

Самиорин Николай Иванович, Честнов Владимир Николаевич

Институт проблем управления РАН

## К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ОГРАНИЧЕННЫХ ПО МОЩНОСТИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

**Аннотация:** Рассматривается синтез робастных регуляторов линейных многомерных систем с неопределенностью физических параметров в заданных границах, подверженных действию неизмеряемых внешних полигармонических возмущений, ограниченных по мощности. Ставится задача построения регулятора, который помимо робастной устойчивости замкнутой системы гарантирует заданные границы на среднеквадратичные значения регулируемых переменных. Решение задачи сводится к некоторой специальным образом сконструированной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации, в которой заданная точность обеспечивается путем выбора весовой матрицы при регулируемых переменных.

**Ключевые слова:** робастная устойчивость, параметрическая неопределенность, ограниченные по мощности внешние возмущения,  $H_\infty$  - управление.

*Chestnov V.N., Samshorin N.I.*

## SYNTHESIS OF CONTROLLERS IN CASE OF PARAMETRIC UNCERTAINTY AND BOUNDED IN POWER EXTERNAL DISTURBANCES.

**Abstract:** We consider the robust stabilization problem for linear multivariable systems whose physical parameters may deviate from nominal in some known bounds, and the control plant is subject to non-measurable polyharmonic external disturbances bounded in power. We pose the problem of synthesizing a controller that guarantees robust stability of the closed-loop system and additionally ensures given mean-square values with respect to controlled variables. The solution of this problem can be reduced to a standard  $H_\infty$ -optimization procedure, while the necessary accuracy is achieved by choosing the weight matrix for controlled plant variables.

**Key words:** robust stability, parametric uncertainty, external disturbances bounded in power,  $H_\infty$ -control.

### Введение

Проблема обеспечения робастных свойств синтезируемых динамических систем с регуляторами по выходу в современной теории автоматического управления играет существенную роль [1–4]. В этой связи, очевидна необходимость построить регулятор так, чтобы с одной стороны он обеспечивал робастную устойчивость замкнутой системы при заданных отклонениях физических параметров объекта от расчетных (номинальных), а с другой, гарантировал бы заданные среднеквадратичные ошибки регулирования при действии полигармонических внешних возмущений (с неизвестными амплитудами и частотами), ограниченных по мощности.

Настоящая работа выполнена в русле частотного подхода к синтезу робастных регуляторов многомерных систем, развитого в [5–11].

Решение задачи опирается на «технику размыкания» системы «объект – регулятор» по варьируемым параметрам объекта [5, 9, 10]. При этом регулятор обеспечивает заданные границы изменения коэффициентов усиления в искусственно созданных каналах, в которых присутствуют варьируемые параметры объекта (представленные их номиналами). Заметим, что традиционно в теории автоматического управления в качестве точек размыкания замкнутой системы используют обычно физический вход или выход объекта управления [6, 7]. Эта задача (обеспечение заданных границ коэффициентов усиления в данных контурах) сводится к стандартной вырожденной задаче  $H_\infty$ -оптимизации [5, 10]. Обеспечение заданной точности в такой  $H_\infty$  задаче сводится к выбору весовых коэффициентов при регулируемых переменных, для которых получены строгие аналитические выражения.

### Постановка задачи.

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями в физических переменных [12]:

$$L_1(p)z_0(t) = L_2(p)u(t) + L_3(p)f(t), \quad y(t) = Nz_0(t), \quad (1)$$

где  $z_0$  –  $n_0$ -мерный вектор физических переменных объекта (скорость, ускорение, ток, напряжение, перемещение, угол поворота, и т.д.);  $u$  –  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $y$  –  $m_2$ -мерный вектор измеряемых (и одновременно регулируемых) переменных объекта;  $f$  –  $m_3$ -мерный вектор внешних возмущений;  $N$  – известная числовая матрица размером  $(m_2 \times n_0)$ ;  $L_1(p)$ ,  $L_2(p)$ ,  $L_3(p)$  – полиномиальные матрицы размеров  $(n_0 \times n_0)$ ,  $(n_0 \times m)$ ,  $(n_0 \times m_3)$  соответственно, оператора дифференцирования  $p = d/dt$

$$L_1(p) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} L_1^{(i)} p^i, \quad L_2(p) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} L_2^{(j)} p^j, \quad L_3(p) = \sum_{k=0}^{\alpha_3} L_3^{(k)} p^k \quad (2)$$

где  $L_1^{(i)}, L_2^{(j)}, L_3^{(k)}$  – известные вещественные матрицы соответствующих размеров,  $\alpha_2, \alpha_3 < \alpha_1$ .

Будем полагать, что объект (1) стабилизуем и детектируем, а его уравнения представляют собой исходное, наименее преобразованное описание, полученное на основе фундаментальных физических законов.

Элементы матриц  $L_1^{(i)} (i = \overline{1, \alpha_1})$ ,  $L_2^{(j)} (j = \overline{1, \alpha_2})$  далее будем называть физическими параметрами объекта управления. Пусть  $n$  физических параметров объекта с номинальными значениями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  могут принимать значения из заданных интервалов

$$\lambda_i + \Delta\lambda_i \in (\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}), \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

где  $\Delta\lambda_i$  – отклонение параметра от расчетного,  $\lambda_i^{\min}, \lambda_i^{\max}$  – известные нижняя и верхняя границы.

Элементы матрицы  $L_3(p)$  на устойчивость замкнутой системы не оказывают влияния, поэтому их отклонения от расчетных далее не рассматриваются.

Компоненты вектора внешних возмущений  $f$  представляют собой ограниченные полигармонические функции, вида:

$$f_i(t) = f_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}), \quad i = \overline{1, m_3} \quad .(4)$$

Здесь:  $f_{i0}$  – неизвестные постоянные составляющие, а амплитуды  $w_{ik}$ , начальные фазы  $\psi_{ik}$ , а также бесконечное число частот  $\omega_k$  гармоник неизвестны.

Будем полагать, что среднеквадратичные значения (мощности) каждой компоненты внешнего возмущения подчинены условию:

$$\langle f_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i^2(t) dt = (f_{i0})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} w_{ik}^2 \leq w_i^{*2}, \quad i = \overline{1, m_3}, \quad (5)$$

где  $w_i^* (i = \overline{1, m_3})$  – заданные числа.

Определим среднеквадратичные значения регулируемых переменных [11]:

$$\langle y_i^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y_i^2(t) dt > 0, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Будем говорить, что требования к точности выполнены, если:

$$\langle y_i^2 \rangle \leq (y_i^*)^2, \quad i = \overline{1, m_2} \quad (6)$$

где  $y_i^* > 0, i = \overline{1, m_2}$  – заданные числа.

Однако ясно, что такого регулятора может не существовать, поэтому определим среднеквадратичный радиус установившегося состояния замкнутой системы по регулируемым переменным соотношением [11]:

$$\langle r_{st}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\langle y_i^2 \rangle}{(y_i^*)^2}, \quad (7)$$

на который и будем накладывать ограничения.

**Задача 1.** Построить стабилизирующий регулятор по выходу

$$\dot{x}_c = A_c \cdot x_c + B_c \cdot y; \quad u = C_c \cdot x_c + D_c \cdot y, \quad (8)$$

такой, чтобы, с одной стороны, при заданных конечных отклонениях параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  от расчетных (3) замкнутая система (1), (8) сохраняла асимптотическую устойчивость, а с другой стороны выполнялось условие

$$\langle r_{st}^2 \rangle = \sum_{i=1}^{m_2} \frac{\langle y_i^2 \rangle}{(y_i^*)^2} \leq \gamma^2, \quad (9)$$

где  $\gamma$  – заданное или минимизируемое число,  $x \in R^{n_c}$ ,  $n_c \leq n$ ,  $A_c, B_c, C_c, D_c$  – искомые матрицы регулятора соответствующего размера.

### Каноническая $(W, \Lambda, K)$ – форма.

Для решения поставленной задачи, представим уравнения замкнутой системы (1), (8) в канонической  $(W, \Lambda, K)$  – форме [5, 10] с учетом внешнего возмущения  $f$ . Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{y} = W_{11}\tilde{u} + W_{12}u + W_{13}f & \tilde{u} = \Lambda\tilde{y} \\ y = W_{21}\tilde{u} + W_{22}u + W_{23}f & u = Ky, \end{cases} \quad (10)$$

где  $W_{ij}(s) (i=1,2, j=1\dots3)$  – известные передаточные матрицы, не содержащие варьируемых параметров (3);  $u, y$  – физический вход и выход объекта управления (1);  $\tilde{u}, \tilde{y}$  –  $n$ -мерные фиктивные вход и выход объекта управления;  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  – диагональная матрица параметров объекта управления, подверженных отклонениям от расчетных;  $K(s)$  – искомая передаточная матрица регулятора (8)  $K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ , где  $I$  – единичная матрица.

Структурная схема  $(W, \Lambda, K)$  – формы, соответствующая уравнениям (10), приведена на рис.1.

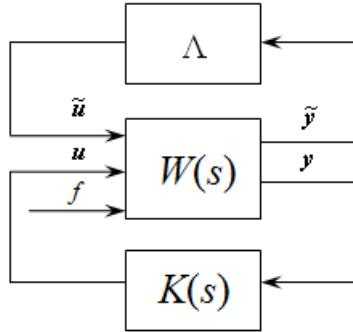


Рис. 1. Структурная схема  $(W, \Lambda, K)$ -формы системы с внешним возмущением

Заметим, что уравнения замкнутой системы (1), (8) всегда могут быть представлены в канонической  $(W, \Lambda, K)$  – форме (10). Доказательство этого факта конструктивно, дает алгоритм построения этой формы и приведено в [10].

### Подход к решению задачи

Передаточная матрица разомкнутой системы (10) по варьируемым параметрам  $\lambda_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) (когда размыкание осуществляется по вектору  $\tilde{u}$ ), записывается в виде [5, 9, 10] :

$$W_{\text{pas}}^{\tilde{u}}(s) = \Lambda \cdot [-W_{11} - W_{12}K(I - W_{22}K)^{-1}W_{21}]. \quad (11)$$

Как видно из (11), особенностью данной передаточной матрицы является то, что варьируемые параметры составляют в ней диагональную матрицу коэффициентов усиления, что принципиально важно.

Заметим, что если эта передаточная матрица удовлетворяет круговому частотному неравенству [5, 9, 10]:

$$[I + W_{\text{pas}}^{\tilde{u}}(-j\omega)]^T [I + W_{\text{pas}}^{\tilde{u}}(j\omega)] \geq r^2 I, \quad \omega \in [0, \infty), \quad (12)$$

то имеют место следующие достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров:

$$\min \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\} < \lambda_i + \Delta\lambda_i < \max \left\{ \frac{\lambda_i}{1+r}, \frac{\lambda_i}{1-r} \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

гарантирующие робастную устойчивость системы (1), (8). Здесь  $\lambda_i$  – номинальные значения физических параметров объекта, подверженных отклонениям от расчетных, а  $r$  – радиус запасов устойчивости ( $0 < r \leq 1$ ) [5, 9, 10].

Отметим одну особенность (13). Пусть для простоты  $\lambda_i > 0$ , а радиус запасов устойчивости равен своему максимально возможному значению,  $r = 1$ . Тогда из (13) следует, что интервалы возможных значений параметров  $\lambda_i$ :

$$\frac{\lambda_i}{1+r} = \frac{\lambda_i}{2} \leq \lambda_i + \Delta\lambda_i \leq \frac{\lambda_i}{1-r} = \infty, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Здесь мы имеем хорошую верхнюю границу для  $\lambda_i$ , однако максимальные уменьшение  $\lambda_i$  от номинала, возможно всего лишь в 2 раза, что не всегда приемлемо и для обеспечения допусков (3) нужно выбирать другие номиналы  $\lambda_i$ .

Покажем, что для улучшения нижней границы (14) можно воспользоваться не частотным условием (12), а другим, которое вытекает из нижеследующего.

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис.2, где введена новая регулируемая переменная  $z = \tilde{u}$  (в [5, 10]  $z = w + \tilde{u}$ )

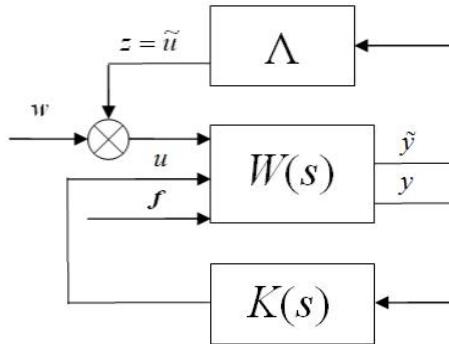


Рис. 2. Структурная схема замкнутой системы с фиктивным возмущением

Здесь дополнительно к рис. 1 введены:  $w \in R^n$  – вектор фиктивных внешних возмущений;  $z \in R^n$  – вектор фиктивных регулируемых переменных, равный  $\tilde{u}$ .

Легко показать непосредственным вычислением, что передаточная матрица, связывающая фиктивное внешнее возмущение  $w$  с фиктивной регулируемой переменной  $z = \tilde{u}$  в замкнутой системе рис.2 имеет вид:

$$z = T_{zw} \cdot w, \quad T_{zw}(s) = -W_{\text{паз}}^{\tilde{u}}(s) \cdot [I + W_{\text{паз}}^{\tilde{u}}(s)]^{-1} \quad (15)$$

где  $W_{\text{паз}}^{\tilde{u}}(s)$  определена формулой (11).

Следуя работе [13], поместим на выход  $Z$  замкнутой системы рис. 2 мультипликативное возмущение  $I+L$  ( $L = \text{diag}[l_1, l_2, \dots, l_n]$ ) как показано на рис.3.

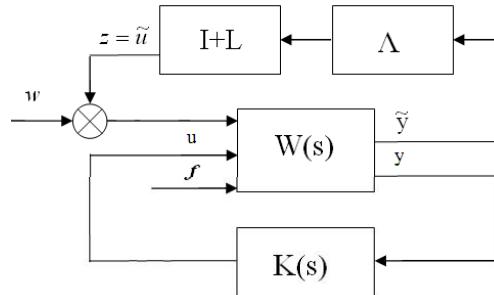


Рис. 3. Структурная схема замкнутой системы с мультипликативным возмущением

Из работы [13], следует, что замкнутая система рис. 3 будет асимптотически устойчива, если выполняется условие

$$\bar{\sigma}(L) < \frac{1}{\sigma(T_{zw})}, \quad (16)$$

где  $\bar{\sigma}(T_{zw})$  – максимальное сингулярное значение матрицы  $T_{zw}(j\omega)$  для всех частот  $\omega \in [0, \infty)$ , которое, как известно [8], есть  $H_\infty$ -норма  $T_{zw}$  и, таким образом, это неравенство с учетом диагональной структуры  $L$  дает следующие оценки на диагональные элементы этой матрицы, которые не нарушают асимптотической устойчивости замкнутой системы рис. 3:

$$|l_i| \leq \frac{1}{\|T_{zw}\|_\infty}. \quad (17)$$

Пусть найдено решение задачи синтеза регулятора  $K(s)$  такого, что выполнено условие

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma, \quad (18)$$

где  $\gamma$  – заданное или минимизируемое число.

Тогда очевидно в силу диагональной структуры  $\Lambda$  и неравенства (17), что замкнутая система не потеряет устойчивости если

$$\min\left\{\lambda_i \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma}\right\} \leq \lambda_i + \Delta\lambda \leq \max\left\{\lambda_i \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}, \lambda_i \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma}\right\}, \quad i = \overline{1, n} \quad (19)$$

В одномерном случае ( $n=1$ ), неравенство (18) означает, что модуль частотной передаточной функции замкнутой системы  $|T_{zw}(j\omega)|$  для всех вещественных частот  $\omega$  не превышает значения  $\gamma$ . В классической теории автоматического управления такое число – есть показатель колебательности  $M$  ( $\gamma = M$ ) [14]. Это, в частности, говорит о том, что годограф Найквиста, соответствующий передаточной функции разомкнутой системы  $W_{\text{pas}}(s)$  из (11), не пересекает круга радиусом  $R = \gamma / (\gamma^2 - 1)$  с центром в точке  $(-C; j \cdot 0)$  на плоскости годографа, где  $C = \gamma^2 / (\gamma^2 - 1)$ . Отсюда, в частности, следует, что коэффициент усиления в таком замкнутом контуре без потери устойчивости изменять в интервале  $((\gamma-1)/\gamma, (\gamma+1)/\gamma)$ .

В многомерном случае ( $n > 1$ ) условие (17) имеет следующую физическую интерпретацию: по каждому входу  $\tilde{u}$  на рис. 2, коэффициенты усиления от номинального значения равного единице можно независимо от других изменять в интервалах  $((\gamma-1)/\gamma, (\gamma+1)/\gamma)$  без потери устойчивости. Отсюда, кстати, и следуют формулы (19).

Таким образом, решение первой части задачи 1 сводится к такому построению регулятора (8) в  $H_\infty$ -проблеме (18), при котором величина  $\gamma$  принимает заданное или минимально возможное значение.

Следующий шаг в решении задачи 1 это учет целевого условия (9) при действии ограниченных внешних возмущений (4), (5).

### Сведение задачи к стандартной проблеме $H_\infty$ -оптимизации

Рассмотрим замкнутую систему, представленную на рис. 4:

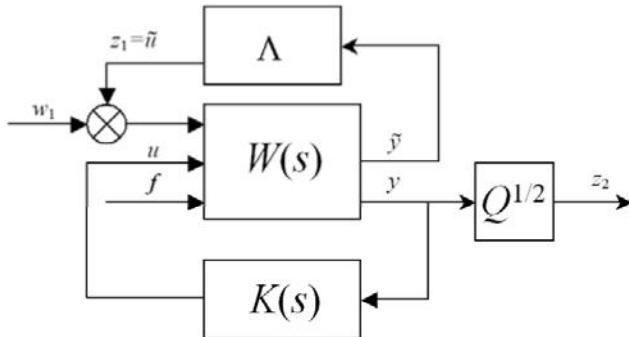


Рис. 4. Структурная схема замкнутой системы

Она описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= W_{11}(z_1 + w_1) + W_{12}u + W_{13}f & \tilde{u} &= \Lambda \tilde{y} & z_1 &= \tilde{u} \\ y &= W_{21}(z_1 + w_1) + W_{22}u + W_{23}f & u &= Ky & z_2 &= Q^{1/2}y. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь:  $w_1 \in R^n$  – вектор фиктивных внешних возмущений;  $z_1 \in R^n$  – вектор фиктивных регулируемых переменных;  $z_2 \in R^{m_2}$  – взвешенный вектор регулируемых переменных с помощью диагональной весовой матрицы  $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_{m_2}]$  с положительными элементами  $q_i > 0$  ( $i = \overline{1, m_2}$ ).

Введем расширенный вектор внешних возмущений  $w$ , включающий вектор фиктивных внешних возмущений  $w_1$  и вектор реально действующих на объект внешних

возмущений  $f$ , а также расширенный вектор регулируемых переменных  $z$ , объединяющий векторы  $z_1$  и  $z_2$ . Передаточную матрицу замкнутой системы, связывающую эти векторы, обозначим через  $T_{zw}$  и тогда можно записать

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw} \times w = \begin{pmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 f} \\ Q^{1/2} T_{y w_1} & Q^{1/2} T_{y f} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ f \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Пусть искомый регулятор  $K(s)$  разрешает задачу минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной матрицы такой замкнутой системы:

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma. \quad (22)$$

Тогда каждый из блоков этой матрицы удовлетворяет аналогичному условию [14], в частности

$$\|T_{z_1 w_1}\|_\infty \leq \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{y f}\|_\infty \leq \gamma. \quad (23)$$

Первое неравенство (23) совпадает с (18), поэтому имеем гарантируемые допуски на параметры (19), где  $\gamma$  – реализованное значение при решении задачи (22). Второе из неравенств (23) может быть представлено в эквивалентной частотной форме [7, 8]

$$T_{y f}^T(-j\omega) Q T_{y f}(j\omega) \leq \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (24)$$

Имеет место следующая лемма, доказательство которой приведено в [11].

**Лемма (о средних квадратах).** Пусть выполнено частотное неравенство (24), тогда средние квадраты выходных переменных устойчивой системы при действии входного сигнала из класса (4), (5) принадлежат множеству, отсыываемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i \langle y_i^2 \rangle \leq \gamma^2 \|w^*\|^2, \quad (25)$$

где  $\|w^*\|$  – евклидова норма вектора  $w^*$  с компонентами правой части (5).

Очевидно, что выбирая элементы весовой матрицы  $Q$  из равенств:

$$q_i = \frac{\|w^*\|^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2}, \quad (26)$$

из (25) придем к выполнению целевого условия (9), где  $\gamma$  – реализованное значение при решении задачи (22).

Задачу по нахождению правильной передаточной матрицы регулятора  $K(s)$ , при котором бы выполнялось неравенство (22), можно переформулировать в виде следующих вспомогательных задач  $H_\infty$ -управления.

**Задача 2:** Найти правильную передаточную матрицу регулятора (8), который бы обеспечивал выполнение неравенства (22) с минимально возможным  $\gamma = \gamma_0$ .

**Задача 3:** Дано число  $\gamma > \gamma_0$ . Найти правильную передаточную матрицу регулятора (8), такую чтобы выполнялось неравенство (22).

Если задачи 2 и 3 решены, то зная значение параметра  $\gamma$ , реализованное в результате синтеза, из неравенств (19) найдем достаточные оценки на интервалы возможных значений параметров, гарантирующих робастную устойчивость системы (1), (8), а из целевого неравенства (9) получим оценки среднеквадратичных ошибок регулирования, которые заведомо будут не хуже

$$y_{i,st} \leq \gamma \cdot y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Теперь придадим уравнениям (20) стандартную форму записи, принятую в теории  $H_\infty$ -управления:

$$\begin{aligned} z &= G_{11}w + G_{12}u \\ y &= G_{21}w + G_{22}u \\ u &= Ky, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $G_{ij}(s)$  ( $i, j = 1, 2$ ) – блоки передаточной матрицы  $G(s)$  обобщенного объекта.

**Утверждение:** Передаточные матрицы  $G_{ij}(s)$  ( $i, j = 1, 2$ ) обобщенного объекта из (27) связаны с передаточными матрицами системы (20) равенствами:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} & (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + Q^{1/2} W_{21} & Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + Q^{1/2} W_{23} \end{bmatrix}, \\ G_{12} &= \begin{bmatrix} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} \\ Q^{1/2} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + Q^{1/2} W_{22} \end{bmatrix}, \\ G_{21} &= \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{11} + W_{12} & W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{13} + W_{23} \end{bmatrix}, \\ G_{22} &= \begin{bmatrix} W_{21} (I - \Lambda W_{11})^{-1} \Lambda W_{12} + W_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство утверждения элементарно и здесь не приводится.

Таким образом, решая  $H_\infty$ -проблему (22), где весовые коэффициенты выбраны из равенств (26), добиваемся разрешения поставленной задачи 1.

## Процедура синтеза

1. Привести уравнения системы (1), (8) к виду (10).
2. Записать уравнения (20) в стандартной форме (27), с учетом (28) и привести эту форму к уравнениям состояния.
3. Решить задачи 2 и 3  $H_\infty$ -управления (22) с учетом (26) и найти передаточную матрицу  $K(s)$  регулятора (8).
4. Найти границы гарантируемых допусков на параметры объекта по формулам (19) и найти оценки ошибок регулирования из (9) или из  $y_{i,st} \leq \gamma \cdot y_i^*$ .
5. Сравнить найденные в п. 4 границы допусков с заданными.
6. Если найденные границы допусков на параметры объекта из (19) не покрывают заданные (3) или найденные границы на ошибки регулирования превышают заданные, то данный метод не дает решения. Однако можно выбрать другие значения номинальных параметров или уменьшить (либо увеличить) желаемые значения ошибок регулирования и повторить синтез с п. 2.

Прокомментируем отдельные шаги этой процедуры. Прежде всего заметим, что вектор регулируемых переменных систем (20), (21), (27) не содержит управляющих воздействий, а помехи измерения также отсутствуют. Значит проблема  $H_\infty$ –оптимизации (22) вырождена, решать которую необходимо на основе метода линейных матричных неравенств (LMI) [5–10], реализованного в MATLAB – пакете [15]. В пакете [15] регулятору ставится в соответствие четверка матриц  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ , определяющих его уравнения состояния (8). При этом порядок регулятора не превышает порядка объекта – степени полинома  $\det L_1(s)$ . В п. 3 процедуры сначала определяется минимально возможное значение  $\gamma = \gamma_0$  в задаче (22) с помощью функции `hinflmi` (см. подробнее [8]), а затем решается субоптимальная задача (также с помощью `hinflmi`) при  $\gamma > \gamma_0$  (при  $\gamma = \gamma_0$  часть собственных значений матрицы замкнутой системы (1),(8) оказывается почти на мнимой оси!) и находится  $K(s)$ .

## Пример решения задачи синтеза

Проиллюстрируем эффективность предложенного метода синтеза на примере двухмассовой системы с упругой связью: двух тележек, соединенных пружиной [5, 6, 10]. Модель такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -qx_1 + qx_2 + u + f, \quad \dot{x}_4 = qx_1 - qx_2, \quad y = x_2, \quad (29)$$

где  $q$  – варьируемый параметр (жесткость пружины) с номинальным значением 2;  $x_1$  – координата первой тележки;  $x_2$  – координата 2-ой тележки, измеряемая переменная  $y = x_2$ ;  $u$  – управляющее воздействие;  $f$  – внешнее возмущение.

Используя уравнения состояния из [5, 10], легко записать уравнения обобщенного объекта (27), (29) в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -q & q & 0 & 0 \\ q & -q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -q & q & 0 & 0 \\ Q^{1/2} \cdot (0 & 1 & 0 & 0) \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

С целью сравнения сначала был осуществлен синтез регулятора, разрешающего первую часть задачи 1 (см. раздел 4), когда внешнее возмущение  $f$  не принималось во внимание при синтезе. Регулятор имеет вид:

$$K_1(s) = \frac{-201,9 s^3 + 4694 s^2 - 38,36 s - 1,561}{s^4 + 21,84 s^3 + 211,9 s^2 + 1056 s + 2560}.$$

Пусть средний квадрат ошибки по регулируемой переменной не должен превышать  $y^* = 1$ , а внешнее возмущение ограничено значением  $w^* = 1$ . Тогда в соответствии с (26) получим значение единственного весового коэффициента при скалярной регулируемой переменной  $y$  на структурной схеме рис.4  $q_1 = 1$ .

Искомый регулятор, разрешающий задачу 1, имеет вид:

$$K_2(s) = \frac{-8,148 \cdot 10^7 s^3 - 8,676 \cdot 10^7 s^2 - 8,164 \cdot 10^7 s - 2,524 \cdot 10^7}{s^4 + 69,1 s^3 + 1,387 \cdot 10^4 s^2 + 6,525 \cdot 10^5 s + 1,534 \cdot 10^7}.$$

Заметим, что амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) замкнутых систем  $|T_{yf}(j\omega)|$  с построенными регуляторами  $K_1$  и  $K_2$ , как видно из рис. 5 а) и рис. 5 б) соответственно, являются монотонно убывающими функциями частоты  $\omega$ . Поэтому наихудшее возмущение для этих систем ступенчатая функция.

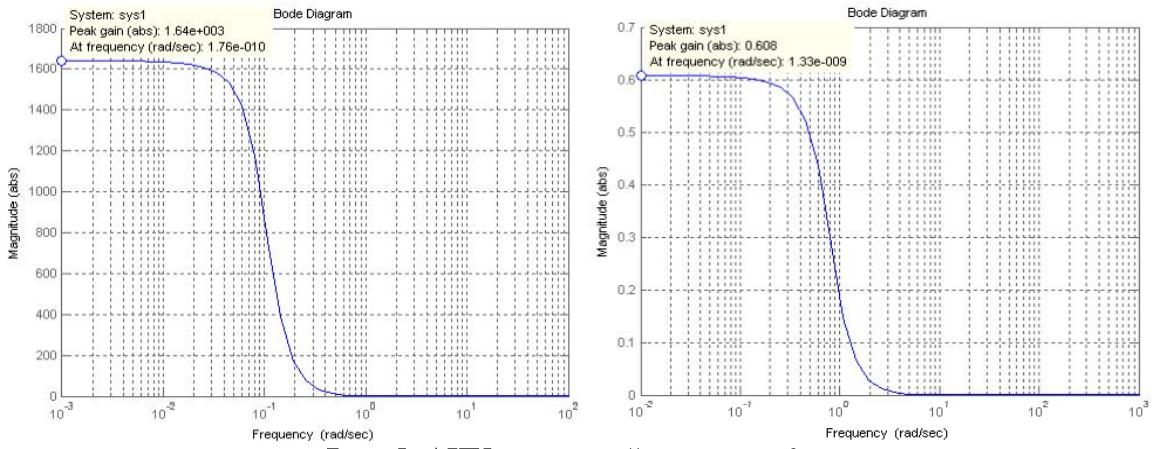


Рис. 5. АЧХ замкнутой системы:  $f \rightarrow y$

Переходные процессы по  $y(t)$  в замкнутой системе при нулевых начальных условиях и ступенчатом  $f = 1(t)$  приведены на рис 6 а) и б) для  $K_1$  и  $K_2$ .

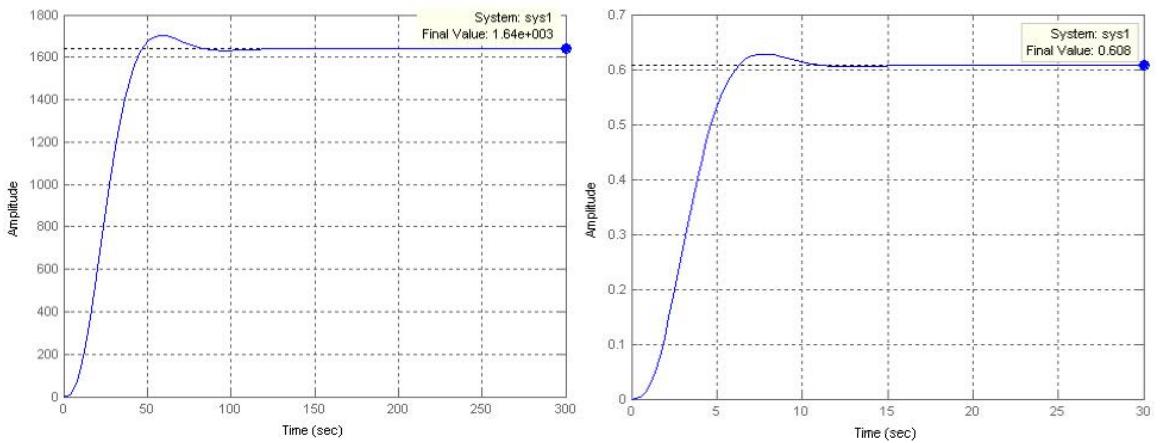


Рис. 6. Реакция замкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие

Очевидно, что установившаяся ошибка во втором случае более чем на 3 порядка меньше. При этом время регулирования также на порядок уменьшилось. Это подчеркивает эффективность предложенного подхода к обеспечению заданной точности. Помимо этого было проведено исследование допусков на варьируемый параметр  $q$  с номинальным значением 2. При этом гарантируемые границы были найдены по формулам (19), а истинные на основе специфического применения критерия Найквиста к системе рис.1, разомкнутой по переменной  $\tilde{u}$  (параметру  $q$ , как в [5]) при известном регуляторе. Так как параметр  $q$  есть множитель передаточной функции разомкнутой системы (11), то определив точки пересечения годографа Найквиста с вещественной осью найдем истинный интервал устойчивости по  $q$ . Ниже в таблице приведены результаты этого исследования: объекта (29), замкнутого регуляторами  $K_1$  и  $K_2$ .

Таблица 1. Результаты анализа системы с полученными регуляторами

Регулятор	$K_1$	$K_2$
Значение параметра $\gamma$	1,1354	1,1808
Гарантируемые границы робастной устойчивости по параметру $q$	$0,2385 < q < 3,7615$	$0,3062 < q < 3,6938$
Истинные границы робастной устойчивости по параметру $q$	$0,1372 < q < 12,928$	$0,171 < q < 8,176$
Запасы устойчивости по модулю и фазе	$L = 0,539 \text{дБ}, \varphi_3 = 5,12^\circ$	$L = 12,2 \text{дБ}, \varphi_3 = 57,2^\circ$

В последней строке таблицы приведены значения запасов устойчивости по модулю  $L$  и фазе  $\varphi_3$ , которые определяются при размыкании замкнутой системы по переменной  $u$  (физическому входу объекта) или  $y$  (физическому выходу объекта). Здесь надо отметить весьма низкие запасы устойчивости по фазе и модулю, если регулятор строится без учета внешнего возмущения, хотя границы на варьируемый параметр весьма широки. Заметим, что в примере 1 работы [6], наблюдалась совершенно противоположная ситуация: запасы устойчивости на входе (выходе) объекта велики, а малое отклонение параметра  $q$  от номинала приводит к неустойчивости. Таким образом, явно видна необходимость метода синтеза робастного регулятора, который бы учитывал не только возможные конечные отклонения физических параметров от расчетных, но и заданные запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (модулю) на входе (выходе) объекта. Однако, это предмет дальнейших исследований.

### Заключение

В работе представлено одно из решений задачи робастной стабилизации при параметрической неопределенности с учетом действия внешних возмущений. Отметим некоторые преимущества предложенного подхода перед известными:

Рассматриваются отклонения физических параметров от расчетных.

Ясные инженерные критерии: показатель колебательности и радиус установившегося состояния замкнутой системы.

Сведение процедуры синтеза в конечном счете к стандартной проблеме  $H_\infty$ -оптимизации (субоптимизации) парирования внешних возмущений.

Для решения задачи имеется готовое богатое программное обеспечение [15].

Порядок регулятора, получаемого в результате задачи синтеза не превышает порядка исходного физического объекта управления, что важно для практических приложений.

### Список литературы:

1. Ackermann J. Robust control: system with uncertain physical parameters. London: Springer. 1993. 483 P.
2. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York: Macmillan. 1994. 394 P.
3. Bhattacharyya S.P., Keel L.A., Chapellat H. Robust control: the parametric approach. Hertfordshire: Prentice Hall. 1995. 647 P.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 С.

5. Честнов В.Н. Синтез робастных регуляторов многомерных систем при параметрической неопределенности на основе круговых частотных неравенств // Автоматика и Телемеханика. 1999. №3. С. 229–238.
6. Честнов В.Н. Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры  $H_{\infty}$ -оптимизации // Автоматика и Телемеханика. 1999. №7. С. 100–109.
7. Агафонов П.А., Честнов В.Н. Синтез регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости с учетом внешних возмущений на основе  $H_{\infty}$ -подхода // Автоматика и Телемеханика. 2004. №10. С. 101–108.
8. Честнов В.Н. Синтез  $H_{\infty}$ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // Автоматика и Телемеханика. 2011. №10.
9. С. 170–185.
10. Честнов В.Н. Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1995. №2. С. 72–79.
11. Честнов В.Н.  $H_{\infty}$ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // Автоматика и Телемеханика. 2015. №6. С. 112–127.
12. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем заданной точности по среднеквадратичному критерию. Автоматика и Телемеханика. 1998. № 12. С. 109–117.
13. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 С.
14. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // IEEE Transaction on Automatic Control. 1981. Vol. AC- 26, № 1. P. 4–16.
15. The Control Handbook / Editor W.S. Levine. IEEE Press, 1996. 1548 P.
16. Balas G.J., Chiang R.Y., Packard A., et al. Robust Control Toolbox 3. User's guide/ Natick (Mass.). The MathWorks, Inc., 2010. 178 P.