)}) \Gamma^{-1}, \quad (4.Д.62)$$

где

$$\Lambda^{(R)} = \operatorname{diag} \left[ \lambda_1^{(R)} \quad \lambda_2^{(R)} \quad \cdots \quad \lambda_n^{(R)} \right], \quad (4.Д.63)$$

$$\Gamma \Lambda^{(R)} \Gamma^{-1} = R. \quad (4.Д.64)$$

Если выполнено условие (4.4.104), то

$$j\omega \Gamma [E + \Lambda^{(R)}] \Gamma^{-1} = j\omega \Gamma \operatorname{diag} \left[ 1 + \lambda_1^{(R)} \quad 1 + \lambda_2^{(R)} \quad \cdots \quad 1 + \lambda_n^{(R)} \right] \Gamma^{-1} \approx Ej\omega. \quad (4.Д.65)$$

#### 4.Д.7. Доказательство утверждений 4.4.5 и 4.4.6

Докажем эти утверждения в более общем случае, когда  $\mathbf{u}(t)$  –  $m$ -мерный вектор управлений. В этом случае уравнения (4.4.105)-(4.4.107) имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\rho(\mathbf{u}), \quad (4.Д.66)$$

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (4.Д.67)$$

где  $\rho(\mathbf{u})$  –  $m$ -мерная вектор-функция, изображение которой по Лапласу

$$\Lambda\{\rho(\mathbf{u})\} = W_{\text{возм}}(s)\mathbf{u}(s). \quad (4.Д.68)$$

Будем полагать, что

$$W_{\text{возм}}(s) = \operatorname{diag} \left[ w_{\text{возм.1}}(s) \quad w_{\text{возм.2}}(s) \quad \cdots \quad w_{\text{возм.m}}(s) \right]. \quad (4.Д.69)$$

Найдём условия, накладываемые на матрицу  $W_{\text{возм}}(s)$ , при которых система (4.Д.66), (4.Д.67) сохраняет асимптотическую устойчивость.

Утверждение 4.Д.1. Система (4.Д.66), (4.Д.67) асимптотически устойчива, если

$$W_{\text{возм}}(j\omega) + W'_{\text{возм}}(-j\omega) > E_m \quad (4.Д.70)$$

( $E_m$  – единичная матрица размеров  $m \times m$ ). ■

**Доказательство.** Рассмотрим квадратичную форму  $\mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)}$ .

Если учесть, что она является решением уравнения (4.1.5), а в (4.Д.67) матрица  $C = -PB$ , можно записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)} &= \mathbf{x}'(\tau) P \mathbf{x}(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt} [\mathbf{x}'(t) P \mathbf{x}(t)] dt \geq \\
 &\geq - \int_0^\tau \{ \mathbf{x}'(t) [PA + A'P] \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}'(t) PB \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)] \} dt = \\
 &= - \int_0^\tau \{ \mathbf{x}'(t) [CC' - Q] \mathbf{x}(t) - 2\mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)] \} dt = \\
 &= \int_0^\tau \{ \mathbf{x}'(t) Q \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)] \} dt.
 \end{aligned} \tag{4.Д.71}$$

Если

$$\int_0^\infty [-\mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)]] dt > 0, \tag{4.Д.72}$$

то заключаем, полагая в (4.Д.71)  $\tau \rightarrow \infty$ , что

$$\mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)} \geq \int_0^\infty \mathbf{x}'(t) Q \mathbf{x}(t) dt. \tag{4.Д.73}$$

Это в силу положительной определённости матрицы  $Q$  и ограниченности  $\mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)}$  означает асимптотическую устойчивость системы (4.Д.66), (4.Д.67).

Рассмотрим теперь неравенство (4.Д.72), которое является достаточным условием асимптотической устойчивости рассматриваемой системы.

Применим теорему Парсеваля. В соответствии с этой теоремой, если  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  и  $\boldsymbol{\beta}(t)$  – некоторые  $m$ -мерные вектор-функции, то

$$\int_0^\infty \boldsymbol{\alpha}'(t) \boldsymbol{\beta}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \boldsymbol{\alpha}'(-j\omega) \boldsymbol{\beta}(j\omega) d\omega, \tag{4.Д.74}$$

где  $\boldsymbol{\alpha}(j\omega)$  и  $\boldsymbol{\beta}(j\omega)$  – преобразования Фурье векторов  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  и  $\boldsymbol{\beta}(t)$  соответственно.

В (4.Д.72) векторы функций  $\mathbf{u}(t)$  и  $\boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)]$  после преобразования Фурье принимают вид  $\mathbf{u}(j\omega)$  и  $W_{\text{возм}}(j\omega) \mathbf{u}(j\omega)$ .

Таким образом, условие (4.Д.72) записывается как

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \{ -\mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)] \} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \{ \mathbf{u}'(t) \boldsymbol{\rho}[\mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\rho}'[\mathbf{u}(t)] \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t) \} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{ \mathbf{u}'(-j\omega) [W_{\text{возм}}(j\omega) + W_{\text{возм}}'(-j\omega) - E_m] \mathbf{u}(j\omega) \} d\omega > 0.
 \end{aligned} \tag{4.Д.75}$$

Последнее неравенство выполняется при условии (4.Д.70), что и доказывает утверждение 4.4.5.

Утверждение 4.4.6 формулируется для векторного управления следующим образом.

Утверждение 4.Д.2. Система (4.Д.66), (4.Д.67), регулятор (4.Д.67) которой получен на основе процедуры АКОР по критерию обобщённой работы, асимптотически устойчива, если

$$W_{\text{о.з.м}}(j\omega) + W'_{\text{о.з.м}}(-j\omega) > 0. \quad (4.Д.76)$$

**Доказательство.** Возьмём квадратичную форму  $\mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)}$ , матрица  $P$  в которой является решением уравнения Ляпунова (4.1.40). Запишем цепочку неравенств (4.Д.71) и получим

$$\mathbf{x}^{(0)'} P \mathbf{x}^{(0)} \geq \int_0^{\tau} \{ \mathbf{x}'(t) Q \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{u}'(t) \rho[\mathbf{u}(t)] \} dt.$$

Если

$$\int_0^{\infty} 2\mathbf{u}'(t) \rho[\mathbf{u}(t)] dt > 0,$$

то система (4.Д.66), (4.Д.67) асимптотически устойчива. Используем теорему Парсеваля и приходим к неравенству (4.Д.76).

#### 4.Д.8. Доказательство теоремы 4.5.1

Для доказательства сформулируем и докажем несколько важных теорем и утверждений.

Задача 4.Д.1. Пусть имеется полностью управляемый объект (4.1.1) и известен регулятор (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива. Требуется найти положительно-определённую либо неотрицательную (но удовлетворяющую условию (4.1.16)) матрицу  $Q$ , такую, что закон управления (4.1.2) (или, что то же самое, система управления (4.1.1), (4.1.2)) является оптимальным в смысле функционала (4.1.3). ■

Это частный случай обратной задачи оптимального управления.

Утверждение 4.Д.3. Необходимым и достаточным условием оптимальности заданного скалярного закона управления (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива, является существование матрицы  $P$ , удовлетворяющей следующим условиям

$$P > 0, \quad (4.Д.77)$$

$$-P\mathbf{b} = \mathbf{c}^*, \quad (4.Д.78)$$

$$-P(A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{*'}) - (A + \mathbf{b}\mathbf{c}^{*'})'P = Q + \mathbf{c}^* \mathbf{c}^{*'}. \quad (4.Д.79)$$

Необходимость условий этого утверждения почти очевидна.

Действительно, если вектор  $\mathbf{c}^*$  получен в результате процедуры 4.1.1, то в силу теоремы 4.1.1 выполняется условие (4.Д.77) а равенства (4.Д.78) и (4.Д.79) совпадают с (4.1.4) и (4.1.5) соответственно. Достаточность условий (4.Д.77)–(4.Д.79) следует из единственности матрицы  $P > 0$ , являющейся решением уравнения Ляпунова (4.Д.51), и единственности  $P > 0$ , являющейся решением уравнения (4.1.5).

В сущности, целью обратной задачи оптимального управления является нахождение связи между матрицей  $Q$  и вектором  $\mathbf{c}$ .

Такая связь, выражаемая условиями (4.Д.49)–(4.Д.51), содержит промежуточную матрицу  $P$ . Наиболее простое соотношение между матрицей  $Q$  и вектором  $\mathbf{c}$ , не содержащее матрицы  $P$ , доставляет условие оптимальности (4.2.9).

Теорема 4.Д.2. Необходимое и достаточное условие оптимальности заданного закона управления (4.1.2), при котором система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива, состоит в том, чтобы при этом законе управления выполнялось условие (4.2.9).

■

Доказательство теоремы приведено в конце 4.Д.8.

Учитывая, что в (4.2.9) при  $Q > 0$ ,

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) > 0 \quad (4.Д.80)$$

можно на основе теоремы получить ещё одно соотношение, выражающее условие оптимальности заданного закона управления.

Следствие 4.Д.1. Если при заданном векторе  $\mathbf{c}^*$  система (4.1.1), (4.1.2) асимптотически устойчива, то закон управления

$$u = \mathbf{c}^{*'} \mathbf{x} \quad (4.Д.81)$$

будет оптимальным в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) + u^2(t)] dt, \quad Q > 0 \quad (4.Д.82)$$

тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$[1 + w_{paz}(-j\omega)][1 + w_{paz}(j\omega)] > 1. \quad (4.Д.83)$$

■

Переходя к доказательству теоремы 4.5.1, используем тождество (4.5.29), которое при  $s = j\omega$  принимает вид

$$[1 + \bar{w}_{paz}(-j\omega)][1 + \bar{w}_{paz}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^n |h_i(j\omega)|^2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.Д.84)$$

Из следствия 4.Д.1 заключаем, что теорема 4.5.1 будет доказана, если существует вектор  $\tilde{\mathbf{l}}$  такой, что выполняется неравенство

$$[1 + \bar{w}_{paz}(-j\omega)][1 + \bar{w}_{paz}(j\omega)] \geq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.Д.85)$$

Процедура построения такого вектора  $\tilde{\mathbf{l}}$  приведена в п. 4.5.5, что и завершает доказательство.

В заключение докажем теорему 4.Д.2.

*Необходимость условий* теоремы следует непосредственно из утверждения 4.2.1 и преобразований (4.2.4)-(4.2.7). Действительно, пусть

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (4.Д.86)$$

является оптимальным в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + u^2) dt \quad (4.Д.87)$$

законом управления объектом

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u. \quad (4.Д.88)$$

Тогда выполняются соотношения (4.Д.77)-(4.Д.79).

Переходя к доказательству *достаточности*, допустим, что (4.Д.86) – заданный закон управления, при котором система (4.Д.86), (4.Д.88) асимптотически устойчива и пусть выполняется тождество (4.2.9), которое представим в виде

$$[1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = 1 + \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.Д.89)$$

Пусть, с другой стороны, найдено управление

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad (4.Д.90)$$

для объекта (4.Д.88), оптимальное в смысле функционала (4.Д.87). Вектор  $\mathbf{c}$  этого управления удовлетворяет, как показано выше, тождеству

$$[1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = 1 + \boldsymbol{\beta}'(-j\omega)Q\boldsymbol{\beta}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.Д.91)$$

Теорема 4.Д.2 будет доказана, если удастся показать, что из тождества

$$[1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)] = [1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(-j\omega)][1 - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}(j\omega)], \quad 0 \leq \omega \leq \infty \quad (4.Д.92)$$

следует

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^*. \quad (4.Д.93)$$

Доказательство последнего равенства опирается на лемму 4.5.1.

Запишем тождество (4.Д.61) после преобразования (4.5.36) как

$$\left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(-j\omega)\right]\left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(j\omega)\right] = 1 + \check{\beta}'(-j\omega)\check{Q}\check{\beta}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.Д.94)$$

Аналогично представляется тождество (4.Д.91), и тогда (4.Д.64) принимает вид

$$\left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(-j\omega)\right]\left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(j\omega)\right] = \left[1 - \check{c}'\check{\beta}(-j\omega)\right]\left[1 - \check{c}'\check{\beta}(j\omega)\right]. \quad (4.Д.95)$$

Учитывая, что

$$\left[1 - \check{c}'\check{\beta}(s)\right] = \left[1 - \check{c}'\check{\beta}(s)\right] = \frac{d^u(s)}{d(s)}, \quad (4.Д.96)$$

$$\left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(s)\right] = \left[1 - \check{c}^{*'}\check{\beta}(s)\right] = \frac{d^{u*}(s)}{d(s)}, \quad (4.Д.97)$$

закключаем на основе (4.Д.67)

$$|d^u(j\omega)|^2 = |d^{u*}(j\omega)|^2 = \theta(\omega^2). \quad (4.Д.98)$$

Это означает, что неотрицательный полином  $\theta(\omega^2)$  имеет два различных разложения. По условиям теоремы полином  $d^{u*}(s)$  – гурвицев, а полином  $d^u(s)$  – гурвицев по построению оптимальной системы, и, следовательно, в силу леммы 4.5.1  $d^{u*}(s) = d(s)$ . Отсюда следует, что

$$\check{c}^{*'}\check{\beta}(s) = \check{c}'\check{\beta}(s). \quad (4.Д.99)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в числителях этого равенства, получим

$$\check{c}^* = \check{c}.$$

## Заключение к главе 4

Резюмируем изложенное в этой главе.

1. Получены границы (4.2.15)-(4.2.17) запасов устойчивости оптимальных систем, не зависящие от коэффициентов положительно-определённого функционала оптимизации.
2. Установлена связь точности (4.3.8) и качества (4.3.31) регулирования с коэффициентами функционала оптимизации.
3. На этой основе построена процедура 4.4.1 синтеза регуляторов для объектов первого вида по требованиям к точности, качеству и грубости и аналогичная процедура 4.4.2 для объектов второго вида. В обоих случаях объект должен быть устойчив по управлению. Для объектов первого вида это свойство проверяется на основе модели объекта, записанной относительно регулируемой переменной (по полиному  $b_z(s)$ ).

4. Эти результаты легко развиваются для следящих систем (п. 4.4.5).
5. Построена процедура решения обратной задачи АКОР.

Таким образом, результатом этой части книги служат аналитические методы синтеза реализуемых регуляторов одномерных систем по критериям точности и качества при ограниченных внешних возмущениях. Эти методы могут строиться на двух основаниях: модальном либо оптимальном (АКОР) управлении. Первый более удобен для объектов второго вида, а второй – для объектов первого вида. Аналитический синтез, построенный на процедурах АКОР, обладает преимуществом, так как доставляет грубые (по частотным показателям) системы.



---

## Часть III. Метод частотных параметров. Одномерные системы

При управлении объектами с неопределёнными параметрами возможны две ситуации.

Во-первых, когда объект самотождественный и его частотные параметры могут быть получены экспериментально до начала работы объекта в системе управления.

Во-вторых, случай несамотождественного объекта, когда частотные параметры определяются и используются в процессе нормальной эксплуатации объекта в системе.

Пусть имеет место первая ситуация и экспериментально получены частотные параметры объекта. Для построения регулятора необходимо трансформировать аналитический синтез, изложенный в предыдущей части, в частотную область так, чтобы коэффициенты уравнений объекта трансформировались в частотные параметры. Полученный таким образом метод (метод частотных параметров) позволит разрешить задачи синтеза по частотным параметрам объекта.

Для несамотождественных объектов этот метод естественно становится основой прямых алгоритмов адаптивного управления.

Цель настоящей части:

- способ экспериментального определения частотных параметров и исследование сходимости процессов фильтрации при внешних возмущениях и помехах измерения,
- частотное представление методов пространства состояний (частотное модальное и частотное оптимальное управление) и построение на их основе метода частотных параметров,
- разработка критериев устойчивости систем, объекты которых заданы частотными параметрами,
- формирование алгоритмов частотного адаптивного управления.

## Глава 5. Частотные параметры

Экспериментальное определение частотных параметров неустойчивых объектов вызывает определённые трудности. Если известно стабилизирующее управление, то эти трудности легко преодолевается: подадим на вход объекта, замкнутого этим управлением, гармонические сигналы и на выходах фильтров Фурье получим частотные параметры системы, на основе которых вычисляем стабилизированные частотные параметры объекта. Если такое управление неизвестно, то время эксперимента ограничено моментом, в который измерительное устройство «входит в насыщение» из-за расходящихся движений объекта. В связи с этим необходимы оценки времени определения частотных параметров (времени фильтрации) с учётом внешних возмущений и помех. Такие оценки позволяют выделить объекты, для которых можно определить частотные параметры.

Вторая проблема заключается в следующем. Внешние возмущения и помехи – неизвестные, ограниченные функции, разложимые в ряд Фурье. Может случиться так, что частота какой-либо гармоники внешнего возмущения или помехи совпадёт с частотой испытательного воздействия. Это приведёт к смещению оценок частотных параметров, которое вызвано методом их определения (методическая ошибка). Необходимо найти способы исключения таких смещений.

Цель этой главы:

- способы экспериментального определения частотных параметров неустойчивых объектов,
- условия и оценки времени сходимости к ним,
- схемы экспериментов, исключающие методические ошибки в определении частотных параметров.

### 5.1. Частотная передаточная функция

#### 5.1.1. Определения

Рассмотрим одномерную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (5.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p y, \quad u = \mathbf{d}_p\mathbf{x}_p + f_p y, \quad \mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_p^{(0)}, \quad (5.1.2)$$

где  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_p(t)$  –  $n$ - и  $n_p$ -мерные вектора;  $A$ ,  $A_p$  – матрицы;  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}_p$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}_p$  – вектора чисел;  $f_p$  – число.

Пусть объект управления (2.1.1) полностью управляем и наблюдаем. Это означает, что

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} & \dots & A^{n-1}\mathbf{b} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} \mathbf{d}' & A'\mathbf{d}' & \dots & A^{n-1}'\mathbf{d}' \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.1.3)$$

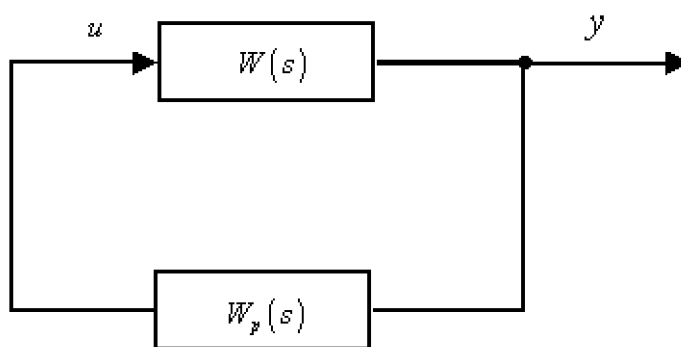


Рис. 5.1.1

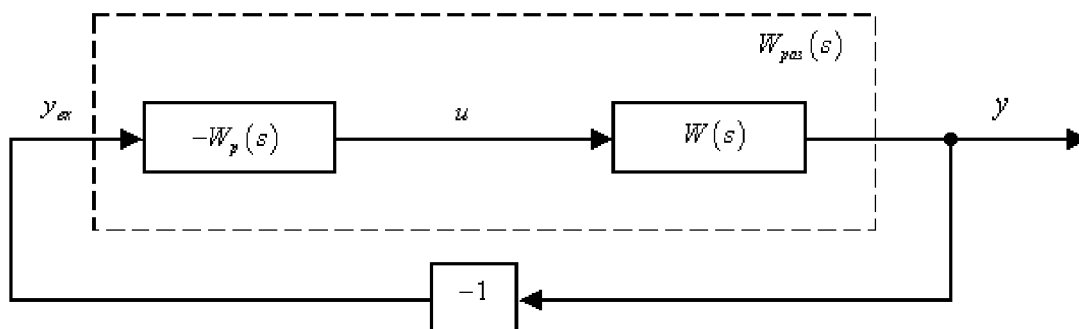


Рис. 5.1.2

При этих условиях эквивалентным (5.1.1) описанием объекта является его передаточная функция.

Определение 5.1.1. Передаточной функцией  $w(s)$  объекта называется выражение, связывающее изображение по Лапласу (при нулевых начальных условиях) его выходной –  $y(s)$  – и входной –  $u(s)$  – переменных. ■

Для получения  $w(s)$  преобразуем (5.1.1) по Лапласу. Тогда при нулевых начальных условиях получим

$$y(s) = [d(E_n s - A)^{-1}b] u(s). \quad (5.1.4)$$

Таким образом

$$w(s) = d(E_n s - A)^{-1}b. \quad (5.1.5)$$

Пусть регулятор (5.1.2) полностью управляем сигналом  $y$  и полностью наблюдаем по сигналу  $u$ . Аналогично получаем передаточную функцию регулятора

$$w_p(s) = d_p(E_{n_p} s - A_p)^{-1}b_p + f_p. \quad (5.1.6)$$

Используем эти передаточные функции и представим структурную схему системы (5.1.1), (5.1.2) в виде эквивалентных схем, показанных на рисунках 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3.

Определение 5.1.2. Передаточной функцией  $w_{раз}(s)$  разомкнутой системы (5.1.1), (5.1.2) называется выражение, связывающее изображение по Лапласу (при

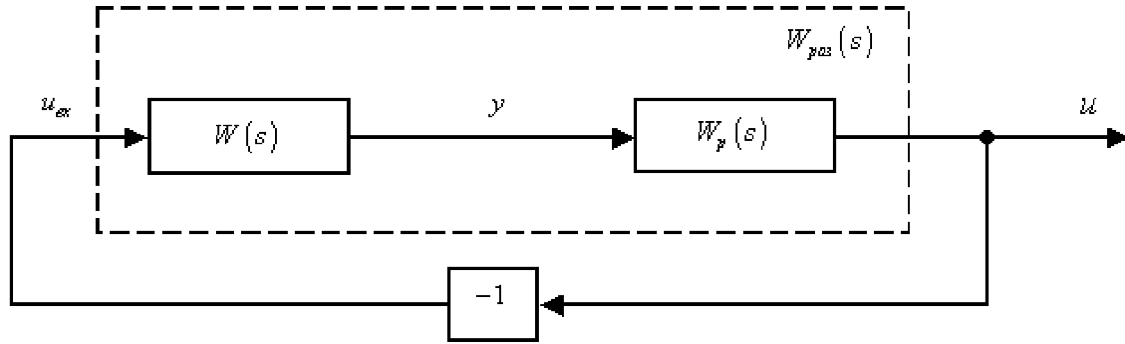


Рис. 5.1.3

нулевых начальных условиях) сигнала на выходе объекта (или выходе регулятора) с сигналом на входе регулятора (или входе объекта), взятым с обратным знаком. ■

Если использовать структурные схемы рис. 5.1.16, 5.1.1в, то  $w_{paz}(s)$  связывает  $y(s)$  с  $y_{ex}(s)$  (либо  $u(s)$  с  $u_{ex}(s)$ ). Непосредственно из этих схем следует, что

$$w_{paz}(s) = -w_p(s)w(s). \quad (5.1.7)$$

Определение 5.1.3. Если в (5.1.5), (5.1.7) положить  $s = j\omega$ , то они описывают при  $0 \leq \omega \leq \infty$  частотные передаточные функции объекта, регулятора и разомкнутой системы соответственно.

Каждая из этих передаточных функций является комплексной функцией, которую можно представить в различных формах.

Так, для описания объекта будем использовать представление

$$w(j\omega) = r(\omega) + ji(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (5.1.8)$$

где

$$r(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega), \quad i(\omega) = \operatorname{Im} w(j\omega), \quad (5.1.9)$$

а частотную передаточную функцию разомкнутой системы будем представлять как

$$w_{paz}(j\omega) = a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (5.1.10)$$

где амплитудно-частотная характеристика

$$a(\omega) = |w_{paz}(j\omega)|, \quad (5.1.11)$$

а фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg w_{paz}(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (5.1.12)$$

Если (5.1.1) – объект первого вида (все его переменные состояния измеряются), то *передаточным вектором* объекта называется выражение, которое связывает изображения по Лапласу (при нулевых начальных условиях) его выхода  $x(s)$  и входа  $u(s)$ . Эта связь имеет вид

$$x(s) = (Es - A)^{-1}bu(s), \quad (5.1.13)$$

и таким образом вектор

$$\beta(s) = (Es - A)^{-1}b \quad (5.1.14)$$

является передаточным вектором объекта.

Аналогично определяется частотный передаточный вектор

$$\beta(j\omega) = (Ej\omega - A)^{-1}b. \quad (5.1.15)$$

Связь между передаточными функциями и векторами объектов второго и первого видов имеет вид

$$w(j\omega) = d\beta(j\omega). \quad (5.1.16)$$

### 5.1.2. Смещённая частотная передаточная функция

Частотные передаточные функции введены определением 5.1.3 формально и для неустойчивых объектов или регуляторов не существуют. Рассмотрим это обстоятельство подробнее. Пусть объект (5.1.1) неустойчив и известна степень неустойчивости объекта, которую определим наименьшим числом  $C_0 > 0$ , таким, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-C_0 t} \mathbf{x}(t) = 0. \quad (5.1.17)$$

Число  $C_0$  называют иногда показателем роста вектор-функции  $\mathbf{x}(t)$

$$C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.1.18)$$

где  $s_i$  – собственные числа матрицы  $A$ .

Для неустойчивых объектов преобразование Лапласа вектора состояния объекта (5.1.1)

$$\mathbf{x}(s) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{-st} dt$$

существует лишь при условии, что  $s$  – комплексное число  $s = \lambda + j\omega$ , в котором абсцисса сходимости

$$\lambda \geq C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.1.19)$$

В связи с этим будем использовать смещённую частотную передаточную функцию.

Определение 5.1.4. Передаточная функция  $w(\lambda + j\omega)$ , в которой  $\lambda$  – фиксированное число, удовлетворявшее неравенству (5.1.19), а  $\omega \in [0, \infty]$ , называется смещённой частотной передаточной функцией. ■

Для объектов первого вида смещённый частотный передаточный вектор

$$\beta^\lambda(j\omega) = \beta(\lambda + j\omega) = [E(\lambda + j\omega) - A]^{-1}b, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (5.1.20)$$

Передаточные функции и вектора объектов второго и первого видов связаны соотношением

$$w^\lambda(j\omega) = w(\lambda + j\omega) = \mathbf{d}\beta^\lambda(j\omega). \quad (5.1.21)$$

Определение 5.1.5. Функции

$$\begin{aligned} r^\lambda(\omega) &= \operatorname{Re} w^\lambda(j\omega) & [\text{либо } r(\omega) &= \operatorname{Re} w(j\omega)] \\ i^\lambda(\omega) &= \operatorname{Im} w^\lambda(j\omega) & [\text{либо } i(\omega) &= \operatorname{Im} w(j\omega)] \end{aligned} \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

называются *частотными функциями*, а вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) &= \operatorname{Re} \beta^\lambda(j\omega) & [\text{либо } \mathbf{r}_x(\omega) &= \operatorname{Re} \beta(j\omega)] \\ \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) &= \operatorname{Im} \beta^\lambda(j\omega) & [\text{либо } \mathbf{i}_x(\omega) &= \operatorname{Im} \beta(j\omega)] \end{aligned} \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

– *частотными вектор-функциями*. ■

### 5.1.3. Модель системы разомкнутой на входе объекта\*

Запишем уравнения (5.1.1), (5.1.2) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}u_{\text{ex}}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{d}_p\mathbf{x}_p + \mathbf{f}_p\mathbf{y}, \quad (5.1.22)$$

$$u_{\text{ex}} = -\mathbf{u} \quad (5.1.23)$$

Это соответствует схеме, приведённой на рис. 5.1.3.

Опустим последнее уравнение, что физически означает размыкание системы на входе объекта. Уравнение (5.1.22) – это модель *системы, разомкнутой на входе объекта*.

Убедимся, что передаточная функция, связывающая выход регулятора  $u(s)$  с входом  $u_{\text{ex}}(s)$  объекта совпадает с (5.1.7).

Вводя обозначения

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{b}_p\mathbf{d} & \mathbf{A}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p\mathbf{d} & \mathbf{d}_p \end{bmatrix}, \quad (5.1.24)$$

запишем (5.1.22) в компактной форме

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}^{(1)}u_{\text{ex}}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{d}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)}. \quad (5.1.22')$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}^{(1)} \left[ \mathbf{E}s - \mathbf{A}^{(1)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(1)}u_{\text{ex}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p\mathbf{d} & \mathbf{d}_p \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{b}_p\mathbf{d} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_p \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u_{\text{ex}}.$$

Учитывая тождество

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}s - \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{b}_p\mathbf{d} & \mathbf{E}s - \mathbf{A}_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1} & 0 \\ (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_p)^{-1}\mathbf{b}_p\mathbf{d}(\mathbf{E}s - \mathbf{A})^{-1} & (\mathbf{E}s - \mathbf{A}_p)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.1.25)$$

получим, с учётом обозначений (5.1.5), (5.1.6),

$$\mathbf{d}^{(1)} (Es - A^{(1)})^{-1} \mathbf{b}^{(1)} = -w_p(s)w(s) = w_{paz}(s). \quad (5.1.26)$$

Рассмотрим теперь объект первого вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (5.1.27)$$

замкнутый регулятором

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (5.1.28)$$

где  $\mathbf{c}'$  – заданный  $n$ -мерный вектор чисел.

Запишем эти уравнения в форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u_{\text{ex}}, \quad u = \mathbf{c}'\mathbf{x}; \quad (5.1.29)$$

$$u_{\text{ex}} = -u. \quad (5.1.30)$$

Уравнения (5.1.29) описывают разомкнутую на входе объекта систему (5.1.27), (5.1.29). При этом

$$u = -\mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}u_{\text{ex}}.$$

Таким образом, передаточная функция для систем с объектами первого вида

$$w_{paz}(s) = -\mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (5.1.31)$$

#### 5.1.4. Модель системы разомкнутой на входе регулятора\*

Представим уравнения (5.1.1), (5.1.2) ещё в одной эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p - \mathbf{b}_p y_{\text{ex}}, \quad u = \mathbf{d}_p\mathbf{x}_p - \mathbf{f}_p y_{\text{ex}}, \quad (5.1.32)$$

$$y_{\text{ex}} = -y, \quad (5.1.33)$$

которая соответствует схеме рис. 5.1.16.

Уравнения (5.1.32) – это модель системы, разомкнутой на входе регулятора.

Вводя обозначения

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b}\mathbf{d}_p \\ 0 & A_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}\mathbf{f}_p \\ -\mathbf{b}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.1.34)$$

запишем уравнения (5.1.32) как

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}^{(2)}y_{\text{ex}}, \quad y = \mathbf{d}^{(2)}\mathbf{x}^{(2)}. \quad (5.1.35)$$

Учитывая, что

$$\left[ Es - A^{(2)} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} Es - A & -\mathbf{b}\mathbf{d}_p \\ 0 & Es - A_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (Es - A)^{-1} & (Es - A)^{-1}\mathbf{b}\mathbf{d}_p(Es - A_p)^{-1} \\ 0 & (Es - A_p)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.1.36)$$

находим

$$y(s) = \mathbf{d}^{(2)} \left[ Es - A^{(2)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(2)} y_{\text{ex}} = w_{paz}(s) y_{\text{ex}}.$$

5.1.5. Стабилизированный частотный передаточный вектор

Рассмотрим вновь преобразование Лапласа неустойчивого объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u. \quad (5.1.37)$$

Такое преобразование существует лишь при условии (5.1.19).

Пусть объект (5.1.37) замкнут стабилизирующим управлением

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (5.1.38)$$

где  $\mathbf{c}'$  – заданный  $n$ -мерный вектор чисел.

Определение 5.1.5. Управление (5.1.38) называется стабилизирующим, если система (5.1.37), (5.1.38) асимптотически устойчива. ■

Систему (5.1.37), (5.1.38) можно преобразовать по Лапласу при  $s = j\omega$ , и тогда существует вектор

$$\boldsymbol{\beta}^c(j\omega) = (Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.1.39)$$

связывающий  $\mathbf{x}(s)$  и  $u(s)$  при  $s = j\omega$ , который будем называть *стабилизированным частотным передаточным вектором* неустойчивого объекта (5.1.37). Действительно, введём передаточный вектор  $\boldsymbol{\beta}^o(s)$  объекта замкнутого стабилизирующим регулятором.

Этот вектор найдём из уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \mathbf{b}\mathbf{c}'^o)\mathbf{x} + \mathbf{b}u_{ex}, \quad (5.1.40)$$

которое следует из (5.1.37), (5.1.38), если в (5.1.37) заменить  $u$  на  $u + u_{ex}$ .

Таким образом,

$$\boldsymbol{\beta}^o(s) = (Es - A - \mathbf{b}\mathbf{c}'^o)^{-1}\mathbf{b}. \quad (5.1.41)$$

В соответствии с утверждением 3.4.1 вектора  $\boldsymbol{\beta}(s)$  и  $\boldsymbol{\beta}^o(s)$  связаны соотношением

$$\boldsymbol{\beta}^o(s) = \boldsymbol{\beta}(s) [1 + w_{paz}^o(s)]^{-1}, \quad (5.1.42)$$

где  $w_{paz}^o(s) = -\mathbf{c}'^o(Es - A)^{-1}\mathbf{b}$  – передаточная функция разомкнутой системы.

Связь (5.1.42) составляет основу для вычисления вектора  $\boldsymbol{\beta}^c(j\omega)$  по экспериментально полученному вектору  $\boldsymbol{\beta}^o(j\omega)$ .

Действительно, запишем (5.1.42) в виде

$$\boldsymbol{\beta}^o(s) = \boldsymbol{\beta}(s) [1 - \mathbf{c}'^o\boldsymbol{\beta}(s)]^{-1} = [E - \boldsymbol{\beta}(s)\mathbf{c}'^o]^{-1}\boldsymbol{\beta}(s). \quad (5.1.43)$$

Умножая это соотношение слева на  $[E - \boldsymbol{\beta}(s)\mathbf{c}'^o]$ , получим

$$[E - \boldsymbol{\beta}(s)\mathbf{c}'^o]\boldsymbol{\beta}^o(s) = \boldsymbol{\beta}(s).$$



Отсюда находим выражение

$$\beta^c(j\omega) = \frac{\beta^o(j\omega)}{1 + \mathbf{c}'\beta^o(j\omega)}, \quad (5.1.44)$$

которое используется для вычисления  $\beta^c(j\omega)$ .

Равенство

$$[1 - \mathbf{c}'\beta(s)]^{-1} \beta(s) = [E - \beta(s)\mathbf{c}']^{-1} \beta(s),$$

нетрудно проверить, если умножить его слева на

$$[E - \beta(s)\mathbf{c}'] [1 - \mathbf{c}'\beta(s)].$$

Вектор  $\mathbf{c}^o$  стабилизирующего управления (5.1.38) существует, если объект (5.1.37) полностью управляем или стабилизируем.

Определение 5.1.6. Векторы

$$\mathbf{r}^c(\omega) = \operatorname{Re} \beta^c(j\omega) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}^c(\omega) = \operatorname{Im} \beta^c(j\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

называются *стабилизированными частотными вектор-функциями*. ■

### 5.1.6. Стабилизированная частотная передаточная функция

Пусть объект второго вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (5.1.45)$$

неустойчив, но для него можно указать стабилизирующий регулятор (стабилизирующее управление)

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p^o \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p^o y, \quad u = \mathbf{d}_p^o \mathbf{x}_p + f_p^o y. \quad (5.1.46)$$

В этом случае существует функция

$$w^c(j\omega) = \mathbf{d}_p (Ej\omega - A)^{-1} \mathbf{b}, \quad (5.1.47)$$

связывающая  $y(s)$  и  $u(s)$  при  $s = j\omega$ , которую будем называть стабилизированной частотной передаточной функцией объекта (5.1.45).

Представляя уравнение (5.1.45) объекта в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{b}u_{\text{ex}}, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}_0 \quad (5.1.48)$$

найдем передаточную функцию  $w^o(s)$  замкнутой системы, связывающую  $y(s)$  и  $u_{\text{ex}}(s)$ .

Для этого воспользуемся схемой, показанной на рис. 5.1.4.

В этой схеме учтено слагаемое  $\mathbf{b}u_{\text{ex}}$  в (5.1.48). Непосредственно из рис. 5.1.4 следует  $y(s) = w^o(s)u + \mathbf{b}\mathbf{x}$ . Здесь

$$w^o(s) = \frac{w(s)}{1 + w_{\text{раз}}^o(s)}, \quad (5.1.49)$$

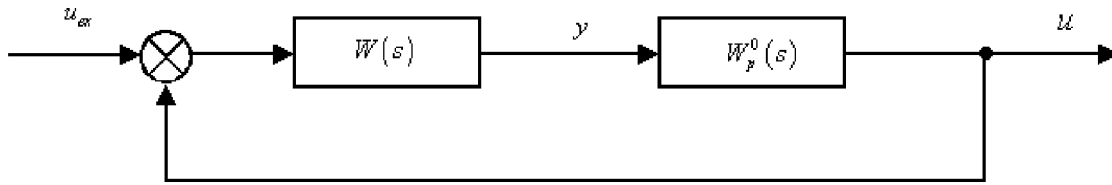


Рис. 5.1.4

где  $w_{p_{аз}}^o(s) = -w_p^o(s)w(s)$ ,  $w_p^o(s) = \mathbf{d}_p^o(Es - A_p^o)^{-1}\mathbf{b}_p^o + f_p^o$ .

Если экспериментально получена функция  $w^o(j\omega)$ , то стабилизированная частотная передаточная функция неустойчивого объекта (5.1.45) вычисляется по формуле

$$w^c(j\omega) = \frac{w^o(j\omega)}{1 + w^o(j\omega)w_p^o(j\omega)}, \quad (5.1.50)$$

которая следует из (5.1.49).

В главе 3 было показано, что для полностью управляемого и полностью наблюдаемого объекта (5.1.45) всегда существует стабилизирующий регулятор (5.1.46).

Используя функцию (5.1.50), определим стабилизированные частотные функции объекта

$$r^c(\omega) = \operatorname{Re} w^c(j\omega), \quad i^c(\omega) = \operatorname{Im} w^c(j\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (5.1.51)$$

## 5.2. Частотные параметры ( $\omega$ -индексы)

### 5.2.1. Реакция на испытательное воздействие

Пусть все переменные состояния объекта (5.1.1) доступны непосредственному измерению. Тогда он описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}. \quad (5.2.1)$$

Приложим к объекту экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие

$$u = e^{\lambda t} \sin \omega t. \quad (5.2.2)$$

Утверждение 5.2.1. Реакция объекта (5.2.1) на воздействие (5.2.2) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t \right] + e^{\lambda t} \mathbf{x}^0(t), \quad (5.2.3)$$

где

$$\mathbf{r}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Re} \boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega), \quad \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Im} \boldsymbol{\beta}^\lambda(j\omega), \quad (5.2.4)$$

$$\mathbf{x}^0(t) = e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \left[ \mathbf{x}^{(0)} e^{-\lambda t_0} - \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 \right]. \quad (5.2.5)$$

Если показатель экспоненты  $\lambda$  больше степени неустойчивости объекта (выполняется неравенство (5.1.19)), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^0(t) = \mathbf{0}. \quad (5.2.6)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.1

Выражение (5.2.3) даёт содержательное представление вектора  $\beta^\lambda(j\omega)$ , введённого формально соотношением (5.1.20).

Если объект (5.2.1) – асимптотически устойчив, то можно положить  $\lambda = 0$  и тогда решение (5.2.3) примет вид

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{r}_x(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x(\omega) \cos \omega t] + \check{\mathbf{x}}^0(t), \quad (5.2.7)$$

где

$$\mathbf{r}_x(\omega) = \operatorname{Re} \beta(j\omega), \quad \mathbf{i}_x(\omega) = \operatorname{Im} \beta(j\omega), \quad (5.2.8)$$

$$\check{\mathbf{x}}^0(t) = e^{A(t-t_0)} [\mathbf{x}^0 - \mathbf{r}_x(\omega) \sin \omega t_0 - \mathbf{i}_x(\omega) \cos \omega t_0]. \quad (5.2.9)$$

Если (5.1.1) – объект второго вида, то реакция на экспоненциально-гармоническое воздействие (5.2.2) записывается на основе (5.2.3) как

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} [\mathbf{r}^\lambda(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}^\lambda(\omega) \cos \omega t] + e^{\lambda t} \mathbf{d}\check{\mathbf{x}}^0(t), \quad (5.2.10)$$

где

$$\mathbf{r}^\lambda(\omega) = \mathbf{d}\mathbf{r}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Re} w^\lambda(j\omega), \quad \mathbf{i}^\lambda(\omega) = \mathbf{d}\mathbf{i}_x^\lambda(\omega) = \operatorname{Im} w^\lambda(j\omega). \quad (5.2.11)$$

Для асимптотически устойчивых объектов получим при  $\lambda = 0$

$$\mathbf{y}(t) = r(\omega) \sin \omega t + i(\omega) \cos \omega t + \mathbf{d}\check{\mathbf{x}}^0(t), \quad (5.2.12)$$

где

$$r(\omega) = \operatorname{Re} w(j\omega), \quad i(\omega) = \operatorname{Im} w(j\omega). \quad (5.2.13)$$

Умножим реакции (5.2.3), (5.2.10) на  $e^{-\lambda t}$  и получим экспоненциально взвешенные функции

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)e^{-\lambda t} = \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t + \check{\mathbf{x}}^0(t), \quad (5.2.14)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t)e^{-\lambda t} = r^\lambda(\omega) \sin \omega t + i^\lambda(\omega) \cos \omega t + \mathbf{d}\check{\mathbf{x}}^0(t). \quad (5.2.15)$$

### 5.2.2. Определение частотных параметров ( $\omega$ -индексов)

Зафиксируем  $n$  произвольных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ .

Для этих испытательных частот запишем (5.2.15) как

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = r^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + i^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{d}\check{\mathbf{x}}^0(t) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.16)$$

Числа  $r^\lambda(\omega_k)$  и  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в этом выражении являются частотными параметрами объекта (5.1.1). Они были введены формально определением 1.2.1 как значения частотных функций

$$r^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Re} w(\lambda + j\omega_k), \quad i^\lambda(\omega_k) = \operatorname{Im} w(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.17)$$

Выражение (5.2.16) даёт возможность содержательного определения частотных параметров.

Определение 5.2.1. Осуществим  $n$  экспериментов с объектом (5.1.1). В первом эксперименте приложим ко входу объекта экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t} \sin \omega_1 t. \quad (5.2.18)$$

Измеряемый выходной сигнал  $y(t)$  умножим на  $e^{-\lambda t}$  и, после затухания переходных процессов, найдём коэффициенты при  $\sin \omega_1 t$  и  $\cos \omega_1 t$  в сигнале  $\tilde{y}(t)$ . Повторим эксперимент для  $\omega = \omega_2$ ,  $\omega = \omega_3$  и т.д. После  $n$  экспериментов получим  $2n$  чисел  $r^\lambda(\omega_k)$  и  $i^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), которые называются *частотными параметрами* или  $\omega$ -индексами объекта (5.1.1). ■

Введём несколько понятий, позволяющих дать более строгое содержательное определение частотных параметров ( $\omega$ -индексов).

Определение 5.2.2. Произвольный набор из  $n$  различных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  из интервала  $(0, \infty)$  называется  $\omega$ -тестом. ■

Определение 5.2.3. Положительное число  $\lambda$ , удовлетворяющее неравенству (5.1.19), называется  $\lambda$ -смещением. ■

Определение 5.2.4. Частотные параметры ( $\omega$ -индексы) объекта (5.1.1) – это значения частотных функций на  $\omega$ -тесте и  $\lambda$ -смещении.

Значения частотных вектор-функций объекта (5.1.21) на  $\omega$ -тесте и  $\lambda$ -смещении называются векторами частотных параметров (векторами  $\omega$ -индексов). ■

Иногда объект будет подвергаться более чем  $n$  экспериментам.

Если это  $2n$  – экспериментов, то набор  $2n$  различных частот будем называть *двухкратным  $\omega$ -тестом*.

Соответствующие этим частотам значения частотных функций называется *двухкратными частотными параметрами* (двухкратными  $\omega$ -индексами). Если число экспериментов больше  $n$ , но меньше  $2n$ , то будем называть такой набор испытательных частот расширенным  $\omega$ -тестом, а значения частотных функций – *расширенными частотными параметрами* (расширенными  $\omega$ -индексами).

Пример 5.2.1. Найдём  $\omega$ -индексы велосипеда, описываемого уравнением (1.3.6) с известными коэффициентами. Последнее позволяет использовать для нахождения  $\omega$ -индексов формальное определение 5.2.17. В п. 5.4 будут получены частотные параметры велосипеда для случая неизвестных коэффициентов уравнения (1.3.6). Для этой цели применяются фильтр Фурье и локальный фильтр.

Пусть конструктивные параметры велосипеда

$$c = 2 \text{ м}, \quad h = 0.6 \text{ м}, \quad l = 1 \text{ м}, \quad v = 6 \text{ м/с}. \quad (5.2.19)$$

На основе формул (1.3.7) получим коэффициенты уравнений (1.3.6)

$$d_0 = -16 \text{ 1/с}^2, \quad b_0 = 30 \text{ 1/с}^2, \quad b_1 = 5 \text{ 1/с}. \quad (5.2.20)$$

При отсутствии внешних возмущений уравнения велосипеда имеют вид

$$\ddot{y} + d_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (5.2.21)$$

Рассматриваемый объект неустойчив. Степень его неустойчивости

$$C_0 = \sqrt{|d_0|} = 4. \quad (5.2.22)$$

Примем

$$\lambda = 6. \quad (5.2.23)$$

Найдём смещённую передаточную функцию

$$\begin{aligned} w(\lambda + j\omega) &= \frac{b_1(\lambda + j\omega) + b_0}{(\lambda + j\omega)^2 + d_0} = \\ &= \frac{(b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 - \omega^2 + d_0) + 2b_1\lambda\omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega^2} + j \frac{b_1\omega(\lambda^2 - \omega^2 + d_0) - 2\lambda\omega(b_1\lambda + b_0)}{(\lambda^2 - \omega^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Таким образом, частотные параметры велосипеда

$$r^\lambda(\omega_k) = \frac{(b_1\lambda + b_0)(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0) + 2b_1\lambda\omega_k^2}{(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega_k^2} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.2.25)$$

$$i^\lambda(\omega_k) = \frac{b_1\omega_k(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0) - 2\lambda\omega_k(b_1\lambda + b_0)}{(\lambda^2 - \omega_k^2 + d_0)^2 + 4\lambda^2\omega_k^2} \quad k = 1, 2, \dots. \quad (5.2.26)$$

Полагая в качестве  $\omega$ -теста

$$\omega_1 = 3, \quad \omega_2 = 6, \quad (5.2.27)$$

найдем  $\omega$ -индексы

$$r^\lambda(\omega_1) = 0.85, \quad r^\lambda(\omega_2) = 0.22, \quad (5.2.28)$$

$$i^\lambda(\omega_1) = -1.4, \quad i^\lambda(\omega_2) = -0.88. \quad (5.2.29)$$

■

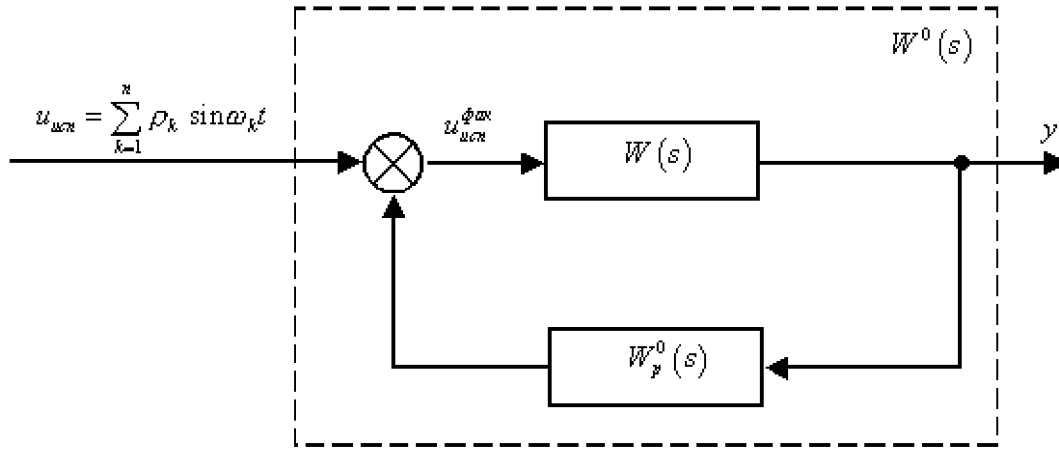


Рис. 5.2.1

### 5.2.3. Стабилизированные $\omega$ -индексы (1-й способ вычисления)

Пусть для неустойчивого объекта (5.1.1) можно указать стабилизирующий регулятор (5.1.46).

Замкнутая таким регулятором асимптотически устойчивая система приведена на рис. 5.2.1, где  $w_p^o(s) = \mathbf{d}_p^o (Es - A_p^o)^{-1} \mathbf{b}_p^o + f_p^o$ .

Определим значения частотных функций этой системы на  $n$  частотах при нулевом  $\lambda$ -смещении

$$r^o(\omega_k) = \operatorname{Re} w^o(j\omega_k), \quad i^o(\omega_k) = \operatorname{Im} w^o(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.30)$$

Используем выражения (5.1.50), (5.1.51) и найдём числа

$$r^c(\omega_k) = \operatorname{Re} \frac{r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)}{1 + [r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)] \cdot w_p^o(j\omega_k)} \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.31)$$

$$i^c(\omega_k) = \operatorname{Im} \frac{r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)}{1 + [r^o(\omega_k) + ji^o(\omega_k)] \cdot w_p^o(j\omega_k)} \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.32)$$

которые называются *стабилизированными частотными параметрами (стабилизированными  $\omega$ -индексами)* неустойчивого объекта.

Пример 5.2.2. Пусть для велосипеда (5.2.21) известен стабилизирующий регулятор

$$g_1^o \dot{u} + g_0^o u = r_1^o \dot{y} + r_0^o y \quad (5.2.33)$$

с параметрами

$$g_1^o = 1, \quad g_0^o = 8; \quad r_1^o = -3, \quad r_0^o = -13. \quad (5.2.34)$$

Передаточная функция велосипеда, замкнутого этим регулятором, имеет, в соответствии с (5.1.49), вид

$$w^o(s) = \frac{(b_1 s + b_0)(g_1^o s + g_0^o)}{(s^2 + d_0)(g_1^o s + g_0^o) - (r_1^o s + r_0^o)(b_1 s + b_0)}. \quad (5.2.35)$$

При численных значениях (5.2.20), (5.2.34) вычислим, полагая  $\omega_1 = 3$ ,  $\omega_2 = 6$ ,

$$r^o(\omega_1) = 0.597, \quad r^o(\omega_2) = 0.321, \quad (5.2.36)$$

$$i^o(\omega_1) = -0.416, \quad i^o(\omega_2) = -0.391. \quad (5.2.37)$$

Подставим эти числа в (5.2.31), (5.2.32) и получим стабилизированные частотные параметры велосипеда

$$r^c(\omega_1) = -1.2, \quad r^c(\omega_2) = -0.577, \quad (5.2.38)$$

$$i^c(\omega_1) = -0.6, \quad i^c(\omega_2) = -0.577. \quad (5.2.39)$$

■

#### 5.2.4. Частотные параметры входа и выхода при ( $\lambda = 0$ )

Приведём второй способ вычисления стабилизированных  $\omega$ -индексов. Он основан на частотных параметрах входа и выхода объекта.

Вновь рассмотрим схему, приведённую на рис. 5.2.1. В этой схеме на вход объекта в установившемся режиме поступает сигнал

$$u_{u\,cn}^{\phi\,ak}(t) = u_{u\,cn}(t) + u(t) = \sum_{k=1}^n [\nu_k \sin \omega_k t + \gamma_k \cos \omega_k t], \quad (5.2.40)$$

в котором коэффициенты  $\nu_k$ ,  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) зависят от испытательных частот.

В установившемся режиме выход объекта

$$y(t) = \sum_{k=1}^n [\alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t]. \quad (5.2.41)$$

Если в (5.2.40)  $\nu_k = 1$  и  $\gamma_k = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то коэффициенты в (5.2.41) совпадают с частотными параметрами объекта

$$\alpha_k = r(\omega_k), \quad \beta_k = i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.42)$$

Определение 5.2.5. Коэффициенты  $\nu_k$  и  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) входного воздействия (5.2.40) называются частотными параметрами ( $\omega$ -индексами) входа объекта. ■

Определение 5.2.6. Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) при гармониках выхода (5.2.41) объекта, возбуждённого сигналом (5.2.40), называются частотными параметрами ( $\omega$ -индексами) выхода объекта. ■

Утверждение 5.2.2. Частотные параметры объекта связаны  $\omega$ -индексами его входа и выхода соотношениями

$$r^c(\omega_k) = \frac{\nu_k \alpha_k + \gamma_k \beta_k}{\nu_k^2 + \gamma_k^2}, \quad i^c(\omega_k) = \frac{\nu_k \beta_k - \gamma_k \alpha_k}{\nu_k^2 + \gamma_k^2} \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.43)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.2.

Таким образом, второй способ вычисления стабилизированных  $\omega$ -индексов объекта заключается в следующем: экспериментально определяем частотные параметры входа  $\nu_k, \gamma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и выхода  $\alpha_k, \beta_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) объекта, затем по формулам (5.2.43) находим  $\omega$ -индексы.

Аналогично определяются  $\omega$ -индексы входа и выхода регулятора.

Определение 5.2.7. Коэффициенты  $\alpha_k^u, \beta_k^u$  ( $k = \overline{1, n}$ ) при гармониках выхода регулятора

$$u(t) = \sum_{k=1}^n [\alpha_k^u \sin \omega_k t + \beta_k^u \cos \omega_k t] \quad (5.2.44)$$

называются  $\omega$ -индексами (частотными параметрами) выхода регулятора. ■

Частотные параметры входа регулятора  $\nu_k^u$  и  $\gamma_k^u$  ( $k = \overline{1, n}$ ) совпадают с частотными параметрами выхода объекта

$$\nu_k^u = \alpha_k, \quad \gamma_k^u = \beta_k \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.45)$$

Заметим, что частотные параметры входа объекта связаны с параметрами выхода регулятора соотношениями

$$\nu_k = \alpha_k^u + \rho_k, \quad \gamma_k = \beta_k^u \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.46)$$

Выразим  $\omega$ -индексы выхода объекта и регулятора через параметры передаточных функций объекта и регулятора.

Из схемы на рис. 5.2.1 следует

$$u = w^u(s)u_{ucn}, \quad y = w^o(s)u_{ucn}, \quad (5.2.47)$$

где

$$w^u(s) = \frac{w(s)w_p^o(s)}{1 - w(s)w_p^o(s)}, \quad w^o(s) = \frac{w(s)}{1 - w(s)w_p^o(s)}. \quad (5.2.48)$$

Очевидно, что

$$\alpha_k = \operatorname{Re} w^o(j\omega_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im} w^o(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.49)$$

$$\alpha_k^u = \operatorname{Re} w^u(j\omega_k), \quad \beta_k^u = \operatorname{Im} w^u(j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.50)$$

Пример 5.2.3. Найдём стабилизированные  $\omega$ -индексы велосипеда, используя описанный способ.

Сформируем

$$w^u(s) = \frac{(b_1 s + b_0)(r_1^o s + r_0^o)}{(s^2 + d_0)(g_1^o s + g_0^o) - (r_1^o s + r_0^o)(b_1 s + b_0)} \quad (5.2.51)$$

и вычислим при  $\omega_1 = 3$  и  $\omega_2 = 6$

$$\begin{aligned} \alpha_1^u &= -1.259, & \beta_1^u &= 0.476; \\ \alpha_2^u &= -0.939, & \beta_2^u &= 0.616. \end{aligned} \quad (5.2.52)$$



Затем на основе (5.2.46) находим

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -0.259, & \gamma_1 &= 0.476; \\ \nu_2 &= 0.061, & \gamma_2 &= 0.618. \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

Представим (5.2.36), (5.2.37) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r^o(\omega_1) = 0.597, & \beta_1 &= i^o(\omega_1) = -0.416; \\ \alpha_2 &= r^o(\omega_2) = 0.321, & \beta_2 &= i^o(\omega_2) = -0.320. \end{aligned}$$

Тогда по формулам (5.2.43) получим

$$\begin{aligned} r^c(\omega_1) &= -1.2, & i^c(\omega_1) &= -0.6; \\ r^c(\omega_2) &= -0.577, & i^c(\omega_2) &= -0.577. \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

■

### 5.2.5. Частотные параметры входа и выхода при ( $\lambda \neq 0$ )

Пусть в схеме, приведённой на рис 5.2.1, воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t} = \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t. \quad (5.2.55)$$

Допустим также, что регулятор не обязательно стабилизирующий (поэтому верхний индекс в обозначении его передаточной функции допустим:  $w_p^o(s) = w_p(s)$ ).

Экспериментально-взвешенный выход объекта имеет (при достаточно большом  $t$ ) вид

$$\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^n [\alpha_k^\lambda \sin \omega_k t + \beta_k^\lambda \cos \omega_k t]. \quad (5.2.56)$$

Здесь  $\alpha_k^\lambda$  и  $\beta_k^\lambda$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – частотные параметры выхода объекта. Они связаны с передаточными функциями системы соотношениями, аналогичными (5.2.49), (5.2.50)

$$\alpha_k^\lambda = r^{o\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Re} w^o(\lambda + j\omega_k), \quad \beta_k^\lambda = i^{o\lambda}(\omega_k) = \operatorname{Im} w^o(\lambda + j\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.57)$$

Экспоненциально-взвешенный вход объекта

$$\tilde{u}_{ucn}^{\phi a\kappa}(t) = u_{ucn}^{\phi a\kappa}(t)e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^n [\nu_k^\lambda \sin \omega_k t + \gamma_k^\lambda \cos \omega_k t], \quad (5.2.58)$$

где  $\nu_k = 1$  и  $\gamma_k = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – частотные параметры входа объекта.

Очевидно, что частотные параметры объекта

$$r^\lambda(\omega_k) = \frac{\nu_k^\lambda \alpha_k^\lambda + \gamma_k^\lambda \beta_k^\lambda}{(\nu_k^\lambda)^2 + (\gamma_k^\lambda)^2}, \quad i^\lambda(\omega_k) = \frac{\nu_k^\lambda \beta_k^\lambda - \gamma_k^\lambda \alpha_k^\lambda}{(\nu_k^\lambda)^2 + (\gamma_k^\lambda)^2} \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.59)$$

5.2.6. Функции перехода к частотным параметрам\*

Рассмотрим выражение (5.2.7), полагая, для простоты,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ . Тогда оно примет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}_x(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x(\omega) \cos \omega t - \left[ \mathbf{r}_x^A(\omega) \sin \omega t_0 + \mathbf{i}_x^A(\omega) \cos \omega t_0 \right], \quad (5.2.60)$$

где

$$\mathbf{r}_x^A(\omega) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{r}_x(\omega), \quad \mathbf{i}_x^A(\omega) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{i}_x(\omega). \quad (5.2.61)$$

Это соотношение можно представить так

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left[ \mathbf{r}_x(\omega) - \mathbf{r}_x^A(\omega) \cos \omega(t-t_0) - \mathbf{i}_x^A(\omega) \sin \omega(t-t_0) \right] \sin \omega t + \\ &+ \left[ \mathbf{i}_x(\omega) + \mathbf{r}_x^A(\omega) \sin \omega(t-t_0) - \mathbf{i}_x^A(\omega) \cos \omega(t-t_0) \right] \cos \omega t = \\ &= \mathbf{r}_x(t, \omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x(t, \omega) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.2.62)$$

Здесь

$$\mathbf{r}_x(t, \omega) = \mathbf{r}_x(\omega) - e^{A(t-t_0)} \left[ \mathbf{r}_x(\omega) \cos \omega(t-t_0) + \mathbf{i}_x(\omega) \sin \omega(t-t_0) \right], \quad (5.2.63)$$

$$\mathbf{i}_x(t, \omega) = \mathbf{i}_x(\omega) - e^{A(t-t_0)} \left[ -\mathbf{r}_x(\omega) \sin \omega(t-t_0) + \mathbf{i}_x(\omega) \cos \omega(t-t_0) \right]. \quad (5.2.64)$$

Умножим эти выражения на вектор строку  $\mathbf{d}$  и зафиксируем  $\omega$ . Тогда для объекта (5.1.1) получим

$$\begin{aligned} r^\lambda(t, \omega_k) &= r^\lambda(\omega_k) - \mathbf{d} e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \times \\ &\times \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k(t-t_0) + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k(t-t_0) \right] \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

$$\begin{aligned} i^\lambda(t, \omega_k) &= i^\lambda(\omega_k) - \mathbf{d} e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \times \\ &\times \left[ -\mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k(t-t_0) + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k(t-t_0) \right] \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.2.66)$$

с учётом которых можно записать (2.2.15) при  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  как

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{r}^\lambda(t, \omega_k) \sin \omega_k t + \mathbf{i}^\lambda(t, \omega_k) \cos \omega_k t. \quad (5.2.67)$$

Определение 5.2.8. Функции  $r^\lambda(t, \omega_k)$ ,  $i^\lambda(t, \omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) называются функциями перехода к частотным параметрам (или просто функциями перехода). ■

Аналогично определяются вектор-функции перехода для объекта (5.2.1). Действительно, из (5.2.63) и (5.2.64) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x^\lambda(t, \omega_k) &= \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) - e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \times \\ &\times \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k(t-t_0) + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k(t-t_0) \right] \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x^\lambda(t, \omega_k) &= \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) - e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \times \\ &\times \left[ -\mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k(t-t_0) + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k(t-t_0) \right] \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.2.69)$$

Очевидно, что функции перехода сходятся при  $\lambda > C_0$  к частотным параметрам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r^\lambda(t, \omega_k) = r^\lambda(\omega_k), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i^\lambda(t, \omega_k) = i^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.2.70)$$

Соотношения (5.2.65), (5.2.66), которые определяют функции перехода, были получены формальными преобразованиями (5.2.62). Опишем на примере объекта первого порядка способ более естественного (содержательного) построения выражений (5.2.65), (5.2.66).

Пример 5.2.4. Рассмотрим объект

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x(t_0) = 0, \quad (5.2.71)$$

в котором  $x(t)$ ,  $a$ ,  $b$  – скаляры.

Смещённая частотная передаточная функция объекта имеет в соответствии с (5.1.20) вид

$$\beta^\lambda(j\omega) = \frac{b}{j\omega + \lambda - a} = \frac{b(\lambda - a)}{(\lambda - a)^2 + \omega^2} + j \frac{-b\omega}{(\lambda - a)^2 + \omega^2} = r^\lambda(\omega) + ji^\lambda(\omega). \quad (5.2.72)$$

Таким образом, частотные параметры объекта (5.2.71)

$$r^\lambda(\omega_1) = \frac{b(\lambda - a)}{(\lambda - a)^2 + \omega_1^2}, \quad i^\lambda(\omega_1) = \frac{-b\omega_1}{(\lambda - a)^2 + \omega_1^2}. \quad (5.2.73)$$

Найдём функции перехода к этим  $\omega$ -индексам, обозначая их для сокращения как  $r(t)$  и  $i(t)$  вместо  $r^\lambda(t, \omega_1)$  и  $i^\lambda(t, \omega_1)$ .

Решение уравнения

$$\dot{x} = ax + be^{\lambda t} \sin \omega t \quad (5.2.74)$$

будем искать в виде

$$x(t) = r(t) \sin \omega t + i(t) \cos \omega t. \quad (5.2.75)$$

Подставляя (2.2.75) в (2.2.74) и сравнивая коэффициенты при соответствующих гармониках, получим дифференциальные уравнения для функций перехода

$$\dot{r} = \mu r + \omega i + b, \quad \dot{i} = -\omega r + \mu i, \quad r(t_0) = i(t_0) = 0, \quad \mu = a - \lambda. \quad (5.2.76)$$

Фундаментальная матрица этой системы имеет, как показано в п. 5.П.1, вид (5.П.18)

$$x(t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \cos \omega t & -\sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу в формулу Коши, запишем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r(t) \\ i(t) \end{bmatrix} &= \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \end{pmatrix} \cdot e^{\mu(t-\tau)} \cdot \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b \cos(t-\tau) \\ -e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b \sin(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned} \quad (5.2.77)$$

Рассмотрим подробнее выражение

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \int_{t_0}^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b \cos \omega(t-\tau) d\tau = \\
 &= e^{(a-\lambda)t} b \int_{t_0}^t e^{-(a-\lambda)\tau} (\sin \omega t \sin \omega \tau + \cos \omega t \cos \omega \tau) d\tau = \\
 &= e^{(a-\lambda)t} b \left[ \sin \omega t \int_{t_0}^t e^{(\lambda-a)\tau} \sin \omega \tau d\tau + \cos \omega t \int_{t_0}^t e^{(\lambda-a)\tau} \cos \omega \tau d\tau \right] = \\
 &= e^{(a-\lambda)t} b \left\{ \sin \omega t \left[ \frac{e^{(\lambda-a)\tau}}{(\lambda-a)^2 + \omega^2} [(\lambda-a) \sin \omega \tau - \omega \cos \omega \tau] \right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} + \right. \\
 &+ \left. \cos \omega t \left[ \frac{e^{(\lambda-a)\tau}}{(\lambda-a)^2 + \omega^2} [\omega \sin \omega \tau - (\lambda-a) \cos \omega \tau] \right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} \right\} = \\
 &= \frac{b}{(\lambda-a)^2 + \omega^2} \left\{ (\lambda-a) - e^{(a-\lambda)(t-t_0)} [(\lambda-a) \cos \omega(t-t_0) - \omega \sin \omega(t-t_0)] \right\} = \\
 &= r^\lambda(\omega) - e^{(a-\lambda)(t-t_0)} \left[ r^\lambda(\omega) \cos \omega(t-t_0) + i^\lambda(\omega) \sin \omega(t-t_0) \right].
 \end{aligned} \tag{5.2.78}$$

Сравнивая последнее выражение с правой частью (2.2.65), заключаем, что при  $\omega = \omega_1$  они совпадают. Аналогично доказывается, что  $i^\lambda(t, \omega_1)$ , определяемое (2.2.66), совпадает с решением  $i(t)$ . ■

### 5.2.7. Время сходимости к частотным параметрам\*

Если (5.2.1) является асимптотически устойчивым объектом первого порядка ( $n = 1$ ), то функции перехода при  $\lambda = 0$  принимают особенно простой вид. Так, в частности

$$\mathbf{r}_x(t, \omega_1) = \mathbf{r}_x(\omega_1) - e^{a(t-t_0)} [\mathbf{r}_x(\omega_1) \cos \omega_1(t-t_0) + \mathbf{i}_x(\omega_1) \sin \omega_1(t-t_0)]. \tag{5.2.79}$$

Из (5.2.79) следует, что время сходимости функции перехода по  $\omega$ -индексу  $\mathbf{r}_x(\omega_1)$  определяется коэффициентом  $a$  и значениями частотных параметров.

Определение 5.2.9. *Временем сходимости к частотным параметрам ( $t_{cx}$ )* называется время, через которое модуль разности между частотными параметрами и соответствующими функциями перехода становится меньше некоторого наперёд заданного числа  $\varepsilon_{cx} > 0$ .

Для объектов первого вида это означает, что

$$\left| r_{xl}^\lambda(t_{cx}, \omega_k) - r_{xl}^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_{cx}, \quad \left| i_{xl}^\lambda(t_{cx}, \omega_k) - i_{xl}^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_{cx} \quad l, k = \overline{1, n}, \tag{5.2.80}$$

где  $r_{xl}$  и  $i_{xl}$  – компоненты векторов  $\mathbf{r}_x$  и  $\mathbf{i}_x$ , а для объектов (5.1.1)

$$\left| r^\lambda(t_{cx}, \omega_k) - r^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_{cx}, \quad \left| i^\lambda(t_{cx}, \omega_k) - i^\lambda(\omega_k) \right| \leq \varepsilon_{cx} \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.2.81}$$

Ограничиваясь для простоты рассмотрением лишь  $r_x^\lambda(\omega_k)$  и  $r^\lambda(\omega_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), запишем последние неравенства, используя (5.2.68), (5.2.65), в явной форме

$$\left| \left\{ e^{(A-E\lambda)t_{cx}} \left[ r_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_{cx} + i_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_{cx} \right] \right\}_l \right| \leq \varepsilon_{cx} \quad l, k = \overline{1, n}, \quad (5.2.82)$$

$$\left| d e^{(A-E\lambda)t_{cx}} \left[ r_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_{cx} + i_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_{cx} \right] \right| \leq \varepsilon_{cx} \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.83)$$

где  $\{\cdot\}_l$  –  $l$ -тая компонента вектора в фигурных скобках.

Для асимптотически устойчивых объектов время  $t_{cx}$ , определяемое из (5.2.82) либо (5.2.83), при  $\lambda = 0$  будем называть *естественным временем сходимости* к частотным параметрам. Это время, обозначаемое далее как  $t_{cx}^0$ , определяется внутренними свойствами объекта.

Время сходимости можно существенно сократить по сравнению с естественным, если использовать экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие и экспоненциально-взвешенную функцию выхода.

Убедимся в этом на примере объекта первого порядка. Неравенства (5.2.80) при  $\lambda = 0$  имеют, как следует из (5.2.79), вид

$$e^{at_{cx}^0} \left| r_x(\omega_1) \cos \omega_1 t_{cx}^0 + i_x(\omega_1) \sin \omega_1 t_{cx}^0 \right| \leq \varepsilon_{cx}. \quad (5.2.84)$$

Если ввести амплитуду

$$a_x(\omega_1) = \sqrt{r_x^2(\omega_1) + i_x^2(\omega_1)},$$

то из (5.2.84) следует оценка

$$t_{cx}^0 \leq \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln a_x(\omega_1)}{a}. \quad (5.2.85)$$

Если используется экспоненциально-гармоническое испытательное воздействие, то из (5.2.82) следует при  $n = 1$

$$\left| e^{(a-\lambda)t_{cx}} a_x^\lambda(\omega_1) \sin \left( \omega_1 t + \varphi^\lambda(\omega_1) \right) \right| \leq \varepsilon_{cx},$$

где  $a_x^\lambda = \sqrt{r_x^{\lambda^2} + i_x^{\lambda^2}}$ ,  $\varphi^\lambda = \operatorname{arctg} \frac{i_x^\lambda}{r_x^\lambda}$ , и оценка  $t_{cx}$  принимает вид

$$t_{cx}^\lambda = \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln a_x^\lambda(\omega_1)}{a - \lambda}. \quad (5.2.86)$$

Проанализируем это выражение при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Пусть выполнено естественное условие

$$\sqrt{r^{\lambda^2}(\omega_k) + i^{\lambda^2}(\omega_k)} > \varepsilon_{cx} > 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.87)$$

которое для рассматриваемого случая  $n = 1$  принимает вид  $a_x^\lambda > \varepsilon_{cx}$ .

Из выражения (5.2.73) следует, что  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_x^\lambda = 0$ . Учитывая это, заключаем на основе (5.2.86), что  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_{cx}^\lambda = 0$ .

Это свойство сохраняется и для неустойчивых объектов. В общем случае, когда  $n > 1$ , справедливо аналогичное утверждение.

**Теорема 5.2.1.** Время сходимости  $t_{cx}^\lambda$  к частотным параметрам может быть сделано сколь угодно малым, если выбрать достаточно большим показатель экспоненты  $\lambda$  в экспоненциально-гармоническом испытательном воздействии. ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.3.

### 5.2.8. Частотные параметры разомкнутой системы\*

Разомкнутая по входу объекта система (5.1.1), (5.1.2) описывается уравнениями (5.1.22). В компактной форме эти уравнения записываются, в соответствии с (5.1.24), как

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = A^{(1)}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}^{(1)}u_{\text{вх}}, \quad u = \mathbf{d}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)}. \quad (5.2.88)$$

Используя утверждение 5.2.1, заключаем, что при

$$u_{\text{вх}} = e^{\lambda t} \sin \omega t \quad (5.2.89)$$

объединённый вектор  $\mathbf{x}^{(1)}$  имеет вид

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{r}_x^{(1)}(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x^{(1)}(\omega) \cos \omega t \right] + e^{\lambda t} \mathbf{a}^{(1)}(t), \quad (5.2.90)$$

где

$$\mathbf{r}_x^{(1)}(\omega) = \operatorname{Re} \boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega), \quad \mathbf{i}_x^{(1)}(\omega) = \operatorname{Im} \boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega), \quad (5.2.91)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)}(j\omega) = \left[ E s - A^{(1)} \right]^{-1} \mathbf{b}^{(1)}, \quad s = \lambda + j\omega, \quad (5.2.92)$$

$$\mathbf{a}^{(1)}(t) = e^{[A^{(1)} - E\lambda](t-t_0)} \left[ \mathbf{x}^{(1)}(t_0) - \mathbf{r}_x^{(1)}(\omega) \sin \omega t_0 - \mathbf{i}_x^{(1)}(\omega) \cos \omega t_0 \right]. \quad (5.2.93)$$

Таким образом, реакция разомкнутой системы на экспоненциально-гармоническое воздействие (5.2.89)

$$u(t) = e^{\lambda t} \left[ r^{(1)}(\omega) \sin \omega t + i^{(1)}(\omega) \cos \omega t \right] + e^{\lambda t} \mathbf{d}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)}(t), \quad (5.2.94)$$

где

$$r^{(1)}(\omega) = \mathbf{d}^{(1)} \mathbf{r}_x^{(1)}(\omega), \quad i^{(1)}(\omega) = \mathbf{d}^{(1)} \mathbf{i}_x^{(1)}(\omega). \quad (5.2.95)$$

На основе соотношения (5.1.26) заключаем

$$r^{(1)}(\omega) = \operatorname{Re} w_{pa3}^\lambda(j\omega), \quad i^{(1)}(\omega) = \operatorname{Im} w_{pa3}^\lambda(j\omega). \quad (5.2.96)$$

Экспоненциально взвешивая реакцию  $u(t)$ , получим

$$\tilde{u}(t) = e^{-\lambda t} u(t) = r^{(1)}(\omega) \sin \omega t + i^{(1)}(\omega) \cos \omega t + \mathbf{d}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)}(t). \quad (5.2.97)$$

Свободная составляющая  $\mathbf{a}^{(1)}(t)$  в этом выражении затухает, если выполняется условие

$$\lambda > C^c, \quad (5.2.98)$$

где  $C^c$  – степень неустойчивости разомкнутой системы.

Для определения числа  $C^c$  рассмотрим характеристический полином  $d^c(s)$  разомкнутой системы

$$d^c(s) = \det [Es - A^{(1)}].$$

Используя обозначения (5.1.23), запишем

$$d^c(s) = \det(Es - A) \det(Es - A_p) = d(s)g(s), \quad (5.2.99)$$

$$d(s) = \det(Es - A), \quad g(s) = \det(Es - A_p). \quad (5.2.100)$$

Это характеристические полиномы объекта и регулятора соответственно.

Если  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$  корни полинома  $d(s)$ , а  $s_1^p, s_2^p, \dots, s_{n_p}^p$  – корни  $g(s)$ , то

$$c^c > \max \{ \operatorname{Re} \bar{s}_1, \operatorname{Re} \bar{s}_2, \dots, \operatorname{Re} \bar{s}_n; \operatorname{Re} s_1^p, \operatorname{Re} s_2^p, \dots, \operatorname{Re} s_{n_p}^p \}. \quad (5.2.101)$$

Зафиксируем  $n + n_p$  произвольных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+n_p}$  в (5.2.97), тогда коэффициенты  $r^{(1)}(\omega_k), i^{(1)}(\omega_k)$  в выражении

$$\tilde{u}(t) = r^{(1)}(\omega_k) \sin \omega_k t + i^{(1)}(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{d}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)}(t) \quad k = \overline{1, n} \quad (5.2.102)$$

называются частотными параметрами ( $\omega$ -индексами) разомкнутой системы.

Эти же числа получаются, если возбудить разомкнутую на входе регулятора систему сигналом

$$y_{ex} = e^{\lambda t} \sin \omega t,$$

то после взвешивания выхода объекта получим

$$\tilde{y}(t) = r^{(1)}(\omega_k) \sin \omega_k t + i^{(1)}(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{d}^{(2)} \mathbf{a}^{(2)}(t) \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2.103)$$

где  $\mathbf{a}^{(2)}(t)$  – функция, исчезающая при условии (2.2.68).

Если сигнал (5.2.89) подать на вход разомкнутой системы с объектом (5.2.1) первого вида, то взвешенный выход регулятора

$$\tilde{u}(t) = \mathbf{c}' \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + \mathbf{c}' \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{c}' \mathbf{a}^0(t). \quad (5.2.104)$$

## 5.3. Фильтр Фурье

### 5.3.1. Схема эксперимента

Рассмотрим объект управления

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (5.3.1)$$

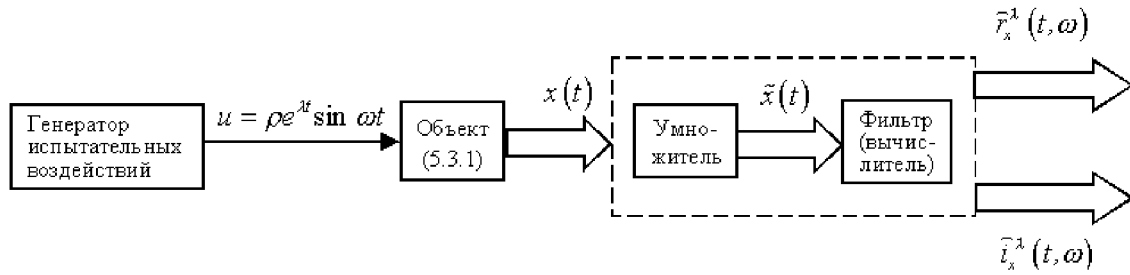


Рис. 5.3.1

параметры которого неизвестны.

На рис. 5.3.1 приведена структурная схема установки для экспериментального определения частотных вектор-функций  $\mathbf{r}_x(\omega)$  и  $\mathbf{i}_x(\omega)$ .

Она содержит:

1. Генератор испытательных воздействий, формирующий экспоненциально-гармоническое воздействие

$$u(t) = u_{ucn}(t) = \rho e^{\lambda t} \sin \omega t, \quad (5.3.2)$$

где  $\rho$  и  $\lambda$  – некоторые положительные числа.

2. Умножитель, на вход которого подается измеренный вектор переменных объекта (5.3.1), а выходом является экспоненциально-взвешенный вектор

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)e^{-\lambda t}.$$

3. Фильтр (вычислитель), выходом которого являются оценки  $\hat{\mathbf{r}}_x^\lambda(t, \omega)$ ,  $\hat{\mathbf{i}}_x^\lambda(t, \omega)$  частотных вектор-функций  $\mathbf{r}_x^\lambda(\omega)$ ,  $\mathbf{i}_x^\lambda(\omega)$ .

Выход умножителя описывается выражением (5.2.14)

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \rho \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \rho \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t + \mathbf{x}^0(t), \quad (5.3.3)$$

где

$$\mathbf{x}^0(t) = e^{(A-E\lambda)t} e^{-A t_0} \left[ \mathbf{x}(t_0) - \left( e^{\lambda t_0} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - e^{\lambda t_0} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 \right) \rho \right]. \quad (5.3.4)$$

Ниже рассматривается два типа фильтров: фильтр Фурье и локальный фильтр.

Наряду с объектом (5.3.1) будем рассматривать одномерные объекты второго вида, описываемые уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (5.3.5)$$

В этом случае структурная схема, приведённая на рис. 5.3.1, принимает вид рис. 5.3.2.

На рис. 5.3.2 переменная  $\tilde{y}(t) = y(t)e^{-\lambda t}$ .



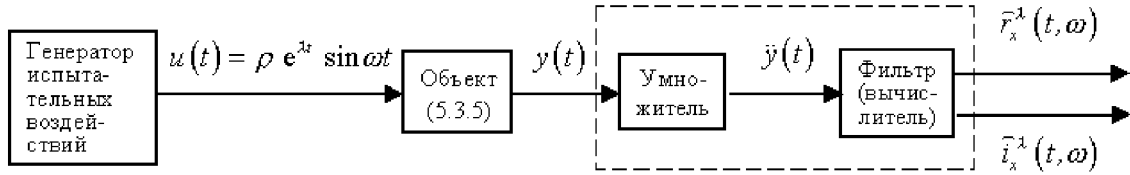


Рис. 5.3.2

### 5.3.2. Алгоритм фильтрации

Фильтр Фурье описывается соотношениями

$$\hat{r}_x^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t - t_0)\rho} \int_{t_0}^t \tilde{x}(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau, \quad \hat{i}_x^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t - t_0)\rho} \int_{t_0}^t \tilde{x}(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (5.3.6)$$

Для удобства введём  $n$ -мерные вектора  $\mathbf{x}^s(t)$  и  $\mathbf{x}^c(t)$  и представим интегральные соотношения (5.3.6) в дифференциальной форме

$$\hat{r}_x^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t - t_0)\rho} \mathbf{x}^s(t), \quad \hat{i}_x^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t - t_0)\rho} \mathbf{x}^c(t), \quad (5.3.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^s(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) \sin \omega t, \quad \dot{\mathbf{x}}^c(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) \cos \omega t, \quad \mathbf{x}^s(t_0) = \mathbf{x}^c(t_0) = \mathbf{0}. \quad (5.3.8)$$

Исследуем свойства фильтра Фурье.

Утверждение 5.3.1. Оценки  $\hat{r}_x^\lambda(t, \omega)$  и  $\hat{i}_x^\lambda(t, \omega)$  сходятся к частотным вектор-функциям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}_x^\lambda(t, \omega) = \mathbf{r}_x^\lambda(\omega), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{i}_x^\lambda(t, \omega) = \mathbf{i}_x^\lambda(\omega), \quad (5.3.9)$$

если выполняются неравенства

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathbf{a}^0(t) \sin \omega t \, dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{a}^0(t) \cos \omega t \, dt < \infty. \quad (5.3.10)$$

■

Убедимся в справедливости этого утверждения. Подставляя в (5.3.6) выражение (5.3.3), получим

$$\begin{aligned} \hat{r}_x^\lambda(t, \omega) &= \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin^2 \omega\tau + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \sin \omega\tau \cos \omega\tau + \mathbf{a}^0(\tau) \sin \omega\tau \right] d\tau = \\ &= \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) - \frac{\mathbf{r}_x^\lambda(\omega)}{t - t_0} \int_{t_0}^t \cos 2\omega\tau \, d\tau + \frac{\mathbf{i}_x^\lambda(\omega)}{t - t_0} \int_{t_0}^t \sin 2\omega\tau \, d\tau + \frac{2}{t - t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{a}^0(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Так как  $\left| \int_{t_0}^t \sin 2\omega\tau \, d\tau \right| \leq \frac{1}{\omega}$  и  $\left| \int_{t_0}^t \cos 2\omega\tau \, d\tau \right| \leq \frac{1}{\omega}$ , то при условии (5.3.10) выполняется первое из равенств (5.3.9). Аналогично доказывается справедливость второго из этих соотношений.

Утверждение 5.3.2. Если показатель  $\lambda$  экспоненты испытательного воздействия и множителя больше степени неустойчивости объекта

$$\lambda \geq C_0 > \operatorname{Re} s_i \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.3.12)$$

то выполняются соотношения (5.3.10). ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.4.

Для объекта (5.3.5) фильтр Фурье описывается аналогичными (5.3.7) и (5.3.8) уравнениями

$$\hat{r}^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho} y^s(t), \quad \hat{i}^\lambda(t, \omega) = \frac{2}{(t-t_0)\rho} y^c(t), \quad (5.3.13)$$

$$\dot{y}^s(t) = \tilde{y}(t) \sin \omega t, \quad \dot{y}^c(t) = \tilde{y}(t) \cos \omega t, \quad y^s(t_0) = y^c(t_0) = 0. \quad (5.3.14)$$

Очевидно, что при условии (5.3.12)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}^\lambda(t, \omega) = r^\lambda(\omega), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{i}^\lambda(t, \omega) = i^\lambda(\omega). \quad (5.3.15)$$

### 5.3.3. Время фильтрации

Определим погрешность

$$\mathbf{e}_x^r(t) = \hat{\mathbf{r}}_x^\lambda(t, \omega) - \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \quad (5.3.16)$$

вычисления частотных функций. На основе (5.3.11) получим выражение методической погрешности фильтра Фурье

$$\mathbf{e}_x^r(t) = -\frac{\mathbf{r}_x^\lambda(\omega)}{t-t_0} \int_{t_0}^t \cos 2\omega\tau \, d\tau + \frac{\mathbf{i}_x^\lambda(\omega)}{t-t_0} \int_{t_0}^t \sin 2\omega\tau \, d\tau + \frac{2}{t-t_0} \int_{t_0}^t \mathbf{a}^0(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau. \quad (5.3.17)$$

Определим время фильтрации  $T_\phi$  как время, через которое выполняются неравенства

$$|e_{xi}^r(T_\phi)| \leq \varepsilon_\phi \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.3.18)$$

где  $e_{xi}^r$  – компоненты вектора  $\mathbf{e}_x^r$ , а  $\varepsilon_\phi$  – некоторое достаточно малое положительное число, характеризующее допустимую погрешность определения частотных функций.

На основе (5.3.17) получим

$$|e_{xi}^r(t)| \leq \frac{1}{2\omega} \frac{|r_{xi}^\lambda(\omega)| + |i_{xi}^\lambda(\omega)|}{t-t_0} + \frac{2}{t-t_0} \left| \int_{t_0}^t \mathbf{a}_i^0(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \right| \quad i = \overline{1, n}.$$

Пусть процесс фильтрации начинается в момент времени  $t = t_{cx}$ , когда функции перехода сошлись к частотным параметрам. Тогда, с учётом (5.2.82), (5.2.5), запишем

$$|e_{xi}^r(t)| \leq \frac{1}{2\omega} \frac{|r_{xi}^\lambda(\omega)| + |i_{xi}^\lambda(\omega)|}{t-t_{cx}} + \frac{2\varepsilon_{cx}}{t-t_{cx}} \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда следует оценка времени фильтрации

$$T_{\mathcal{F}}^{r_x} \geq \frac{\frac{1}{2\omega} \left\{ |r_{xi}^\lambda(\omega)| + |i_{xi}^\lambda(\omega)| \right\} + 2\varepsilon_{cx}}{\varepsilon_{\mathcal{F}}} + t_{cx} \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3.19)$$

Для объекта (5.3.5)

$$T_{\mathcal{F}}^r \leq \frac{\frac{1}{2\omega} \left\{ |r^\lambda(\omega)| + |i^\lambda(\omega)| \right\} + 2\varepsilon_{cx}}{\varepsilon_{\mathcal{F}}} + t_{cx}. \quad (5.3.20)$$

Аналогично находим оценки времени фильтрации  $T_{\mathcal{F}}^i$  компонент  $i_{xk}^\lambda(\omega)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и частотного параметра  $i(\omega)$ . Тогда для объектов первого и второго вида получим соответственно

$$T_{\mathcal{F}} = \max \left\{ T_{\mathcal{F}}^{r_x}, T_{\mathcal{F}}^{i_x} \right\}, \quad T_{\mathcal{F}} = \max \left\{ T_{\mathcal{F}}^r, T_{\mathcal{F}}^i \right\}. \quad (5.3.21)$$

#### 5.3.4. Влияние внешних возмущений и помех

Рассмотрим фильтрацию частотных функций в условиях, когда объект подвержен внешним возмущениям, а измерение его выхода осуществляется с ошибками. В этом случае объект описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{m}f, \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x} + \varkappa, \quad (5.3.22)$$

где  $f(t)$  – внешнее возмущение, являющееся непрерывной и ограниченной функцией, описываемой соотношениями (1.1.4), (1.1.5), а  $\varkappa(t)$  – помеха измерения, которая описывается аналогичными соотношениями

$$|\varkappa(t)| \leq \varkappa^*, \quad (5.3.23)$$

$$\varkappa(t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \left( \rho_i^{(1)} \sin \omega_i^{\varkappa} t + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^{\varkappa} t \right), \quad (5.3.24)$$

где  $\varkappa^*$  – заданное число, а  $\rho_i^{(1)}$ ,  $\rho_i^{(2)}$ ,  $\omega_i^{\varkappa}$  ( $i = \overline{1, \mu_2}$ ) – неизвестные числа.

Наложим ограничение на частоты испытательных воздействий, внешних возмущений и помех. В связи с этим обозначим  $s_i = \lambda_i^o + j\omega_i^o$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни характеристического полинома  $\det(Es - A)$  объекта (5.3.22). Далее будем полагать, что выполнено следующее требование.

**Свойство 5.3.1.** Частоты испытательных воздействий, внешних возмущений и помех не совпадают с собственными частотами объекта  $\omega_i^o$  ( $i = \overline{1, n_1}$ ), для которых

$$\det(E_j \omega_i^o - A) = 0 \quad i = \overline{1, n_1}.$$

Это означает, что

$$\omega_i^o \neq \omega_k, \quad \omega_i^o \neq \omega_\alpha^f, \quad \omega_i^o \neq \omega_\beta^{\varkappa} \quad i = \overline{1, n_1} \quad k = \overline{1, n} \quad \alpha = \overline{1, \mu_1} \quad \beta = \overline{1, \mu_2}.$$

■

Эти неравенства исключают вхождение объекта в резонанс на его резонансных частотах  $\omega_i^o$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Найдём уравнения, описывающие сигнал  $\tilde{y}(t)$  (см. рис. 5.3.2) на входе фильтра Фурье. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\tilde{x}} = (A - E\lambda)\tilde{x} + \mathbf{b}\rho \sin \omega t + \mathbf{m}\tilde{f}, \quad \tilde{y} = \mathbf{d}\tilde{x} + \tilde{\alpha}, \quad (5.3.25)$$

где

$$\tilde{f} = f e^{-\lambda t}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha e^{-\lambda t}. \quad (5.3.26)$$

Действительно, по определению

$$\tilde{y} = y e^{-\lambda t} = (\mathbf{d}\mathbf{x} + \alpha) e^{-\lambda t} = \mathbf{d}\tilde{x} + \tilde{\alpha}.$$

С другой стороны, вычислим

$$\dot{\tilde{x}} = (\dot{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{x}) e^{-\lambda t} = [(A - E\lambda)\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{m}f] e^{-\lambda t}.$$

Отсюда, при  $u = \rho e^{\lambda t} \sin \omega t$ , следует первое из уравнений (5.3.25).

Сигнал на выходе фильтра Фурье имеет аналогично (5.3.11) вид

$$\begin{aligned} \hat{r}^\lambda(t, \omega) = r^\lambda(\omega) + \frac{1}{t - t_0} & \left[ -r^\lambda(\omega) \int_{t_0}^t \cos 2\omega\tau d\tau + i^\lambda(\omega) \int_{t_0}^t \sin 2\omega\tau d\tau + \right. \\ & \left. + 2 \int_{t_0}^t \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}^0(\tau) \sin \omega\tau d\tau + 2 \int_{t_0}^t \tilde{\alpha}^f(\tau) \sin \omega\tau d\tau + 2 \int_{t_0}^t \tilde{\alpha}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right], \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

где

$$\tilde{\alpha}^f(\tau) = \int_{t_0}^t \mathbf{d} e^{(A - E\lambda)(t - \tau)} \mathbf{m} \tilde{f}(\tau) d\tau. \quad (5.3.28)$$

Проанализируем составляющие погрешностей фильтрации, обусловленные внешними воздействиями и помехами. Пусть объект (5.3.22) асимптотически устойчив, а  $\lambda = 0$ .

В этом случае ошибка фильтрации имеет вид

$$e(t) = \hat{r}(t, \omega) - r(\omega) = e_{ce}(t) + \frac{2}{t - t_0} \left[ \int_{t_0}^t \boldsymbol{\alpha}^f(\tau) \sin \omega\tau d\tau + \int_{t_0}^t \alpha(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right], \quad (5.3.29)$$

где

$$e_{ce}(t) = \frac{1}{t - t_0} \left[ -r(\omega) \int_{t_0}^t \cos 2\omega\tau d\tau + i(\omega) \int_{t_0}^t \sin 2\omega\tau d\tau + 2 \int_{t_0}^t \alpha^0(\tau) \sin \omega\tau d\tau \right], \quad (5.3.30)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^f(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{d} e^{A(t - \tau)} \mathbf{m} f(\tau) d\tau. \quad (5.3.31)$$

Внешнее возмущение описывается выражением (1.1.5). Далее будем полагать в нём  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_i^{(1)} = 1$ ,  $\delta_i^{(2)} = 0$  ( $i = \overline{1, \mu_1}$ ).

Тогда

$$\mathfrak{x}^f(\tau) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \left[ r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t \right] + \mathfrak{x}^{0f}(t), \quad (5.3.32)$$

где

$$\mathfrak{x}^{0f}(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \mathbf{d} e^{A(t-t_0)} \left[ -\mathbf{r}_{xf}(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t_0 - \mathbf{i}_{xf}(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t_0 \right], \quad (5.3.33)$$

$$r_f(\omega_i^f) = \operatorname{Re} \mathbf{d} \left( E_j \omega_i^f - A \right)^{-1} \mathbf{m}, \quad r_{xf}(\omega_i^f) = \operatorname{Re} \left( E_j \omega_i^f - A \right)^{-1} \mathbf{m}, \quad (5.3.34)$$

$$i_f(\omega_i^f) = \operatorname{Im} \mathbf{d} \left( E_j \omega_i^f - A \right)^{-1} \mathbf{m}, \quad i_{xf}(\omega_i^f) = \operatorname{Im} \left( E_j \omega_i^f - A \right)^{-1} \mathbf{m}. \quad (5.3.35)$$

Утверждение 5.3.3. Если частота испытательного воздействия  $\omega$  не совпадает с частотами внешних возмущений и помех  $-\omega_i^f$ ,  $\omega_j^{\infty}$  ( $i = \overline{1, \mu_1}$ ,  $j = \overline{1, \mu_2}$ ), то ошибка вычисления (фильтрации) частотных функций обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.5.

Возвращаясь к общему случаю, когда показатель экспоненты  $\lambda \neq 0$  и удовлетворяет неравенству (5.3.12), заметим, что функции  $\tilde{\mathfrak{x}}^f(t)$  и  $\tilde{\mathfrak{x}}(t)$ , входящие в выражение (5.3.27) для погрешности фильтрации, обладают следующим почти очевидным свойством:

Утверждение 5.3.4. Составляющие выхода умножителя, обусловленные внешними возмущениями и помехами, исчезающие функции

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{x}}^f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{x}}(t) = 0. \quad (5.3.36)$$

■

Второе из этих соотношений следует из (5.3.26), а доказательство первого равенства приведено в 5.Д.6.

### 5.3.5. Фильтрация при параллельном испытательном воздействии

Можно выделить два вида испытательных воздействий: последовательное и параллельное.

*Последовательное испытательное воздействие*  $u^{(k)}(t) = \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t$  прикладывается к объекту в течение интервалов времени  $[t_{k-1}^u, t_k^u]$ .

Оно описывается как

$$u_{ucn}(t) = \sum_{k=1}^n u^{(k)}(t), \quad (5.3.37)$$

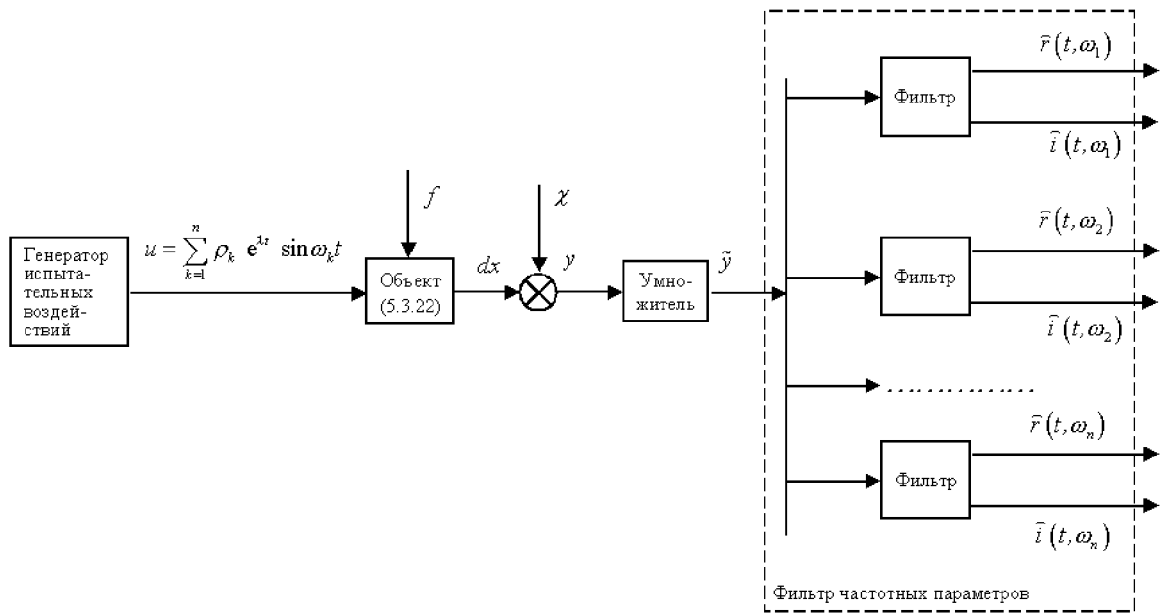


Рис. 5.3.3

где

$$u^{(k)}(t) = \begin{cases} \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t & \text{при } t \in [t_{k-1}^u, t_k^u]; \\ 0 & \text{при } t \notin [t_{k-1}^u, t_k^u]. \end{cases} \quad (5.3.38)$$

Далее для определённости будем полагать, что испытательные гармоники обладают свойством:

Свойство 5.3.2.

- а) частоты  $\omega_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) испытательных воздействий упорядочены:  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1} < \omega_n$ ,
- б) частоты  $\omega_k$  ( $k = \overline{2, n}$ ) кратны  $\omega_1$  ( $\frac{\omega_k}{\omega_1} = \alpha_k$ , где  $\alpha_k$  ( $k = \overline{2, \gamma}$ ) – целые числа),
- в) правые концы  $t^{(k)}$  – интервалов приложения  $k$ -той гармоники ( $k = \overline{1, n}$ ) при последовательном испытательном воздействии кратны  $\frac{2\pi}{\omega_n}$ ,  $at^{(1)} = t_0$ .

■

Для определения частотных параметров можно испытательные гармоники прикладывать к объекту не последовательно во времени, а одновременно (параллельно).

В этом случае

$$u_{ucn}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t. \quad (5.3.39)$$

Такой сигнал будем называть *параллельным испытательным воздействием*.

При параллельных испытательных воздействиях схема, приведённая на рис. 5.3.2, принимает с учётом внешних возмущений и помех вид, показанный на рис. 5.3.3.

Уравнения (5.3.25) для сигнала на выходе умножителя запишем как

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - E\lambda)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t + \mathbf{m}\tilde{f}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{d}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{a}}. \quad (5.3.40)$$

Учитывая выражение (5.3.4) и обозначения (5.3.26) и (5.3.28), представим решение этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(t) = & \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \mathbf{r}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + \mathbf{i}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right] - \\ & - \mathbf{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_0 + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_0 \right] + \\ & + \mathbf{d}e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \tilde{\mathbf{a}}^f(t) + \tilde{\mathbf{a}}(t). \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

### 5.3.6. Время фильтрации при внешних возмущениях

После затухания переходных процессов получим при достаточно большом  $\lambda$  установившийся выход

$$\tilde{\mathbf{y}}_{ycm}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \mathbf{r}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + \mathbf{i}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right]. \quad (5.3.42)$$

Если  $\lambda = 0$ , то установившийся сигнал содержит дополнительные слагаемые, вызванные внешними возмущениями и помехами

$$\begin{aligned} y_{ycm}(t) = & \sum_{k=1}^n \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k t + i(\omega_k) \cos \omega_k t] + \\ & + \sum_{i=1}^{\mu_1} [r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t] + \sum_{i=1}^{\mu_2} [\rho_i^{(1)} \sin \omega_i^{ae} t + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^{ae} t]. \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

Сигнал на выходе фильтра – 1 имеет при  $\lambda = 0$  вид

$$\begin{aligned} \hat{r}(t, \omega_1) = & r(\omega_1) + \frac{2}{\rho_1(t-t_0)} \left\{ -\frac{\rho_1}{2} r(\omega_1) \int_{t_0}^t \cos 2\omega_1 \tau d\tau + \frac{\rho_1}{2} i(\omega_1) \int_{t_0}^t \sin 2\omega_1 \tau d\tau + \right. \\ & + \int_{t_0}^t \left\langle \sum_{k=2}^n \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k \tau + i(\omega_k) \cos \omega_k \tau] \right\rangle \sin \omega_1 \tau d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left\langle \sum_{i=1}^{\mu_1} [r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f \tau + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f \tau] \right\rangle \sin \omega_1 \tau d\tau + \\ & \left. + \int_{t_0}^t \left\langle \sum_{i=1}^{\mu_2} [\rho_i^{(1)} \sin \omega_i^{ae} \tau + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^{ae} \tau] \right\rangle \sin \omega_1 \tau d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Отсюда получим аналогичное (5.3.19) выражение для времени фильтрации

$$\begin{aligned}
 T_{1\phi}^{\hat{r}} \geq & \frac{1}{2\omega_1} [ |r(\omega_1)| + |i(\omega_1)| ] + \frac{\sum_{k=2}^n 4\rho_k}{\rho_1 |\omega_k - \omega_1|} [ |r(\omega_k)| + |i(\omega_k)| ] + \\
 & + \frac{\sum_{i=1}^{\mu_1} 4}{\rho_1 |\omega_i^f - \omega_1|} [ |r_f(\omega_i^f)| + |i_f(\omega_i^f)| ] + \frac{\sum_{i=1}^{\mu_2} 4}{\rho_1 |\omega_i^{ge} - \omega_1|} [ |\rho_i^{(1)}| + |\rho_i^{(2)}| ] + \\
 & + \frac{2n\varepsilon_{cx}}{\varepsilon_\phi} + t_{cx}^0.
 \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

Аналогично находим оценку времени фильтрации на втором выходе (выходе  $\hat{i}(t, \omega_1)$  первого фильтра  $T_{1\phi}^{\hat{i}}$  и т.д. Тогда время фильтрации определяет наибольшее для всех фильтров

$$T_\phi^o = \max \{ T_{1\phi}^{\hat{r}}, T_{1\phi}^{\hat{i}}; T_{2\phi}^{\hat{r}}, T_{2\phi}^{\hat{i}}; \dots; T_{n\phi}^{\hat{r}}, T_{n\phi}^{\hat{i}} \}. \tag{5.3.46}$$

### 5.3.7. Учёт ограничений на управление и измерение\*

Использование экспоненциально-гармонического испытательного воздействия предполагает неограниченные ресурсы управления.

Ограниченность этих ресурсов накладывает ограничение на степень неустойчивости объектов, для которых можно экспериментально определить частотные параметры.

Пусть к объекту (5.3.22) приложено

$$u(t) = \sigma^u(u_{cn}), \tag{5.3.47}$$

где

$$\sigma^u \left( u_{cn} = \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t \right) = \begin{cases} -u_{nac} & \text{при } u_{cn} \leq -u_{nac}, \\ 0 & \text{при } |u_{cn}| \leq u_{nec}, \\ u_{nac} & \text{при } u_{cn} \geq u_{nac}. \end{cases} \tag{5.3.48}$$

Здесь  $u_{nec}$  и  $u_{nac}$  – заданные числа, характеризующие зону нечувствительности и зону насыщения управления.

Функция (5.3.48) показана на рис. 5.3.4.

Оценим время  $t_{nac}^u$ , через которое  $u_{cn}(t)$  достигает насыщения. Обозначим

$$\rho_{\max} = \max \{ \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \}. \tag{5.3.49}$$

Тогда из соотношения  $u_{nac} = u_{cn}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda t} \sin \omega_k t \leq n\rho_{\max} e^{\lambda t}$  получим

$$t_{nac}^u \geq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{u_{nac}}{n\rho_{\max}}. \tag{5.3.50}$$



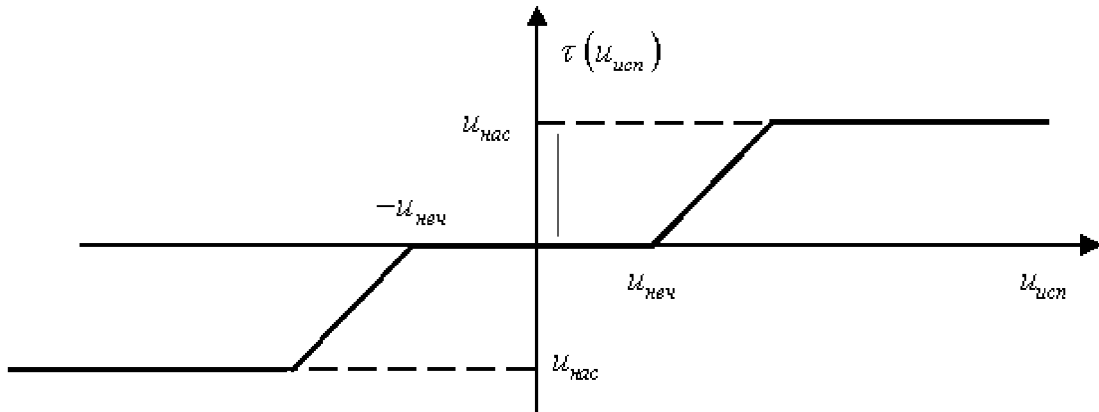


Рис. 5.3.4

Из-за зоны нечувствительности испытательное воздействие прикладывается к объекту не в момент начала работы генератора испытательных воздействий ( $t_0 = 0$ ), а в момент  $t_{неч}^u$ , где  $t_{неч}$  – минимальное время, при котором

$$|u_{исп}(t_0 + t_{неч}^u)| = \left| \sum_{k=1}^n \rho_k e^{\lambda(t_0 + t_{неч}^u)} \sin \omega_k(t_0 + t_{неч}^u) \right| = u_{неч}. \quad (5.3.51)$$

Определение 5.3.1. Время

$$t_{пол}^u = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{u_{нас}}{n \rho_{max}} - t_{неч}^u \quad (5.3.52)$$

называется *полезным временем испытательного воздействия*. ■

Введём в рассмотрение уравнение измерительного устройства

$$y_{изм}(t) = \sigma^y(y), \quad (5.3.53)$$

в котором

$$\sigma^u(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } |y(t)| \leq y_{неч}, \\ y(t) & \text{при } y_{неч} \leq |y(t)| \leq y_{нас}, \\ +u_{нас} & \text{при } y(t) \geq y_{нас}, \\ -u_{нас} & \text{при } y(t) \leq -y_{нас}. \end{cases} \quad (5.3.54)$$

Здесь  $y_{неч}$  и  $y_{нас}$  – заданные числа, характеризующие зону нечувствительности и зону насыщения измерительного устройства.

Для оценки времени  $t_{нас}^y$ , через которое выход объекта достигает зоны насыщения измерительного устройства, воспользуемся выражением (5.3.4) выхода умножителя. Положим, для простоты, что внешние возмущения и помехи отсутствуют, а

$$y(t) = e^{\lambda t} \tilde{y}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ r^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t + i^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t \right] - d e^{A(t-t_0)} \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ r_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_0 + i_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_0 \right]. \quad (5.3.55)$$

Обозначим

$$r_{\max} = \max \left\{ r^\lambda(\omega_1), r^\lambda(\omega_2), \dots, r^\lambda(\omega_n); i^\lambda(\omega_1), i^\lambda(\omega_2), \dots, i^\lambda(\omega_n) \right\}.$$

Тогда, пренебрегая второй суммой в (5.3.55), получим

$$t_{nac}^y \geq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_{nac}}{2n\rho_{\max}r_{\max}}. \quad (5.3.56)$$

Сигнал с измерительного устройства поступает на умножитель, начиная с момента времени  $t_{неч}^u$ , которое находится как наименьшее по модулю решение уравнения

$$y(t_{неч}^y) = y_{неч}. \quad (5.3.57)$$

Определение 5.3.2. Время

$$t_{нол}^y = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_{nac}}{2n\rho_{\max}r_{\max}} - t_{неч}^y \quad (5.3.58)$$

называется *полезным временем измерения*. ■

Выражения (5.3.45), (5.3.46) дают оценку времени фильтрации при  $\lambda = 0$ . Аналогичные выражения можно привести для  $\lambda \neq 0$  и получить оценку  $T_f^\lambda$ .

Определение 5.3.3. Будем говорить, что ограничения на управление и измерение согласованы со степенью неустойчивости объекта и уровнем внешних возмущений, если время фильтрации не превышает полезного времени испытательного воздействия и измерений

$$T_f^\lambda < t_{нол}^u, \quad T_f^\lambda < t_{нол}^y. \quad (5.3.59)$$

■

### 5.3.8. Управление генератором

До сих пор предполагалось, что частоты испытательных воздействий не совпадают с частотами  $\omega_i^f, \omega_j^e$  ( $i = \overline{1, \mu_1}, j = \overline{1, \mu_2}$ ) внешних возмущений и помех, а также с собственными частотами объекта  $\omega_i^o$  ( $i = \overline{1, n_1}$ ).

Указанные частоты неизвестны, и поэтому возможна ситуация, когда какая-либо из испытательных частот совпадает с одной из них.

Пусть испытательная частота

$$\omega = \omega_\nu^f \quad \nu \in \overline{1, \mu_1}. \quad (5.3.60)$$

В этом случае возникает смещение оценок частотных параметров на величины, зависящие от  $r_f(\omega_\nu^f)$  и  $i_f(\omega_\nu^f)$ , и тогда, в частности

$$\hat{r}(\omega) = r(\omega) + \frac{1}{\rho} \left[ \delta_\nu^{(1)} r_f(\omega_\nu^f) \delta_\nu^{(2)} i_f(\omega_\nu^f) \right], \quad (5.3.61)$$

где числа  $r_f(\omega_\nu^f)$  и  $i_f(\omega_\nu^f)$  определяются выражениями (5.3.34), (5.3.35).

Можно указать несколько способов получения несмещённых оценок.

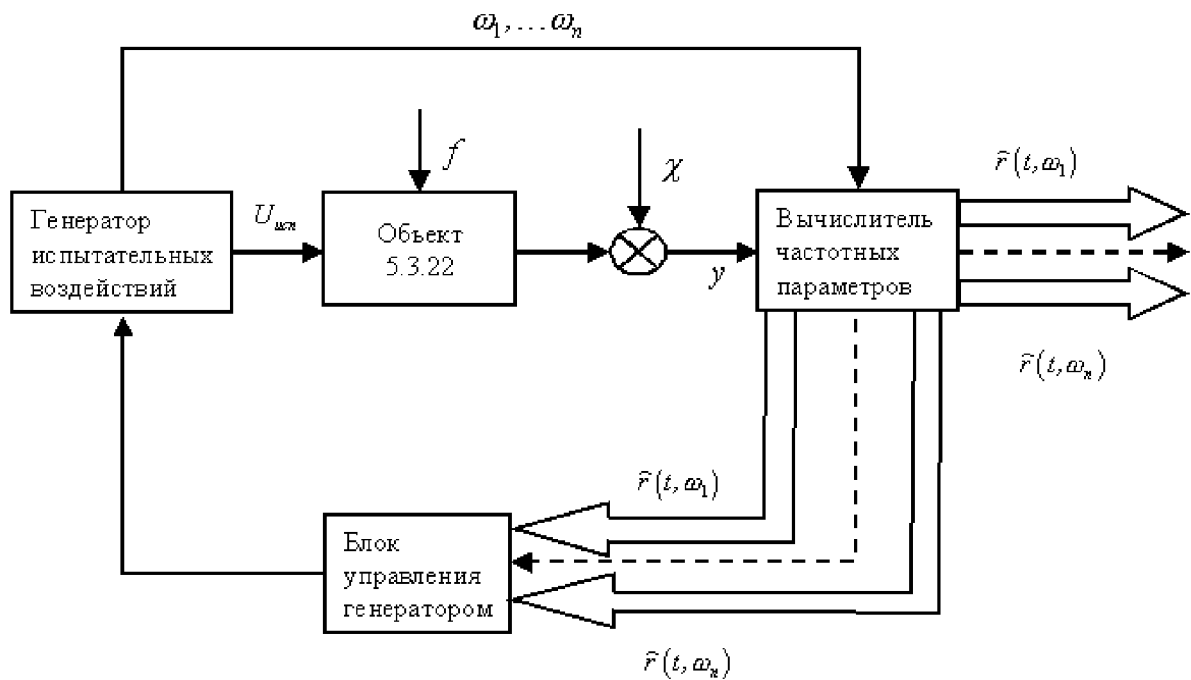


Рис. 5.3.5

- 1-й способ.** Экспериментальное определение частот внешних воздействий, помех и собственных частот объекта и соответствующий выбор частот испытательного воздействия (алгоритм с паузами).
- 2-й способ.** Исключение смещения оценок путём изменения на  $180^\circ$  фазы испытательного воздействия (алгоритм с последовательными парами). Эти алгоритмы реализуются в блоке управления генератором испытательных частот.

### 5.3.9. Алгоритм с паузами

Дополним схему экспериментальной установки, приведённой на рис. 5.3.3, блоком управления генератором испытательных воздействий. Тогда она примет вид, показанный на рис. 5.3.5. Блок управления отключает сигнал  $u_{иск}(t)$  с выхода генератора на некоторое время, которое называем *временем паузы генератора* —  $T_{н.г}$ .

В это время проверяется совпадение частот внешних возмущений, помех и собственных частот объекта с частотами, на которые настроен фильтр Фурье. Если имеется совпадение хотя бы с одной из частот фильтра Фурье, например с частотой  $\omega_\delta$ , то эта частота изменяется так, чтобы сигналы  $r(t, \omega_\delta)$ ,  $i(t, \omega_\delta)$  с выходов  $\delta$ -го фильтра стали меньше допустимой погрешности фильтрации  $\varepsilon_\phi$ .

Естественно, что время паузы генератора должно быть большим времени сходимости частотных параметров и времени фильтрации

$$T_{н.г} > t_{cx}^0 + T_\phi^0. \quad (5.3.62)$$

При многорежимных внешних возмущениях (1.1.6) и помехах, а также для многорежимных объектов паузы генератора повторяются с периодом

$$T_{o.n} = T_{n.z} + T_{p.z}, \quad (5.3.63)$$

где  $T_{p.z}$  – время работы генератора [ $u_{ucn}(t) \neq 0$ ].

Период  $T_{o.n}$  не должен превышать длительности режимов внешних возмущений  $(t_k^f - t_{k-1}^f)$ , помех  $(t_k^{\infty} - t_{k-1}^{\infty})$  и объекта  $(t_k - t_{k-1})$

$$T_{o.n} \leq t_k^f - t_{k-1}^f, \quad T_{o.n} \leq t_k^{\infty} - t_{k-1}^{\infty}, \quad T_{o.n} \leq t_k - t_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3.64)$$

Таким образом, алгоритм с паузами имеет вид

$$u_{ucn}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } kT_{o.n} \leq t \leq kT_{o.n} + T_{n.z}, \\ \sum_{i=1}^n \rho_i e^{\lambda t} \sin \omega_i^k t & \text{при } kT_{o.n} + T_{n.z} \leq t < (k+1)T_{o.n} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.3.65)$$

где

$$\omega_i^k = \omega_i^{k-1}, \quad \text{если} \quad \hat{r}(kT_{o.n} + T_{n.z}, \omega_i) \leq \varepsilon_{\mathcal{F}} \quad \text{и} \quad \hat{i}(kT_{o.n} + T_{n.z}, \omega_i) \leq \varepsilon_{\mathcal{F}} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5.3.66)$$

$$\omega_i^k = \omega_i^{k-1} + \Delta\omega_i^k, \quad \text{для тех } i \in \overline{1, n}, \quad \text{для которых сигналы} \\ \hat{r}(kT_{o.n} + T_{n.z}, \omega_i) > \varepsilon_{\mathcal{F}} \quad \text{либо} \quad \hat{i}(kT_{o.n} + T_{n.z}, \omega_i) > \varepsilon_{\mathcal{F}}. \quad (5.3.67)$$

### 5.3.10. Последовательные пары испытаний

Пусть частота  $\omega_1^f$  внешнего возмущения совпадает с частотой  $\omega_1$  испытательного воздействия. Установившийся сигнал на выходе первого фильтра схемы рис. 5.3.3 имеет в соответствии с (5.3.44) вид

$$\hat{r}(t, \omega_1) = r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} + \\ + \frac{2}{t - t_0} \left\{ - \left[ r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{t_0}^t \cos 2\omega_1 \tau \, d\tau + \left[ i(\omega_1) + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{t_0}^t \sin 2\omega_1 \tau \, d\tau \right\} + \\ + \frac{2}{\rho_1(t - t_0)} \left[ \psi_{ucn}(t, \omega_1) + \psi^f(t, \omega_1) + \psi^{\infty}(t, \omega_1) \right], \quad t > t_{cx}^0, \quad (5.3.68)$$

где

$$\psi_{ucn}(t, \omega_1) = \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{k=2}^n \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k \tau + i(\omega_k) \cos \omega_k \tau] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau, \\ \psi^f(t, \omega_1) = \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{i=2}^{\mu_1} [r(\omega_i^f) \sin \omega_i^f \tau + i(\omega_i^f) \cos \omega_i^f \tau] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau, \\ \psi^{\infty}(t, \omega_1) = \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{i=2}^{\mu_2} [\rho_i^{(1)} \sin \omega_i^{\infty} \tau + \rho_i^{(2)} \cos \omega_i^{\infty} \tau] \sin \omega_1 \tau \right\} d\tau.$$

В момент времени  $t = T_n$  ( $T_n \geq t_0^{cx} + T_f^0$ ) приложим к объекту (5.3.22) воздействие

$$u_{ucn}^-(t) = -\rho_1 \sin \omega_1 t + \sum_{k=2}^n \rho_k \sin \omega_k t, \quad t \geq T_n, \quad (5.3.69)$$

которое отличается от (5.2.39) лишь знаком при  $\rho_1$  ( $\lambda = 0$  при  $t \geq t_0 = 0$ ).

Установившийся сигнал на выходе фильтра-1

$$\begin{aligned} \hat{r}^-(t, \omega_1) = & r(\omega_1) - \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} + \\ & + \frac{2}{t - T_n} \left\{ \left[ -r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{T_n}^t \cos 2\omega_1 \tau d\tau + \left[ i(\omega_1) - \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{T_n}^t \sin 2\omega_1 \tau d\tau \right\} - \\ & - \frac{2}{\rho_1(t - T_n)} [\psi_{ucn}(t) + \psi^f(t) + \psi^{\text{ex}}(t)], \quad t \geq T_n. \end{aligned} \quad (5.3.70)$$

Вычислим полусумму

$$\begin{aligned} \frac{\hat{r}(T_n, \omega_1) + \hat{r}^-(2T_n, \omega_1)}{2} = & r(\omega_1) + \\ & + \frac{1}{T_n} \left\{ \left[ -r(\omega_1) - \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \left\langle \int_0^{T_n} \cos 2\omega_1 \tau d\tau + \left[ -r(\omega_1) + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{T_n}^{2T_n} \cos 2\omega_1 \tau d\tau \right\rangle + \right. \\ & + \left. \left[ i(\omega_1) + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \left\langle \int_0^{T_n} \sin 2\omega_1 \tau d\tau + \left[ i(\omega_1) - \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \right] \int_{T_n}^{2T_n} \sin 2\omega_1 \tau d\tau \right\rangle \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho_1 T_n} \left\{ [\psi_{ucn}(T_n, \omega_1) - \psi_{ucn}(2T_n, \omega_1)] + [\psi^f(T_n, \omega_1) - \psi^f(2T_n, \omega_1)] + \right. \\ & \left. + [\psi^{\text{ex}}(T_n, \omega_1) - \psi^{\text{ex}}(2T_n, \omega_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.71)$$

Нетрудно видеть, что это выражение не содержит смещения частотного параметра  $r(\omega_1)$ .

Оценим остальные слагаемые этого выражения.

**Определение 5.3.4.** Пусть имеется некоторая функция  $\mu(t)$ . Будем говорить, что средневзвешенное (по элементарным тригонометрическим функциям) значение функции  $\mu(t)$  квазистационарно, если на интервале  $[0, 2T_n]$

$$\frac{1}{T_n} \left| \int_0^{T_n} \mu(\tau) \sin \omega \tau d\tau - \int_{T_n}^{2T_n} \mu(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right| \leq \varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)}, \quad (5.3.72)$$

$$\frac{1}{T_n} \left| \int_0^{T_n} \mu(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \int_{T_n}^{2T_n} \mu(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right| \leq \varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)}, \quad (5.3.73)$$

где  $\varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)}$  – некоторое положительное число. ■

Если внешнее возмущение  $f(t)$ , помеха  $\text{ex}(t)$  и  $n - 1$  гармоник испытательного воздействия являются средневзвешенными квазистационарными функциями, то

искомый частотный параметр

$$r(\omega_1) = \frac{\hat{r}(T_n, \omega_1) + \hat{r}^-(2T_n, \omega_1)}{2} + \varepsilon_{\mathcal{F}}^n, \quad (5.3.74)$$

где

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\mathcal{F}}^n| \leq & \frac{1}{T_n} \left| -r(\omega_1) \left( \int_0^{T_n} \cos 2\omega_1 \tau d\tau + \int_{T_n}^{2T_n} \cos 2\omega_1 \tau d\tau \right) \right| + \frac{r(\omega_1^f)}{\rho_1} \varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)} + \\ & + \left| i(\omega_1) \left( \int_0^{T_n} \sin 2\omega_1 \tau d\tau + \int_{T_n}^{2T_n} \sin 2\omega_1 \tau d\tau \right) \right| + \frac{i(\omega_1^f)}{\rho_1} \varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)} + \frac{3}{\rho_1} \varepsilon_{\mathcal{F}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.3.75)$$

## 5.4. Локальный фильтр\*

### 5.4.1. Алгоритм для устойчивых объектов

Рассмотрим выход асимптотически устойчивого объекта (5.3.22) при параллельном испытательном воздействии (5.3.39). При  $\lambda = 0$  запишем аналогично (5.3.43) с учётом (5.3.33), (5.3.34)

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k t + i(\omega_k) \cos \omega_k t] + \varkappa_{ycm}(t) + \varkappa_y^0(t), \quad (5.4.1)$$

где

$$\varkappa_y^0(t) = \mathbf{d}e^{A(t-t_0)} \left[ \mathbf{x}(t_0) - \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{r}_x(\omega_k) \sin \omega_k t_0 - \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{i}_x(\omega_k) \cos \omega_k t_0 \right] + \varkappa^{0f}(t), \quad (5.4.2)$$

$$\varkappa_{ycm}(t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} [r_f(\omega_i^f) \sin \omega_i^f t + i_f(\omega_i^f) \cos \omega_i^f t] + \varkappa(t). \quad (5.4.3)$$

Введём в рассмотрение отрезки времени

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad (5.4.4)$$

$$T_\alpha = \frac{T_\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{n\omega_1} \quad (5.4.5)$$

и запишем значения выхода (5.4.1) объекта в моменты времени  $t + lT_\alpha$  ( $l = \overline{1, 2n+1}$ )

$$\begin{aligned} y(t + lT_\alpha) = & \sum_{k=1}^n \rho_k [r(\omega_k) \sin \omega_k(t + lT_\alpha) + i(\omega_k) \cos \omega_k(t + lT_\alpha)] + \\ & + \varkappa_{ycm}(t + lT_\alpha) + \varkappa_y^0(t + lT_\alpha) \quad l = \overline{1, 2n+1}. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Наложим дополнительное ограничение на внешние возмущения и помехи, полагая их малоизменяющимися в течении периода  $T_\omega$  наиболее медленно изменяющейся гармонической составляющей испытательного воздействия.

Определение 5.4.1. Внешние возмущения и помехи называются квазистационарными на интервале  $T_\omega$ , если выполняется неравенство

$$|\mathfrak{x}_{ycm}(t + T_\omega) - \mathfrak{x}_{ycm}(t)| \leq \varepsilon^{f\mathfrak{x}}, \quad (5.4.7)$$

где  $\varepsilon^{f\mathfrak{x}}$  – некоторое достаточно малое число. (5.4.8) ■

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 5.4.1. Всегда существует достаточно большая частота  $\omega_1$  испытательного воздействия (обладающего свойством 5.3.2), удовлетворяющая неравенствам

$$\omega_1 > \omega_i^f, \quad \omega_1 > \omega_j^f \quad i = \overline{1, \mu_1} \quad j = \overline{1, \mu_2}, \quad (5.4.9)$$

при которых внешние возмущения и помехи являются квазистационарными на интервале  $T_{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$ . ■

Неравенства (5.4.9) позволяют снимать ограничения на внешние возмущения и помехи путём наложения ограничений на выбор испытательных частот.

Алгоритм работы локального вычислителя частотных параметров состоит в решении системы  $2n + 1$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \hat{r}(t, \omega_k) \sin \omega_k(t + lT_\alpha) + \hat{i}(t, \omega_k) \cos \omega_k(t + lT_\alpha) \right] + \hat{\mathfrak{x}}_{ycm}(t) = y(t + lT_\alpha) \quad l = \overline{1, 2n+1}. \quad (5.4.10)$$

Утверждение 5.4.2. Если внешние возмущения и помехи квазистационарны на интервале  $T_\omega$ , то решение уравнений (5.4.10) доставляет оценки частотных параметров, сходящиеся к истинным значениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}(t, \omega_k) = r(\omega_k), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{i}(t, \omega_k) = i(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.4.11)$$

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.7. Из этого доказательства следует, в частности, что время сходимости оценок к частотным параметрам определяется функцией  $\mathfrak{x}_y^0(t)$ . ■

#### 5.4.2. Алгоритм для неустойчивых объектов

Если объект управления неустойчив, то при  $\lambda \neq 0$  уравнения, описывающие сигнал на выходе умножителя (на входе локального фильтра), имеют вид (5.3.41). Алгоритм локального вычислителя частотных параметров состоит теперь в решении линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \hat{r}^\lambda(t, \omega_k) \sin \omega_k(t + lT_\alpha) + \hat{i}^\lambda(t, \omega_k) \cos \omega_k(t + lT_\alpha) \right] = \tilde{y}(t + lT_\alpha) \quad l = \overline{1, 2n}. \quad (5.4.12)$$

Теорема 5.4.1. Решение системы уравнений (5.4.12) обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}^\lambda(t, \omega_k) = r^\lambda(\omega_k), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{i}^\lambda(t, \omega_k) = i^\lambda(\omega_k) \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.4.13)$$

При этом время сходимости к частотным параметрам может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно большого показателя экспоненты  $\lambda$ . ■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.8. Заметим, что при  $\lambda \neq 0$  не требуется квазистационарности внешних возмущений и помех.

Если же они квазистационарны, то можно решать аналогичную (5.2.54) систему  $2n + 1$  уравнений

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \left[ \hat{r}^\lambda(t, \omega_k) \sin \omega_k(t + lT_\alpha) + \hat{i}^\lambda(t, \omega_k) \cos \omega_k(t + lT_\alpha) \right] + \hat{x}_{ycm}(t) e^{-\lambda(t+lT_\alpha)} = \tilde{y}(t + lT_\alpha) \quad l = \overline{1, 2n+1}. \quad (5.4.14)$$

### 5.4.3. Сравнение с фильтром Фурье

Сравним описанные два способа вычисления частотных параметров по времени фильтрации в предположении, что при использовании фильтра Фурье функции перехода к частотным параметрам сошлись к этим параметрам. Это означает, что процесс вычисления с фильтром Фурье начинается через время  $t_{cx}$ .

Рассмотрим вначале случай, когда объект (5.3.22) асимптотически устойчив, а  $\lambda = 0$ .

Из выражения (5.3.45) для времени фильтрации следует, что оно прямо пропорционально зависит от уровня помех и внешних возмущений, а также значений частотных параметров. Время фильтрации при использовании локального фильтра слабо зависит от указанных воздействий на объект и помех измерения. От них зависят лишь параметры исчезающей функции  $\hat{x}_y^0(t)$ . При этом характер функции  $\hat{x}_y^0(t)$  определяется собственными числами матрицы объекта, и поэтому для локального фильтра время фильтрации определяется естественным временем сходимости функций перехода к частотным параметрам.

Это свойство локального фильтра объясняется тем, что в процессе его работы вычисляются не только частотные параметры, но и установившаяся реакция объекта на внешние возмущения и помехи –  $\hat{x}_{ycm}(t)$ . В фильтре Фурье эта функция воспринимается как некоторая помеха, которую приходится отделять (фильтровать) от полезного сигнала. Этим сигналом является лишь составляющая выходного сигнала объекта, содержащая частоту  $\omega_i$ , на которую настроен  $i$ -тый фильтр Фурье. При этом составляющие выходного сигнала, содержащие гармоники остальных испытательных частот при параллельном испытательном воздействии, также должны отфильтровываться  $i$ -тым фильтром.

«Цена» малого времени фильтрации при использовании локального фильтра – его



слабая помехозащищённость. В связи с этим для точной работы локального вычислителя необходима квазистационарность (низкочастотность) внешних возмущений.

Фильтр Фурье менее чувствителен к высокочастотным внешним и возмущениям помехам. Действительно, как следует из (5.3.45), оценка времени фильтрации уменьшается с ростом частот.

При  $\lambda \neq 0$  высокочастотные помехи и внешние возмущения сглаживаются (экспоненциально взвешиваются) умножителем выходного сигнала и локальный фильтр становится более эффективным.

Сглаженный сигнал, поступающий на фильтр Фурье, позволяет сократить время фильтрации, однако при этом остаются не взвешенными составляющие выходного сигнала, не соответствующие номеру фильтра.

#### 5.4.4. Метод наименьших квадратов

Для использования локального фильтра испытательные частоты должны быть выше частот внешних возмущений и помех. Это условие в ряде случаев трудно выполнить.

Нарушение неравенств (5.4.9) приводит к ошибкам (смещению) в определении частотных параметров. Для уменьшения этих ошибок применим метод наименьших квадратов и в результате получим фильтр Фурье.

Для простоты изложения рассмотрим скалярный объект (5.3.22) при внешнем воздействии

$$\dot{x} = ax + bu + m \sin \omega^f t, \quad y = x. \quad (5.4.15)$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $\omega^f$  – неизвестные числа ( $a < 0$ ).

Выражение (5.4.1) имеет при  $u = \sin \omega_1 t$  вид

$$y(t) = r \sin \omega_1 t + i \cos \omega_1 t + \eta(t), \quad (5.4.16)$$

где

$$\begin{aligned} r &= r(\omega_1), \quad i = i(\omega_1), \quad \eta(t) = \varkappa_{ycm}(t) + \varkappa_y^0(t), \\ \varkappa_y^0(t) &= e^{a(t-t_0)} \left[ x(t_0) - r \sin \omega_1 t_0 - i \cos \omega_1 t_0 - r_f \sin \omega_1^f t_0 - i_f \cos \omega_1^f t_0 \right], \\ r_f &= r_f(\omega^f), \quad i_f = i_f(\omega^f), \quad \varkappa_{ycm}(t) = r_f \sin \omega^f t - i_f \cos \omega^f t. \end{aligned}$$

Система уравнений (5.4.6) для определения частотных параметров имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y(t + T_\alpha) &= r \sin \omega_1(t + T_\alpha) + i \cos \omega_1(t + T_\alpha) + \eta(t + T_\alpha) \\ y(t + 2T_\alpha) &= r \sin \omega_1(t + 2T_\alpha) + i \cos \omega_1(t + 2T_\alpha) + \eta(t + 2T_\alpha) \\ y(t + 3T_\alpha) &= r \sin \omega_1(t + 3T_\alpha) + i \cos \omega_1(t + 3T_\alpha) + \eta(t + 3T_\alpha) \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.17)$$

Пусть условие (5.4.9) нарушается и, следовательно,

$$\omega_1 < \omega^f. \quad (5.4.18)$$

Тогда функция  $\eta(t)$  не является квазистационарной. Используем для оценки  $r$  и  $i$  любую пару уравнений системы (5.4.17). Эти оценки существенно зависят от выбора уравнений и «помех»  $\eta(t)$ .

Для получения наилучших оценок применим метод наименьших квадратов. Положим  $T_\alpha \rightarrow \infty$  и сформируем

$$J = \int_0^{t_1} [y(t) - \hat{r} \sin \omega_1 t - \hat{i} \cos \omega_1 t]^2 dt, \quad (5.4.19)$$

где  $t_1$  – некоторое число ( $t_1 > T_\omega$ , можно принять, например,  $t_1 \rightarrow \infty$ ).

Найдём  $\hat{r}$  и  $\hat{i}$ , при которых функционал (5.4.19) принимает наименьшее значение. Необходимое для этого условие

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{r}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \hat{i}} = 0$$

имеет в развёрнутой форме вид

$$\int_{t_0}^{t_1} [y(t) - \hat{r} \sin \omega_1 t - \hat{i} \cos \omega_1 t] \sin \omega_1 t dt = 0, \quad (5.4.20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [y(t) - \hat{r} \sin \omega_1 t - \hat{i} \cos \omega_1 t] \cos \omega_1 t dt = 0. \quad (5.4.21)$$

Рассмотрим подробнее первое из этих уравнений. Разделим его на  $\frac{t_1 - t_0}{2}$  и запишем

$$\begin{aligned} \frac{2}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sin \omega_1 t dt &= \frac{2\hat{r}}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \sin^2 \omega_1 t dt + \frac{2\hat{i}}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t dt = \\ &= \hat{r} - \frac{\hat{r}}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \cos 2\omega_1 t dt + \frac{\hat{i}}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \sin 2\omega_1 t dt. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\hat{r} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} y(t) \sin \omega_1 t dt. \quad (5.4.22)$$

Аналогично найдём

$$\hat{i} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cos \omega_1 t dt. \quad (5.4.23)$$

Сравнивая эти выражения с (5.3.6), заключаем, что фильтр Фурье доставляет наилучшую (в смысле функционала (5.4.19) при  $t_1 \rightarrow \infty$ ) оценку частотных параметров. Эта связь локального фильтра и фильтра Фурье сохраняется и в общем случае ( $n > 1$ ).

5.4.5. Идентификация

Применим метод наименьших квадратов для непосредственного определения параметра (идентификации) скалярного объекта (5.4.15). Положим  $u(t) = 0$  и будем считать, что можно точно вычислить производную измеряемой переменной  $y(t)$ .

Сформируем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{y}(t) - \hat{a}y(t)]^2 dt \quad (5.4.24)$$

и найдём наилучшую оценку ( $\hat{a}$ ) параметра  $a$ .

Вычислим

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2 \int_{t_0}^{t_1} [\dot{y}(t) - \hat{a}y(t)] y(t) dt = 0.$$

Отсюда

$$\hat{a} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \dot{y}y dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} (ay + mf)y dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 dt} = a + \frac{m \int_{t_0}^{t_1} fy dt}{\int_{t_0}^{t_1} y^2 dt} = a + \varepsilon. \quad (5.4.25)$$

Определим погрешность  $\varepsilon$  для двух случаев: а)  $f(t)$  – единичная ступенчатая функция [ $f(t) = 1(t)$ ], б)  $f(t) = \sin \omega^f t$ .

В первом случае

$$y(t) = -\frac{m}{a} (1 - e^{at}), \quad t_0 = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad (5.4.26)$$

и тогда

$$\varepsilon = -a \frac{\int_0^{t_1} (1 - e^{at}) dt}{\int_0^{t_1} (1 - e^{at})^2 dt} = -a \frac{t - \frac{1}{a}e^{at}}{t - \frac{2}{a}e^{at} + \frac{1}{2a}e^{2at}} \Bigg|_{t=0}^{t=t_1} = -a \left[ \frac{2(at_1 - e^{at_1})}{2at_1 - 4e^{at_1} + e^{2at_1}} - \frac{2}{3} \right]. \quad (5.4.27)$$

При  $t_1 \rightarrow \infty$  получим при  $a < 0$

$$\varepsilon_\infty = -\frac{a}{3}. \quad (5.4.28)$$

Таким образом, погрешность в определении параметра составляет 30%.

Пусть теперь  $f(t) = \sin \omega^f t$ . В этом случае в соответствии с (5.2.3) запишем при  $\lambda = 0$

$$y(t) = r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at}.$$

Погрешность

$$\varepsilon = \frac{m \int_{t_0}^{t_1} (r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at}) \sin \omega^f t dt}{\int_{t_0}^{t_1} (r_f \sin \omega^f t + i_f \cos \omega^f t - i_f e^{at})^2 dt}.$$

При  $t_1 \rightarrow \infty$  нетрудно получить<sup>1</sup>

$$\varepsilon_\infty = \frac{r_f \cdot m}{r_f^2 + i_f^2}. \quad (5.4.29)$$

## Приложения к главе 5

### 5.П.1. Формула Коши

#### 5.П.1.1. Вид формулы

Рассмотрим нестационарный объект, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}. \quad (5.П.1)$$

Решение этого уравнения описывается формулой Коши

$$\mathbf{x}(t) = \Theta(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Theta(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (5.П.2)$$

в которой  $\Theta(t, t_0)$  – нормированная фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}. \quad (5.П.3)$$

В стационарном случае, когда  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$

$$\Theta(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad (5.П.4)$$

и формула Коши принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}^{(0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (5.П.5)$$

Для доказательства (5.П.2) напомним понятие нормированной матрицы.

---

<sup>1</sup>учитывая, что  $\sin^2 \omega^f t = \frac{1 - \cos 2\omega^f t}{2}$ ,  $\cos^2 \omega^f t = \frac{1 + \cos 2\omega^f t}{2}$

### 5.П.1.2. Нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (5.П.3)

Пусть  $\Psi_{[1]}(t), \Psi_{[2]}(t), \dots, \Psi_{[n]}(t)$  –  $n$  линейно независимых векторов, являющихся решением однородного уравнения (5.П.3). Такие вектора могут быть получены, например, следующим образом: вектор  $\Psi_{[1]}(t)$  – решение уравнения (5.П.3) при начальных условиях  $x_1(t_0) = 1, x_2(t_0) = 0, \dots, x_n(t_0) = 0$ ; вектор  $\Psi_{[2]}(t)$  – решение (5.П.3) при  $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, \dots, x_n(t_0) = 0$ ; и т.д.; а  $\Psi_{[n]}(t)$  – решение (5.П.3) при начальных условиях  $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, \dots, x_n(t_0) = 1$ .

Матрица  $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \Psi_{[1]}(t) & \Psi_{[2]}(t) & \dots & \Psi_{[n]}(t) \end{pmatrix}$  называется *фундаментальной матрицей* решения уравнения (5.П.3).

По построению она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A(t)\Psi(t). \quad (5.П.6)$$

Общее решение (5.П.3) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c}, \quad (5.П.7)$$

где  $\mathbf{c}$  – некоторый вектор чисел, определяемый начальным вектором  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Нетрудно проверить, что (5.П.6) удовлетворяет (5.П.3). Полагая в (5.П.7)  $t = t_0$ , получим  $\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$ , и тогда окончательно

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \Theta(t, t_0)\mathbf{x}(t_0),$$

где

$$\Theta(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0). \quad (5.П.8)$$

Заметим, что  $\Theta(t_0, t_0) = E$ .

Для стационарных систем можно указать явный вид фундаментальной матрицы. Действительно, определим вектора  $\Psi_{[1]}(t), \Psi_{[2]}(t), \dots, \Psi_{[n]}(t)$ , составляющие фундаментальную матрицу соотношениями

$$\Psi_{[i]}(t) = \Gamma_{[i]}e^{s_i t} \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.П.9)$$

где  $s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни полинома  $\det(Es - A)$ ,  $\Gamma_{[i]}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) –  $n$ -мерные вектора, определяемые как решения уравнений

$$(Es_i - A)\Gamma_{[i]} = \mathbf{0} \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.П.10)$$

Так как решение этих уравнений не единственно, то существует бесчисленное множество фундаментальных матриц. Одной из них является матрица

$$\Psi(t) = e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots \quad (5.П.11)$$

Вычисляя производную этой матрицы

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \dots = Ae^{At},$$

убеждаемся, что (5.П.11) является решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = A\Psi(t).$$

Нетрудно проверить, что

$$\Theta(t, t_0) = e^{At} \left( e^{At_0} \right)^{-1} = e^{A(t-t_0)}. \quad (5.П.12)$$

### 5.П.1.3. Доказательство формулы Коши

Запишем (5.П.2) с учётом (5.П.8) в развёрнутой форме

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (5.П.13)$$

Дифференцируя это выражение с учётом (2.П.6), получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \\ &+ \dot{\Psi}(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau + \Psi(t) \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \right] = \\ &= A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \\ &+ A(t)\Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(\tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau + \Psi(t)\Psi^{-1}(t)B(t)\mathbf{u}(t) = \\ &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (5.П.14)$$

что и требовалось доказать.

Пример 5.П.1. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + \omega x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \lambda x_2, \quad (5.П.15)$$

где  $\lambda$ ,  $\omega$  и  $b_1$  – заданные числа. Пусть для простоты  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ . Соответствующая однородная система имеет вид

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \lambda x_2, \quad (5.П.16)$$

Полином

$$\det(Es - A) = \det \begin{pmatrix} s - \lambda & -\omega \\ \omega & s - \lambda \end{pmatrix} = s^2 - 2\lambda s + \lambda^2 + \omega^2 \quad (5.П.17)$$

имеет корни

$$s_1 = \lambda + j\omega, \quad s_2 = \lambda - j\omega.$$

Фундаментальная матрица решений системы (5.П.16)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \sin \omega t & e^{\lambda t} \cos \omega t \\ e^{\lambda t} \cos \omega t & -e^{\lambda t} \sin \omega t \end{pmatrix}. \quad (5.П.18)$$

Действительно, вычисляя производную этой матрицы

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} [\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t] & e^{\lambda t} [\lambda \cos \omega t - \omega \sin \omega t] \\ e^{\lambda t} [-\omega \sin \omega t + \lambda \cos \omega t] & e^{\lambda t} [-\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t] \end{pmatrix}$$

убеждаемся, что

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \Psi(t).$$

Формула Коши, описывающая решение уравнений (5.Д.15), имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \\ \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau. \quad (5.П.19)$$

■

Пример 5.П.2. Применим формулу Коши для построения дискретной модели велосипеда из примера 5.2.1.

Приведём уравнение (5.2.21) к форме Коши. Для этого введём обозначения

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y} - b_1 u. \quad (5.П.20)$$

Тогда получим

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u, \quad \dot{x}_2 = -d_0 x_1 + b_0 u. \quad (5.П.21)$$

Фундаментальная матрица решений этой системы

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & e^{-\nu t} \\ \nu e^{\nu t} & -\nu e^{-\nu t} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \nu e^{-\nu t} & e^{-\nu t} \\ \nu e^{\nu t} & -e^{\nu t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\nu}, \quad (5.П.22)$$

где  $\nu = \sqrt{d_0}$ .

Полагая в (5.П.13)  $t_0 = kT$ ,  $t = (k+1)T$ , запишем

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Psi[(k+1)T]\Psi^{-1}(kT)\mathbf{x}(kT) + \Psi[(k+1)T] \int_{kT}^{(k+1)T} \Psi^{-1}(t)\mathbf{b}u(t) dt. \quad (5.П.23)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int \Psi^{-1}(t)\mathbf{b}u(t) dt = \begin{pmatrix} -e^{-\nu t} & -\frac{1}{\nu}e^{-\nu t} \\ e^{\nu t} & -\frac{1}{\nu}e^{\nu t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\nu}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\nu} \begin{pmatrix} e^{\nu(k+1)T} & e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -\nu e^{-\nu(k+1)T} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nu e^{-\nu kT} & e^{-\nu kT} \\ \nu e^{\nu kT} & -e^{\nu kT} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} e^{\nu(k+1)T} & e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -\nu e^{-\nu(k+1)T} \end{pmatrix} \times \\
 &\times \left\{ \begin{pmatrix} -\nu e^{-\nu(k+1)T} & -e^{-\nu(k+1)T} \\ \nu e^{\nu(k+1)T} & -e^{\nu(k+1)T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\nu e^{-\nu kT} & -e^{-\nu kT} \\ \nu e^{\nu kT} & -e^{\nu kT} \end{pmatrix} \right\} \times \begin{bmatrix} b_1 u(kT) \\ b_0 u(kT) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \nu T & \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T \\ \operatorname{sh} \nu T & \operatorname{ch} \nu T \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T & \nu^{-2} (\operatorname{ch} \nu T - 1) \\ \operatorname{ch} \nu T - 1 & \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 u(kT) \\ b_0 u(kT) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.П.24}$$

■

## 5.П.2. Дискретные объекты

### 5.П.2.1. Частотные параметры

Рассмотрим дискретный объект

$$\mathbf{x}(kT) = A^\partial \mathbf{x}[(k-1)T] + \mathbf{b}^\partial u[(k-1)T] \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.П.25}$$

$$y(kT) = \mathbf{d}^\partial \mathbf{x}[kT] \quad k = 1, 2, \dots, \tag{5.П.26}$$

где  $\mathbf{x}[kT]$   $k = 1, 2, \dots$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния,  $T$  – интервал дискретности.

Применяя  $z$ -преобразование, получим при нулевых начальных условиях передаточную функцию

$$w(z^{-1}) = \mathbf{d}^\partial (E - z^{-1}A^\partial)^{-1} z^{-1} \mathbf{b}^\partial, \tag{5.П.27}$$

связывающую  $z$ -преобразование измеряемой переменной  $y(t)$  и управление  $u(t)$

$$y = w(z^{-1})u.$$

Введём обозначение  $z^{-1} = q$ . Тогда

$$w(z^{-1}) = w(q) = \mathbf{d}^\partial (E - qA^\partial)^{-1} q \mathbf{b}^\partial. \tag{5.П.28}$$

Частотные параметры ( $\omega$ -индексы) дискретного объекта определим как значения передаточной функции (5.П.28) при

$$q_i = e^{-(\lambda + j\omega_i)T} \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.П.29}$$

где положительное число  $\lambda$  определяется из условия сходимости  $z$ -преобразования. Это условие аналогично (5.1.19)

$$e^{\lambda T} \geq z_0 > \max |z_i|, \tag{5.П.30}$$



где  $z_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – корни полинома

$$d(z) = \det(Ez - A^d). \quad (5.П.31)$$

Итак, частотные параметры ( $\omega$ -индексы) дискретного объекта

$$r_{\partial}^{\lambda}(\omega_i) = \operatorname{Re} w \left( e^{-(\lambda+j\omega_i)T} \right), \quad i_{\partial}^{\lambda}(\omega_i) = \operatorname{Im} w \left( e^{-(\lambda+j\omega_i)T} \right) \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.П.32)$$

Приложим к нему испытательное воздействие

$$u(kT) = e^{\lambda kT} \sin \omega kT \quad k = 0, 1, \dots, \quad \omega > 3T. \quad (5.П.33)$$

Утверждение 5.П.1. Реакция дискретного объекта (5.П.25), (5.П.26) на испытательное воздействие (5.П.33) имеет вид

$$y(kT) = e^{\lambda kT} \left[ r_{\partial}^{\lambda}(\omega) \sin \omega kT + i_{\partial}^{\lambda}(\omega) \cos \omega kT \right] + e^{\lambda kT} \mathfrak{x}^0(kT) \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.П.34)$$

где

$$\mathfrak{x}^0(kT) = (A^d)^k \left[ \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{i}_{\partial x}^{\lambda}(\omega) \right] e^{-\lambda kT}, \quad (5.П.35)$$

$$\mathbf{i}_{\partial x}^{\lambda}(\omega) = \operatorname{Im} \beta_{\partial}^{\lambda}(j\omega) = \operatorname{Im} \left[ E - e^{-(\lambda+j\omega)T} A^d \right] \mathbf{b}^d. \quad (5.П.36)$$

Если выполняется неравенство (5.П.30), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{x}^0(kT) = 0. \quad (5.П.37)$$

■

Доказательство утверждения приведено в 5.Д.9.

Умножим реакцию (5.П.34) на  $e^{-\lambda kT}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), получим экспоненциально-взвешенную функцию

$$\tilde{y}(kT) = y(kT)e^{-\lambda kT} = r_{\partial}^{\lambda}(\omega) \sin \omega kT + i_{\partial}^{\lambda}(\omega) \cos \omega kT + \mathfrak{x}^0(kT) \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.П.38)$$

### 5.П.2.2. Уравнения «вход-выход»

Уравнения (5.П.1), (5.П.2) имеют в форме «вход-выход» вид

$$\begin{aligned} y(kT) + d_1 y[(k-1)T] + \dots + d_n y[(k-n)T] = \\ = b_1 u[(i-\mathfrak{x}-1)T] + \dots + b_n u[(i-\mathfrak{x}-n)T] \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.П.39)$$

где  $\mathfrak{x}T$  – запаздывание в управлении.

Коэффициенты этого уравнения нетрудно получить, если сравнить  $z$ -преобразование этого уравнения (при  $\mathfrak{x} = 0$ ) с числителем и знаменателем передаточной функции (5.П.3).

Тогда

$$d(q) = 1 + d_1q + \dots + d_nq^n = \det(E - qA), \quad (5.П.40)$$

$$b(q) = b_1q + \dots + b_nq^n = \mathbf{d}(E - qA)\mathbf{b}q. \quad (5.П.41)$$

Пример 5.П.3. Дискретная модель велосипеда (5.2.21) описывается при запаздывании ( $\varkappa = 1$ ) в управлении системой

$$\begin{cases} x_1(kT) = a_{11}^\partial x_1[(k-1)T] + a_{12}^\partial x_2[(k-1)T] + b_1^\partial u[(k-2)T], \\ x_2(kT) = a_{21}^\partial x_1[(k-1)T] + a_{22}^\partial x_2[(k-1)T] + b_2^\partial u[(k-2)T], \\ y(kT) = x_1(kT), \end{cases} \quad (5.П.42)$$

где<sup>2</sup>

$$a_{11}^\partial = \operatorname{ch} \nu T, \quad a_{12}^\partial = \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T, \quad a_{21}^\partial = \nu \operatorname{sh} \nu T, \quad a_{22}^\partial = \operatorname{ch} \nu T, \quad (5.П.43)$$

$$b_1^\partial = b_1 \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T + b_0 \nu^{-2} (\operatorname{ch} \nu T - 1), \quad b_2^\partial = b_1 (\operatorname{ch} \nu T - 1) + b_0 \nu^{-1} \operatorname{sh} \nu T, \quad (5.П.44)$$

и  $\nu = \sqrt{|d_0|}$ .

Передаточная функция

$$\begin{aligned} w(q) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - qa_{11}^\partial & -qa_{12}^\partial \\ -qa_{21}^\partial & 1 - qa_{22}^\partial \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} b_1^\partial \\ b_2^\partial \end{bmatrix} \cdot q^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - qa_{22}^\partial & qa_{12}^\partial \\ qa_{21}^\partial & 1 - qa_{11}^\partial \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1^\partial \\ b_2^\partial \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{q^2}{(a_{11}^\partial a_{22}^\partial - a_{12}^\partial a_{21}^\partial) q^2 - (a_{11}^\partial + a_{22}^\partial) q + 1} = q \frac{b_2 q^2 + b_1 q}{d_2 q^2 + d_1 q + 1}. \end{aligned} \quad (5.П.45)$$

Здесь

$$b_1 = b_1^\partial, \quad b_2 = a_{12}^\partial b_2^\partial - a_{22}^\partial b_1^\partial; \quad d_1 = -a_{11}^\partial - a_{22}^\partial, \quad d_2 = a_{11}^\partial a_{22}^\partial - a_{12}^\partial a_{21}^\partial. \quad (5.П.46)$$

Используем выражения (5.5.19), (5.5.20) и получим

$$\begin{cases} b_1 = d_0^{-1} [b_0 (\operatorname{ch} \nu T - 1) + b_1 \nu \operatorname{sh} \nu T], & b_2 = d_0^{-1} [b_0 (\operatorname{ch} \nu T - 1) - b_1 \nu \operatorname{sh} \nu T]; \\ d_1 = -2 \operatorname{ch} \nu T, & d_2 = 1. \end{cases} \quad (5.П.47)$$

Пусть интервал дискретности

$$T = 0.1. \quad (5.П.48)$$

При параметрах (5.2.20) велосипеда ( $d_0 = -16$ ,  $b_0 = 30$ ,  $b_1 = 5$ ) получим по формулам (5.5.23)

$$d_1 = -2.166, \quad d_2 = 1; \quad b_1 = 0.666, \quad b_2 = -0.362. \quad (5.П.49)$$

<sup>2</sup>Вывод выражений (5.П.43), (5.П.44) при  $\varkappa = 0$  приведён в примере 5.П.2.

Зададимся испытательными частотами ( $\omega$ -тестом)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{4T} = 15.71, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{8T} = 7.58, \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{12T} = 5.236, \quad (5.П.50)$$

и вычислим, принимая как и в (5.2.23),  $\lambda = 6$

$$q_1 = e^{-(\lambda+j\omega_1)T} = e^{-\lambda T} (\cos \omega_1 T - j \sin \omega_1 T) = -j0.549, \quad (5.П.51)$$

$$q_2 = e^{-(\lambda+j\omega_2)T} = 0.388 - j0.388, \quad q_3 = 0.475 - j0.274. \quad (5.П.52)$$

Подставляя эти значения в (5.2.21), получим

$$\begin{aligned} w(q_1) &= -0.1111 + j0.1034, \\ w(q_2) &= -0.2485 - j0.2519, \\ w(q_3) &= -0.2052 - j0.3752. \end{aligned} \quad (5.П.53)$$

Таким образом, частотные параметры (5.П.54)

$$\begin{aligned} r_\partial^\lambda(\omega_1) &= -0.1111, & i_\partial^\lambda(\omega_1) &= 0.1034; \\ r_\partial^\lambda(\omega_2) &= -0.2485, & i_\partial^\lambda(\omega_2) &= -0.1519; \\ r_\partial^\lambda(\omega_3) &= -0.2052, & i_\partial^\lambda(\omega_3) &= -0.3752. \end{aligned} \quad (5.П.55)$$

■

### 5.П.2.3. Дискретный фильтр Фурье

Схема экспериментального определения частотных функций дискретного объекта совпадает со схемой, приведённой на рис. 5.3.2, где нужно заменить  $t$  на  $kT$ .

Дискретный фильтр Фурье в этой схеме описывается аналогично (5.3.6) при  $t_0 = 0$

$$\hat{r}^\lambda(kT, \omega) = \frac{2}{\rho k} \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{y}(iT) \sin \omega iT, \quad \hat{i}^\lambda(kT, \omega) = \frac{2}{\rho k} \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{y}(iT) \cos \omega iT \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.П.56)$$

Интуитивно ясно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{r}^\lambda(kT, \omega) = r_\partial^\lambda(\omega). \quad (5.П.57)$$

Однако доказать это соотношение затруднительно. Действительно, подставим в (5.П.56) выражение (5.5.14)

$$\begin{aligned} \hat{r}^\lambda(kT, \omega) &= \frac{2}{\rho k} \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \rho r_\partial^\lambda(\omega) \sin \omega iT + \rho i_\partial^\lambda(\omega) \cos \omega iT + \varkappa^0(iT) \right] \sin \omega iT = \\ &= \frac{2}{k} \left\{ r_\partial^\lambda(\omega) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1 - \cos 2\omega iT}{2} + i_\partial^\lambda(\omega) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sin 2\omega iT}{2} + \sum_{i=0}^{k-1} \varkappa^0(iT) \sin \omega iT \right\}. \end{aligned} \quad (5.П.58)$$

Пусть  $\alpha$  – некоторое целое чётное положительное число ( $\alpha > r$ ) и  $\omega = \frac{\pi}{\alpha T}$ .

Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \cos 2\omega iT = \sum_{i=0}^{\alpha} \cos \frac{2\pi}{\alpha} i = 0, \quad \sum_{i=0}^{\alpha} \sin 2\omega iT = \sum_{i=0}^{\alpha} \sin \frac{2\pi}{\alpha} i = 0.$$

Если  $k = 1$  делится на  $\alpha$ , то

$$\sum_{i=0}^{k-1} \cos 2\omega iT = \sum_{i=0}^{k-1} \sin 2\omega iT = 0.$$

Таким образом, можно указать числа  $k$ , при которых

$$\hat{r}^{\lambda}(kT, \omega) = r_{\rho}^{\lambda}(\omega) + \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varkappa^0(iT) \sin \omega iT. \quad (5.П.59)$$

Для сходимости выхода дискретного фильтра к частотной функции  $r_{\rho}^{\lambda}(\omega)$  достаточно, чтобы, аналогично (5.3.10), выполнялось неравенство

$$\sum_{i=0}^{k \rightarrow \infty} \varkappa^0(iT) \sin \omega iT < \infty. \quad (5.П.60)$$

Для доказательства этого неравенства можно повторить для дискретного случая преобразования разделов 5.Д.2 и 5.Д.3.

#### 5.П.2.4. Рекуррентный фильтр Фурье

Запишем первое из выражений (5.П.56) в рекуррентной форме. Обозначим  $\Delta(i) = \tilde{y}(iT) \sin \omega iT$ . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{r}^{\lambda}(kT, \omega) &= \frac{2}{\rho k} \sum_{i=0}^{k-1} \Delta(i) = \frac{2}{\rho k} \sum_{i=0}^{k-2} \Delta(i) + \frac{2}{\rho k} \Delta(k-1) = \\ &= \frac{k-1}{k} \left[ \frac{2}{\rho(k-1)} \sum_{i=0}^{k-2} \Delta(i) + \frac{2}{\rho(k-1)} \Delta(k-1) \right] = \\ &= \frac{k-1}{k} \left\{ \hat{r}^{\lambda}[(k-1)T, \omega] + \frac{2}{\rho(k-1)} \Delta(k-1) \right\} = \\ &= \hat{r}^{\lambda}[(k-1)T, \omega] - \frac{1}{k} \left\{ \hat{r}^{\lambda}[(k-1)T, \omega] + \frac{2}{\rho} \Delta(k-1) \right\}. \end{aligned}$$

Итак, имеем разностное уравнение

$$\begin{aligned} \hat{r}^{\lambda}(kT, \omega) &= \hat{r}^{\lambda}[(k-1)T, \omega] - \frac{1}{k} \left\{ \hat{r}^{\lambda}[(k-1)T, \omega] + \frac{2}{\rho} \tilde{y}[(k-1)T] \sin \omega(k-1)T \right\} \\ k &= 1, 2, \dots, \quad \hat{r}^{\lambda}(0, \omega) = \hat{r}_0^{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.П.61)$$

Полином (5.П.31) этого уравнения  $d(z) = z - \frac{k-1}{k}$  имеет корень, меньший единицы, и поэтому при ограниченной функции  $\tilde{y}(kT) \sin \omega kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) решение уравнения (5.П.61) ограничено.

Приведём аналогичное уравнение для непрерывного случая.

Дифференцируя первое из выражений (5.П.37), получим при  $t = 0$

$$\dot{\hat{r}}^\lambda(t, \omega) = -\frac{2}{t^2}y^s(t) + \frac{2}{t}\dot{y}^s(t) = -\frac{1}{t}\hat{r}^\lambda(t, \omega) + \frac{2}{t}\tilde{y}(t) \sin \omega t.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение фильтра Фурье имеет вид

$$\dot{\hat{r}}^\lambda(t, \omega) = -\frac{1}{t}\hat{r}^\lambda(t, \omega) + \frac{2}{t}\tilde{y}(t) \sin \omega t, \quad \hat{r}^\lambda(0, \omega) = \hat{r}_0^\lambda. \quad (5.П.62)$$

## Доказательства к главе 5

### 5.Д. Доказательства теорем и утверждений

#### 5.Д.1. Доказательство утверждения 5.2.1

Допустим вначале, что объект (5.2.1) асимптотически устойчив. Рассмотрим решение уравнения (5.2.1), обозначаемое как  $\mathbf{x}^+(t)$ , при

$$u = e^{j\omega t}. \quad (5.Д.1)$$

Покажем, что

$$\mathbf{x}^+(t) = \boldsymbol{\beta}(j\omega)e^{j\omega t} + \boldsymbol{\alpha}^+(t), \quad (5.Д.2)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}^+(t)$  –  $n$ -мерный вектор, обладающий свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\alpha}^+(t) = 0. \quad (5.Д.3)$$

Для этого запишем на основе формулы Коши (приведённой в 5.П.1.1) при  $\mathbf{x}(t_0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} e^{j\omega \tau} d\tau = e^{At} \left[ (Ej\omega - A)^{-1} e^{(Ej\omega - A)\tau} \mathbf{b} \right] \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \\ &= e^{j\omega t} (Ej\omega - A)^{-1} \mathbf{b} - e^{At} (Ej\omega - A)^{-1} e^{(Ej\omega - A)t_0} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (5.Д.4)$$

где

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots \quad (5.Д.5)$$

Кроме того, при выходе (5.Д.4) учитывалась коммутативность матриц  $(Ej\omega - A)^{-1}$  и  $e^{(Ej\omega - A)t}$ .

Используя это свойство, запишем (5.Д.4), вводя обозначения

$$\Gamma(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad \boldsymbol{\alpha}^+(t) = \Gamma(t - t_0) \boldsymbol{\beta}(j\omega) e^{j\omega t_0}, \quad (5.Д.6)$$

в виде (5.Д.2). В силу асимптотической устойчивости объекта  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t - t_0) = 0$  и поэтому справедливо (5.Д.3).

Рассмотрим теперь вектор  $\beta^\lambda(j\omega)$ . Для этого найдём решение уравнения (5.2.1) при

$$u = e^{(\lambda+j\omega)t}. \quad (5.Д.7)$$

Решение уравнения

$$\dot{x}_\lambda^+ = Ax_\lambda^+ + be^{(\lambda+j\omega)t} \quad (5.Д.8)$$

имеет, при нулевых начальных условиях, вид

$$\begin{aligned} x_\lambda^+(t) &= e^{At} \int_{t_0}^t e^{(E\lambda-A)\tau} b e^{j\omega\tau} d\tau = \\ &= (Ej\omega - A + E\lambda)^{-1} b e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{At} (Ej\omega - A + E\lambda)^{-1} e^{(Ej\omega - A + E\lambda)t_0} b = \\ &= \beta^\lambda(j\omega) e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{A(t-t_0)} \beta^\lambda(j\omega) e^{(\lambda+j\omega)t_0}. \end{aligned} \quad (5.Д.9)$$

Нетрудно видеть, что это выражение совпадает при  $x(t_0) = 0$  с (5.Д.4), если в последнем заменить  $A$  на  $A - E\lambda$ .

Составим выражение

$$\tilde{x}^+(t) = x_\lambda^+(t) e^{-\lambda t} = \beta^\lambda(j\omega) e^{j\omega t} + \tilde{a}^+(t), \quad (5.Д.10)$$

где

$$\tilde{a}^+(t) = e^{(A-E\lambda)t} e^{At_0} \beta^\lambda(j\omega) e^{(\lambda+j\omega)t_0}. \quad (5.Д.11)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}^+(t) = 0. \quad (5.Д.12)$$

Действительно, собственные числа  $\tilde{s}_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) матрицы  $\tilde{A} = A - E\lambda$  связаны с собственными числами ( $s_i$ ) матрицы  $A$  соотношением

$$\tilde{s}_i = s_i - \lambda \quad i = \overline{1, n},$$

и поэтому в силу (5.1.19)

$$\operatorname{Re} \tilde{s}_i < 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.Д.13)$$

Функции (5.Д.1) либо (5.Д.7) не могут быть реализованы физически, а может быть реализовано испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t} \sin \omega t = \frac{e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j}. \quad (5.Д.14)$$

Для нахождения реакции объекта на это воздействие запишем решение уравнения (5.2.1) при

$$u(t) = e^{(\lambda-j\omega)t}. \quad (5.Д.15)$$

Очевидно, что решение  $x_\lambda^-(t)$  с точностью до знака перед  $\omega$  совпадает с (5.Д.9)

$$x_\lambda^-(t) = \beta^\lambda(-j\omega) e^{(\lambda-j\omega)t} - e^{A(t-t_0)} \left[ \beta^\lambda(-j\omega) e^{(\lambda-j\omega)t_0} - x(t_0) \right]. \quad (5.Д.16)$$

Таким образом, искомая реакция

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{x}_\lambda^+(t) - \mathbf{x}_\lambda^-(t)}{2j} = \frac{\beta^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t} - \beta^\lambda(j\omega)e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j} - e^{A(t-t_0)} \operatorname{Im} \left[ \beta^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0} \right] = \operatorname{Im} \left[ \beta^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t} \right] - e^{A(t-t_0)} \operatorname{Im} \left[ \beta^\lambda(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)t_0} \right]. \quad (5.Д.17)$$

Используя (5.2.4), получим при ненулевых начальных условиях искомое выражение (5.2.3)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t \right] + e^{A(t-t_0)} \left[ \mathbf{x}(t_0) - e^{\lambda t_0} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - e^{\lambda t_0} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 \right]. \quad (5.Д.18)$$

На основе неравенства (5.Д.13) заключаем непосредственно из выражения (5.2.4), что функция  $\mathbf{x}^0(t)$  обладает свойством (5.2.6).

## 5.Д.2. Доказательство утверждения 5.2.2

Найдём реакцию объекта (5.2.1) на испытательное воздействие

$$u(t) = e^{\lambda t} (\nu \sin \omega t + \gamma \cos \omega t) = \nu \frac{e^{(\lambda+j\omega)t} - e^{(\lambda-j\omega)t}}{2j} + \gamma \frac{e^{(\lambda+j\omega)t} + e^{(\lambda-j\omega)t}}{2}.$$

Аналогично (5.Д.17) запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \nu \frac{\mathbf{x}_\lambda^+(t) - \mathbf{x}_\lambda^-(t)}{2j} + \gamma \frac{\mathbf{x}_\lambda^+(t) + \mathbf{x}_\lambda^-(t)}{2} = \\ &= e^{\lambda t} \left[ \nu \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t + \nu \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t \right] + e^{\lambda t} \left[ \gamma \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t - \gamma \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t \right] + \\ &+ e^{A(t-t_0)} \left[ \mathbf{x}(t_0) + \nu e^{\lambda t_0} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - \nu e^{\lambda t_0} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 \right] - \\ &- e^{A(t-t_0)} \left[ \gamma e^{\lambda t_0} \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0 - \gamma e^{\lambda t_0} \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 \right]. \end{aligned}$$

Умножим эту функцию на  $e^{-\lambda t}$  и получим в установившемся режиме

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \left[ \nu \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) - \gamma \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \right] \sin \omega t + \left[ \nu \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) + \gamma \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \right] \cos \omega t.$$

Для объекта (5.1.1)

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \left[ \nu r^\lambda(\omega) - \gamma i^\lambda(\omega) \right] \sin \omega t + \left[ \nu i^\lambda(\omega) + \gamma r^\lambda(\omega) \right] \cos \omega t.$$

С другой стороны, принимая выход

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t,$$

запишем

$$\alpha = \nu r^\lambda(\omega) - \gamma i^\lambda(\omega), \quad \beta = \nu i^\lambda(\omega) + \gamma r^\lambda(\omega).$$

Отсюда (при  $\lambda = 0$ ) получаем соотношения (5.2.43).

### 5.Д.3. Доказательство теоремы 5.2.1

Рассмотрим неравенства (5.2.82). Отметим вначале, что элементы  $\gamma_{\rho j}(t_{cx})$  ( $\rho, j = \overline{1, n}$ ) матрицы

$$\Gamma(t_{cx}) = e^{At_{cx}} \quad (5.Д.19)$$

имеют при различных собственных числах  $s_q = \alpha_q^0 + j\omega_q^0$  ( $q = \overline{1, n}$ ) матрицы  $A$  вид

$$\gamma_{\rho j}(t_{cx}) = \sum_{q=1}^n \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sin \omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \cos \omega_q^0 t_{cx} \right] \quad \rho, j = \overline{1, n} \quad (5.Д.20)$$

Подставляя эти выражения в (5.2.82), запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ r_{xj}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_{cx} + i_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_{cx} \right] \cdot \\ & \cdot \sum_{q=1}^n \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t_{cx}} \sin \omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t_{cx}} \cos \omega_q^0 t_{cx} \right] \leq \varepsilon_{cx} \quad \rho, k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.Д.21)$$

где  $r_{xj}^\lambda$  и  $i_{xj}^\lambda$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – компоненты векторов  $\mathbf{r}_x^\lambda$  и  $\mathbf{i}_x^\lambda$ .

Оценим левые части этих неравенств.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[ r_{xj}^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_{cx} + i_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_{cx} \right] \cdot \\ & \cdot \sum_{q=1}^n \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t_{cx}} \sin \omega_q^0 t_{cx} + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t_{cx}} \cos \omega_q^0 t_{cx} \right] = \\ & = e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{j=1}^n \sqrt{\left[ r_{xj}^\lambda(\omega_k) \right]^2 + \left[ i_{xj}^\lambda(\omega_k) \right]^2} \cdot \sin[\omega_k t_{cx} + \varphi_j(\omega_k)] \cdot \\ & \cdot \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \cdot \sqrt{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \right]^2 + \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \right]^2} \cdot \sin[\omega_q^0 t_{cx} + \varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0)] = \\ & = e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sum_{j=1}^n \sqrt{\left[ r_{xj}^\lambda(\omega_k) \right]^2 + \left[ i_{xj}^\lambda(\omega_k) \right]^2} \cdot \sqrt{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \right]^2 + \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \right]^2} \cdot \\ & \cdot \sin[\omega_k t_{cx} + \varphi_j(\omega_k)] \cdot \sin[\omega_q^0 t_{cx} + \varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0)] \leq \\ & \leq e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \sum_{j=1}^n \sqrt{\left[ r_{xj}^\lambda \right]^2 + \left[ i_{xj}^\lambda \right]^2} \cdot \sqrt{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \right]^2 + \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \right]^2} \leq \\ & \leq e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \nu_{q\rho}^\lambda \quad \rho = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.Д.22)$$

где

$$\varphi_{\rho j}^0(\omega_q^0) = \arctg \frac{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \right]^2}{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \right]^2} \quad q, \rho, j = \overline{1, n}, \quad \varphi_j(\omega_k) = \arctg \frac{i_{xj}^\lambda(\omega_k)}{r_{xj}^\lambda(\omega_k)} \quad j, k = \overline{1, n}, \quad (5.Д.23)$$

$$\begin{aligned} r_{xj}^\lambda &= \max_{\omega_1 \leq \omega_k \leq \omega_n} \left| r_{xj}^\lambda(\omega_k) \right|, \quad i_{xj}^\lambda = \max_{\omega_1 \leq \omega_k \leq \omega_n} \left| i_{xj}^\lambda(\omega_k) \right| \quad j, k = \overline{1, n}, \\ \nu_{q\rho}^\lambda &= \max_{1 \leq j \leq n} \sqrt{\left[ r_{xj}^\lambda \right]^2 + \left[ i_{xj}^\lambda \right]^2} \cdot \sqrt{\left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \right]^2 + \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \right]^2} \quad q, \rho = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.Д.24)$$



Обозначая

$$\alpha^0 = \max \{ \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0 \}, \quad (5.Д.25)$$

получим для последнего из соотношений (5.Д.22)

$$e^{-\lambda t_{cx}} \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0 t_{cx}} \nu_{q\rho}^\lambda = e^{(\alpha_0 - \lambda) t_{cx}} \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \alpha_0) t_{cx}} \nu_{q\rho}^\lambda \leq e^{(\alpha_0 - \lambda) t_{cx}} \sum_{q=1}^n \nu_{q\rho}^\lambda \quad \rho = \overline{1, n}.$$

Будем искать  $t_{cx}^\lambda$  как наибольшее из решений уравнений

$$e^{(\alpha_0 - \lambda) t_{cx}} \sum_{q=1}^n \nu_{q\rho}^\lambda \leq \varepsilon_{cx} \quad \rho = \overline{1, n}. \quad (5.Д.26)$$

Очевидно, что

$$t_\rho \leq \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln \sum_{q=1}^n \nu_{q\rho}^\lambda}{\alpha_0 - \lambda} \quad \rho = \overline{1, n}, \quad (5.Д.27)$$

и время сходимости

$$t_{cx}^\lambda = \max \{ t_1, t_2, \dots, t_n \}. \quad (5.Д.28)$$

Время сходимости для объектов второго вида [объекта (5.1.1)] определяется из неравенства (5.2.93). Преобразуем его левую часть с учётом (5.Д.20)

$$\begin{aligned} & \mathbf{d} e^{(A - E\lambda)t} \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t \right] = \\ & = e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^n \gamma_{lj}(t) \cdot \sqrt{[r_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2 + [i_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2} \cdot \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\ & = \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \cdot \sqrt{[r_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2 + [i_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2} \cdot \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot \\ & \quad \cdot \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] \cdot \sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] = \\ & = \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n d_l \cdot \sqrt{[r_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2 + [i_{xj}^\lambda(\omega_k)]^2} \cdot \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot \\ & \quad \cdot \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] \cdot \sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \leq \\ & \leq \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \sum_{l,j=1}^n |d_l| \cdot \sqrt{[r_{xj}^\lambda]^2 + [i_{xj}^\lambda]^2} \cdot \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} = \\ & = \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^\lambda \leq e^{(\alpha_0 - \lambda)t} \sum_{q=1}^n \nu_q^\lambda, \end{aligned} \quad (5.Д.29)$$

где

$$\nu_q^\lambda = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n |d_l| \cdot \sqrt{[r_{xj}^\lambda]^2 + [i_{xj}^\lambda]^2} \cdot \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \quad q = \overline{1, n}. \quad (5.Д.30)$$

Определяя  $t_{cx}$  из неравенства

$$e^{(\alpha_0 - \lambda)t} \sum_{q=1}^n \nu_q^\lambda \leq \varepsilon_{cx},$$

находим, что

$$t_{cx} \leq \frac{\ln \varepsilon_{cx} - \ln \sum_{q=1}^n \nu_q^\lambda}{\alpha_0 - \lambda}. \quad (5.Д.31)$$

Исследуем зависимость  $\nu_q^\lambda$  от  $\lambda$ .

Утверждение 5.Д.1.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu_q^\lambda = 0 \quad q = \overline{1, n}. \quad (5.Д.32)$$

■

Переходя к доказательству, заметим, что в выражении (5.Д.30) для  $\nu_q^\lambda$  от  $\lambda$  зависят лишь сомножители

$$a_{x\mu}^\lambda = \sqrt{[r_{x\mu}^\lambda]^2 + [i_{x\mu}^\lambda]^2} \quad \mu = \overline{1, n},$$

являющиеся амплитудно-частотными характеристиками компонент вектора  $\beta^\lambda(j\omega) = [E(\lambda - j\omega) - A]^{-1}\mathbf{b}$ , которые представим как

$$\beta_\mu^\lambda(j\omega) = \beta_\mu(s) = \frac{b_\mu(s)}{d(s)} = \frac{b_\gamma^\mu s^\gamma + \dots + b_1^\mu s + b_0^\mu}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0} \quad (5.Д.33)$$

$$\mu = \overline{1, n}, \quad \gamma \leq n - 1, \quad s = \lambda + j\omega,$$

где  $d(s) = \det(Es - A)$ ,  $b_\mu(s) = (Es - A)^{[\mu]}\mathbf{b}$ ,  $(Es - A)^{[\mu]}$  –  $\mu$ -тая строка присоединённой матрицы<sup>3</sup>  $(Es - A)$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \beta_\mu^\lambda(j\omega) &= \frac{b_\gamma^\mu(\lambda + j\omega)^\gamma + b_{\gamma-1}^\mu(\lambda + j\omega)^{\gamma-1} + \dots + b_1^\mu(\lambda + j\omega) + b_0^\mu}{(\lambda + j\omega)^n + d_{n-1}(\lambda + j\omega)^{n-1} + \dots + d_1(\lambda + j\omega) + d_0} = \\ &= \frac{(b_\gamma^\mu \lambda^\gamma + \bar{b}_{\gamma-1}^\mu \lambda^{\gamma-1} + \dots + \bar{b}_1^\mu \lambda + \bar{b}_0^\mu) + j(\tilde{b}_{\gamma-1}^\mu \lambda^{\gamma-1} + \dots + \tilde{b}_1^\mu \lambda + \tilde{b}_0^\mu)}{(\lambda^n + \bar{d}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \bar{d}_1 \lambda + \bar{d}_0) + j(\tilde{d}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{d}_1 \lambda + \tilde{d}_0)} = \\ &= a_{x\mu}^\lambda(\omega) e^{j\varphi_{x\mu}^\lambda(\omega)} \quad \mu = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.Д.34)$$

где  $\bar{d}_i, \tilde{d}_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) и  $\bar{b}_j^\mu, \tilde{b}_j^\mu$  ( $j = \overline{0, \gamma-1}$ ) – коэффициенты, зависящие от  $\omega$  и параметров  $d_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) и  $b_j$  ( $j = \overline{0, \gamma-1}$ ).

Так как  $\gamma \leq n - 1$ , то  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_{x\mu}^\lambda(\omega) = 0$  для каждого фиксированного  $\omega$ , и таким образом (5.Д.32) доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда среди собственных чисел матрицы  $A$  имеются кратные. Пусть для простоты кратным является одно собственное число, например  $s_1$ , а остальные собственные числа простые. Пусть кратность  $s_1$  равна  $\rho_1$ . Тогда

<sup>3</sup>Присоединённая матрица определяется из равенства  $(Es - A)(Es - A) = Ed(s)$ .

(5.Д.20) примет вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_{lj}(t) &= \left[ c_{1lj}^{(1)} + c_{2lj}^{(1)}t + \dots + c_{\rho_1 lj}^{(1)}t^{\rho_1-1} \right] e^{\alpha_1^0 t} \sin \omega_1^0 t + \\
 &+ \left[ c_{1lj}^{(2)} + c_{2lj}^{(2)}t + \dots + c_{\rho_1 lj}^{(2)}t^{\rho_1-1} \right] e^{\alpha_1^0 t} \cos \omega_1^0 t + \\
 &+ \sum_{q=\rho_1+1}^n \left[ \nu_{qlj}^{(1)} e^{\alpha_q^0 t} \sin \omega_q^0 t + \nu_{qlj}^{(2)} e^{\alpha_q^0 t} \cos \omega_q^0 t \right] = \\
 &= \sum_{q=1}^{\rho_1} \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} \sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \\
 &+ \sum_{q=\rho_1+1}^n \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot e^{\alpha_q^0 t} \sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \quad l, j = \overline{1, n}.
 \end{aligned} \tag{5.Д.35}$$

Подставляя это выражение в левую часть (5.2.53), получим аналогично (5.Д.29)

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{d} e^{(A-E\lambda)t} \left[ \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t + \mathbf{i}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t \right] = \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}(t) a_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^n d_l \left\{ \sum_{q=1}^{\rho_1} \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} \sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \right. \\
 &+ \left. \sum_{q=\rho_1+1}^n \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot e^{\alpha_q^0 t} \sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \right\} a_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] = \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} d_l \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] \sin[\omega_1^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_1^0)] + \\
 &+ e^{-\lambda t} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} d_l \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) \sin[\omega_k t + \varphi_j(\omega_k)] \sin[\omega_q^0 t + \varphi_{lj}^0(\omega_q^0)] \leq \\
 &\leq e^{-\lambda t} \sum_{l,j=1}^n \sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} |d_l| \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) + \\
 &+ e^{-\lambda t} \sum_{l,j=1}^n \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} |d_l| \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) = \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} \sum_{l,j=1}^n |d_l| \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) + \\
 &+ e^{-\lambda t} \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} \sum_{l,j=1}^n |d_l| \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) = \\
 &= e^{-\lambda t} \sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} \nu_q^\lambda + e^{-\lambda t} \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} \nu_q^\lambda \quad k = \overline{1, n},
 \end{aligned} \tag{5.Д.36}$$

где

$$\nu_q^\lambda = \begin{cases} \sum_{l,j=1}^n |d_l| \sqrt{[c_{qlj}^{(1)}]^2 + [c_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) & \text{при } q = \overline{1, \rho}, \\ \sum_{l,j=1}^n |d_l| \sqrt{[\nu_{qlj}^{(1)}]^2 + [\nu_{qlj}^{(2)}]^2} \cdot a_{xj}^\lambda(\omega_k) & \text{при } q = \overline{\rho+1, n}. \end{cases} \tag{5.Д.37}$$

Покажем, что всегда можно найти число  $\alpha_0^0$  такое, что выполняется неравенство

$$\sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} \nu_q^\lambda \leq e^{\alpha_0^0 t} \nu_1^\lambda. \tag{5.Д.38}$$

Действительно, представим

$$e^{\alpha_0^0 t} = 1 + \alpha_0^0 t + \frac{(\alpha_0^0)^2}{2!} t^2 + \frac{(\alpha_0^0)^3}{3!} t^3 + \dots + \frac{(\alpha_0^0)^{\rho-1}}{(\rho-1)!} t^{\rho-1} + \dots$$

и выберем  $\alpha_0^0$  из условий

$$\frac{(\alpha_0^0)^i}{i!} \geq \frac{\nu_i^\lambda}{\nu_1^\lambda} \quad i = \overline{1, \rho_1 - 1}. \quad (5.Д.39)$$

Используя (5.Д.36), запишем, что

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} \sum_{q=1}^{\rho_1} t^{q-1} e^{\alpha_1^0 t} \nu_q^\lambda + e^{-\lambda t} \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} \nu_q^\lambda \leq \\ & \leq e^{-\lambda t} \left( e^{(\alpha_1^0 + \alpha_0^0) t} \nu_1^\lambda + \sum_{q=\rho_1+1}^n e^{\alpha_q^0 t} \nu_q^\lambda \right) \leq e^{(\alpha^0 - \lambda) t} \left( \nu_1^\lambda + \sum_{q=\rho_1+1}^n \nu_q^\lambda \right), \end{aligned} \quad (5.Д.40)$$

где  $\alpha^0 = \max \{ \alpha_1^0 + \alpha_0^0, \alpha_{\rho+1}^0, \dots, \alpha_n^0 \}$ .

#### 5.Д.4. Доказательство утверждения 5.3.2

Вводя вектор

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}(t_0) e^{-\lambda t_0} - \mathbf{r}_x^\lambda(\omega) \sin \omega t_0 - \mathbf{i}_x^\lambda(\omega) \cos \omega t_0, \quad (5.Д.41)$$

представим выражение (5.3.4) в более компактной форме

$$\boldsymbol{\alpha}^0(t) = e^{(A-E\lambda)(t-t_0)} \boldsymbol{\delta} = e^{A(t-t_0)} e^{-\lambda(t-t_0)} \boldsymbol{\delta} = e^{-\lambda(t-t_0)} \Gamma(t-t_0) \boldsymbol{\delta}, \quad (5.Д.42)$$

где элементы матрицы  $\Gamma(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$  имеют, в соответствии с (5.Д.20), вид

$$\gamma_{\rho j}(t-t_0) = \sum_{q=1}^n \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} e^{\alpha_q^0(t-t_0)} \sin \omega_q^0(t-t_0) + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} e^{\alpha_q^0(t-t_0)} \cos \omega_q^0(t-t_0) \right] \quad \rho, j = \overline{1, n}.$$

С учётом этого выражения можно записать компоненты вектора  $\boldsymbol{\alpha}^0(t)$  как

$$\begin{aligned} \alpha_\rho^0(t) &= e^{-\lambda(t-t_0)} \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_{\rho j}(t-t_0) = \\ &= e^{-\lambda(t-t_0)} \sum_{j=1}^n \delta_j \sum_{q=1}^n e^{\alpha_q^0(t-t_0)} \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \sin \omega_q^0(t-t_0) + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \cos \omega_q^0(t-t_0) \right] \quad \rho = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.Д.43)$$

Заменим определённый интеграл в (5.3.10) на неопределённый и получим для первого из этих неравенств

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \alpha_\rho^0(t) \sin \omega t dt = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \delta_j \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} e^{-\alpha_q^0 t_0} \cdot \\ & \cdot \left[ \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(1)} \sin \omega_q^0(t-t_0) \sin \omega t + \tilde{\nu}_{q\rho j}^{(2)} \cos \omega_q^0(t-t_0) \sin \omega t \right] dt. \end{aligned} \quad (5.Д.44)$$

Найдём выражения для интегралов, входящих в это соотношение, и аналогичное выражение для второго из неравенств (5.3.10)

$$\int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \sin \omega^0 \tau \sin \omega \tau d\tau, \quad \int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \cos \omega^0 \tau \sin \omega \tau d\tau, \quad (5.Д.45)$$

$$\int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \sin \omega^0 \tau \cos \omega \tau d\tau, \quad \int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \cos \omega^0 \tau \cos \omega \tau d\tau. \quad (5.Д.46)$$

Для этого воспользуемся соотношениями

$$\sin \omega^0 \tau \sin \omega \tau = \frac{1}{2} [ \cos(\omega^0 - \omega)\tau - \cos(\omega^0 + \omega)\tau ], \quad (5.Д.47)$$

$$\cos \omega^0 \tau \sin \omega \tau = \frac{1}{2} [ -\sin(\omega^0 - \omega)\tau + \sin(\omega^0 + \omega)\tau ], \quad (5.Д.48)$$

$$\sin \omega^0 \tau \cos \omega \tau = \frac{1}{2} [ \sin(\omega^0 - \omega)\tau + \sin(\omega^0 + \omega)\tau ], \quad (5.Д.49)$$

$$\cos \omega^0 \tau \cos \omega \tau = \frac{1}{2} [ \cos(\omega^0 - \omega)\tau + \cos(\omega^0 + \omega)\tau ]. \quad (5.Д.50)$$

Тогда нахождение интегралов сводится к вычислению

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \sin \omega_{\Delta} \tau d\tau &= \frac{e^{\alpha\tau}}{\omega_{\Delta}^2 + \alpha^2} (\alpha \sin \omega_{\Delta} \tau + \omega_{\Delta} \cos \omega_{\Delta} \tau) \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_{\Delta}^2 + \alpha^2} (\alpha \sin \omega_{\Delta} t + \omega_{\Delta} \cos \omega_{\Delta} t) - \frac{e^{\alpha t_0}}{\omega_{\Delta}^2 + \alpha^2} (\alpha \sin \omega_{\Delta} t_0 + \omega_{\Delta} \cos \omega_{\Delta} t_0), \end{aligned} \quad (5.Д.51)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{\alpha\tau} \cos \omega_{\Delta} \tau d\tau &= \frac{e^{\alpha\tau}}{\omega_{\Delta}^2 + \alpha^2} (\alpha \cos \omega_{\Delta} \tau - \omega_{\Delta} \sin \omega_{\Delta} \tau) - \\ &- \frac{e^{\alpha t_0}}{\omega_{\Delta}^2 + \alpha^2} (\alpha \cos \omega_{\Delta} t_0 - \omega_{\Delta} \sin \omega_{\Delta} t_0), \quad \omega_{\Delta} = \omega^0 \pm \omega. \end{aligned} \quad (5.Д.52)$$

При  $t \rightarrow \infty$  значения этих интегралов конечны (так как  $\alpha < 0$ ) и поэтому конечны (5.Д.45), (5.Д.46), а это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  интеграл (5.Д.44) ограничен. Аналогично доказывается второе из соотношений (5.3.10).

Это доказательство можно обобщить на случай кратных собственных чисел матрицы  $A$ .

### 5.Д.5. Доказательство утверждения 5.3.3

Проанализируем выражение (5.3.29) для ошибки фильтрации.

Первое слагаемое –  $e_{ce}(t)$  – в правой части этого выражения обладает в соответствии с утверждениями 5.3.1 и 5.3.2 свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ce}(t) = 0. \quad (5.Д.53)$$

Исследуем второе слагаемое

$$e_f(t) = \frac{2}{t-t_0} \int_{t_0}^t \mathfrak{e}^f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (5.Д.54)$$

Используя выражение (5.3.32) для  $\mathfrak{e}^f(t)$  и соотношения (5.Д.47)–(5.Д.52), заключаем повторяя, доказательство утверждения 5.3.2, что

$$\int_{t_0}^{\infty} \mathfrak{e}^f(\tau) \sin \omega \tau d\tau < \infty, \quad (5.Д.55)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_f(t) = 0. \quad (5.Д.56)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{\mathfrak{e}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t-t_0} \int_{t_0}^t \mathfrak{e}(\tau) \sin \omega \tau d\tau = 0. \quad (5.Д.57)$$

### 5.Д.6. Доказательство утверждения 5.3.4

Выражение функции  $\tilde{\mathfrak{e}}^f(t)$  имеет в соответствии с (5.3.28) вид

$$\tilde{\mathfrak{e}}^f(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)} \mathbf{m} \tilde{f}(\tau) d\tau. \quad (5.Д.58)$$

Вычислим ядро этой функции  $\mathbf{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)} \mathbf{m}$ . Используя выражение (5.Д.20) для элементов матрицы  $\Gamma(t-\tau) = e^{(A-E\lambda)(t-\tau)}$ , запишем аналогично (5.Д.29)

$$\begin{aligned} \mathbf{d}e^{(A-E\lambda)(t-\tau)} \mathbf{m} &= \sum_{q=1}^n \left[ \left( \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \tilde{\nu}_{qlj}^{(1)} m_j \right) e^{(\alpha_q^0 - \lambda)(t-\tau)} \sin \omega_q^0(t-\tau) + \right. \\ &+ \left. \left( \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \tilde{\nu}_{qlj}^{(2)} m_j \right) e^{(\alpha_q^0 - \lambda)(t-\tau)} \cos \omega_q^0(t-\tau) \right] = \\ &= \sum_{q=1}^n \left[ \nu_q^{(1)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)(t-\tau)} \sin \omega_q^0(t-\tau) + \nu_q^{(2)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)(t-\tau)} \cos \omega_q^0(t-\tau) \right], \end{aligned} \quad (5.Д.59)$$

где

$$\nu_q^{(1)} = \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \tilde{\nu}_{qlj}^{(1)} m_j, \quad \nu_q^{(2)} = \sum_{l=1}^n d_l \sum_{j=1}^n \tilde{\nu}_{qlj}^{(2)} m_j. \quad (5.Д.60)$$

Ограничиваясь для простоты одночастотным возмущающим воздействием

$$f(t) = \delta \sin \omega^f t, \quad (5.Д.61)$$

получим выражение

$$\begin{aligned}
 & d e^{(A-E\lambda)(t-\tau)} \mathbf{m} \tilde{f}(\tau) = \\
 & = \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \left[ \nu_q^{(1)} \sin \omega_q^0(t-\tau) \sin \omega^f \tau + \nu_q^{(2)} \cos \omega_q^0(t-\tau) \sin \omega^f \tau \right] = \quad (5.Д.62) \\
 & = \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^{(1)} \sin \omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau - \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^{(1)} \cos \omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0 \tau} \sin \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau + \\
 & + \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^{(2)} \cos \omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau + \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^{(2)} \sin \omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0 \tau} \sin \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл первого слагаемого в этом выражении

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^t \sum_{q=1}^n e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \nu_q^{(1)} \sin \omega_q^0 t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau d\tau = \\
 & = \sum_{q=1}^n \nu_q^{(1)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \sin \omega_q^0 t \int_{t_0}^t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau d\tau. \quad (5.Д.63)
 \end{aligned}$$

Используя (5.Д.49) и (5.Д.51), получим, что

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau d\tau = \frac{1}{2} & \left[ \frac{e^{-\alpha_q^0 t}}{\bar{\omega}_\Delta^2 + \alpha_q^{02}} \left( -\alpha_q^0 \sin \bar{\omega}_\Delta t + \bar{\omega}_\Delta \cos \bar{\omega}_\Delta t \right) - \right. \\
 & - \frac{e^{-\alpha_q^0 t_0}}{\bar{\omega}_\Delta^2 + \alpha_q^{02}} \left( -\alpha_q^0 \sin \bar{\omega}_\Delta t_0 + \bar{\omega}_\Delta \cos \bar{\omega}_\Delta t_0 \right) + \\
 & + \frac{e^{-\alpha_q^0 t}}{\bar{\omega}_\Delta^2 + \alpha_q^{02}} \left( -\alpha_q^0 \sin \bar{\omega}_\Delta t + \bar{\omega}_\Delta \cos \bar{\omega}_\Delta t \right) - \\
 & \left. - \frac{e^{-\alpha_q^0 t_0}}{\bar{\omega}_\Delta^2 + \alpha_q^{02}} \left( -\alpha_q^0 \sin \bar{\omega}_\Delta t_0 + \bar{\omega}_\Delta \cos \bar{\omega}_\Delta t_0 \right) \right], \quad (5.Д.64)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{\omega}_\Delta = \omega^f - \omega_q^0$ ,  $\bar{\omega}_\Delta^+ = \omega^f + \omega_q^0$ .

Подставляя (5.Д.44) в (5.Д.63), заключаем при выполнении свойства 5.3.1, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^n \nu_q^{(1)} e^{(\alpha_q^0 - \lambda)t} \sin \omega_q^0 t \int_{t_0}^t e^{-\alpha_q^0 \tau} \cos \omega_q^0 \tau \sin \omega^f \tau d\tau = 0. \quad (5.Д.65)$$

Рассматривая последовательно интегралы остальных слагаемых в (5.Д.62), приходим к утверждению 5.3.3.

### 5.Д.7. Доказательство утверждения 5.4.2

Запишем уравнения (5.4.6), (5.4.10) в матричной форме. В связи с этим введём обозначения

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} r(\omega_1) \\ r(\omega_2) \\ \vdots \\ r(\omega_n) \\ i(\omega_1) \\ i(\omega_2) \\ \vdots \\ i(\omega_n) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{h}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{r}(t, \omega_1) \\ \hat{r}(t, \omega_2) \\ \vdots \\ \hat{r}(t, \omega_n) \\ \hat{i}(t, \omega_1) \\ \hat{i}(t, \omega_2) \\ \vdots \\ \hat{i}(t, \omega_n) \end{bmatrix}; \quad (5.Д.66)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} y(t+T_\alpha) \\ y(t+2T_\alpha) \\ \vdots \\ y(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_y^0(t) = \begin{bmatrix} x_y^0(t+T_\alpha) \\ x_y^0(t+2T_\alpha) \\ \vdots \\ x_y^0(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{ycm}(t) = \begin{bmatrix} x_{ycm}(t+T_\alpha) \\ x_{ycm}(t+2T_\alpha) \\ \vdots \\ x_{ycm}(t+2nT_\alpha) \end{bmatrix}; \quad (5.Д.67)$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 \sin \omega_1(t+T_\alpha) & \rho_2 \sin \omega_2(t+T_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin \omega_n(t+T_\alpha) \\ \rho_1 \sin \omega_1(t+2T_\alpha) & \rho_2 \sin \omega_2(t+2T_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin \omega_n(t+2T_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1 \sin \omega_1(t+2nT_\alpha) & \rho_2 \sin \omega_2(t+2nT_\alpha) & \cdots & \rho_n \sin \omega_n(t+2nT_\alpha) \\ \rho_1 \cos \omega_1(t+T_\alpha) & \rho_2 \cos \omega_2(t+T_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos \omega_n(t+T_\alpha) \\ \rho_1 \cos \omega_1(t+2T_\alpha) & \rho_2 \cos \omega_2(t+2T_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos \omega_n(t+2T_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1 \cos \omega_1(t+2nT_\alpha) & \rho_2 \cos \omega_2(t+2nT_\alpha) & \cdots & \rho_n \cos \omega_n(t+2nT_\alpha) \end{pmatrix}; \quad (5.Д.68)$$

$$\mathbf{m}(t) = \begin{bmatrix} \rho_1 \sin \omega_1[t+(2n+1)T_\alpha] & \rho_2 \sin \omega_2[t+(2n+1)T_\alpha] & \cdots & \rho_n \sin \omega_n[t+(2n+1)T_\alpha] \\ \rho_1 \cos \omega_1[t+(2n+1)T_\alpha] & \rho_2 \cos \omega_2[t+(2n+1)T_\alpha] & \cdots & \rho_n \cos \omega_n[t+(2n+1)T_\alpha] \end{bmatrix}; \quad (5.Д.69)$$

$\bar{\mathbf{e}} = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]$  –  $2n$ -мерный вектор, все компоненты которого равны единице.

В этих обозначениях уравнения (5.4.6) примут вид

$$\bar{\mathbf{y}} = M\mathbf{h} + \bar{\mathbf{x}}_{ycm} + \bar{\mathbf{x}}_y^0, \quad (5.Д.70)$$

$$y[t+(2n+1)T_\alpha] = \mathbf{m}\mathbf{h} + x_{ycm}[t+(2n+1)T_\alpha] + x_y^0[t+(2n+1)T_\alpha], \quad (5.Д.71)$$

а уравнения (5.4.10) запишутся как

$$\bar{\mathbf{y}} = M\hat{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{x}}_{ycm}, \quad (5.Д.72)$$

$$y[t+(2n+1)T_\alpha] = \mathbf{m}\hat{\mathbf{h}} + \hat{x}_{ycm}[t+(2n+1)T_\alpha]. \quad (5.Д.73)$$

Вычитая уравнения (5.Д.70), (5.Д.71) из этих уравнений, получим соотношения для ошибок  $\mathbf{e}_h = \hat{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{h}$  вычисления (фильтрации) частотных параметров и  $x_{ycm}(t)$



$$[e_{\mathfrak{x}}(t) = \hat{\mathfrak{x}}_{y_{cm}}(t) - \mathfrak{x}_{y_{cm}}(t)]$$

$$M\mathbf{e}_h + \bar{\mathbf{e}}e_{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}_y^0 + \bar{\mathfrak{x}}_{y_{cm}}(t) - \bar{\mathbf{e}}\mathfrak{x}_{y_{cm}}(t), \quad (5.Д.74)$$

$$\mathbf{m}\mathbf{e}_h + e_{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_y^0[t + (2n + 1)T_\alpha] + \mathfrak{x}_{y_{cm}}[t + (2n + 1)T_\alpha] - \mathfrak{x}_{y_{cm}}(t). \quad (5.Д.75)$$

Учитывая, что все компоненты  $\varepsilon_i^{f\mathfrak{x}}(t)$  ( $i = \overline{1, 2n}$ ) вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{f\mathfrak{x}}(t) = \bar{\mathfrak{x}}_{y_{cm}}(t) - \bar{\mathbf{e}}\mathfrak{x}_{y_{cm}}(t) \quad (5.Д.76)$$

удовлетворяют условию (5.4.7)

$$|\varepsilon_i^{f\mathfrak{x}}(t)| \leq \varepsilon^{f\mathfrak{x}} \quad (5.Д.77)$$

и могут быть сделаны сколь угодно малыми, запишем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_h(t) \\ e_{\mathfrak{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M(t) & \bar{\mathbf{e}} \\ \mathbf{m}(t) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_y^0(t) \\ \mathfrak{x}_y^0[t + (2n + 1)T_\alpha] \end{bmatrix}. \quad (5.Д.78)$$

Отсюда, в силу асимптотической устойчивости объекта, заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_h(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_{\mathfrak{x}}(t) = 0. \quad (5.Д.79)$$

### 5.Д.8. Доказательство теоремы 5.4.1

Пусть  $\lambda \neq 0$ , а объект управления может быть неустойчив.

Выражение, описывающее сигнал на входе фильтра (выходе умножителя) при параллельном испытательном воздействии (5.3.39) имеет вид (5.3.41).

Запишем на его основе систему уравнений, аналогичную (5.3.51)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \rho_k \left[ r^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k(t + lT_\alpha) + i^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k(t + lT_\alpha) \right] + \\ & + \tilde{\mathfrak{x}}_y^0(t + lT_\alpha) + \tilde{\mathfrak{x}}^f(t + lT_\alpha) + \mathfrak{x}(t + lT_\alpha), \quad (l = \overline{1, 2n}), \end{aligned} \quad (5.Д.80)$$

где

$$\tilde{\mathfrak{x}}_y^0(t) = \mathbf{d}e^{(A - E\lambda)(t - t_0)} \left[ \mathbf{x}(t_0) - \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{r}_x^\lambda(\omega_k) \sin \omega_k t_0 - \sum_{k=1}^n \rho_k i_x^\lambda(\omega_k) \cos \omega_k t_0 \right]. \quad (5.Д.81)$$

Это уравнение в матричной форме имеет вид

$$M(t)\mathbf{h}^\lambda = \tilde{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathfrak{x}}(t) - \tilde{\mathfrak{x}}^f(t) - \tilde{\mathfrak{x}}_y^0(t), \quad (5.Д.82)$$

где  $\mathbf{h}^\lambda = \left[ r^\lambda(\omega_1) \quad r^\lambda(\omega_2) \quad \cdots \quad r^\lambda(\omega_n) \mid i^\lambda(\omega_1) \quad i^\lambda(\omega_2) \quad \cdots \quad i^\lambda(\omega_n) \right]'$ ,

$$\tilde{\mathfrak{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{x}}(t + T_\alpha) \\ \tilde{\mathfrak{x}}(t + 2T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{\mathfrak{x}}(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{x}}^f(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{x}}^f(t + T_\alpha) \\ \tilde{\mathfrak{x}}^f(t + 2T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{\mathfrak{x}}^f(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(t + T_\alpha) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t + 2T_\alpha) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}(t + 2nT_\alpha) \end{bmatrix}. \quad (5.Д.83)$$

Расчётная система (5.2.56) записывается в матричной форме как

$$M(t)\hat{\mathbf{h}}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t). \quad (5.Д.84)$$

Вычитая уравнение (5.Д.82) из этого уравнения, получим выражение для ошибки

$$\mathbf{e}_h^\lambda(t) = M^{-1}(t) \left[ \tilde{\mathbf{a}}(t) + \tilde{\mathbf{a}}^f(t) + \tilde{\mathbf{a}}_y^0(t) \right]. \quad (5.Д.85)$$

Так как, в силу утверждения 5.3.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \tilde{\mathbf{a}}(t) + \tilde{\mathbf{a}}^f(t) + \tilde{\mathbf{a}}_y^0(t) \right] = \mathbf{0}, \quad (5.Д.86)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_h^\lambda(t) = \mathbf{0}. \quad (5.Д.87)$$

Определяя время сходимости к частотным параметрам из неравенства

$$\left| e_{hi}^\lambda(t_{cx}) \right| \leq \varepsilon_h, \quad (5.Д.88)$$

где  $e_{hi}^\lambda$  ( $i = \overline{1, 2n}$ ) – компоненты вектора  $\mathbf{e}_h^\lambda$ ,  $\varepsilon_h$  – заданное число, заключаем, что время сходимости можно сделать сколь угодно малым, если взять  $\lambda$  достаточно большим.

### 5.Д.9. Доказательство утверждения 5.П.1

Оно аналогично доказательству утверждения 5.2.1, приведённому в 5.Д.1.

Представим

$$u(kT) = e^{\lambda kT} \sin \omega kT = \frac{e^{(\lambda+j\omega)kT} - e^{(\lambda-j\omega)kT}}{2j} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.Д.89)$$

Решение уравнения

$$\mathbf{x}^+(kT) = A^\partial \mathbf{x}^+[(k-1)T] + \mathbf{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)(k-1)T}, \quad \mathbf{x}^{+(0)} = \mathbf{0} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.Д.90)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(kT) &= \left[ E - e^{-(\lambda+j\omega)T} A^\partial \right]^{-1} \mathbf{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)(k-1)T} - \\ &- A^{\partial k} \left[ E - e^{-(\lambda+j\omega)T} A^\partial \right]^{-1} \mathbf{b}^\partial e^{-(\lambda+j\omega)T} = \\ &= \left( E - qA^\partial \right)^{-1} q \mathbf{b}^\partial e^{(\lambda+j\omega)kT} - A^{\partial k} \left( E - qA^\partial \right)^{-1} q \mathbf{b}^\partial = \\ &= \beta_\partial^\lambda(j\omega) e^{(\lambda+j\omega)kT} - A^{\partial k} \beta_\partial^\lambda(j\omega) \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.Д.91)$$

В этом нетрудно убедиться, подставляя (5.Д.91) в (5.Д.90). Уравнение

$$\mathbf{x}^-(kT) = A^\partial \mathbf{x}^-[(k-1)T] + \mathbf{b}^\partial e^{(\lambda-j\omega)(k-1)T}$$

имеет аналогичный вид

$$\mathbf{x}^-(kT) = \beta_{\delta}^{\lambda}(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)kT} - A^{\delta k}\beta_{\delta}^{\lambda}(-j\omega) \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\mathbf{x}(kT) = \frac{\mathbf{x}^+(kT) - \mathbf{x}^-(kT)}{2j} = \frac{\beta_{\delta}^{\lambda}(j\omega)e^{(\lambda+j\omega)kT} - \beta_{\delta}^{\lambda}(-j\omega)e^{(\lambda-j\omega)kT}}{2j} - A^{\delta k} \text{Im} \beta_{\delta}^{\lambda}(j\omega). \quad (5.Д.92)$$

Отсюда следует (при ненулевых начальных условиях) выражение (5.5.10).

Убедимся, что составляющая  $\mathbf{x}^0(kT)$  – исчезающая функция. Для этого рассмотрим сомножитель

$$\tilde{A}^k = A^{\delta k}e^{-\lambda kT} = (A^{\delta}e^{-\lambda T})^k \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.Д.93)$$

в выражении (5.5.11) для  $\mathbf{x}^0(kT)$ .

Если  $\tilde{z}_i$  – собственные числа матрицы  $\tilde{A}$ , то

$$\tilde{z}_i = z_i e^{-\lambda T}, \quad (5.Д.94)$$

где  $z_i$  – корни уравнения

$$\det(Ez - A^{\delta}) = 0. \quad (5.Д.95)$$

Действительно,  $\tilde{z}_i$  – корни полинома

$$\det(E\tilde{z} - \tilde{A}) = \det(E\tilde{z} - A^{\delta}e^{-\lambda T}) = 0. \quad (5.Д.96)$$

Подставляя в это уравнение числа (5.Д.94), убеждаемся в силу (5.Д.95), что они являются его корнями.

## Заключение к главе 5

Результаты этой главы состоят в следующем.

1. Предложен способ экспериментального определения частотных параметров неустойчивых объектов, основанный на экспоненциально-гармоническом испытательном воздействии (5.2.2) и экспоненциальном взвешивании измеряемых переменных.
2. Доказана сходимость процессов (протекающих при этом способе) к частотным параметрам (утверждения 5.3.1 и 5.3.2).
3. Исследовано влияние внешних возмущений и помех на процесс сходимости (утверждения 5.3.3 и 5.3.4) и показано, что если частоты испытательных воздействий не совпадают с частотами внешних возмущений и помех, то оценки частотных параметров не смещены.

4. Получены оценки (5.3.45) времени сходимости к частотным параметрам.
5. Предложены способы (алгоритм с паузами и последовательные пары испытаний) экспериментального определения частотных параметров, когда частоты внешних возмущений или помех могут совпадать с частотами испытательного воздействия.
6. (\*) Рассмотрен локальный фильтр, который позволяет сократить время эксперимента при определении частотных параметров. При неквазистационарных внешних возмущениях и помехах применён (для уточнения оценок частотных параметров) метод наименьших квадратов, который вновь привёл к фильтру Фурье (5.4.22) и (5.4.23).
7. (П) Введено понятие частотных параметров дискретных объектов и дан способ их экспериментального определения с помощью дискретного фильтра Фурье.

## Примечания и литературные указания

### К части I

**Введение.** Построение управления при неопределённых параметрах объекта всегда являлось одной из центральных проблем теории автоматического управления. Если обратиться к истории, то можно заметить [91б], что уже критерий Найквиста, установленный в 1932 году [93], явился методом исследования устойчивости систем, параметры которых неизвестны, а известны лишь частотные характеристики разомкнутой системы (объекта управления), получаемые экспериментально. В последующие годы (1930-1965) были разработаны теории систем с большими коэффициентами усиления [43а], систем с переменной структурой [25], инвариантных систем [36], которые позволяют уменьшить влияние изменений параметров объектов и неконтролируемых внешних возмущений. Однако, поскольку эти системы основаны на повышении (в явной или неявной формах) коэффициента усиления разомкнутой цепи, то это требует учёта «малых» постоянных времени, нелинейных факторов, запаздывания. В противном случае нарушается устойчивость системы. Таким образом, как отмечено в [31а], без увеличения сведений об объекте не удаётся существенно повысить коэффициент усиления.

Это приводит к необходимости построения регуляторов, параметры которых изменяются (приспосабливаются, адаптируются) так, чтобы при изменяющихся параметрах объекта точность и качество системы оставалось неизменным. Системы с такими регуляторами были названы самонастраивающимися [56], адаптивными [72], самоорганизующимися [64].

За последние три десятилетия разработано большое число способов и методов синтеза адаптивных регуляторов. Им посвящено большое количество публикаций и, в частности, книги [74, 72, 64, 67], в которых подводятся итоги развития теории адаптивного управления.

В книге развивается новое направление в теории управления объектами с неопределёнными параметрами, называемое частотным управлением. Прилагательное «частотный» отражает тот факт, что управление находится по частотным параметрам объекта. При построении частотного управления можно различить два случая: а) частотные параметры получены до начала работы объекта в системе, б) частотные параметры получаются в процессе нормальной эксплуатации объекта в системе. В первом случае строится модальное либо оптимальное частотное управление (главы 6, 7 и 11), во втором – частотное адаптивное управление (главы 8 и 11).

Для того, чтобы определить место частотного адаптивного управления среди других методов адаптивного управления, воспользуемся классификацией, предложенной в [1ф]. В соответствии с этой классификацией будем различать системы адаптивно-

го управления по следующим признакам: объём информации о параметрах объекта, внешних возмущениях и помехах (случайные, с известным законом распределения, неопределённые), цели управления (устойчивость, точность, качество), вида алгоритма адаптации (идентификационный, прямой). Комбинациям этих признаков поставим в соответствие направление в теории адаптивного управления и укажем работы, в которых приведена наиболее полная библиография по этому направлению.

Теория адаптивных систем при известных статистических характеристиках (закон распределения, априорная плотность вероятности) параметров объекта и известных статистических характеристиках (закон распределения, моменты первого и второго порядка и т.п.) внешних возмущений и помех излагается в работах [74], [64]. Цель управления в этих системах выражается часто значением математического ожидания некоторого квадратичного функционала.

Широко известны [72] методы идентификационного адаптивного управления, когда параметры объекта управления неопределённые, но известны статистические характеристики внешних возмущений и помех. Для идентификации параметров используется рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов либо метод стохастической аппроксимации. Цель управления формулируется как требование ограниченности регулируемой переменной (если внешние воздействия и помехи ограничены) либо ограниченной дисперсии регулируемой переменной.

Если целью управления является слежение за некоторым сигналом, то используются системы с эталонной моделью [56]. В этих системах параметры объекта неопределённые, а внешние возмущения и помехи отсутствуют. Алгоритмы адаптивного управления в системах с эталонной моделью могут быть как идентификационными, так и прямыми.

Сравнительно недавно В.А. Якубовичем разработаны прямые алгоритмы адаптивного управления, основанные на методе рекуррентных целевых неравенств [79a], [72]. Эти алгоритмы строятся для объектов с неопределёнными параметрами и неопределёнными внешними возмущениями и помехами. Цель управления формулируется как требование ограниченности регулируемых переменных некоторым наперёд заданным числом.

Излагаемые в книге алгоритмы частотного адаптивного управления также являются прямыми и строятся для объектов с неопределёнными параметрами при действии неопределённых внешних возмущений и помех. Эти алгоритмы обеспечивают достижение наперёд заданной точности регулирования. Заметим, что частотные характеристики объекта использовались ранее для построения адаптивного управления в системах с контролем частотных характеристик [31a] и в системах стабилизации частотных характеристик [37].

К главе 1

§ 1.1. п. 1.1.1. Типы объектов введены для удобства изложения.

п. 1.1.5. Выделение объектов первого и второго видов имеет принципиальное значение. Дело в том, что в [1ш, гл. 2] показано, что, вообще говоря, только для этих двух видов объектов существуют регуляторы вида (1.1.28), обеспечивающие наперёд заданную точность регулирования.

§ 1.2. Это элементарное изложение содержания глав 5, 6 и 2, примечание и литературные указания к которым приведены далее.

§ 1.3. Представляет собой краткое изложение гл. 8. Укажем лишь на неповторяющиеся в гл. 8 понятия и определения.

п. 1.3.1. Понятие «варианта» («вектора вариантов») и пример 1.3.1 взяты из книги [72, гл. 1].

п. 1.3.4. Определение 1.3.3 – это интерпретация определения адаптивной системы, данного В.А. Якубовичем [72, гл. 1]. Для того чтобы исключить из последнего обычные системы регулирования, введено понятие «пуск-останов» и основанные на нём понятия самотождественного и несамотождественного объектов.

§ 1.П. п. 1.П.1. Анализ динамики систем регулирования при сколь угодно малых (инфинитезимальных) параметрических возмущений составляет предмет [60] теории чувствительности, которой посвящена обширная литература [49]. Здесь и далее исследуется влияние малых, но не инфинитезимальных параметрических возмущений.

п. 1.П.2. Понятие полной и неполной параметрической (аддитивной) компенсации введены в работе [1с]. Понятие «грубая система» было введено А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [8] для обозначения моделей движения (описываемых дифференциальными уравнениями), поведение которых «не изменяется в своих существенных чертах при малом изменении вида дифференциальных уравнений» 7, с. 31).

На первый взгляд системы с нулевой степенью грубости являются негрубыми, однако, как подчёркнуто в [7, с 31], в понятие «малых изменений вида дифференциальных уравнений» не включается случай изменения порядка уравнений, что имеет место для систем с нулевой степенью грубости.

п. 1.П.3. На возможность неявной параметрической компенсации обратил внимание В.Н. Честнов, который построил пример 1.П.1 [77].

- п. 1.П.5. Приведённый пример построен в 1971 г. и содержался в моём заключении по полемике между В.Б. Лариным и В.Н. Сунцевым [39], с одной стороны, и В.П. Надеждиным – с другой, составленным по просьбе журнала «Автоматика и телемеханика».
- п. 1.П.6. Результатом указанной полемики явилась работа П.В. Надеждина [47], из которой следует, что система (1.П.61), (1.П.62), оптимальная в смысле функционала (1.П.64), является негрубой.
- п. 1.П.7. Построенный здесь пример приведён в работе [1к].

## К главе 2

**Введение.** Началом частотной теории регулирования явилась работа Найквиста [93], в которой был получен критерий устойчивости системы по её амплитудно-фазовой характеристике в разомкнутом состоянии. Результаты этой работы были новыми в двух направлениях.

*Во-первых*, критерий позволял анализировать устойчивость по экспериментальным данным.

*Во-вторых*, при доказательстве критерия использовался аппарат теории функций комплексного переменного.

Это второе направление послужило толчком к широкому применению теории функций комплексного переменного и частотных характеристик для анализа устойчивости и синтеза регуляторов объектов с известными параметрами. История становления и развития частотной теории регулирования хорошо и подробно изложены в обзоре А. Дж. Дж. Макфарлейна [91а]. Большой вклад в распространение метода частотных характеристик в нашей стране внёс В.В. Солодовников [68].

Экспериментальная направленность работы Найквиста не получила значительного развития. Это связано, по-видимому, с тем, что для суждения об устойчивости необходимо, в принципе, бесконечное число экспериментов. Кроме того, для неустойчивых объектов необходимо знание числа его корней в правой полуплоскости, которое не следует из эксперимента.

Содержание § 2.1 – § 2.3 следует учебникам [156], [26], и поэтому отметим лишь материал из других источников.

**§ 2.1. п. 2.1.4.** Определение 2.1.2 – это компактное описание минимально-фазовой передаточной функции, подробно изложенное в книге [19]. Заметим, что иногда минимально-фазовыми называют передаточные функции, которые имеют лишь нули с отрицательными вещественными частотами (знаки полюсов не оговариваются).



Объекты с такими передаточными функциями далее называются устойчивыми по управлению (см. определение 3.1.1).

§ 2.2. п. 2.2.1. Рекомендация 2.2.1 объединяет правила расчёта 1 и 4, сформулированные в работе [51].

п. 2.2.2. Понятие запретной области имеется в книге [11, гл. 8].

п. 2.2.3. Понятие, сходное с радиусом устойчивости, по-видимому, можно найти в литературе. Определение 2.2.1 служит развитием понятия [13] запретной зоны для АФЧХ оптимальных систем.

п. 2.2.4 – п. 2.2.5. – Это переложение понятий и результатов [1т] на стационарный случай.

Структурная грубость исследуется также в рамках теории сингулярных возмущений [45], [15a], где рассматриваются уравнения с малым параметром при первых производных в системе, записанной в форме Коши. В ней получены условия существования границ малого параметра, при которых не нарушается устойчивость, однако, неясно, как находить оценки границ для конкретной системы. Подход п. 2.2.5 доставляет такие оценки.

§ 2.3. п. 2.3.1. Обычно не различают понятий времени регулирования (и перерегулирования) при задающем и внешнем воздействии, введённые определениями 2.3.1 и 2.3.3 (2.3.2 и 2.3.4). Это создает впечатление, что метод ЛАЧХ, разрешающий лишь задачу 2.3.1, применим для синтеза регуляторов при ступенчатых внешних возмущениях, приложенных в любой точке структурной схемы системы. В действительности, этот метод применим лишь для случая, когда ступенчатое внешнее (либо задающее воздействие) прикладывается ко входу регулятора вместе с измеряемой переменной.

Рекомендация 2.3.1 соответствует правилу расчёта 3 работы [51].

§ 2.П. п. 2.П.1. Здесь более строго описываются понятия запасов устойчивости по фазе и модулю, введённые в § 2.2.

п. 2.П.2 – п. 2.П.3. Следуют работе [1и] и служат некоторым обоснованием эмпирической рекомендации 2.2.1.

## К части II

**Введение.** Применение процедур АКОР для синтеза регуляторов при случайных внешних возмущениях и помехах описано, например, в книгах [30], [44]. При этом выделяются объекты первого и второго вида. Это объясняется тем, что цель управления (минимизация математического ожидания квадратичного функционала) может принимать произвольные значения. Если на эти значения наложить ограничения

(аналогичные ограничению точности в задаче 1.1.1), то тогда решение такой задачи станет возможным, вообще говоря, для ограниченного класса объектов, в частности, первого и второго видов.

Это относится к задаче слежения при случайных задающих воздействиях и помехах (винеровская задача фильтрации) [75].

### К главе 3

**Введение.** Термин «модальное управление» введён в 1962 г. в работе [96], где предложен способ изменения характерных (модальных) частот системы управления дистиляционной колонной.

В настоящее время под модальным управлением понимают методы синтеза регуляторов, обеспечивающих желаемое расположение всех либо некоторых полюсов (корней характеристического полинома) замкнутой системы.

Развитию модального управления посвящено огромное число работ, обзор которых можно найти в [66]. Современные тенденции в модальном управлении приведены в обзоре [65].

§ 3.1. п. 3.1.1 – п. 3.1.4. Изложение следует книге [72, гл 3], где приведено также определение 3.1.1.

п. 3.1.5. Термин «структурное» в понятии структурного модального управления отражает специфическую структуру (3.1.33) операторов регулятора (3.1.2). Эта структура была получена в работе [1э]. Там же доказано утверждение 3.1.1.

§ 3.2. п. 3.2.1. Задача 3.2.1 – это развитие задачи 2.3.1 на случай, когда к объекту регулирования приложено не задающее воздействие, а внешнее возмущение.

п. 3.2.4. Процедура 3.2.3 обобщает результаты работ [1к], [1м].

п. 3.2.5. ПИД-регуляторы широко используется в технике регулирования [11]. «Расширенный объект», аналогичный (3.2.40), описан, например, в [95], [94].

§ 3.3. п. 3.3.4. Уравнения (3.3.28) двигателя постоянного тока с якорным управлением можно найти в книге [54].

Заметим, что при построении систем регулирования скорости приводов используются стандартные настройки контуров: настройка на оптимум по модулю и настройка на симметричный оптимум. Расчёты регуляторов, обеспечивающих эти настройки, являются простейшим вариантом процедуры 3.2.1.

**п. 3.3.7.** Эти результаты взяты из книги [100, § 7.3].

**п. 3.3.8.** Такая компенсационная схема является удобной интерпретацией схем работы [92], повторенных в [1ы, § 8.4].

**§ 3.4. п. 3.4.1 – п. 3.4.3.** Излагается традиционный материал по модальному управлению в системах со скалярным управлением [6а], [67].

Каноническая форма управляемости 3.4.3 более подробно рассмотрена в 9.П.1.

Доказательство теоремы 3.4.1 представляет собой стационарный вариант доказательства аналогичной теоремы для нестационарных систем [22, гл. 6].

**§ 3.П.1. п. 3.П.1.1.** Утверждение 3.П.1 и выражение (3.П.10) характеристического полинома системы с наблюдателем хорошо известны. Их можно найти, например, в [30, гл. 5].

**п. 3.П.1.2.** Связь (3.П.18) приведена в [100].

**п. 3.П.1.3.** Уравнения (3.П.19), (3.П.20) – наблюдатель Люенбергера [90а], [90б].

**п. 3.П.1.4 – п. 3.П.1.5.** Изложение работы [1л].

**§ 3.П.2. п. 3.П.2.1.** Утверждение 3.П.2 имеется в книге [18, гл. 4]. Задача о накоплении возмущений была сформулирована В.В. Булгаковым [9].

**п. 3.П.2.2.** Следует работе Н.Г. Чеботарёва [76].

**п. 3.П.2.3.** Изложение опирается на статью [5].

Конструктивная теория синтеза регуляторов при ограниченных по модулю неопределённых внешних возмущениях предложена в диссертации [66].

#### К главе 4

**§ 4.1. п. 4.1.1.** Задача АКОР (задача 4.1.1) была сформулирована и решена А.М. Лётовым [30а-30г]. Нестационарный её вариант был решён Р. Калманом [87].

Уравнение (4.1.5), возникающее при решении задачи АКОР, называют алгебраическим уравнением Риккати по аналогии с дифференциальным уравнением (4.1.6), которое в скалярном случае называется именем итальянского математика прошлого века, который его исследовал. Уравнение (4.1.5) было получено ранее А.И. Лурье в теории абсолютной устойчивости [41], и поэтому его иногда называют уравнением Лурье.

Теорема 4.1.1 доказана в [59], а изложение теоремы 4.1.2 и её доказательство следуют книге [71]. Примечания 4.1.1, 4.1.2 опираются на книгу [33].

п. 4.1.2. Функционал обобщённой работы и процедура АКОР по такому критерию были предложены А.А. Красовским [31б].

§ 4.2. п. 4.2.1. Условие (4.2.9) оптимальности в частотной форме получено Р. Калманом [27], а аналогичное тождество для критерия обобщённой работы содержится в [1з].

п. 4.2.2. Теорема 4.2.1 доказана в [1г], одновременно в [80] было получено соотношение (4.2.15) этой теоремы. Утверждение 4.2.2, являющееся геометрической интерпретацией условия (4.2.9) оптимальности в частотной форме приведено (при несколько иной терминологии) в [88].

Утверждение 4.2.3 доказано в [1з].

п. 4.2.3. Утверждение 4.2.4 можно найти в книге [1ш].

§ 4.3. п. 4.3.1. Следует статье [1ц].

п. 4.3.2. Утверждение 4.3.1 имеется в книге [30], а рисунки 4.3.1 и 4.3.2 взяты из книги [34б].

п. 4.3.5. Неравенства (4.3.45) и (4.3.46) получены в работах [1г] и [1з] соответственно.

п. 4.3.6. Утверждение 4.3.3 доказано в работе [1г].

§ 4.4. п. 4.4.1. Пример 4.4.1 взят из книги [30].

п. 4.4.2. Утверждение 4.4.1 и рекомендация 4.4.1 – это частный случай изложенного в [2].

п. 4.4.4. Следует книге [1ш, гл. 5] и является частным случаем предложенного в [2].

п. 4.4.6. «Расширенный объект» (4.4.87), (4.4.88) используется для построения ПИ-регулятора в работах [94], [95], [34б].

п. 4.4.8. Утверждение 4.4.5 доказано для многомерного случая в [97].

§ 4.5. п. 4.5.2. Возможность малых запасов устойчивости системы (4.5.1), (4.5.2), оптимальной в смысле функционала (4.5.3), следует непосредственно из статьи [27], где показано, что для любой асимптотически устойчивой системы можно построить функционал (4.5.3), а в качестве такой системы можно взять систему с малыми запасами устойчивости.

п. 4.5.3. Обратной задаче оптимального управления посвящено большое количество работ [3], [10], [18], [21]-[85], [98] и др.

п. 4.5.4. Теорема 4.5.1 – это теорема 7 статьи Калмана [27].

п. 4.5.5. Лемма 4.5.1 приведена в работе [27].

## К части III

**Введение.** Эта часть служит началом натурной теории управления. Она содержит натурные критерии устойчивости и натуральный метод синтеза – метод частотных параметров. Эти результаты развиваются на дискретный (п. 5.П.2, § 6.П) и многомерный (гл. 11) случаи. Можно указать пути их развития для нестационарных и нелинейных систем. Всё это составляет частотное направление натурной теории. Наряду с этим целесообразно развивать нечастотную натурную теорию, которая опирается на эксперименты с объектом, возбуждённым некоторой совокупностью сигналов, обладающих свойством ортогональности, но не являющихся гармоническими.

## К главе 5

§ 5.1. п. 5.1.2. Смещённые частотные передаточные функции использовались Т.Н. Кузовковым [34а, гл. 8] для построения обобщённого частотного анализа. Термин «смещённая» взят из книги [61, гл. 7], где он используется в названии уравнения, описывающего реакцию на экспериментально взвешенное внешнее воздействие.

п. 5.1.5. Понятие стабилизирующего управления (стабилизируемого объекта) широко используется, начиная с работы [16].

§ 5.2. п. 5.2.1. Понятие частотных параметров введено в работе [1э]. Там же доказано утверждение 5.2.1.

§ 5.3. п. 5.3.1. Методам экспериментального определения частотных характеристик устойчивых объектов посвящено большое число работ, обзор которых имеется, например, в книге [78а, гл. 10].

§ 5.4. п. 5.4.4. Методу наименьших квадратов посвящена обширная литература. Укажем учебные издания [78б], [1ы].

п. 5.4.5. Погрешность в определении параметра  $a$  равна нулю, если  $f(t)$  – случайный процесс типа «белый шум» [78б]. Этот пример показывает преимущества частотного подхода, который (если положить в (5.4.15)  $u = 1 \cdot \sin \omega t$  и использовать алгоритм с паузами либо последовательные пары испытаний), доставляет несмещённые оценки частотных параметров, а по частотным параметрам вычисляется (§ 6.3) параметр  $a$ .

§ 5.П. п. 5.П.1. Следует [33, гл. 2].

## Литература

- [1] Александров А.Г. а) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гироскопа. Автоматика и телемеханика, №11, 1967, 39-49 с.; б) Аналитическое конструирование оптимального регулятора гироскопа, установленной на подвижном основании. Автоматика и телемеханика, №12, 1967, 16-25 с.; в) К обратной задаче синтеза оптимальных регуляторов. Известия АН СССР «Техническая кибернетика», №4, 1967, 115-122 с.; г) Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. Автоматика и телемеханика, №9, 1969, 176-181 с.; д) Частотные свойства оптимальных линейных систем с несколькими управлениями. Автоматика и телемеханика, №12, 1969, 12-17 с.; е) Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. II., Автоматика и телемеханика, №2, 1972, 17-29 с.; ж) Построение дискретных систем управления с заданными свойствами. Автоматика и телемеханика, №9, 1973, 57-66 с.; з) Свойства аналитически сконструированных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1975, 5-11 с.; и) Степень грубости и частотные показатели качества автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып.1, Саратов, СПИ, 1976, 14-26 с.; к) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №3, 1977, 37-41 с.; л) Степень грубости систем с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, 105-118 с.; м) Прямой метод аналитического синтеза регуляторов. Неполная степень наблюдаемости. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №11, 1978, 34-39 с.; н) Аналитический синтез регуляторов по заданным показателям качества переходных процессов. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 3, Саратов, СПИ, 1978, 21-38 с.; о) Построение функционала качества в задаче аналитического конструирования регуляторов. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №4, 1980.; п) Свойства аналитически сконструированных систем нестационарных линейных систем. Автоматика и телемеханика, №3, 1980, 5-12 с.; р) Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1980, 3-14 с.; с) Аддитивная компенсация в многомерных системах с устройствами восстановления фазовых переменных. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1981, 68-81 с.; т) Аналитический синтез регуляторов нестационарных систем автоматического регулирования. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 1983, №3220.; у) Частотный алгоритм адаптивного управления. Всесоюзная конференция «Теория адаптивных систем и её применение». Тезисы докладов и сообщений. М.-Л. 1983.; ф) О принципах построения систем анализа динамики и синтеза устройств управления (САПР

- САУ). В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов, Саратов, СПИ, 1982, 123-136 с.; х) Частотный алгоритм адаптивного управления. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 8-13 с.; ц) Аналитический синтез регуляторов для объектов, задаваемых частотными характеристиками. Автоматика и телемеханика, №7, 1985, 45-55 с.; ч) Аналитическое конструирование регуляторов по частотным характеристикам объекта. Автоматика и телемеханика, №9, 1986, 163-167 с.; ш) Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986, 272 с.; щ) Конечно-частотные критерии устойчивости систем с неопределёнными параметрами. Автоматика и телемеханика, №7, 1988, 26-37 с.; ы) Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989, 263 с.; э) Метод частотных параметров. Автоматика и телемеханика, №12, 1989, 1-14 с.
- [2] Александров А.Г., Небалуев Н.А. Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. Ч. 1. Автоматика и телемеханика, №12, 1971, 12-20 с.
- [3] Александров А.Г., Подчукаев В.А. К обратной задаче аналитического синтеза с переменными параметрами. Изв. ВУЗов «Приборостроение», №3, 1975, 25-29 с.
- [4] Александров А.Г., Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Синтез регуляторов двухкомпонентного измерителя угловой скорости на основе трехстепенного гироскопа. Изв. АН СССР «Механика твердого тела», №4, 1975, 30-38 с.
- [5] Александров А.Г., Солдунов В.А. Синтез регуляторов по заданной точности при действии ограниченных внешних возмущений. Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 9.09.1983, №2227 пр Д83.
- [6] Андреев Ю.Н. а) Управление конечномерными объектами. М.: Наука, 1976, 424 с.; б) Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами. Автоматика и телемеханика, №3, 1977.
- [7] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [8] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. ДАН СССР, 1937, 14, 247.
- [9] Булгаков Б.Н. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами, Докл. АН СССР, т. 51, №5, 1946, 339-342 с.

- [10] Беллман Р., Калаба Р. Обратная задача в динамическом программировании и автоматическом управлении. Сб. перев. «Механика», №6, 1964.
- [11] Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1976, 992 с.
- [12] Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ИЛ, 1948.
- [13] Вавилов А.А., Солодовников А.И. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. Л.: 1963.
- [14] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984, 320 с.
- [15] Воронов А.А. а) Устойчивость управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979, 336 с.; б) Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980, 309 с.
- [16] Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. Прикладная математика и механика, т. 27, вып. 6, 1963.
- [17] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1954.
- [18] Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969, 512 с.
- [19] Горовиц А.М. Синтез систем с обратной связью. М.: Советское радио, 1970, 600 с.
- [20] Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. М.: Радио и связь, 1984.
- [21] Дас П. К прямой и обратной задачам оптимизации квадратичных функционалов в линейных автономных системах. Автоматика и телемеханика, №9, 1966, 11-18 с.
- [22] Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974, 288 с.



- [23] Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981, 246 с.
- [24] Деруссо П., Рой Р., Клодз У. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970, 620 с.
- [25] Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967, 336 с.
- [26] Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1973, 607 с.
- [27] Калман Р.Е. Когда линейная система управления является оптимальной. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., серия Д, №1, Мир, 1964.
- [28] Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Тр. амер. общ-ва инж.-мех., «Техническая механика», серия Д, т. 83, 1961, 95-107 с.
- [29] Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления. М.: Наука, 1966, 416 с.
- [30] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 650 с.
- [31] Красовский А.А. а) Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Наука, 1963, 468 с.; б) Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем. Автоматика и телемеханика, №10, 1967.; в) Системы автоматического управления полётом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973, 558 с.
- [32] Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977, 272 с.
- [33] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [34] Кузовков Т.Н. а) Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М.: Оборонгиз, 1960, 446 с.; б) Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.

- [35] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977, 392 с.
- [36] Кухтенко А.И. Проблема инвариантности в автоматике. Киев. Гос. изд-во техн. литературы. 1963.
- [37] Кухтенко В.И. Динамика самонастраивающихся систем со стабилизацией частотных характеристик. М.: Машиностроение, 1970.
- [38] Ларин Б.В. Методы решения алгебраических уравнений Риккати. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, №2, 1983.
- [39] Ларин В.Б., Сунцев В.Н. О задаче аналитического конструирования. Автоматика и телемеханика, №2, 1968.
- [40] Лётов А.М. а) Аналитическое конструирование регуляторов, I. Автоматика и телемеханика, №4, 1960, 436-441 с.; б) Аналитическое конструирование регуляторов, II. Автоматика и телемеханика, №5, 1960, 561-568 с.; в) Аналитическое конструирование регуляторов, III. Автоматика и телемеханика, №6, 1960, 661-665 с.; г) Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, №4, 1961, 425-435 с.; д) Теория оптимального управления. Тр. II Конгресса ИФАК, т. Оптимальные системы. Статистические методы. М.: Наука, 1965, 7-38 с.; е) Динамика полёта и управления, М.: Наука, 1969, 360 с.
- [41] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
- [42] Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А. Теория автоматического регулирования. Изд. АН СССР, 1949.
- [43] Мееров М.В. а) Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Физматгиз, 1959.; б) Системы многосвязного регулирования. М.: Наука, 1965.
- [44] Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973, 440 с.
- [45] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного синтеза. М.: Наука, 1981, 488 с.

- [46] Морозовский В.Т. Многосвязные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970.
- [47] Надеждин П.В. О практической неустойчивости (негрубости) систем. Автоматика и телемеханика, №5, 1973.
- [48] Нарендра К.С., Валавани Л.С. Устойчивые адаптивные наблюдения и управления. ТИИЭР, т. 64, №8, 1976. (перев. с англ.)
- [49] Нгуен Тхыонг Нго. Чувствительность систем автоматического управления (обзор). Автоматика и телемеханика, №5, 1971, 53-81 с.
- [50] Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчёта. М.: Физматгиз, 1961.
- [51] Ольденбургер Р. Изображение частотных характеристик, стандарты и расчётные критерии. В кн. Частотные методы в автоматике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1957, 21-62 с.
- [52] Основы автоматического регулирования (под ред. В.В. Солодовникова). М.: Машгиз, 1954.
- [53] Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987, 480 с.
- [54] Палк К.И. Системы управления механической обработкой на станках. Л.: Машиностроение, 1984, 215 с.
- [55] Перкинс В., Крус Д. Операторы чувствительности для линейных систем с переменными параметрами. В кн. Чувствительность автоматических систем. М.: Наука, 1968, 45-50 с.
- [56] Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М.: Машиностроение, 1972, 260 с.
- [57] Петров Ю.П. Синтез устойчивых систем управления по среднеквадратичным критериям качества (обзор). Автоматика и телемеханика, №7, 1983.
- [58] Попов Э.В. Общение с ЭВМ на естественном языке. М.: Наука, 1982.

- [59] Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих установках. Автоматика и телемеханика, №6, 1963.
- [60] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. Л.: Энергия, 1969, 208 с.
- [61] Розенвассер Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления, М.: Наука, 1977, 344 с.
- [62] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1971, 396 с.
- [63] Садомцев Ю.В. Аналитический синтез регуляторов при случайных возмущениях. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, вып. 3, 1978, 39-57 с.
- [64] Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М.: Наука, 1980, 400 с.
- [65] Смагина Е.М. Нули линейных многомерных систем. Определение, классификация, применение. Автоматика и телемеханика, №12, 1985, 5-33 с.
- [66] Солдунов В.А. Аналитический синтез регуляторов при неопределённых внешних возмущениях, Диссерт. на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1985.
- [67] Справочник по теории автоматического управления (под ред. Красовского А.А.). М.: Наука, 1987, 712 с.
- [68] Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования (под ред. Солодовникова В.В.). М.: Машиностроение, 1967-1969, 2418 с.
- [69] Трефилов П.А. а) Частотный адаптивный регулятор ЧАР-1. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1984, 36-42 с.; б) О выборе испытательных воздействий в частотном адаптивном регуляторе. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, СПИ, 1985, 60-69 с.; в) Разработка и исследование частотных алгоритмов адаптивного управления. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. 1987.
- [70] Трефилов П.А., Шмыков И.Г. Исследование двух способов адаптивного управления. В сб. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1985.

- [71] Уонем М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980, 376 с.
- [72] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981, 448 с.
- [73] Хлебалин Н.А. Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределённости параметров объекта управления. Диссертация на соискание учёной степени канд. технич. наук, 1984.
- [74] Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах, М.: Наука, 1968, 460 с.
- [75] Чанг Ш.С.Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964, 440 с.
- [76] Чеботарёв Н.Г. Об одной математической задаче, возникшей в связи с оценкой отклонений регулируемой переменной, если возмущающая сила ограничена по модулю. Автоматика и телемеханика, №4, 1948, т. 9, 331-334 с.
- [77] Честнов В.Н. О возможной неустойчивости управляющих систем и синтез регуляторов с учётом параметрических возмущений. В кн. Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов, 1984.
- [78] Эйкхофф П. а) Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975, 684 с.; б) Современные методы идентификации систем (под ред. Эйкхоффа П.). М.: Мир, 1983, 400 с.
- [79] Якубович В.А. а) Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. ДАН СССР, т. 6, 1966, 1308-1311 с.; б) К теории адаптивных систем. ДАН СССР, т. 1827, №3, 1968, 518-521 с.
- [80] Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear systems optimisation with prescribed degree of stability. Proc. Inst. Eng., 1969, 116, №2.
- [81] Cruz J.B., Perkins Jr.K.R. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design. IEEE Trans. on Autom. Control, 1964, Vol. AC-9, №3.
- [82] Doyle J.C., Stein G. Robustness With Observers. IEEE Trans. Autom. Control, 1979, Vol. AC-24, №4, p.p. 607-611.

- [83] Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical – Modern Synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, Vol. AC-26, №1, p.p. 4-16.
- [84] Hsu C.H., Chen C. A proof of the stability of multivariable feedback system. *Proc. IEEE(Lett)*, Vol 56, p.p. 2061-2062, 1968.
- [85] Jameson A., Kreindler E. Inverse problem of linear optimal control. *SIAM. J. Control*, Vol. AC-14, 1969, p.p. 1-19.
- [86] Kleinman O.I. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1968, Vol. AC-13, №4, p. 114.
- [87] Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control. *Bullet. Soc., Mat. Mech*, 1960, Vol. 5, №1, p.p. 102-119.
- [88] Leake R.J. Return difference Bode diagram for optimal system design. *IEEE Trans. Autom Control*, 10., 3, p.p. 342-344, 1965.
- [89] Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M. Robustness. Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Design. *IEEE Tran. Autom. Control*, 1981, Vol AC-26, №1, p.p. 75-92.
- [90] Luenberger D.G. Observing the state of linear system. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-11, №2, 1966, p.p. 190-197.
- [91] MacFarlane A.G.I. a) Two necessary conditions in the frequency domain for the optimality of a multiple-input linear control systems. *Proc. IEEE*, 117(2), 1970, p.p. 464-466.; б) The Development of Frequency-Response Methods in Automatic Control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-24, №2, April, 1979.
- [92] Narendra K.S., Valavani L.S. Stable Adaptive Controller Design-Direct Control. *IEEE Trans. on Autom. Control*, Vol. AC-23, №4, 1978.
- [93] Nyquist H. Regeneration theory Bell system. *Tech. J.*, January, 1932.
- [94] Park H., Seberry D.E. Eigenvalue Assignment using Proportional-Integral Feedback *International Journal of Control*, September, 1974. p.p. 517-523.
- [95] Porter B., Grossely T.R. *Modal Control. Theory and Applications*, London, 1972, 233 p.

- [96] Rosenbrock H.H. Distinctive problems of process control. Chem. Eng. Progr., Vol. 58, №9, 1962, p.p. 43-50.
- [97] Safonov M.G., Athans M. Gain and phase margining for multi loop LQG regulators. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, Vol. AC-22, №2, p.p. 173-179.
- [98] Silverman L.M. Inversion of Multivariable Linear System. IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-14, 1969, p.p. 270-276.
- [99] Stein G., Dayle I.C. Singular values and feedback: Design examples. Proc. 1978., Allerton Conf. Urbana., IL, 1978.
- [100] Wolovich W.A. Linear Multivariable System. Springer-Verlag, 1974, 358 p.

Александров Альберт Георгиевич

**Частотная теория автоматического управления  
(частотное управление)**

*Учебное пособие  
В 2-х книгах*

*Книга 1*

Редактор: Г.В.Атмашкина

---

Уч.-изд.л. 14,54

Тираж 100 экз.

Цена "С"

Регистрационный №

---

Электростальский политехнический институт (филиал)  
Федерального государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования «Национальный  
исследовательский технологический университет МИСиС»  
144000, Московская обл., г.Электросталь,  
ул. Первомайская, д.7