

УДК 681.51

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В.Н. Честнов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vnchest@rambler.ru

Н.И. Самшорин

Электростальский завод тяжелого машиностроения (ОАО ЭЗТМ)
Россия, 144000, Электросталь, ул. Красная, 19
E-mail: tesla_pro@mail.ru

Ключевые слова: робастность, параметрическая неопределенность, неопределенные ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, H_∞ -субоптимальное управление, запасы устойчивости по фазе и модулю

Аннотация: Работа посвящена решению проблемы синтеза робастных регуляторов по выходу многомерных систем с параметрической неопределенностью в заданных границах, подверженных действию неизмеряемых внешних полигармонических возмущений, ограниченных по мощности. Ставится задача построения регулятора, который помимо робастной устойчивости замкнутой системы гарантирует заданные границы на установившиеся значения регулируемых (одновременно измеряемых) переменных. Решение задачи сводится к некоторой специальным образом сконструированной проблеме H_∞ -оптимизации, в которой заданная точность обеспечивается путем выбора весовой матрицы при регулируемых переменных. Программно данный подход реализован в рамках MATLAB на базе пакета Robust Control Toolbox и использует технику линейных матричных неравенств (LMI). Приводится решение широко известной «benchmark» задачи.

1. Введение

Проблема обеспечения робастных свойств синтезируемых динамических систем с регуляторами по выходу в современной теории автоматического управления играет существенную роль [1-4]. В этой связи, очевидна необходимость построить регулятор так, чтобы с одной стороны он обеспечивал сохранение устойчивости замкнутой системы при заданных отклонениях физических параметров объекта от расчетных (номинальных), а с другой, гарантировал бы заданные ошибки регулирования при действии полигармонических внешних возмущений (с неизвестными амплитудами и частотами), ограниченных по мощности.

Актуальность, научная и практическая значимость таких задач обусловлена необходимостью практической реализации полученных на основе «номинальной» линейной модели объекта управления законов регулирования с неизбежными требованиями на допуски, неточностью знания математической модели объекта и изменением парамет-

ров объекта в процессе работы, а также действием неизмеряемых ограниченных внешних возмущений.

При проектировании многомерных систем управления инженеры-проектировщики, как правило, предъявляют следующие требования к замкнутой системе «объект-регулятор»: время регулирования, перерегулирование и установившуюся ошибку по каждой регулируемой переменной при действии типовых воздействий, а также условие робастной устойчивости, которое обычно выражается запасами устойчивости по фазе и коэффициенту усиления в каждом канале управления.

Настоящая работа выполнена в русле частотного подхода к синтезу робастных регуляторов многомерных систем, развитого в [5-10].

Решение задачи опирается на «технику размыкания» системы «объект-регулятор» по варьируемым параметрам объекта [5, 9]. При этом регулятор обеспечивает заданные границы изменения коэффициентов усиления в искусственно созданных каналах, в которых присутствуют варьируемые параметры объекта (представленные их номиналами). Заметим, что традиционно в теории автоматического управления в качестве точек размыкания замкнутой системы используют обычно физический вход или выход объекта управления [6, 7, 11]. Эта задача (обеспечение заданных границ коэффициентов усиления в данных контурах) сводится к стандартной вырожденной задаче H_∞ оптимизации [5, 10]. Обеспечение заданной точности в такой H_∞ задаче сводится к выбору весовых коэффициентов при регулируемых переменных, для которых получены аналитические выражения, включающие суммарную мощность внешнего возмущения по всем его компонентам, число учитываемых его гармоник, а также заданные ошибки регулирования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями в физических переменных [12]:

$$(1) \quad \begin{cases} L_1(p)z_0(t) = L_2(p)u(t) + L_3(p)f \\ y(t) = Nz_0(t) \end{cases},$$

где z_0 – n_0 -мерный вектор физических переменных объекта (скорость, ускорение, ток, напряжение, перемещение, угол поворота, и т.д.); u – m -мерный вектор управляющих воздействий; y – m_2 -мерный вектор измеряемых (и одновременно регулируемых) переменных объекта; f – m_3 -мерный вектор внешних возмущений; N – известная числовая матрица размером $(m_2 \times n_0)$; $L_1(p)$, $L_2(p)$, $L_3(p)$ – полиномиальные матрицы размеров $(n_0 \times n_0)$, $(n_0 \times m)$, $(n_0 \times m_3)$ соответственно, оператора дифференцирования $p = d/dt$

$$(2) \quad L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j, \quad L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k,$$

где $L_1^{(i)}$, $L_2^{(j)}$, $L_3^{(k)}$ – известные вещественные матрицы соответствующих размеров, $\alpha_2, \alpha_3 < \alpha_1$.

Будем полагать, что объект (1) стабилизируем и детектируем, а его уравнения представляют собой исходное, наименее преобразованное описание, полученное на основе фундаментальных физических законов механики и электротехники.

Элементы матриц $L_1^{(i)} (i = \overline{1, \alpha_1})$, $L_2^{(j)} (j = \overline{1, \alpha_2})$ далее будем называть физическими параметрами объекта управления. Пусть n физических параметров объекта с номинальными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ могут принимать значения из заданных интервалов

$$(3) \quad \lambda_i + \Delta\lambda_i \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max}), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\Delta\lambda_i$ – отклонение параметра от расчетного.

Компоненты вектора внешних возмущений f представляют собой ограниченные полигармонические функции, вида:

$$(4) \quad f_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}.$$

Здесь амплитуды w_{ik} , начальные фазы $\psi_{ik} (i = \overline{1, m_3}, k = \overline{1, p})$, а также частоты $\omega_k (k = \overline{1, p})$ гармоник неизвестны, однако известно, что амплитуды гармоник подчинены условию (ограничивающим мощность по каждой компоненте внешнего возмущения)

$$(5) \quad \sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2}, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где p – известное число гармоник, $w_i^* (i = \overline{1, m_3})$ – заданные числа.

Определим установившиеся ошибки по регулируемым переменным [7, 8]

$$y_{i, st} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Обычно требуется найти такой стабилизирующий регулятор по выходу, чтобы выполнялись неравенства (требования к точности)

$$(6) \quad y_{i, st} \leq y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $y_i^* > 0, i = \overline{1, m_2}$ – заданные числа.

Однако ясно, что такого регулятора может не существовать, поэтому определим радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным соотношением [7, 8]

$$(7) \quad r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} \left(\frac{y_{i, st}}{y_i^*} \right)^2,$$

на который и будем накладывать ограничения.

Задача 1. Построить стабилизирующий регулятор по выходу

$$(8) \quad u(t) = K(p)y(t),$$

($K(p)$ – правильная передаточная функция регулятора) такой, чтобы, с одной стороны, при заданных конечных отклонениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ от расчетных (3) замкнутая система сохраняла асимптотическую устойчивость, а с другой стороны выполнялось условие

$$(9) \quad r_{st}^2 \leq \gamma^2,$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Легко видеть, что если в результате решения задачи синтеза получилось $\gamma \leq 1$, то выполнены и требования к точности (6).

3. Приведение к канонической (W, Λ, K)-форме

Для решения поставленной задачи, представим уравнения замкнутой системы (1), (8) в канонической (W, Λ, K)-форме [5] с учетом внешнего возмущения f . Эти уравнения имеют вид:

$$(10) \quad \begin{cases} \tilde{y} = W_{11} \cdot \tilde{u} + W_{12} \cdot u + W_{13} \cdot f & \tilde{u} = \Lambda \cdot \tilde{y} \\ y = W_{21} \cdot \tilde{u} + W_{22} \cdot u + W_{23} \cdot f & u = K \cdot y, \end{cases}$$

где $W_{ij}(s)$ ($i = 1, 2, j = 1 \dots 3$) – известные передаточные матрицы, не содержащие варьируемых параметров (3); u, y – физический вход и выход объекта управления (1); \tilde{u}, \tilde{y} – n -мерные фиктивные вход и выход объекта управления; $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ – диагональная матрица параметров объекта управления, подверженных отклонениям от расчетных; $K(s)$ – искомая передаточная матрица регулятора (8). Приведение к форме (10) аналогично технике, используемой в [5, 9, 10], когда внешние возмущения, а также физические вход u и выход y объекта не исключаются из уравнений замкнутой системы, а фигурируют в ней наряду с фиктивными входами и выходами \tilde{u}, \tilde{y} . Структурная схема (W, Λ, K)-формы, соответствующая уравнениям (10) приведена на рис. 1.

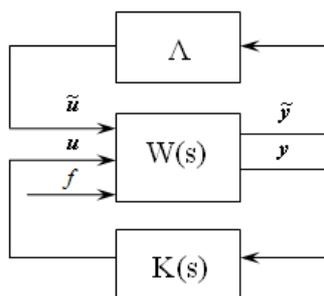


Рис. 1. Структурная схема (W,Λ,K)-формы системы с внешним возмущением

Заметим, что уравнения замкнутой системы (1), (8) всегда могут быть представлены в канонической (W, Λ, K)-форме (10). Доказательство это результата конструктивно и дает алгоритм построения этой формы [5, 9, 10].

4. Подход к решению задачи

Передаточная матрица разомкнутой системы (10) по варьируемым параметрам λ_i , ($i = \overline{1, n}$) (когда размыкание осуществляется по вектору \tilde{u}), записывается в виде [5, 9]:

$$(11) \quad W_{раз}^{\tilde{u}}(s) = \Lambda \cdot [-W_{11} - W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}].$$

Как видно из (11), особенностью данной передаточной матрицы является то, что варьируемые параметры составляют в ней диагональную матрицу коэффициентов усиления, что принципиально важно.

Заметим, что если эта передаточная матрица удовлетворяет круговому частотному неравенству [5, 9]

$$(12) \quad [I + W_{раз}^{\tilde{u}}(-j\omega)]^T [I + W_{раз}^{\tilde{u}}(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

то имеют место следующие достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров

$$(13) \quad \min \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\} < \lambda_i + \Delta\lambda_i < \max \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\}, \quad i = \overline{1, n},$$

гарантирующих робастную устойчивость системы (1), (8). Здесь λ_i – номинальные значения физических параметров объекта, подверженных отклонениям от расчетных, а r – радиус запасов устойчивости ($0 < r \leq 1$).

Отметим одну особенность (13). Пусть для простоты $\lambda_i > 0$, а радиус запасов устойчивости равен своему максимальному значению, $r = 1$. Тогда из (13) при положительном λ_i следует, что интервалы возможных значений параметра λ_i удовлетворяют неравенствам:

$$(14) \quad \frac{\lambda_i}{1+r} = \frac{\lambda_i}{2} \leq \lambda_i + \Delta\lambda_i \leq \frac{\lambda_i}{1-r} = \infty, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь мы имеем хорошую верхнюю границу для λ_i [5], однако максимальное уменьшение λ_i от номинала, возможно всего лишь в 2 раза, что не всегда приемлемо и приходится для обеспечения допусков (3) выбирать другие номинальные значения варьируемых параметров.

Покажем, что для улучшения нижней границы (14) можно воспользоваться не частотным условием (12), а другим, которое следует из соображений приведенных ниже.

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 2, где введена новая регулируемая переменная $z = \tilde{u}$ (в [5] $z = w + \tilde{u}$)

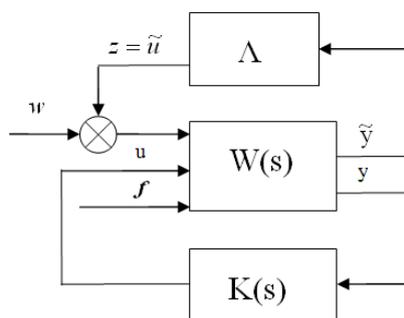


Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы с фиктивным возмущением.

Здесь дополнительно к рис. 1 введены: $w \in R^n$ – вектор фиктивных внешних возмущений; $z \in R^n$ – вектор фиктивных регулируемых переменных.

Легко показать непосредственным вычислением, что передаточная матрица, связывающая фиктивное внешнее возмущение w с фиктивной регулируемой переменной $z = \tilde{u}$ в замкнутой системе рис. 2 имеет вид:

$$(15) \quad z = T_{zw} \cdot w, \quad T_{zw}(s) = -W_{раз}^{\tilde{u}}(s) \cdot [I + W_{раз}^{\tilde{u}}(s)]^{-1},$$

где $W_{раз}^{\tilde{u}}(s)$ определена формулой (11).

Следуя работе [11], поместим на выход замкнутой системы рис. 2 мультипликативное возмущение $I + L$, где $L = \text{diag}[l_1, l_2, \dots, l_n]$ как показано на рис. 3:

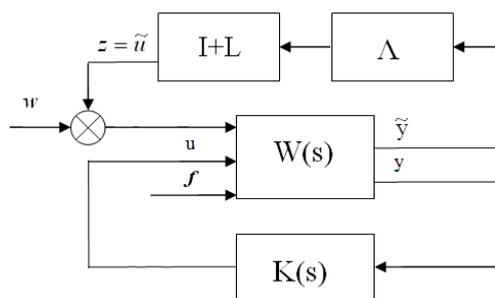


Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы с мультипликативным возмущением.

Из работы [11], следует, что замкнутая система рис. 3 будет асимптотически устойчива, если выполняется условие

$$(16) \quad \bar{\sigma}(L) < \frac{1}{\sigma(T_{zw})},$$

где $\bar{\sigma}(T_{zw})$ – максимальное сингулярное значение матрицы $T_{zw}(j\omega)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty)$, которое, как известно [8], есть H_∞ -норма T_{zw} и, таким образом, это неравенство с учетом диагональной структуры L дает следующие оценки на диагональные элементы этой матрицы, которые не нарушают асимптотической устойчивости замкнутой системы рис. 3

$$(17) \quad |l_i| \leq \frac{1}{\|T_{zw}\|_\infty}.$$

Пусть найдено решение задачи синтеза регулятора $K(p)$ такого, что выполнено условие

$$(18) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Тогда очевидно, в силу диагональной структуры L на рис. 3 и неравенства (17), что замкнутая система не потеряет устойчивости если

$$(19) \quad \min\left\{\lambda_i \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma}\right\} \leq \lambda_i + \Delta\lambda \leq \max\left\{\lambda_i \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma}\right\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В одномерном случае ($n = 1$), неравенство (18) означает, что модуль частотной передаточной функции замкнутой системы $|T_{zw}(j\omega)|$ для всех вещественных частот ω не превышает значения γ . В классической теории автоматического управления такое число – есть показатель колебательности M ($\gamma = M$) [13]. Это, в частности, говорит о том, что годограф Найквиста, соответствующий передаточной функции разомкнутой системы $W_{раз}^{\tilde{u}}(s)$ из (11), не пересекает круга радиусом $R = \gamma/(\gamma^2 - 1)$ с центром в точке $(-C; j \cdot 0)$ на плоскости годографа, где $C = \gamma^2/(\gamma^2 - 1)$. Отсюда, в частности, следует, что коэффициент усиления в таком замкнутом контуре без потери устойчивости изменять в интервале $(\gamma/(\gamma - 1), \gamma/(\gamma + 1))$.

В многомерном случае ($n > 1$) условие (17) имеет следующую физическую интерпретацию: по каждому входу \tilde{u} на рис. 2, коэффициенты усиления от номинального значения равного единице можно независимо от других изменять в интервалах $(\gamma/(\gamma - 1), \gamma/(\gamma + 1))$ без потери устойчивости. Отсюда, кстати, и следуют формулы (19).

Таким образом, решение первой части задачи 1 сводится к такому построению матрицы K регулятора (8) в H_∞ -проблеме (18), при котором величина γ принимает заданное или минимально возможное значение.

Далее покажем, что данная задача может быть сведена к некоторой стандартной проблеме H_∞ -оптимизации, уже с учетом заданных допусков на ошибки регулирования (6) при действии ограниченных внешних возмущений (4), (5).

5. Сведение задачи 1 к стандартной проблеме H_∞ -оптимизации

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 4.

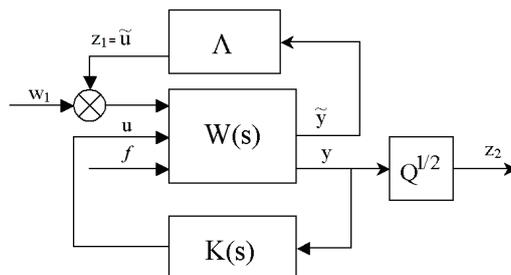


Рис. 4. Структурная схема замкнутой системы (1), (8).

Она описывается следующими уравнениями

$$(20) \quad \begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11} \cdot (z_1 + w_1) + W_{12} \cdot u + W_{13} \cdot f & \tilde{u} &= \Lambda \cdot \tilde{y} & z_1 &= \tilde{u} \\ y &= W_{21} \cdot (z_1 + w_1) + W_{22} \cdot u + W_{23} \cdot f & u &= K \cdot y & z_2 &= Q^{1/2} \cdot y. \end{aligned}$$

Здесь дополнительно к рис. 2: $w_1 \in R^n$ – вектор фиктивных внешних возмущений; $z_1 \in R^n$ – вектор фиктивных регулируемых переменных; $z_2 \in R^{m_2}$ – взвешенный вектор регулируемых переменных с помощью диагональной весовой матрицы $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами $q_i > 0$ ($i = \overline{1, m_2}$).

Введем расширенный вектор внешних возмущений w , включающий вектор фиктивных внешних возмущений w_1 и вектор реально действующих на объект внешних возмущений f и расширенный вектор регулируемых переменных z , объединяющий векторы z_1 и z_2 . Передаточную матрицу замкнутой системы, связывающую эти векторы, обозначим через T_{zw} и тогда можно записать

$$(21) \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw} \cdot w = \begin{pmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 f} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y f} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix}.$$

Пусть искомым регулятор $K(s)$ разрешает задачу минимизации H_∞ -нормы передаточной матрицы такой замкнутой системы :

$$(22) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma.$$

Тогда каждый из блоков этой матрицы удовлетворяет аналогичному условию [14], в частности

$$(23) \quad \|T_{z_1 w_1}\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{y f}\|_\infty \leq \gamma.$$

Второе из неравенств (23) может быть представлено в эквивалентной частотной форме [7, 8]

$$T_{y f}^T(-j\omega) Q T_{y f}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty),$$

откуда, учитывая диагональную структуру матрицы Q , получим следующее неравенство для установившихся значений регулируемых переменных [7, 8]

$$(24) \quad \sum_{i=1}^{m_2} q_i y_{i,st}^2 \leq p \gamma^2 \|w^*\|^2,$$

где $\|w^*\|$ – евклидова норма вектора w^* с компонентами правой части (5). Тогда, выбирая элементы весовой матрицы Q из равенств

$$(25) \quad q_i = \frac{p \|w^*\|^2}{y_i^{*2}}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

придем к выполнению целевого условия (9), где γ – реализовавшееся значение при решении задачи (22).

Задачу по нахождению правильной передаточной матрицы регулятора $K(s)$, при котором бы выполнялось неравенство (22), можно переформулировать в виде следующих вспомогательных задач H_∞ -оптимального и субоптимального управления.

Задача 2: Дано число γ . Найти правильную передаточную матрицу регулятора (8), такую чтобы выполнялось неравенство (22).

Задача 3: Найти правильную передаточную матрицу регулятора (8), который бы обеспечивал выполнение неравенства (22) с минимально возможным $\gamma = \gamma_0$.

Если задачи 2 и 3 решены, то зная значение параметра γ , реализовавшееся в результате синтеза, с учетом неравенств (19), легко найти достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров, гарантирующих робастную устойчивость системы (1), (8), а из целевого неравенства (9) с учетом (7) найти оценки ошибок регулирования, которые заведомо будут не хуже $y_{i,st} \leq \gamma \cdot y_i^*$, $i = \overline{1, m_2}$.

Теперь придадим рис. 4 стандартную конфигурацию, изображенную на рис. 5, а уравнениям (20) стандартную форму записи, принятую в теории H_∞ -управления

$$(26) \quad \begin{aligned} z &= G_{11} \cdot w + G_{12} \cdot u \\ y &= G_{21} \cdot w + G_{22} \cdot u \\ u &= K \cdot y, \end{aligned}$$

где $G_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) – блоки передаточной матрицы $G(s)$ обобщенного объекта

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Передаточные матрицы $G_{ij}(s)$ получим из соотношений (20).

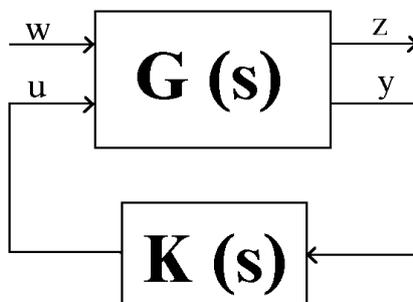


Рис. 5. Структурная схема обобщенного объекта.

Утверждение 1: Передаточные матрицы $G_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2$) обобщенного объекта из (26) связаны с передаточными матрицами системы (20) равенствами:

$$(27) \quad \begin{aligned} G_{11} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} & (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + Q^{1/2} W_{21} & Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + Q^{1/2} W_{23} \end{bmatrix} \\ G_{12} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + Q^{1/2} W_{22} \end{bmatrix} \\ G_{21} &= \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + W_{12} & W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + W_{23} \end{bmatrix} \\ G_{22} &= \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + W_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Таким образом, решая H_∞ -проблему (22), где весовые коэффициенты выбраны из равенств (25), добиваемся разрешения поставленной задачи 1.

6. Пример решения задачи синтеза

Проиллюстрируем эффективность предложенного метода синтеза на примере двухмассовой системы с упругой связью: двух тележек, соединенных пружиной [5, 6]. Модель такой системы описывается уравнениями:

$$(28) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_4; \\ \dot{x}_3 = -q \cdot x_1 + q \cdot x_2 + u + f; \\ \dot{x}_4 = q \cdot x_1 - q \cdot x_2. \end{cases}$$

где q – варьируемый параметр (жесткость пружины), номинальное значение которого равно 0,8; x_1 – координата первой тележки; x_2 – координата 2-ой тележки; u – управляющее воздействие, вырабатываемое регулятором; f – внешнее возмущение, выводящее систему из положения равновесия.

Измеряемой переменной является

$$(29) \quad y = x_2.$$

Для решения задачи синтеза на основе стандартной процедуры H_∞ оптимизации, опишем объект (28),(29) уравнениями в пространстве состояний [5, 6, 8]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B_1 \cdot w + B_2 \cdot u \\ z &= C_1 \cdot x + D_{11} \cdot w + D_{12} \cdot u \\ y &= C_2 \cdot x + D_{21} \cdot w + D_{22} \cdot u, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -q & q & 0 & 0 \\ Q^{1/2} \cdot (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \end{aligned}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{21} = [0 \quad 0], D_{22} = [0].$$

Поскольку все матрицы прямой связи D_{ij} между входами и выходами этой модели нулевые, то мы имеем вырожденную проблему H_∞ -оптимизации, решать которую удобно на основе LMI-техники [5-8], реализованной в MATLAB – пакете [15].

Пусть установившаяся ошибка по регулируемой переменной не должна превышать $y^* = 1$, а внешним возмущением, выводящим систему из положения равновесия является единичная ступенька, т.е. $w^* = 1$. Тогда в соответствии с (25) получим значение единственного весового коэффициента при скалярной регулируемой переменной y на структурной схеме рис. 4 $q_1 = 1$.

Для демонстрации эффективности данного подхода сначала был осуществлен синтез регулятора (на основе предложенной техники), когда внешнее возмущение f не принималось во внимание. Переходный процесс по $y(t)$ в такой замкнутой системе приведен слева на рис. 5 (при нулевых начальных условиях и ступенчатом $f = 1(t)$). На этом же рис. 6 (справа) показан переходный процесс в системе (при тех же условиях), регулятор которой построен по предлагаемой технологии, но уже с учетом внешнего возмущения.

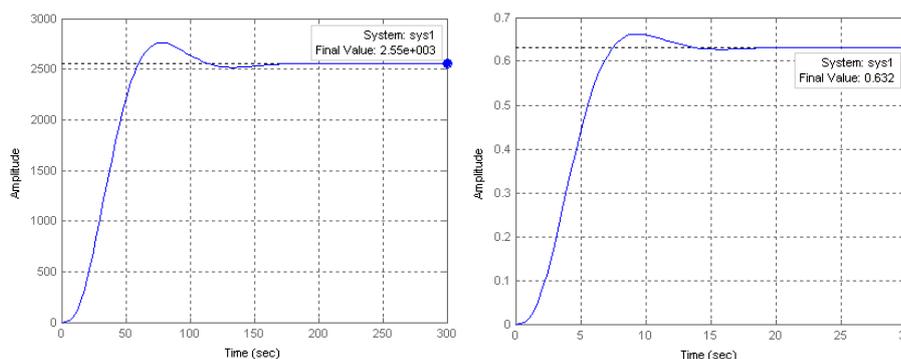


Рис. 6. Реакция замкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие.

Очевидно, что установившаяся ошибка во втором случае более чем на 3 порядка меньше. При этом время переходного процесса также значительно уменьшилось. Это подчеркивает эффективность предложенного подхода к обеспечению заданной точности. Помимо этого было проведено исследование допусков на варьируемый параметр q с номинальным значением 0,8. При этом гарантируемые границы были найдены по формулам (19), а истинные на основе специфического применения критерия Найквиста к системе рис.1, разомкнутой по переменной \tilde{y} (параметру q , как в [5]) при известном регуляторе. Так как параметр q есть множитель передаточной функции разомкнутой системы (11), то определив точки пересечения годографа Найквиста с вещественной осью найдем истинный интервал устойчивости по q . Ниже в таблице приведены результаты этого исследования: объекта (28),(29), замкнутого регуляторами, полученными с использованием предложенной техники, когда внешнее возмущение учитывается и не учитывается, в процедуре синтеза.

Таблица 1. Результаты анализа системы с полученными регуляторами.

	Без учета внешнего возмущения	С учетом внешнего возмущения ($q_1=1$)
Передаточная функция синтезированного регулятора	$\frac{-758,5 s^3 + 1832 s^2 - 12,89 s - 0,3997}{s^4 + 15,89 s^3 + 117,7 s^2 + 475,9 s + 1020}$	$\frac{-8,7e007s^3 - 9,1e007s^2 - 6,5e007s - 1,8e007}{s^4 + 53,8s^3 + 1,2e004s^2 + 4,3e005 s + 8,1e006}$

	Без учета внешнего возмущения	С учетом внешнего возмущения ($q_1=1$)
Значение параметра γ	1,1087	1,1891
Гарантируемые границы робастной устойчивости по параметру q	$0,0784 < q < 1,5216$	$0,1272 < q < 1,4728$
Истинные границы робастной устойчивости по параметру q	$0,051 < q < 2,92$	$0,073 < q < 2,901$
Запасы при размыкании системы по входу/выходу объекта	$L=0,65\text{дБ}, \varphi_3=5,74\text{град.}^\circ$	$L=11,2\text{дБ}, \varphi_3=55\text{град.}^\circ$

В последней строке таблицы приведены значения запасов устойчивости по модулю L и фазе φ_3 , которые определяются при размыкании замкнутой системы по переменной u (физическому входу объекта) или y (физическому выходу объекта). Здесь надо отметить весьма низкие запасы устойчивости по фазе и модулю, если регулятор строится без учета внешнего возмущения, хотя границы на варьируемый параметр весьма широки. Заметим, что в примере 1 работы [6], наблюдалась совершенно противоположная ситуация: запасы устойчивости на входе (выходе) объекта велики, а малое отклонение параметра q от номинала приводит к неустойчивости. Таким образом, явно видна необходимость метода синтеза робастного регулятора, который бы учитывал не только возможные конечные отклонения физических параметров от расчетных, но и заданные запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (модулю) на входе (выходе) объекта. Однако, это предмет дальнейших исследований.

7. Заключение

В работе представлено решение задачи робастной стабилизации при параметрической неопределенности с учетом действия внешних возмущений. Отметим некоторые преимущества предложенного подхода перед известными:

- 1) Рассматриваются отклонения физических параметров от расчетных.
- 2) Физически ясный критерий: показатель колебательности и радиус установившегося состояния замкнутой системы.
- 3) Сведение процедуры синтеза в конечном счете к стандартной проблеме H_∞ -оптимизации (субоптимизации) для парирования внешних возмущений.
- 4) Безытерационный характер процедуры синтеза в отличие от широко разрекламированного в западной литературе μ -синтеза.
- 5) Для решения задачи имеется готовое богатое программное обеспечение.
- 6) Порядок регулятора, получаемого в результате задачи синтеза не превышает порядка исходного физического объекта управления, что важно для практических приложений.

Отметим также, что представленные результаты допускают обобщение на случай, когда необходимо обеспечить дополнительно и робастную степень устойчивости системы, определяющую заданное время регулирования.

Приложение. Доказательство утверждения 1

Подставляя в соотношение (20) для z_1 и z_2 выражение для \tilde{y} , затем для \tilde{y} получим:

$$z = \begin{cases} z_1 = \tilde{u} = \Lambda \cdot \tilde{y} = \Lambda \cdot (W_{11} \cdot (z_1 + w_1) + W_{12} \cdot u + W_{13} \cdot f) \\ z_2 = Q^{1/2} \cdot y = Q^{1/2} W_{21} \cdot (z_1 + w_1) + Q^{1/2} W_{22} \cdot u + Q^{1/2} W_{23} \cdot f. \end{cases}$$

Выразив из последнего выражения z_1 , и подставив в z_2 получим:

$$z = \begin{cases} z_1 = (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} \cdot w_1 + (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \cdot u + (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \cdot f \\ z_2 = Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} \cdot w_1 + Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \cdot u + \\ + Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \cdot f + Q^{1/2} W_{21} \cdot w_1 + Q^{1/2} W_{22} \cdot u + Q^{1/2} W_{23} \cdot f. \end{cases}$$

Представим полученное выражение в матричном виде:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} & (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + Q^{1/2} W_{21} & Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + Q^{1/2} W_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + Q^{1/2} W_{22} \end{bmatrix} \times u.$$

Отсюда придем к первым двум равенствам (27) относительно G_{11} и G_{12} .

Подставив в выражение для y (20) z_1 получим:

$$y = W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} \cdot w_1 + W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \cdot u + W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \cdot f + \\ + W_{21} \cdot w_1 + W_{22} \cdot u + W_{23} \cdot f$$

Записав последние выражения в матричном виде, получим:

$$y = \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + W_{21} & W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + W_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + W_{22} \end{bmatrix} \cdot u$$

Сравнивая полученное выражение со вторым соотношением (20), приходим к выражениям для матриц G_{21} и G_{22} из (27). Утверждение доказано.

Список литературы

1. Ackermann J. Robust control: system with uncertain physical parameters. London: Springer. 1993.
2. Barmich B.R. New tools for robustness of linear systems. New York. Macmillan. 1994.
3. Bhattacharyya S.P., Keel L.A., Chapellat H. Robust control: the parametric approach. Hertfordshire: Prentice Hall. 1995.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
5. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 229-238.
6. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1999. № 7. С. 100-109.
7. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞ -подхода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 101-108.
8. Честнов В.Н. Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 170-185.
9. Честнов В.Н. Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 72-79.
10. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов при внешних возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2014. (Передана в редакцию журнала «Автоматика и Телемеханика»)
11. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // IEEE Transaction on Automatic Control. 1981. Vol. 26, No. 1. P. 4-16.

12. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
13. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
14. The Control Handbook / Editor W.S. Levine. IEEE Press, 1996.
15. Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., Safonov M.G. Robust Control Toolbox 3: User's guide. Natick, Mass.: The MathWorks, Inc., 2010.