УДК 62-506.1

МЕТОД ПОДТВЕРЖДЕНИЯ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ РЕЗОНАНСНЫХ ФИЛЬТРОВ

А.Г. Александров
Московский Государственный Институт Стали и Сплавов (Технологический Университет)
Россия, 144000, Электросталь, Первомайская, 7
E-mail: misis@elsite.ru

Ключевые слова: Линейная система, идентификация, подтверждение модели, испытательный сигнал, неизвестное ограниченное возмущение
Key words: Linear system, identification, unknown-but-bounded disturbance, model validation, test signal

Рассматриваются линейные объекты с неизвестными коэффициентами, которые функционируют в условиях неопределенных ограниченных возмущений. Предполагается, что известны оценки коэффициентов объекта, полученные в результате идентификации модели. Предлагается способ подтверждения идентифицированной модели. Он основан на сравнении сигналов объекта и модели, пропущенных через резонансные фильтры. Объект и модель возбуждаются гармоническими испытательными сигналами, частоты которых совпадают с резонансными частотами фильтров, что позволяет уменьшить влияние возмущения пропорционально коэффициентам демпфирования фильтров. Получены экспериментально проверяемые условия, накладываемые на возмущение, при которых способ является эффективным.
TECHNIQUE OF MODEL VALIDATION BY RESONANT FILTERS / A.G. Alexandrov (Moscow State Institute of Steel and Alloys, 7 Pervomayskaya, Electrostal 144000, Russia, E-mail: misis@elsite.ru). A linear stable plant with unknown coefficients in the presence of unknown-but-bounded disturbance is considered. Estimates of the coefficients are assumed to be known. New technique of model validation is proposed. It bases on a difference of plant and model signals that are applied to the inputs of resonant filters. The plant and model are excited by harmonic test signals whose frequencies coincide with resonant frequencies of the filters. Conditions for disturbance that provide effectiveness of the technique are derived.

1. Введение

Последние десятилетия интенсивно развиваются методы идентификации объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с неизвестными коэффициентами, которые функционируют в условиях неизвестных, ограниченных возмущений. К таким методам относятся, в частности, модификации методов наименьших квадратов [1], [2], рекуррентные целевые неравенства [3], конечно-частотная идентификация [4], [5].

Подтверждение модели является важным этапом процесса идентификации. На этом этапе характеристики полученной модели сравниваются с характеристиками реального объекта и принимается решение, являются ли результаты идентификации удовлетворительными или нет.

Известен ряд способов [6] подтверждения модели в случае, когда возмущения являются случайными процессами с известными статистическими свойствами.

Для случая, когда возмущение – неизвестная, ограниченная функция в [5] предложен способ подтверждения модели путем замыкания объекта обратной связью, которая строится на основе идентифицированной модели объекта, и исследования замкнутой системы.

В настоящей работе предлагается другой способ подтверждения модели. Он основан на сравнении выходов объекта и модели, возбужденных гармоническими испытательными сигналами. При этом сравнение осуществляется не непосредственно, а после прохождения сигналов выходов объекта и модели через резонансные фильтры с резонансными частотами, совпадающими с частотами испытательного сигнала. Последнее позволяет ослабить влияние неизвестного возмущения пропорционально коэффициентам демпфирования фильтров.

2. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый и асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

(1) $$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + d_0 y = k_\gamma u^{(\gamma)} + \cdots k_0 u + f, \quad t \geq t_0 ,$$

в котором $y(t)$ - измеряемый выход, $u(t)$ - управляемый вход, $y^{(i)}, u^{(j)}$ $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\gamma})$ - производные этих функций, $f(t)$ - неизвестное, ограниченное возмущение, d_i и k_j $(i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,\gamma})$ – неизвестные числа, n и $\gamma < n$ - известны.

Пусть объект (1) идентифицирован тем или иным способом (например, на основе метода конечно-частотной идентификации [5]) и найдены оценки $\hat{d}_i$ и $\hat{k}_j$ $(i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,\gamma})$ коэффициентов уравнения (1). Разности

(2) $$\Delta d_i = d_i - \hat{d}_i \ (i = \overline{0,n-1}),\ \Delta k_j = k_j - \hat{k}_j \ (j = \overline{0,\gamma})$$

называются ошибками идентификации.

Задача 2.1 (задача подтверждения модели). Найти достижимые оценки ошибок идентификации.

3. Подтверждение модели при отсутствии возмущений

Создадим физическое устройство, называемое далее моделью, описываемое уравнением

(3) $$y_m^{(n)} + \hat{d}_{n-1}y_m^{(n-1)} + \cdots + \hat{d}_0 y_m = \hat{k}_\gamma u^{(n-1)} + \cdots + \hat{k}_0 u, \quad t \geq t_0 ,$$

где $y_m(t)$ - измеряемый выход модели.

Когда возмущение $f(t) = 0$, то ошибки идентификации можно определить с любой наперед заданной точностью путем сравнения выходов модели (4) и объекта (1), если возбудить входы этих устройств «достаточно богатым» [6] входным сигналом $u(t)$.

Для создания такого возбуждения осуществим n экспериментов, в каждом из которых на вход объекта и модели подадим испытательный сигнал

(4) $$u^{[k]}(t)=\rho_k \sin\omega_k(t-t_0),\ \ t_0\le t<t_k,\ \ k=\overline{1,n},$$

где t_0 - момент начала k-ого эксперимента, t_k $(k=\overline{1,n})$ – время его окончания, ρ_k $(k=\overline{1,n})$ – амплитуды, а ω_k $(k=\overline{1,n})$ – испытательные частоты.

Испытательные частоты, упорядоченные как $\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_n$, определяются следующим образом.

Представим передаточную функцию модели

(5) $$w_m(s)=\frac{\hat{k}_\gamma s^\gamma+\cdots+\hat{k}_0}{s^n+\hat{d}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\hat{d}_0}$$

в виде

(6) $$w_m(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{p_3}\left(\breve{T}_i s+1\right)\prod_{i=1}^{p_4}\left(\tilde{T}_i^2 s^2+2\tilde{T}_i\tilde{\xi}_i s+1\right)}{\prod_{i=1}^{p_1}\left(\overline{T}_i s+1\right)\prod_{i=1}^{p_2}\left(\overline{\overline{T}}_i^2 s^2+2\overline{\overline{T}}_i\overline{\overline{\xi}}_i s+1\right)},$$

где постоянные времени упорядочены следующим образом

(7) $$\begin{gathered}\overline{T}_1>\overline{T}_2>\cdots>\overline{T}_{p_1},\ \ \overline{\overline{T}}_1>\overline{\overline{T}}_2>\cdots>\overline{\overline{T}}_{p_2},\\ \left|\breve{T}_1\right|>\left|\breve{T}_2\right|>\cdots>\left|\breve{T}_{p_3}\right|,\ \ \left|\tilde{T}_1\right|>\left|\tilde{T}_2\right|>\cdots>\left|\tilde{T}_{p_4}\right|.\end{gathered}$$

Примем

(8) $$\omega_1=\min\left\{\frac{1}{\overline{T}_1},\ \frac{1}{\overline{\overline{T}}_1},\ \frac{1}{\left|\breve{T}_1\right|},\ \frac{1}{\left|\tilde{T}_1\right|}\right\},$$

(9) $$\omega_n=\max\left\{\frac{1}{\overline{T}_{p_1}},\ \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{p_2}},\ \frac{1}{\left|\breve{T}_{p_3}\right|},\ \frac{1}{\left|\tilde{T}_{p_4}\right|}\right\}.$$

Остальные испытательные частоты определим как

(10) $$\begin{gathered}\omega_k=\frac{1}{\overline{T}_k}\ \ (k=\overline{2,p_1}),\quad \omega_k=\frac{1}{1{,}5\overline{\overline{T}}_k}\ \ (k=\overline{p_1+1,p_1+p_2}),\\ \omega_k=\frac{1.5}{\overline{\overline{T}}_k}\ \ k=\overline{p_1+p_2+1,p_1+2p_2-1}.\end{gathered}$$

Дополним правые части выражений (10) некоторыми числами так, чтобы испытательные частоты были кратными частоте ω_1: $\omega_k=\omega_1 n_k$, $(k=\overline{2,n})$, где n_k $(k=\overline{2,n})$ – целые числа.

Амплитуды ρ_k $(k=\overline{1,n})$ испытательных гармоник находятся из условия «малости возбуждения» [7] объекта (1) испытательным сигналом (4).

Это условие имеет вид

(11) $$\max_{t_0\le t<t_k}\left|y^{[k]}(t)-\bar{y}^{[k]}(t)\right|\le\bar{\varepsilon},\ \ (k=\overline{1,n}),$$

где $y^{[k]}(t)$ $(k=\overline{1,n})$ - выходы объекта (1) в k-том эксперименте, $\bar{y}^{[k]}(t)$ $(k=\overline{1,n})$ - «естественные» выходы объекта, когда $u^{[k]}(t)=0$, $\bar{\varepsilon}$ - заданное число, характеризующее допустимое отклонение выхода объекта от его «естественного» выхода.

Обозначим

(12) $$\alpha_k = \operatorname{Re} w(j\omega_k),\ \ \beta_k = \operatorname{Im} w(j\omega_k),\ \ (k=\overline{1,n}),$$

(13) $$\alpha_{mk} = \operatorname{Re} w_m(j\omega_k),\ \ \beta_{mk} = \operatorname{Im} w_m(j\omega_k),\ \ (k=\overline{1,n}),$$

где $w(s)$ - передаточная функция объекта (1),. которая имеет вид

(14) $$w(s) = \frac{k_\gamma s^\gamma + \cdots + k_0}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0}.$$

Числа α_k, β_k и α_{mk}, β_{mk} $(k=\overline{1,n})$ называются частотными параметрами объекта и модели соответственно. Они используются ниже для определения ошибок идентификации.

Так как коэффициенты передаточной функции (14) неизвестны, частотные параметры объекта будем определять экспериментально.

В связи с этим рассмотрим выход объекта в k-том эксперименте

(15) $$y^{[k]}(t) = y_в^{[k]}(t) + \chi^{[k]}(t) + y_0^{[k]}(t),\ \ t_0 \le t < t_k,\ \ (k=\overline{1,n})$$

где вынужденная составляющая

(16) $$y_в^{[k]}(t) = \rho_k(\alpha_k \sin\omega_k(t-t_0) + \beta_k \cos\omega_k(t-t_0)),$$
$$t_0 \le t < t_k,\ \ \left(k=\overline{1,n}\right),$$

$\chi^{[k]}(t)$ - сопровождающая ее компонента, $y_0^{[k]}(t)$ зависит от начальных условий.

Далее, для простоты, будем полагать длительности экспериментов одинаковыми и равными $\tau = t_k - t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}N$, где N - заданное целое число.

В силу асимптотической устойчивости объекта

(17) $$\lim_{\tau\to\infty} \chi^{[k]}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} y_0^{[k]}(\tau) = 0,\ \ (k=\overline{1,n}).$$

Рассмотрим моменты времени τ и

(18) $$\tau_k = \tau - \frac{3}{2}\frac{\pi}{\omega_k}\qquad (k=\overline{1,n}).$$

Из выражений (16) следует, что

$$\begin{aligned} y^{[k]}(\tau) &= \rho_k\beta_k + \chi^{[k]}(\tau) + y_0^{[k]}(\tau), \\ y^{[k]}(\tau_k) &= \rho_k\alpha_k + \chi^{[k]}(\tau_k) + y_0^{[k]}(\tau_k), \end{aligned}\qquad (k=\overline{1,n}).$$

Отсюда следуют оценки частотных параметров

(19) $$\alpha_k(\tau_k) = \frac{y^{[k]}(\tau_k)}{\rho_k},\ \ \beta_k(\tau) = \frac{y^{[k]}(\tau)}{\rho_k},\ \ \left(k=\overline{1,n}\right),$$

которые, если учесть (17), сходятся при $\tau \to \infty$ к истинным значениям частотных параметров.

Аналогично находим оценки частотных параметров модели

(20) $$\alpha_{mk}(\tau_k) = \frac{y_m^{[k]}(\tau_k)}{\rho_k},\ \ \beta_{mk}(\tau) = \frac{y_m^{[k]}(\tau)}{\rho_k},\ \ \left(k=\overline{1,n}\right).$$

Разности оценок частотных параметров объекта и модели имеют вид

(21) $$\Delta\alpha_k(\tau_k) = \alpha_k(\tau_k) - \alpha_{mk}(\tau_k),$$

(22) $$\Delta\beta_k(\tau) = \beta_k(\tau) - \beta_{mk}(\tau) \quad (k = \overline{1,n}).$$

Они обладают свойством

(23) $$\lim_{\tau\to\infty} \Delta\alpha_k(\tau_k) = \lim_{\tau\to\infty} \Delta\beta_k(\tau) = 0 \qquad (k = \overline{1,n})$$

Утверждение 3.1. Ошибки идентификации являются единственным решением уравнений

(24) $$\sum_{i=0}^{\gamma} \Delta k_i (j\omega_k)^i - (\alpha_k + j\beta_k) \sum_{i=0}^{n-1} \Delta d_i (j\omega_k)^i = \hat{d}(j\omega_k)(\Delta\alpha_k + j\beta_k)$$
$$\left(k = \overline{1,n}\right).$$

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Заменяя в уравнениях (24) разности частотных параметров их оценками , получим систему уравнений для оценок ошибок идентификации $\Delta d_i(\tau)$, $\Delta k_j(\tau)$ $(i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0,\gamma})$

(25) $$\sum_{i=0}^{\gamma} \Delta k_i(\tau)(j\omega_k)^i + [\alpha_k(\tau_k) + j\beta_k(\tau)] \sum_{i=0}^{n-1} \Delta d_i(\tau)(j\omega_k)^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \hat{d}_i (j\omega_k)^i [\Delta\alpha_k(\tau_k) + j\beta_k(\tau)], \quad \left(k = \overline{1,n}\right),$$

где $\alpha_k(\tau_k) = \alpha_{mk} + \Delta\alpha_k(\tau_k)$, $\beta_k(\tau) = \beta_{mk} + \Delta\beta_k(\tau)$ $(k = \overline{1,n})$.

Из непрерывной зависимости решения системы линейных уравнений от ее коэффициентов и правых частей, а также из (23) очевидно следующее утверждение.

Утверждение 3.2. Для любых заданных чисел ε_i^d и ε_j^k $(i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0,\gamma})$ существует момент времени $\tau = \tau^*$ такой, что начиная с этого момента

(26) $$\left|\Delta d_i - \Delta d_i(\tau)\right| \le \varepsilon_i^d, \quad \left|\Delta k_j - \Delta k_j(\tau)\right| \le \varepsilon_j^k \quad .$$

4. Алгоритм подтверждения

Когда возмущение $f(t) \ne 0$, выход объекта (1) описывается выражением

(27) $$y^{[k]}(t) = y_в^{[k]}(t) + y_f^{[k]}(t) + \chi^{[k]}(t) + y_0^{[k]}(t), \quad t_0 \le t < t_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right),$$

которое отличается от суммы (15) компонентой $y_f^{[k]}(t)$, вызванной возмущением. Эта компонента нарушает свойство (23) и поэтому необходим способ существенного ее уменьшения по сравнению с незатухающей составляющей $y_в^{[k]}(t)$, которая содержит частотные параметры объекта. Такой способ основан на использовании резонансных фильтров, описываемых уравнениями

(28) $$\ddot{z}_k + 2\xi_k\omega_k\dot{z}_k + \omega_k^2 z_k = 2\xi_k\omega_k^2 y(t), \quad \left(k=\overline{1,n}\right),$$

(29) $$\ddot{z}_{mk} + 2\xi_k\omega_k\dot{z}_{mk} + \omega_k^2 z_{mk} = 2\xi_k\omega_k^2 y_m(t), \quad \left(k=\overline{1,n}\right),$$

в которых $z_k(t)$ и $z_{mk}(t)$ $(k=\overline{1,n})$ – измеряемые выходы фильтров, ξ_k $(k=\overline{1,n})$ коэффициенты демпфирования, удовлетворяющие условиям $0<\xi_k<1$ $(k=\overline{1,n})$.

Так как резонансные частоты фильтров совпадают с испытательными частотами, то компонента $z_{fk}(t)$ выхода фильтра, зависящая от $y_f^{[k]}(t)$, уменьшается пропорционально ξ_k, а составляющая $z_{вk}(t)$, зависящая от $y_в^{[k]}(t)$, остается без изменений. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим выходы резонансных фильтров (28)

(30) $$z_k(t) = z_{bk}(t) + z_{fk}(t) + \chi_{kz}(t), \quad \left(k=\overline{1,n}\right),$$

в которых вынужденные колебания описываются выражениями

(31) $$z_{bk}(t) = \rho_k[\alpha_k^z \sin\omega_k(t-t_0) + \beta_k^z \cos\omega_k(t-t_0)], \quad \left(k=\overline{1,n}\right),$$

где α_k^z и β_k^z $(k=\overline{1,n})$ - частотные параметры объекта (1) с резонансными фильтрами, $\chi_{kz}(t)$ - затухающая составляющая, вызванная начальным состоянием объекта и фильтров, а также компонентой $\chi^{[k]}(t)$.

Утверждение 4.1. Частотные параметры объекта с резонансными фильтрами связаны с его частотными параметрами выражениями

(32) $$\alpha_k^z = \beta_k, \quad \beta_k^z = -\alpha_k \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$$

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Из равенств (32) следует, что амплитуды гармоник испытательных сигналов на входе и выходе резонансных фильтров совпадают.

Рассмотрим теперь составляющие $z_{fk}(t)$ выходов резонансных фильтров. Они являются решением уравнений

(33) $$\ddot{z}_{fk} + 2\xi_k\omega_k\dot{z}_{fk} + \omega_k^2 z_{fk} = 2\xi_k\omega_k^2 y_f^{[k]}(t), \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$$

Если компоненты $y_f^{[k]}$ не содержат гармоник, совпадающих с испытательными частотами, то, грубо говоря, $z_{fk}(t)$ - это ослабленная в $2\xi_k$ раз компонента $y_f^{[k]}(t)$. Для более точного рассмотрения введем следующее определение.

Определение 4.1. Возмущение $f(t)$ называется фильтруемым резонансными фильтрами (сокращенно РФ-фильтруемым), если существует коэффициенты демпфирования ξ_k^* $(k=\overline{1,n})$ и момент времени t^* такие, что

(34) $$\left|z_{fk}(t)\right| \le \varepsilon_k^z, \quad t \ge t^*, \quad \xi_k < \xi_k^* \quad (k=\overline{1,n}),$$

где ε_k^z $(k=\overline{1,n})$ - заданные числа.

Убедимся, что РФ-фильтруемые возмущения существуют.

Пусть возмущение

(35) $$f(t) = a^f \sin\omega^f t,$$

где $\omega^f \ne \omega_k$ $(k=\overline{1,n})$.

Амплитуды a_k^z $(k=\overline{1,n})$ колебаний выходов фильтров определяются как

(36) $$a_k^z = \frac{2\xi_k \omega_k^2 a^f}{\sqrt{\left(\omega^{f^2} - \omega_k^2\right)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2}} \left| w(j\omega^f), \right| \quad (k = \overline{1,n}).$$

Из этих выражений следует, что для любых заданных чисел $\varepsilon_k^z \quad (k = \overline{1,n})$ существуют числа ξ_k такие, что условия (34) выполняются.

Отметим, что задание чисел $\varepsilon_k^z \quad (k = \overline{1,n})$ в неравенствах (34) является самостоятельной задачей. Необходимым условием при выборе этих чисел является упомянутое выше доминирование составляющих $z_{вk}(t)$ над $z_{fk}(t)$ $(k = \overline{1,n})$.

Это означает, если учесть (32), что $\rho_k |w(j\omega_k)| > \varepsilon_k^z \quad (k = \overline{1,n})$. Полученное неравенство с достаточной точностью можно заменить проверяемым условием

(37) $$\rho_k |w_m(j\omega_k)| > \varepsilon_k^z \quad (k = \overline{1,n}).$$

Алгоритм 4.1. (алгоритм подтверждения модели)

Он состоит из следующих операций.

a) Приложить выход объекта (1) при $u(t) = 0$ к входу фильтров (28) и найти коэффициенты демпфирования $\xi_k \quad (k = \overline{1,n})$, при которых выполняются условия (34) РФ-фильтруемости.

b) Осуществить серию из n экспериментов, прикладывая в каждом из них испытательный сигнал (4) к входу объекта и модели и измеряя разности $\Delta z_k(t)$ $(k = \overline{1,n})$ выходов резонансных фильтров (28), (29) в моменты времени $t_k = \tau_k \quad (k = \overline{1,n})$ и $t = \tau$, и вычислить

(38) $$\Delta \alpha_k^z(\tau_k) = \frac{\Delta z^{[k]}(\tau_k)}{\rho_k}, \quad \Delta \beta_k^z(\tau) = \frac{\Delta z^{[k]}(\tau)}{\rho_k} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Учитывая равенства (32), найти оценки разностей частотных параметров объекта и модели

(39) $$\Delta \alpha(\tau_k) = -\Delta \beta_k^z(\tau), \quad \Delta \beta_k(\tau) = \Delta \alpha_k^z(\tau_k) \quad (k = \overline{1,n}).$$

c) Решить уравнения (25) для оценок ошибок идентификации и тогда искомые оценки ошибок идентификации равны $\Delta d_i(\tau)$, $\Delta k_j(\tau)$ $(i = \overline{0, n-1} \quad j = \overline{0, \gamma})$, где τ - достаточно большое число.

Отметим, что погрешность полученных оценок ошибок идентификации зависит от известных чисел $\varepsilon_k^z \quad (k = \overline{1,n})$.

5. Пример

Рассмотрим полностью управляемый и асимптотически устойчивый объект, описываемый уравнением

(40) $$\dddot{y} + d_2 \ddot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_1 \dot{u} + k_0 u + f$$

с неизвестными коэффициентами при неизвестном ограниченном возмущении.

Пусть в результате идентификации получены оценки его коэффициентов

(41) $$\hat{d}_2 = 6{,}25, \quad \hat{d}_1 = 26{,}5, \quad \hat{d}_0 = 6{,}25, \quad \hat{k}_1 = -2{,}2, \quad \hat{k}_0 = 5{,}5$$

и требуется найти оценки ошибок идентификации.

Примечание 5.1. Истинный объект (40) описывается уравнением

(42) $$\dddot{y} + 6{,}2\ddot{y} + 26{,}2\dot{y} + 5y = -2\dot{u} + 5u + 0{,}2f$$

при возмущении

(43) $$f(t) = a^f \, sign \sin \omega^f t\,,$$

где $a^f = 0{,}5$, ω^f - число, принимающее в моменts времени $\frac{2\pi}{\omega^f} q$ $(q = 1{,}2,\ldots)$ случайное значение в интервале от 3 до 4 ($\min \omega^f = 3$, $\max \omega^f = 4$).

Передаточная функция объекта

(44) $$w(s) = \frac{25(-0{,}4s + 1)}{(5s+1)(s^2 + 6s + 25)}$$

взята из хорошо известного [8] примера. ▲

Передаточная функция модели, построенной с использованием оценок (41)

(45) $$w_m(s) = \frac{22(-0{,}4s + 1)}{(4s+1)(s^2 + 6s + 25)}\,.$$

В соответствии с выражениями (10) получим следующие испытательные частоты

(46) $$\omega_1 = 0{,}2,\ \ \omega_2 = 4,\ \ \omega_3 = 6\,.$$

Были приняты следующие значения амплитуд испытательных сигналов (4)

(47) $$\rho_1 = 0{,}1,\ \ \rho_2 = 0{,}2,\ \ \rho_3 = 0{,}3\,.$$

Используя частотные параметры модели, вычисленные по передаточной функции (45) на наборе частот (46): $\alpha_{m1} = 0{,}47$, $\beta_{m1} = -0{,}49$, $\alpha_{m2} = -0{,}83 \cdot 10^{-1}$, $\beta_{m2} = 0{,}56 \cdot 10^{-1}$, $\alpha_{m3} = -0{,}88 \cdot 10^{-2}$, $\beta_{m3} = 0{,}62 \cdot 10^{-1}$ были выбраны числа

(48) $$\varepsilon_1^z = 10^{-3},\ \ \varepsilon_2^z = 10^{-3},\ \ \varepsilon_3^z = 10^{-4}\,,$$

которые по крайней мере на порядок меньше чисел $\rho_k \sqrt{\alpha_{mk}^2 + \beta_{mk}^2}$ $(k = \overline{1{,}3})$ в неравенствах (37).

Опишем результаты численных экспериментов (выполненных с помощью пакета программ АДАПЛАБ), полученные на каждой операции алгоритма 4.1.

a) При $\xi_k = 0{,}01$ $(k = \overline{1{,}3})$ и $N = 70$ $(\tau = 2198)$ выполнились условия (34) РФ-фильтруемости возмущения.

b) В результате трех экспериментов были получены следующие значения оценок разностей частотных параметров объекта и модели

$$\Delta\alpha_1 = -0{,}44 \cdot 10^{-1},\ \ \Delta\beta_1 = -0{,}64 \cdot 10^{-1},$$
$$\Delta\alpha_2 = 0{,}82 \cdot 10^{-2},\ \ \Delta\beta_2 = -0{,}39 \cdot 10^{-2},$$
$$\Delta\alpha_3 = 0{,}12 \cdot 10^{-2},\ \ \Delta\beta_3 = -0{,}55 \cdot 10^{-2}.$$

c) Результатом решения уравнений (25) явились следующие оценки ошибок идентификации

$$\Delta d_2 = -0{,}28\cdot 10^{-1},\quad \Delta d_1 = -0{,}3,\quad \Delta d_0 = -0{,}124\cdot 10^{1},$$
$$\Delta k_1 = 0{,}19,\quad \Delta k_0 = -0{,}488.$$

Сравнивая эти оценки с истинными ошибками идентификации

$$\Delta d_2 = -0{,}5\cdot 10^{-1},\quad \Delta d_1 = -0{,}299,\quad \Delta d_0 = -0{,}125\cdot 10^{1},$$
$$\Delta k_1 = 0{,}2,\quad \Delta k_0 = -0{,}5$$

убеждаемся в их практическом совпадении.

Приложение

Доказательство утверждения 3.1. Рассмотрим тождество

$$w(s) = \frac{k(s)}{d(s)},$$

из которого при $s = j\omega_k \quad (k = \overline{1,n})$ следует, с учетом (12), система уравнений

$$\sum_{i=0}^{\gamma} k_i (j\omega_k)^i - (\alpha_k + j\beta_k)\sum_{i=0}^{n-1} d_i (j\omega_k)^i = (\alpha_k + j\beta_k)(j\omega_k)^n \quad (k = \overline{1,n}). \tag{П1}$$

Эта система линейных алгебраических уравнений (для определения неизвестных $d_i \ (i = \overline{0, n-1})$ и $k_j \ (j = \overline{0,\gamma})$ имеет [9] единственное решение, если частоты $\omega_k \ (k = \overline{1,n})$ различны, а полиномы $k(s)$ и $d(s)$ не имеют общих корней (объект (1) – полностью управляем).

Эти уравнения для модели имеют вид

$$\sum_{i=0}^{\gamma} k_{mi} (j\omega_k)^i - (\alpha_{mk} + j\beta_{mk})\sum_{i=0}^{n-1} d_{mi} (j\omega_k)^i = (\alpha_{mk} + j\beta_{mk})(j\omega_k)^n \quad (k = \overline{1,n}). \tag{П2}$$

Вычитая уравнения (П2) из уравнений (П1), получим

$$\sum_{i=0}^{\gamma} \Delta k_i (j\omega_k)^i - (\alpha_k + j\beta_k)\sum_{i=0}^{n-1} (d_{mi} - \Delta d_i)(j\omega_k)^i +$$
$$+ [(\alpha_k - \Delta\alpha_k) + j(\beta_k - \Delta\beta_k)]\cdot \sum_{i=0}^{n-1} d_{mi} (j\omega_k)^i = (\Delta\alpha_k + j\Delta\beta_k)(j\omega_k)^n$$
$$(k = \overline{1,n}).$$

Отсюда следуют уравнения (24). Коэффициенты при неизвестных в левых частях уравнений (24) совпадают с коэффициентами уравнений (П1) и поэтому решение единственно.

Доказательство утверждения 4.1. Частотные параметры объекта (1) с фильтрами (28) выражаются через передаточную функцию объекта и передаточные функции фильтров как

$$\alpha_k^z = \mathrm{Re}[w_{\phi,k}(j\omega_k) w(j\omega_k)],\quad \beta_k^z = \mathrm{Im}[w_{\phi,k}(j\omega_k) w(j\omega_k)] \quad (k = \overline{1,n}), \tag{П3}$$

где передаточные функции фильтров

(П4) $$w_{\phi,k}(s) = \frac{2\xi_k \omega_k^2}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Очевидно, что

(П5) $$w_{\phi,k}(j\omega) = \frac{2\xi_k \omega_k^2 \left(\omega_k^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_k^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2} + \frac{-4\xi_k^2 \omega_k^3 \omega}{\left(\omega_k^2 - \omega^2\right)^2 + 4\xi_k^2 \omega_k^2 \omega^2}$$

$(k = \overline{1,n})$

и тогда связи (32) следуют из выражений (12) и (П5) при $\omega = \omega_k$ $(k = \overline{1,n})$.

Список литературы

1. Wahlberg B., Ljung L. Hard Frequency-Domain Model Error Bounds from Least-Square Like Identification Techniques // IEEE Trans. of Autom. Control. 1992. Vol. AC-37, No 7. P. 900-912.
2. Milanese M. Properties of least squares estimates in set membership identification // 10th IFAC Symposium on System Identification. Preprints. Copenhagen. 1994. Vol. 2. P. 97-102.
3. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Alexandrov A.G. Finite-frequency identification: model validation and bounded test signal // 13th Word Congress of IFAC San-Francisco, USA, Preprints. 1996. Vol. I. P. 393-398.
5. Alexandrov A.G. Finite-frequency identification and model validation of stable plant // 14 th World Congress of IFAC. Preprints, Beijing, China. 1999. Vol. H. P. 295-301.
6. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя // М.: Наука, 1991.
7. Александров А.Г. Частотное адаптивное управление при неизвестном ограниченном возмущении // АиТ. 2000. № 4.
8. Graebe S.F. Robust and adaptive control of an unknown plant: A benchmark of new format // 12th World Congress of IFAC. Sydney. 1993. Vol. III, P. 165-170.
9. Александров А.Г. Метод частотных параметров // АиТ. 1989. № 12. С. 3-15.