В качестве систем разложения P_1, P_2, P_3 выберем $P=\sqrt{2}\{\sin n\pi\psi/2\}$, $n=\overline{1,\infty}$, где в качестве переменной ψ используются χ, ξ, ζ.

Главное окно программы представлено на рис. 1. Для установки параметров используются кнопки группы «Параметры и начальные установки», при нажатии на которые открываются окна рис. 2.

Для запуска расчётов и вывода результатов используются кнопки группы «Расчёты и графики» главного окна приложения. Пример вывода результатов расчётов представлен на рис. 3.

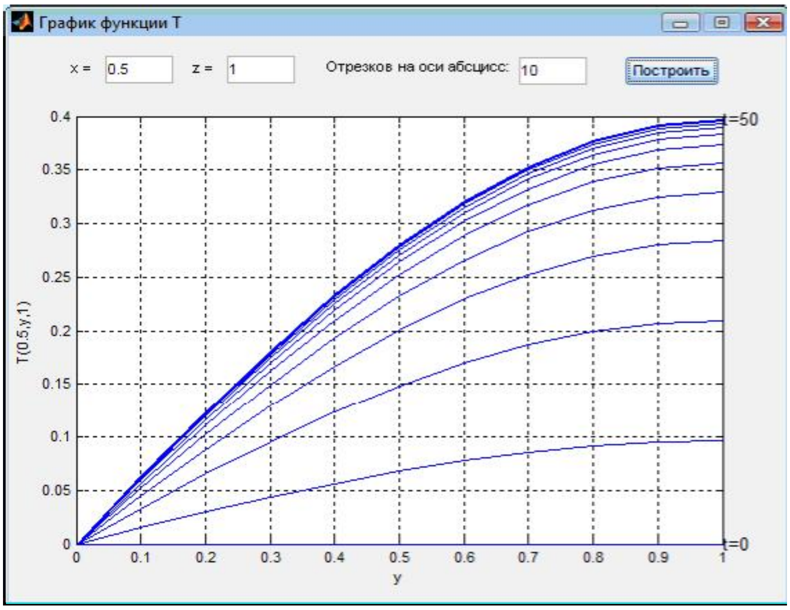

Рис. 3. Окна для вывода результатов вычислений

Заключение. В работе представлены средства анализа пространственно трёхмерных распределённых систем, описываемых уравнением теплопроводности с граничными условиями второго рода. Приводится пример анализа системы

Библиографический список

1. Коваль, В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем / В.А. Коваль. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2010. – 192 с.
2. Лебедев, С.Н. Синтез оптимальных регуляторов для распределенных систем управления на основе спектрального метода представления: дис. … канд. техн. наук.: 05.13.01 / Сергей Николаевич Лебедев; Сарат. гос. техн. ун-та. – Саратов, 2000. – 192 л.

УДК 681.51

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ С ЗАДАННОЙ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕЙ МАТРИЦЫ ВОЗВРАТНОЙ РАЗНОСТИ

В. Н. Честнов*, В. А. Чеканов**

**Институт проблем управления РАН,*
Россия, Москва, vnchest@rambler.ru
***АО «Электросталь»,*
Россия, Электросталь, Московская обл., vchekanov@inbox.ru

Аннотация. Для линейных многомерных систем строятся регуляторы по выходу, обеспечивающие заданную нижнюю частото-зависимую границу на величину передаточной матрицы возвратной разности, которая определяет как точностные характеристики замкнутой системы, так и гарантируемый радиус запасов устойчивости на физическом входе или выходе объекта управления. Показано, что такая задача синтеза сводится к эквивалентной стандартной проблеме H_∞ оптимизации, а полученный результат носит необходимый и достаточный характер.

Ключевые слова: линейные многомерные системы, передаточная матрица, точность, радиус запасов устойчивости, H_∞-оптимизация.

SYNTHESIS OF CONTROLLERS WITH A GIVEN LOWER THE BORDER OF THE RETURN DIFFERENCE MATRIX

V. N. Chestnov*, V. A. Chekanov**

**Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, Moscow, Russia, vnchest@rambler.ru*

***Metallurgical Plant «Electrostal», Electrostal, Moscow province, Russia, vchekanov@inbox.ru*

Abstract. For linear multivariable systems are built regulators output, providing specified frequency-dependent bounds on the value of the return difference transfer matrix, which determines both the accuracy of the closed-loop system, and guaranteed the radius of stability margins on a physical input or output of the control plant. It is shown that this synthesis problem is reduced to the standard problem H_∞-optimization, and the result is necessary and sufficient.

Keywords: linear multivariable systems, transfer matrix, accuracy, radius of stability margins, H_∞-optimization.

1. Постановка задачи. В теории и практике автоматического управления для учёта возможных нелинейностей и отклонений параметров от расчётных в объекте (или регуляторе) при синтезе широко используют понятия запасов устойчивости по модулю и фазе. Более адекватной характеристикой последних в одномерном и многомерном случаях является радиус запасов устойчивости [1, 2]. В работе [3] продемонстрировано, что регуляторы по выходу, построенные на базе современных техник H_2, H_∞, l_1 и μ-синтеза могут привести к малым запасам устойчивости по фазе и коэффициенту усиления, т.е. весьма малому радиусу запасов устойчивости. Это делает весьма актуальным поиск методов синтеза регуляторов, в которых бы обеспечивался требуемый радиус запасов устойчивости [1, 2, 4, 5]. Помимо этого, регулятор должен гарантировать заданную точность при действии не измеряемых ограниченных внешних возмущений. Один из таких достаточных подходов к синтезу регуляторов был предложен в [2]. Развиваемый ниже подход приводит к результату, имеющему необходимый и достаточный характер.

Рассмотрим полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта; $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий; $y \in R^{m_2}$ – вектор измеряемых регулируемых переменных объекта (вход регулятора); $w \in R^{m_3}$ – вектор неизмеряемых внешних возмущений.

Оценке подлежат матрицы A_c, B_c, C_c, D_c регулятора по измеряемому выходу:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \quad u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \tag{2}$$

где $x_c \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора размерности $n_c \le n$.

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции:

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3}. \tag{3}$$

Причем, амплитуды w_{ik}, начальные фазы ψ_{ik} (i=1,…,m; k=1,…,∞), а также частоты ω_k (k=1,…,∞) () возмущений (3) не известны.

Предполагается, что сумма модулей амплитуд каждого компонента внешнего возмущения ограничена:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_{ik}| \le w_i^*, \quad i = \overline{1, m_3},$$

где w_i^* ($i = \overline{1, m_3}$) – заданные числа.

Ошибки по регулируемым переменным определим соотношениями:

$$y_{i,st} = \sup_{t \ge t_{рег}} |y_i(t)|, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $t_{рег}$ – время регулирования (после окончания переходного процесса наступает режим работы системы, названный рабочим процессом [5]).

Требования к точности системы определим выражением:

$$y_{i,st} \le y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где y_i^* ($i = \overline{1, m_2}$) – заданные положительные числа (желаемые ошибки регулирования в замкнутой системе).

Наличие радиуса запасов устойчивости системы гарантирует выполнение кругового частотного матричного неравенства:

$$[I + W_{раз}(-j\omega)]^T [I + W_{раз}(j\omega)] \ge r^2 I, \omega \in [0, \infty),$$

где: r – радиус запасов устойчивости [1, 2], а $W_{раз}$ – передаточная матрицы системы объект-регулятор, разомкнутой по физическому входу/выходу объекта.

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (1.2) такой, чтобы выполнялись неравенства:

1) ошибки по регулируемым переменным были не больше желаемых:

$$y_{i,st} \le y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2}; \tag{4}$$

2) радиус запасов устойчивости был не менее заданного числа:

$$r \ge r^* \tag{5}$$

где r* – заданное (или максимально возможное) число.

Заметим, что условия (4), (5) могут выполняться при выполнении кругового частотного неравенства

$$[I + W^u(-j\omega)]^T [I + W^u(j\omega)] \ge R^T(-j\omega) R(j\omega), \tag{6}$$

где $R(s)$ – заданная передаточная матрица; $W^u(j\omega) = -K(j\omega)W(j\omega)$ – передаточная матрица системы (1), (2), разомкнутой по физическому входу объекта ($K(s)$ и $W(s)$ – передаточные матрицы регулятора и объекта, соответственно); I – единичная матрица.

Пусть $R(j\omega) = r(j\omega)I$, где передаточная функция $r(j\omega)$ выбирается проектировщиком исходя из желаемых частотных свойств передаточной матрицы возвратной разности $V(j\omega) = I + W_{раз}(j\omega)$. Поскольку в рассматриваемом случае $r(j\omega)$ – передаточная функция, то величину $|r(j\omega)|$ будем называть частотно-зависимым радиусом запасов устойчивости.

В одномерном случае, как показано на рис. 1, $|r(j\omega)|$ представляет собой радиус запретного круга для годографа амплитудно-фазовой частотной характе-

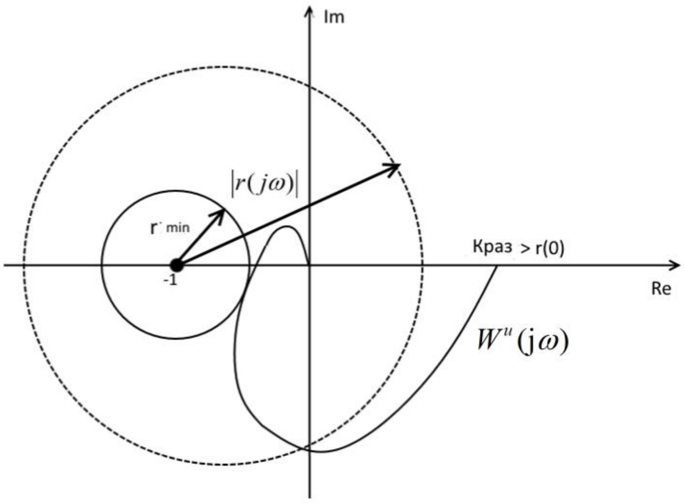

Рис. 1. Графическая интерпретация частотно-зависимого радиуса запасов устойчивости

ристики (АФЧХ) разомкнутой системы. Поэтому на малых частотах $|r(j\omega)|$ должен быть большим с целью обеспечения высокой точности (при отработке внешних возмущений), а на больших частотах (где годограф АФЧХ приближается к критической точке (-1, j0)) для обеспечения хороших запасов устойчивости (определяющих робастность замкнутой системы) должен быть близким к единице. Помимо этого, потребуем, чтобы $|r(j\omega)|$ монотонно убывал с ростом частоты до величины, сравнимой с единицей.

2. Решение задачи на основе стандартной процедуры H_∞-оптимизации. Рассмотрим структурную схему, представленную ниже.

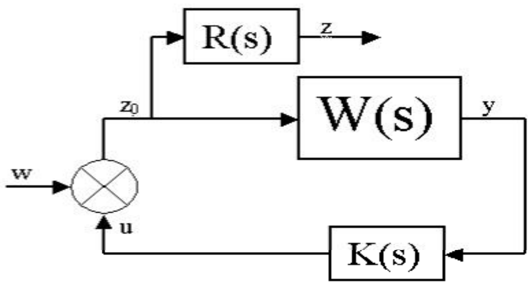

Рис. 2. Структурная схема

На рис. 2 w – вектор внешних возмущений; z – вектор регулируемых переменных (вектор z_0 – взвешенный с помощью весовой передаточной матрицы $R(s)$, выбираемой проектировщиком); $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора; $W(\mathrm{s}) = C(sI - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица объекта.

Представим (6) в эквивалентном виде:

$$T_0^T(-j\omega)R^T(-j\omega)R(j\omega)T_0(j\omega) \le I, \omega \in [0, \infty), \tag{7}$$

где $T_0(j\omega) = [I + W^u(j\omega)]^{-1}$– матрица чувствительности по входу объекта.

Условие (7) может не выполняться. Поэтому рассмотрим задачу по поиску регулятора (2), обеспечивающего выполнение целевого неравенства:

$$T^T(-j\omega)T(j\omega) \le \gamma^2 I \Leftrightarrow \|T\|_\infty \le \gamma, \quad \omega \in [0, \infty), \tag{8}$$

где $T(j\omega) = R(j\omega)T_0(j\omega)$ – взвешенная матрица чувствительности; γ – заданное или минимизируемое число.

Целевое неравенство (8) представляет собой стандартную задачу H_∞-оптимизации.

Теорема. Пусть решена стандартная задача (8), когда выполняются следующие равенства:

$$1)\quad Q = diag[q_1, q_2, \dots q_{m_2}]; \qquad q_i = \frac{(\sum_j^{m_3} w_j^*)^2}{\left(y_i^*\right)^2}, \qquad i = \overline{1, m_2}; \tag{9}$$

2) $R(s) = -\mathrm{K}(s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} B_2 + I,$ (10)

где $\mathrm{K} = -B_2^T P$ – матрица регулятора по состоянию, а P – положительно определённая матрица, являющаяся решением уравнения Риккати LQ-оптимизации:

$$A^T P + PA - PB_2 B_2^{\mathrm{T}} P = -C^T QC. \quad (11)$$

Тогда:

1) справедливо частотное тождество:

$$\left[I + W^u(-j\omega)\right]^T \left[I + W^u\left(j\omega\right)\right] = \frac{1}{\gamma^2}[I + H^T(-j\omega)H(j\omega)],$$

где $H(s) = Q^{1/2} C(sI - A)^{-1} B_2$.

2) радиус запасов устойчивости:

$r = \dfrac{1}{\gamma}$, где γ – реализовавшееся значение в задаче (8);

3) установившиеся ошибки при B_1=B_2:

$$y_{i,st} \le \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1,\, m_2}.$$

3. Алгоритм синтеза регулятора.

1. Формируем диагональную весовую матрицу Q на основе (9). Решаем уравнение Риккати (11) LQ-оптимизации используя *Matlab*-функцию $[P, L, G] = care(A,B_2,C^T QC)$. $G = -K$.
2. Получим весовую передаточную матрицу $\mathrm{R(s)} = I + B_2^T P(s\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} B_2$.
3. Находим системную матрицу $P=ltisys(A_{ob}, B_{ob}, C_{ob}, D_{ob})$ обобщённого объекта. $A_{ob} = A,\ B_{ob} = [B_2\ \ B_2],\ C_{ob} = \begin{bmatrix} B_2^T \cdot P \\ C_2 \end{bmatrix},\ D_{ob} = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. Определим оптимальное $\gamma_o = h\inf lmi(P,[m_2, m])$, где m_2 и m – число входов и выходов регулятора, соответственно.
5. Выбираем $\gamma \ge \gamma_o$ и строим системную матрицу регулятора K, разрешающего задачу (8), с помощью процедуры $[\gamma, K] = h\inf lmi(P,[m_2, m], \gamma, \varepsilon)$, где ε – точность вычисления.
6. Из системной матрицы K извлекаем матрицы регулятора процедурой $[A_c, B_c, C_c, D_c] = ltiss(K)$. Порядок полученного регулятора не превышает порядка объекта.

Библиографический список

1. Честнов, В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞-оптимизации / В.Н. Честнов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 7. –С. 101-109.
2. Агафонов, П.А. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе H_∞-подхода / П.А. Агафонов, В.Н. Честнов // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 101-108.
3. Keel, L.H. Robust, Fragile, or Optimal? / L.H. Keel, S.P. Bhattacharyya // IEEE Trans. Automat. Control. – 1997. – Vol. 42. – № 8. – P. 1098-1105.
4. Lehtomaki, N.A. Robustness results in Linear-Quadratic Gaussian based multivariable control designs / N.A. Lehtomaki, N.R. Sandell, M. Athans // IEEE Trans. Automat. Control. – 1981. – V. 26. – № 1. – P. 75-92.
5. Александров, А.Г. Синтез регуляторов по показателям точности и быстродействию. I. Минимально-фазовые одномерные объекты / А.Г. Александров // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 5. – С. 27-42.