ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2014, том 50, № 8, с. 1138–1142

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2014 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2014. Т. 50. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nonlin@cs.msu.su)**).

DOI: 10.1134/S0374064114080123

В. Н. Честнов (Москва) "Синтез многомерных систем заданной точности, времени регулирования и радиуса запасов устойчивости" (24.02.2014).

Рассматриваются линейные многомерные системы, подверженные воздействию ограниченных по мощности неизмеряемых полигармонических внешних возмущений. Ставится задача синтеза линейного регулятора по измеряемому выходу объекта управления, обеспечивающего заданные ошибки по регулируемым переменным объекта в установившемся режиме. Кроме этого, регулятор должен обеспечивать заданное время регулирования (характеризуемого степенью устойчивости), а также желаемый радиус запасов устойчивости, характеризующий близость замкнутой системы объект–регулятор к границе устойчивости (гарантирующий на физическом входе или выходе объекта заданные многомерные запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления) (см. [1]).

Имеется полностью управляемый и наблюдаемый объект управления, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_f(t) + B_2 u(t), \quad z(t) = y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор переменных состояния, u – m-мерный вектор управляющих воздействий, $z = y$ – m_2-мерный вектор регулируемых и одновременно измеряемых переменных объекта, w_f – μ-мерный вектор неизмеряемых полигармонических внешних возмущений с компонентами $w_{fi}(t) = \sum_{k=1}^{p} w_{ik}\sin(\omega_k t + \psi_{ik})$, $i = \overline{1,\mu}$ (с неизвестными амплитудами, начальными фазами и частотами), ограниченными по мощности: $\sum_{k=1}^{p} w_{ik}^2 \le w_i^{*2}$ ($i = \overline{1,\mu}$), где p – известное число гармоник, w_i^* ($i = \overline{1,\mu}$) – заданные числа, A, B_1, B_2, C – известные матрицы соответствующих размеров.

Будем искать динамический регулятор по выходу в виде

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \quad u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \tag{2}$$

где x_c – n_c-мерный вектор состояния регулятора, а матрицы A_c, B_c, C_c, D_c являются искомыми. Определим установившиеся ошибки по регулируемым переменным соотношениями $y_{i,st} = \limsup\limits_{t\to\infty} |y_i(t)|$, а радиус установившегося состояния замкнутой системы по этим переменным [2] равенством $r_{st}^2 = \sum_{i=1}^{m_2} (y_{i,st}/y_i^*)^2$, где $y_i^* > 0$ ($i = \overline{1,m_2}$) – заданные числа. Будем говорить [1], что система (1), (2) имеет радиус запасов устойчивости $0 < r \le 1$, если выполнено матричное круговое частотное неравенство

$$[I + W^y(-j\omega)]^{\mathrm{т}}[I + W^y(j\omega)] \ge r^2 I, \quad \omega \in [0,\infty), \tag{3}$$

*) Под руководством академика РАН С.В. Емельянова.

**) Составитель хроники А.П. Носов.

где $W^y(s) = -W(s)W_c(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы (1), (2) по выходу объекта y, W и W_c – передаточные матрицы объекта и регулятора соответственно. Потребуем также, чтобы время регулирования в замкнутой системе (1), (2) не превышало заданного t_p, которое можно оценить по приближенной формуле $t_p \approx 3/\beta$, где β – степень устойчивости замкнутой системы (минимальное расстояние до мнимой оси от левого корня характеристического полинома замкнутой системы). Эти требования в общем случае противоречивы.

Задача. Построить стабилизирующий регулятор по выходу (2) такой, чтобы выполнялись условия: $r_{st}^2 \leq \gamma^2$, где γ – заданное или минимизируемое число, а также условие (3) с заданным r; все собственные значения матрицы замкнутой системы A_{cl} удовлетворяли неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i(A_{cl}) \leq -\beta$ ($i = \overline{1, n+n_c}$).

Аналогично формулируется задача в случае, когда размыкание замкнутого контура объект–регулятор происходит на входе u объекта.

Определим вектор фиктивных регулируемых переменных $z_1 = y + w_1$ (w_1 – вектор фиктивных внешних возмущений) и взвешенный вектор регулируемых переменных объекта $z_2 = Q^{1/2}y$ ($Q > 0$ – диагональная весовая матрица) и объединим эти векторы в расширенный вектор $z = [z_1^{\mathrm{T}}, z_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Введем также расширенный вектор внешних возмущений $w = [w_1^{\mathrm{T}}, w_f^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Передаточную матрицу замкнутой системы, связывающую эти векторы, обозначим через $T_{zw}(s)$. Наряду с ней рассмотрим смещенную передаточную матрицу $T_{zw}(s-\beta)$, которая получается, если в уравнениях объекта (1) матрицу A заменить на $\tilde{A} = A + \beta I$, где I – единичная матрица.

Пусть регулятор (2) с матрицами $\tilde{A}_c$, B_c, C_c, D_c разрешает задачу $\|T_{zw}(s-\beta)\|_\infty \leq \gamma$ минимизации H_∞-нормы этой передаточной матрицы.

Теорема. *Регулятор с матрицами $\tilde{A}_c - \beta I$, B_c, C_c, D_c разрешает поставленную задачу, при этом значение r в неравенстве (3) равно реализовавшемуся значению γ^{-1} в смещенной H_∞-задаче.*

Если выбирать элементы диагональной весовой матрицы Q из равенств $q_i = p\|w^*\|^2/y_i^{*2}$ ($i = \overline{1, m_2}$) ($\|w^*\|$ – евклидова норма вектора $w^* = [w_1^*, w_2^*, \ldots, w_\mu^*]^{\mathrm{T}}$), то придем к выполнению целевого условия $r_{st}^2 \leq \gamma^2$ поставленной задачи.

Литература. 1. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞-оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1999. № 7. С. 101–109. 2. Честнов В.Н. Синтез H_∞-регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 170–185.

А. Н. Ветохин (Москва) "О некоторых свойствах топологической энтропии отображений, удовлетворяющих обобщенному условию Гёльдера" (24.03.2014).

Устанавливается точный бэровский класс топологической энтропии семейства отображений, удовлетворяющих обобщенному условию Гёльдера и непрерывно зависящих от параметра.

Напомним определение топологической энтропии динамической системы [1, с. 120]. Пусть X – компактное метрическое пространство и $f : X \to X$ – непрерывное отображение. На пространстве X, кроме исходной метрики d, определим систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x,y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n)-покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ – минимальное число элементов (f, ε, n)-покрытия. *Топологической энтропией* динамической системы, порожденной непрерывным отображением f, называется величина

$$h_{\mathrm{top}}^d(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \, n^{-1} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

Отметим, что если метрика d' задает ту же топологию на пространстве X, что и d, то $h^d_{\mathrm{top}}(f) = h^{d'}_{\mathrm{top}}(f)$ [1, с. 121], поэтому в дальнейшем будем опускать индекс d.

По метрическому пространству $\mathfrak{M}$ и непрерывному (по совокупности переменных) отображению

$$f:\ \mathfrak{M} \times X \to X, \tag{1}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_\mu(\cdot)). \tag{2}$$

В монографии [1, с. 501], в частности, установлено, что для $X = [0,1]$ и произвольного пространства $\mathfrak{M}$ функция (2) является всюду полунепрерывной снизу. Вообще говоря, функция (2) может и не быть полунепрерывной снизу функцией этого параметра. Действительно, для $X = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le 1\}$, $\mathfrak{M} = [0,1]$ и семейства отображений

$$f_\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z = 0, \\ \mu z^2/|z|, & \text{если} \quad z \ne 0, \end{cases}$$

имеем $h_{\mathrm{top}}(f_\mu) = 0$ при $\mu \in [0,1)$, $h_{\mathrm{top}}(f_\mu) \ge \ln 2$ при $\mu = 1$. Таким образом, функция (2) не является полунепрерывной снизу в точке $\mu = 1$.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность непрерывных возрастающих на $\mathbb{R}^+$ функций, удовлетворяющих при всех k условию $h_k(0) = 0$. Будем говорить, что отображение $f:\ X \to X$ удовлетворяет *обобщенному условию Гёльдера,* если найдется такое k_0, при котором для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство $d(f(x), f(y)) \le h_{k_0}(d(x,y))$.

Напомним, что функциями *нулевого* класса Бэра на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями *p-го класса* Бэра называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса Бэра.

Теорема 1. *Для любой последовательности $\mathcal{H}$, любого метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (1), удовлетворяющего обобщенному условию Гёльдера по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, функция (2) принадлежит второму классу Бэра, а если $\mathfrak{M}$ метризуемо полной метрикой, то в $\mathfrak{M}$ найдется такое всюду плотное множество A типа G_δ, что сужение функции (2) на A непрерывно.*

Напомним, что свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру,* если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ.

Теорема 2. *Для любой последовательности $\mathcal{H}$, любого полного метрического пространства $\mathfrak{M}$ и каждого отображения (1), удовлетворяющего обобщенному условию Гёльдера по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, функция (2) в типичной по Бэру точке полунепрерывна снизу.*

Отметим, что для отображений (1), удовлетворяющих условию Липшица по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, справедливость теорем 1 и 2 установлена в работе [2].

Оказывается, в теореме 1 второй класс Бэра, вообще говоря, нельзя заменить на первый класс Бэра. Рассмотрим множество последовательностей $\{\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) :\ \mu_k \in \{0,1\}\}$ с метрикой

$$d_0(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu = \nu, \\ \dfrac{1}{\min\{k :\ \mu_k \ne \nu_k\}}, & \text{если} \quad \mu \ne \nu. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathcal{B}$ [3, с. 154].

Теорема 3. *Для $\mathfrak{M} = \mathcal{B}$ и $X = \mathcal{B}$ и любого $K > 1$ найдется такое отображение (1), удовлетворяющее условию Липшица с константой K по $x \in X$ при всяком фиксированном значении $\mu \in \mathfrak{M}$, что функция (2) не принадлежит первому классу Бэра.*

Литература. 1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999. 2. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем // Мат. заметки. 2013. Т. 93. Вып. 3. С. 347–356. 3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

А. В. Ильин (Москва, Россия), **Н. А. Изобов** (Минск, Беларусь) "Эффект Перрона бесконечной смены значений характеристических показателей дифференциальных систем" (24.03.2014).

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A) < 0$. Эти системы являются линейными приближениями для нелинейных дифференциальных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^n, \quad t \geq t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемыми по своим переменным $t, y_1, \ldots, y_n$ возмущениями $f: [t_0, +\infty) \times R^n \to R^n$ порядка $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и возможного роста вне ее:

$$\|f(t,y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad y \in R^n, \quad t \geq t_0. \tag{3}$$

Различным обобщениям и уточнениям известного эффекта Перрона [1; 2, с. 50–51; 3, с. 43–44] частичной смены знака отрицательных характеристических показателей двумерной линейной системы (1) под действием нелинейных возмущений второго порядка посвящены наши работы [4–11]. В частности, реализованный в работах [10, 11] общий n-мерный эффект Перрона смены значений всех характеристических показателей в двумерном случае для произвольных параметров $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, $m > 1$ и

$$\beta_1 \in [\lambda_1 + \infty), \quad \beta_2 \in [\lambda_2 + \infty), \quad \beta_1 \leq \beta_2,$$

устанавливает существование двумерной системы (1) с характеристическими показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2(A) = \lambda_2$ и удовлетворяющего условию (3) возмущения $f(t,y)$ порядка $m > 1$ таких, что все нетривиальные решения $y(t,c)$, $c = (c_1, c_2) \in R^2$, возмущенной двумерной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристические показатели

$$\lambda[y(\cdot, c)] = \begin{cases} \beta_1, & c_2 = 0, \quad c_1 \neq 0, \\ \beta_2, & c_2 \neq 0. \end{cases}$$

Существенным обобщением сформулированного двумерного эффекта Перрона смены значений было бы доказательство его аналога в случае произвольных конечных или бесконечных счетных множеств β_1 и β_2. Такой бесконечный вариант двумерного эффекта Перрона смены значений $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ характеристических показателей двумерной системы линейного приближения (1) на счетное множество $\beta_1 \cup \beta_2$ значений характеристических показателей всех нетривиальных решений двумерной же нелинейной системы (2) с возмущением (3) порядка $m > 1$, в частности малости в окрестности начала координат, и содержит настоящая работа. Справедлива

Теорема. *Для любых параметров* $m > 1$ *и* $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ *и непустых произвольных конечных или ограниченных счетных множеств*

$$\beta_i = \{\beta_{ik}\} \subset [\lambda_i, +\infty), \quad i \in \{1, 2\},$$

удовлетворяющих условию отделенности $\sup \beta_1 \leq \inf \beta_2$, *существуют:*

1) двумерная система линейного приближения (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[1, +\infty)$ *коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2(A) = \lambda_2$;

2) бесконечно дифференцируемое по своим аргументам t, y_1, y_2 *и удовлетворяющее условию (3) возмущение* $f:\ [1,+\infty)\times R^2\to R^2$ *порядка* $m>1$,

такие, что все нетривиальные решения $y(t,c)$, $y(1,c)=c$, *нелинейной двумерной возмущенной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и их характеристические показатели составляют множества*

$$\{\lambda[y(\cdot,c)]:\ c_2=0,\ c_1\neq 0\}=\beta_1,$$

$$\{\lambda[y(\cdot,c)]:\ c_2\neq 0\}=\beta_2,\quad c=(c_1,c_2)\in R^2.$$

Замечание 1. Исследованию устойчивости различных дифференциальных систем и механизма ее разрушения, в том числе и под действием возмущений высшего порядка малости, посвящены недавние интересные и важные работы В.В. Козлова [12, 13] и уже упоминавшиеся работы Г.А. Леонова.

Замечание 2. В нашей предыдущей работе [11] содержится опечатка: на с. 1529 в 17-й строке сверху вместо $\varphi(i)$ необходимо $\psi(i)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского (проект 14-01-90010 Бел-а) и Белорусского республиканского (проект Ф14Р-011) фондов фундаментальных исследований.

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd 32. Hf 5. S. 702–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва; Ижевск, 2006. 3. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. St. Petersburg, 2008. 4. Коровин С.К., Изобов Н.А. Эффект Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Докл. РАН. 2010. Т. 434. № 6. С. 739–741. 5. Коровин С.К., Изобов Н.А. Об эффекте Перрона смены знака характеристических показателей Ляпунова решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1388–1402. 6. Коровин С.К., Изобов Н.А. Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550. 7. Коровин С.К., Изобов Н.А. Обобщение эффекта Перрона смены знака с отрицательного на положительный характеристических показателей всех решений двух дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 933–945. 8. Коровин С.К., Изобов Н.А. Многомерный эффект Перрона смены знака всех характеристических показателей дифференциальных систем // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 1. С. 17–22. 9. Изобов Н.А., Коровин С.К. Многомерный аналог двумерного эффекта Перрона смены знака характеристических показателей для бесконечно дифференцируемых дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1466–1482. 10. Ильин А.В., Изобов Н.А. Общий многомерный эффект Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 8. С. 1087–1088. 11. Изобов Н.А., Ильин А.В. Конечномерный эффект Перрона смены всех значений характеристических показателей дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1522–1536. 12. Козлов В.В. О механизме потери устойчивости // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 4. С. 496–505. 13. Козлов В.В. О стабилизации неустойчивых равновесий периодическими по времени гироскопическими силами // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 6. С. 762–763.