УДК 681.51; УДК 519.71

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА SISO-РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ НАЙКВИСТА

В.Н. Честнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vnchest@rambler.ru

Ж.В. Зацепилова
Электростальский завод тяжелого машиностроения (ОАО ЭЗТМ)
Россия, 144000, Электросталь, Красная ул., 19
E-mail: JanHet@yandex.ru

Ключевые слова: регуляторы по выходу, критерий Найквиста, ганкелевы сингулярные числа, фазовращательные функции

Аннотация: В работе рассмотрен подход к понижению порядка регуляторов по измеряемому выходу, который опирается на специфическое использование классического критерия Найквиста. Понижение порядка регулятора понимается в общепринятом смысле сокращения порядка его дифференциального уравнения без существенного изменения передаточной функции замкнутой системы, например, от задающего воздействия к регулируемой переменной. Этот подход опирается на технику размыкания замкнутой системы "объект-регулятор" по элементам разложения передаточной функции регулятора на сумму элементарных дробей, а также по элементам разложения передаточной функции регулятора на сумму фазовращательных (all-pass) функций с коэффициентами, равными ее ганкелевым сингулярным числам.

1. Введение

Проблема понижения порядка регуляторов является весьма актуальной с точки зрения практической применимости современных подходов к синтезу H_2, H_∞, l_1, μ-регуляторов, которые могут иметь весьма высокий порядок. Упрощение полученного регулятора позволяет снизить возникающие на этапе реализации возможные ошибки и повысить надежность функционирования системы в целом.

Обычно используют два основных подхода [1, 2]:

- понижение порядка (редукция) модели объекта и далее синтез более простого регулятора;
- понижение порядка регулятора, полученного на основе полной модели объекта.

Основным требованием при этом является сохранение показателей качества и устойчивости замкнутой системы.

Предлагаемый подход к понижению порядка динамических регуляторов опирается на специфическое использование классического критерия Найквиста, когда размыкание замкнутой системы объект-регулятор осуществляется либо по элементам разложения передаточной функции регулятора на элементарные дроби, либо по элементам разложения передаточной функции регулятора на сумму фазовращательных (all-pass) функций с коэффициентами, равными ее ганкелевым сингулярным числам [4].

Силу влияния обратной связи, образованной данным элементом, можно оценить «в классическом смысле» оценив модуль частотной передаточной функции такой разомкнутой системы на всем вещественном диапазоне частот. Если модуль такой частотной передаточной функции не превышает для всех частот заданного значения ε, и годограф Найквиста такой разомкнутой системы не охватывает критическую точку (*-1,j*0), этим элементом регулятора можно пренебречь. При этом относительное изменение передаточной функций замкнутой системы не будет превышать заданного значения ε в существенном диапазоне частот (до частоты среза разомкнутой системы с полным-нередуцированным регулятором).

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель объекта управления

(1) $$\dot{x} = Ax + bu,\ \ z = y = cx\ ,$$

совместно с динамическим стабилизирующим регулятором по выходу

(2) $$\dot{x}_c = A_c x_c + b_c(g - y),\ \ u = c_c x_c + d_c(g - y),$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R^1$ – управляющее воздействие; $z \in R^1$ – регулируемая переменная; $g \in R^1$ – задающее воздействие; $y \in R^1$ – измеряемая переменная; $x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора; A, A_c – матрицы чисел; b, b_c – векторы столбцы; c, c_c – векторы строки; d_c – скаляр.

Предполагается, что система (1), (2) асимптотически устойчивая.

Задача. *Понизить порядок регулятора, т.е. среди переменных состояния регулятора найти такие, которые можно удалить, сохранив передаточную функцию замкнутой системы с заданной относительной точностью ε*

(3) $$\left|\frac{T_{yg}(j\omega) - T^0_{yg}(j\omega)}{T_{yg}(j\omega)}\right| < \varepsilon\ ,$$

где T_{yg} и T^0_{yg} – передаточные функции замкнутой системы с исходным и редуцированным регулятором.

3. Решение задачи на основе критерия Найквиста

3.1. Разложение передаточной функции регулятора на сумму элементарных дробей

Передаточную функцию регулятора $W_c=c_c(sI-A_c)^{-1}b_c+d_c$ можно представить в виде суммы элементарных дробей [1]:

(4) $$W_c(s) = \frac{b(s)}{d(s)} = \frac{b_0 \cdot s^{mc} + b_1 \cdot s^{mc-1} + \ldots + b_{mc-1} \cdot s^1 + b_{mc}}{d_0 \cdot s^{nc} + d_1 \cdot s^{nc-1} + \ldots + d_{nc-1} \cdot s^1 + d_{nc}} = \frac{k_1}{s - \lambda_1} + \frac{k_2}{s - \lambda_2} + \ldots + \frac{k_{nc}}{s - \lambda_{nc}} + k_0\ ,$$

где $k_0 = \dfrac{b_0}{d_0}$ при $m_c=n_c$ и k_0=0 при $m_c<n_c$; $k_1, k_2, ..., k_{nc}$ – вычеты W_c; $d(s)$ и $b(s)$ – полиномы от оператора дифференцирования s; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{nc}$ – корни характеристического полинома регулятора $d(s)=det(sI–A_c)=(s–\lambda_1)(s–\lambda_2)\ldots(s–\lambda_{nc})$.

Структурную схему системы (1), (4) можно представить в виде

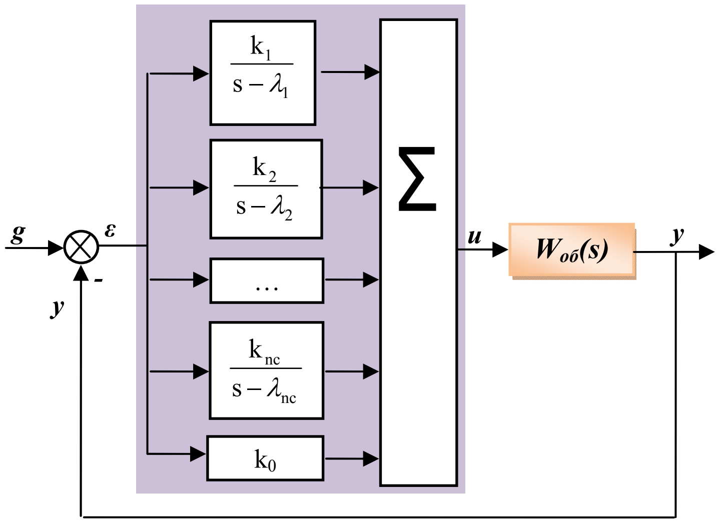

Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы (1), (4).

На рис. 1 $W_{об}(s)=c(sI–A)^{-1}b$ – передаточная функция объекта по управлению. Разомкнем систему по одному из слагаемых, как показано на рис. 2.

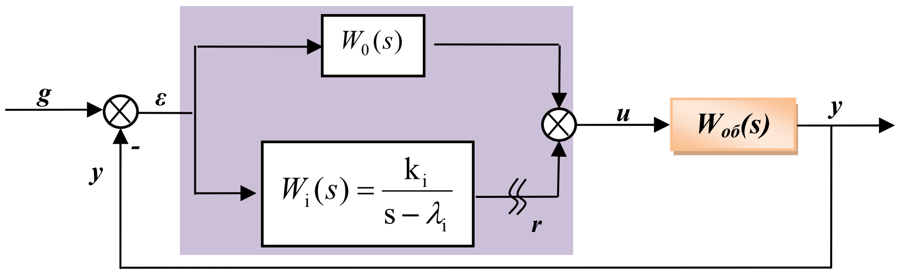

Рис. 2. Структурная схема системы (1), (4), разомкнутой по i-му слагаемому передаточной функции регулятора.

При этом $W_0(s)$ – передаточная матрица регулятора, у которого i-ое слагаемое в разложении (4) равно 0, $W_i(s)$ – i-ое слагаемое (4).

Передаточная функция разомкнутой системы по i-му слагаемому регулятора имеет вид

(5) $$W^i_{раз}(s)=\frac{W_{об}(s)}{1+W_0(s)W_{об}(s)}\cdot\frac{k_i}{s-\lambda_i}.$$

А передаточная функция замкнутой системы с редуцированным регулятором определяется выражением

(6) $$T^0_{yg}(s)=\frac{W_0(s)W_{об}(s)}{1+W_0(s)W_{об}(s)}.$$

Регулируемая переменная y и задающее воздействие g в замкнутой системе связаны соотношением

(7) $$y=\left(\frac{T^0_{yg}(s)}{1+W^i_{раз}(s)}+\frac{W^i_{раз}(s)}{1+W^i_{раз}(s)}\right)g.$$

Легко видеть, что передаточная функция (5) включает i-е слагаемое регулятора (4) в виде сомножителя и, для определения характера его влияния на свойства замкнутой системы (1), (2), необходимо построить годограф Найквиста передаточной функции (5).

Утверждение 1. *Если годограф Найквиста* (5) *не охватывает критическую точку* (–1,j0) *и выполнено частотное условие*

(8) $$\left|W^{i}_{раз}(j\omega)\right| < \varepsilon, \ \forall\omega \in [0,\infty),$$

то целевое неравенство (3) *будет выполняться для всех частот ω, не превышающих частоту среза исходной разомкнутой системы* $W_{раз}(s) = W_c(s)W_{об}(s)$.

При практической реализации процедуры понижения порядка регулятора, динамика i-го слагаемого $\frac{k_i}{s-\lambda_i}$, по которому производится размыкание, отбрасывается, а коэффициент усиления звена $\frac{-k_i}{\lambda_i}$ целесообразно сохранить, тем самым, сохранив статический коэффициент передачи регулятора.

3.2. Разложение передаточной функции регулятора на сумму фазовращательных звеньев

Другой подход к разложению передаточной функции регулятора опирается на разложение Гловера [4]

(9) $$W_c(s) = D_0 + \sigma_1 E_1(s) + \sigma_2 E_2(s) + \ldots + \sigma_n E_n(s),$$

в котором: $|E_i(j\omega)|=1$ для всех $\omega \in [0,\infty)$ – фазовращательные звенья (all-pass функции), σ_i – ганкелевы сингулярные числа $\sigma_i = \{\lambda_i(PQ)\}^{1/2}$, расположенные в порядке убывания. Здесь P и Q грамианы управляемости и наблюдаемости регулятора $P = \int_0^\infty e^{A_C t} b_c b_c' e^{A_C t} dt, \quad Q = \int_0^\infty e^{A_C' t} c_c' c_c e^{A_C t} dt$ вычисляемые как решения матричных уравнений Ляпунова

(10) $$A_cP + PA_c' + b_cb_c' = 0, \ A_c'Q + QA_c + c_c'c_c = 0.$$

Структурную схему системы (1), (9), (10) можно представить в виде

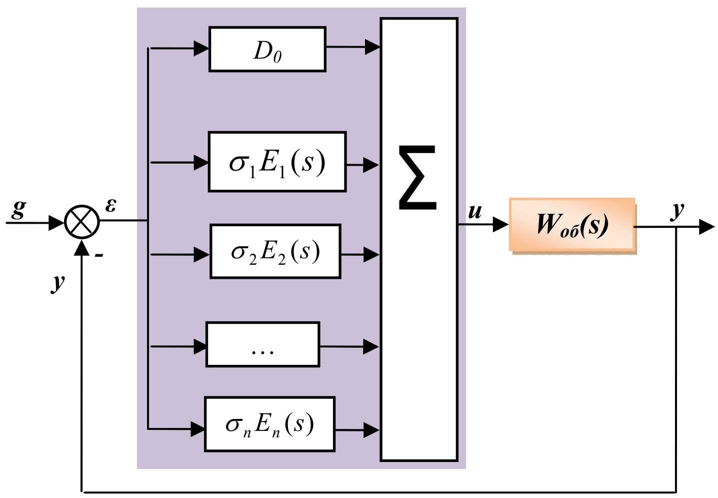

Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы (1), (9), (10).

На рис. 3 $W_{об}(s)=c(sI-A)^{-1}b$ – передаточная функция объекта по управлению.

Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 3) по i-му слагаемому регулятора имеет вид:

(11) $$W_{раз}^{i}(s) = \frac{W_{об}(s)}{1 + W_0(s)W_{об}(s)} \cdot \sigma_i E_i(s),$$

а передаточная функция замкнутой системы с редуцированным регулятором определяется соотношением:

(12) $$T_{yg}^{0}(s) = \frac{W_0(s)W_{об}(s)}{1 + W_0(s)W_{об}(s)}.$$

Связь задающего воздействия и регулируемой переменной в замкнутой системе (рис. 3) определяется выражением

(13) $$y = \left(\frac{T_{yg}^{0}(s)}{1 + W_{раз}^{i}(s)} + \frac{W_{раз}^{i}(s)}{1 + W_{раз}^{i}(s)} \right) g.$$

Передаточная функция (11) включает i-е слагаемое регулятора (9) в виде сомножителя и, для определения характера его влияния на свойства замкнутой системы (1), (2), необходимо построить годограф Найквиста передаточной функции разомкнутой системы (11).

Утверждение 2. *Если годограф Найквиста* (11) *не охватывает критическую точку* $(-1, j0)$ *и выполнено частотное условие*

(14) $$\left| W_{раз}^{i}(j\omega) \right| < \varepsilon, \ \forall \omega \in [0, \infty),$$

то целевое неравенство (3) *будет выполняться для всех частот* ω, *не превышающих частоту среза исходной разомкнутой системы* $W_{раз}(s) = W_c(s)W_{об}(s)$.

При практической реализации процедуры динамика i-го слагаемого $E_i(s)$ (начиная с последнего), по которому производится размыкание, отбрасывается, а коэффициент усиления звена σ_i и общий коэффициент передачи регулятора сохраняются. Удаление динамической части соответствующего слагаемого, начиная с последнего, понижает порядок регулятора на единицу.

4. Численные примеры

Продемонстрируем эффективность предложенной техники редукции регуляторов на численном примере «Flexible Beam Continued» [3].

Объект управления описывается передаточной функцией:

$$W_{об}(s) = \frac{-6{,}4750s^2 + 4{,}0302s + 175{,}7700}{s(5s^3 + 3{,}5682s^2 + 139{,}5021 + 0{,}0929)}.$$

Регулятор, полученный в [3], имеет передаточную функцию:

$$W_c(s) = \frac{1{,}424s^7 + 9{,}076 \cdot 10^2 s^6 + 3{,}141 \cdot 10^4 s^5 + 1{,}117 \cdot 10^5 s^4 + 9{,}073 \cdot 10^5 s^3 + 1{,}961 \cdot 10^6 s^2 + 1{,}306 \cdot 10^3 s + 0{,}01406}{s^8 + 1{,}013 \cdot 10^3 s^7 + 1{,}326 \cdot 10^4 s^6 + 1{,}129 \cdot 10^5 s^5 + 6{,}326 \cdot 10^5 s^4 + 2{,}348 \cdot 10^6 s^3 + 4{,}940 \cdot 10^6 s^2 + 3{,}440 \cdot 10^6 s + 3{,}435 \cdot 10^3}.$$

Переходный процесс системы, замкнутой таким нередуцированным регулятором $W_c(s)$ приведен на рис. 4.

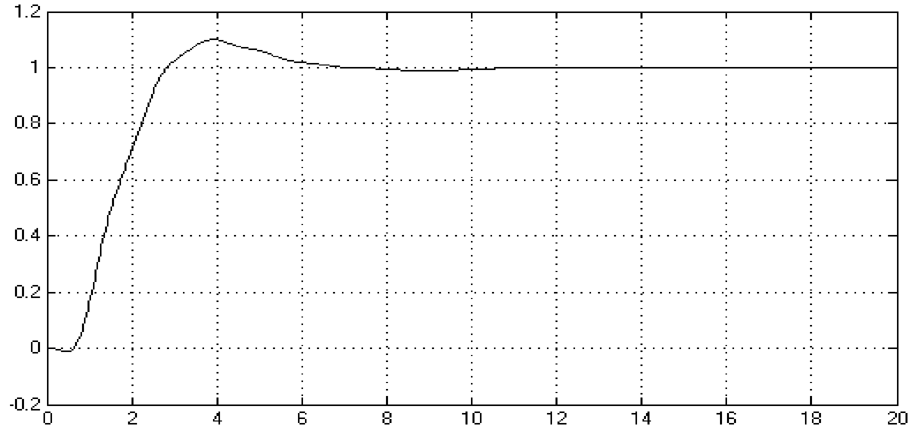

Рис. 4. Реакция выхода *y(t)* на единичное ступенчатое воздействие.

Этот регулятор можно разложить на простейшие дроби:

$$W_c(s)=\frac{0{,}5548}{s+999{,}9}+\frac{0{,}6634s-5{,}203}{s^2+1{,}692s+34{,}16}+\frac{5{,}308s+42{,}75}{s^2+6{,}404s+21{,}74}-\frac{4{,}248}{s+3{,}851}-\frac{0{,}8545}{s+1{,}201}+\frac{1{,}948\cdot 10^{-7}}{s+0{,}001}.$$

Исследование годографов Найквиста при размыкании системы по каждому слагаемому регулятора показало, что динамикой всех слагаемых, кроме 5-го, можно пренебречь. Редуцированный регулятор имеет вид:

$$W_{c\_red}(s)=\frac{0{,}7116s+4{,}91610^{-6}}{s+1{,}201}.$$

Ниже приведен переходный процесс по регулируемой переменной $y(t)$ при нулевых начальных условиях и единичном задающем воздействии

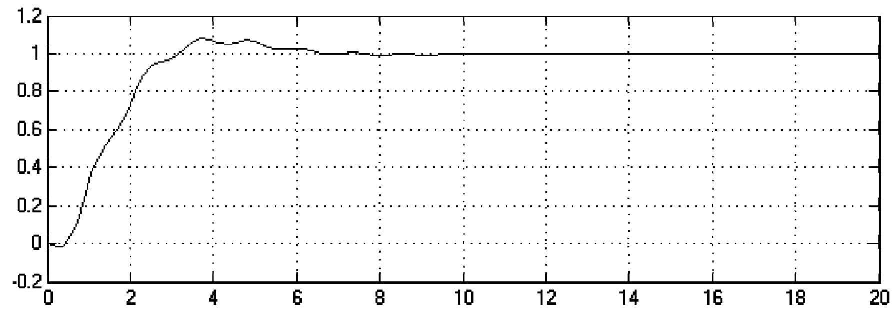

Рис. 5. Реакция выхода *y(t)* на единичное ступенчатое воздействие (система с редуцированным регулятором).

Теперь рассмотрим второй подход к разложению передаточной функции регулятора на сумму all-pass функций [1, 4]. Исходный регулятор $W_c(s)$ имеет D_0=7.4·10^{-5} и ганкелевы сингулярные числа 0.3984, 0.3330, 0.2211, 0.2146, 0.0685, 0.0039, 0.0003, 0.0001. All-pass функции не приведены здесь в виду громоздкости их записи.

Анализ годографов Найквиста показал, что можно пренебречь динамикой последних четырех слагаемых разложения (9) передаточной функции регулятора.

Ниже приведен переходный процесс по регулируемой переменной $y(t)$ системы с редуцированным регулятором на единичную ступеньку

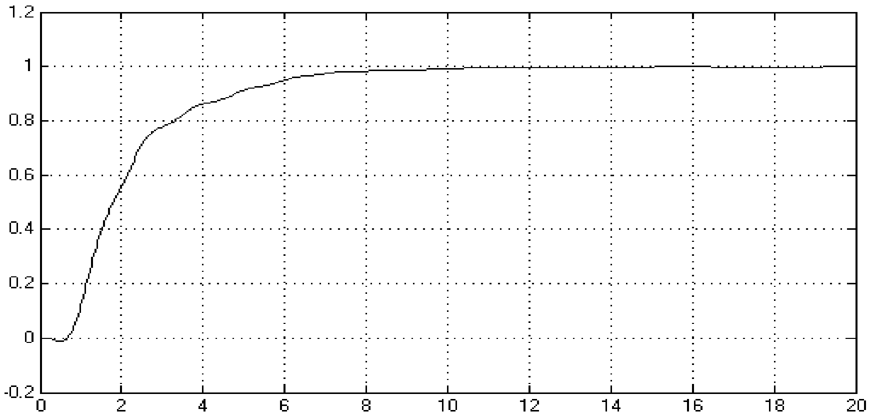

Рис. 6. Реакция выхода $y(t)$ системы с редуцированным регулятором на единичное ступенчатое воздействие.

5. Заключение

В работе предложен частотный подход к проблеме понижения порядка SISO-регуляторов, который опирается на критерий Найквиста и технику размыкания по элементам разложения передаточной функции регулятора. Доказано, что если для наперед заданного уровня ε выполняется частотное условие утверждений и годограф Найквиста не охватывает критическую точку $(-1, j0)$, т.е. разомкнутая система устойчива, то динамикой исследуемого элемента разложения передаточной функции регулятора можно пренебречь. При этом относительное изменение передаточной функции замкнутой системы в полосе существенных частот (до частоты среза исходной разомкнутой системы) будет величиной порядка ε.

В заключение можно сказать, что предложенный подход к понижению порядка SISO-регуляторов может быть обобщен на многомерный случай.

Список литературы

1. K. Zhou, J.C. Doyle Essentials of Robust Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1998.
2. Бойченко В.А., Курдюков А.П., Тимин В.Н., Ядыкин И.Б. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами. 2007. № 19. С. 23-126.
3. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co., 1990.
4. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞-error bounds // Int. J. Control. 1984. Vol. 39, No. 6. P. 1115-1193.