Автоматика и телемеханика, № 2, 2014

© 2014 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПРЕДЕЛЬНО ДОСТИЖИМАЯ ТОЧНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Рассматривается проблема предельно достижимой точности линейных систем с дискретными регуляторами по состоянию и по выходу. Внешние возмущения, действующие на систему, – ограниченные вектор-функции времени: ступенчатые и гармонические (неизвестной частоты), которые в теории управления принято считать типовыми. Единственное предъявляемое требование к регуляторам (помимо их физической реализуемости) – это условие асимптотической устойчивости замкнутой системы. Поэтому выводы работы относятся ко всему множеству дискретных стабилизирующих регуляторов, каким бы методом они ни были построены.

1. Введение

Для непрерывных систем существуют законы управления, обеспечивающие сколь угодно высокую точность регулирования. Это, например, возможно, если внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в одной точке, а закон управления строится по полному вектору состояния на основе процедур LQ [1] или H_∞-оптимизации [2]. Эти системы, как следует из результатов [3–5], допускают неограниченное увеличение коэффициентов усиления регулятора без потери замкнутой системой свойства асимптотической устойчивости, что и обеспечивает сколь угодно высокую точность регулирования.

В дискретных системах невозможно обеспечить высокий коэффициент передачи разомкнутой системы (определяющий точность) без потери устойчивости замкнутой системы. На этот факт для систем первого и второго порядков с одним входом и выходом обращено внимание в книге Я.З. Цыпкина [6]. Это связано с тем, что годограф Найквиста дискретных систем обязательно пересекает отрезок $[-1; 0]$ вещественной оси, что говорит о невозможности неограниченного увеличения коэффициента передачи разомкнутой системы без потери устойчивости.

В отличие от непрерывного случая, как следует из результатов [4, 7, 8], дискретные аналоги процедур LQ-оптимизации не допускают неограниченного увеличения коэффициентов усиления регулятора без потери устойчивости замкнутой системы. Это говорит о принципиальной невозможности обеспечить сколь угодно высокую точность управления в системах с дискретными регуляторами. Исследованию причин этого явления и посвящена данная работа.

Ограниченная точность систем с дискретными регуляторами является фундаментальной особенностью дискретных систем (с квантованием по времени) по сравнению с непрерывными и объясняется спецификой их модальной области устойчивости в виде единичного круга. Указанное принципиальное ограничение будет сказываться тем сильнее, чем ниже порядок системы и чем больше период квантования дискретного регулятора.

Таким образом, при использовании дискретного управления можно говорить лишь о некоторой достижимой предельной точности регулирования, которая может быть достигнута при данном периоде квантования дискретного регулятора. Впервые на данный факт было обращено внимание в [9]. Для ступенчатых внешних возмущений некоторые результаты были получены в 1994 г. в [10], в том числе для регуляторов по выходу.

В настоящей работе данная проблема рассматривается для объектов произвольного порядка как в одномерном, так и в многомерном случаях. Вообще говоря, предельная точность в непрерывном случае сначала рассматривалась в [11, 12] с позиций не подавления внешних возмущений, а предельного значения квадратичного функционала при парировании произвольных начальных условий. Позже, А.А. Первозванский и М.А.Пасуманский рассмотрели этот вопрос с позиций уменьшения влияния внешних возмущений в смысле предельного значения H_2 и H_∞-норм [13]. Заметим, однако, что полученные в [13] результаты почти повторяют выводы из [11, 12] (сводятся к тому, что объект должен быть минимально-фазовым с одинаковым числом управлений и измерений, совпадающих с регулируемыми переменными) и никак не учитывают точку приложения внешних возмущений и управляющих воздействий, что крайне важно [5, 14].

В зарубежных публикациях проблема точности непрерывных и дискретных систем рассматривалась в [15–17] параллельно.

В настоящей работе предлагается принципиально иной подход к проблеме точности, связанный с оценкой максимально возможного коэффициента передачи разомкнутой системы (или величины возвратной разности на частоте внешнего возмущения), который и определяет точностные характеристики замкнутой системы. Причем исследование ведется как для одномерного (скалярное управление), так и для многомерного случая (векторное управление).

Следует отметить, что после появления [9, 10], посвященных исследованию предельного коэффициента передачи дискретных LQ-регуляторов по состоянию, в [18] найдена предельная ошибка при стремлении весового коэффициента при управлении в квадратичном функционале к нулю (случай "дешевого" управления). В [19] получен такой же результат с регуляторами по выходу, построенными на базе наблюдателя Люенбергера пониженного порядка.

Отметим, что ограничение точности дискретных систем непосредственно следует из задачи l_1-оптимального управления [20–23].

2. Регуляторы по полному вектору состояния

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый объект управления, дискретная модель которого описывается уравнениями:

$$
\begin{gathered}
x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad w \in R^\mu, \\
z(k) = Cx(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad z \in R^{m_1},
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где x – вектор состояния объекта, доступный для измерения; u – вектор управляющих воздействий; w – вектор возмущающих воздействий; z – вектор регулируемых переменных объекта; A, B_1, B_2, C – известные матрицы соответствующих размеров.

Далее ограничимся случаем, когда точки приложения управляющих и возмущающих воздействий совпадают, а число управляющих воздействий и регулируемых переменных одинаково:

$$B_1 = B_2, \quad m = m_1 = \mu. \tag{2.2}$$

Последнее условие в непрерывном случае заведомо гарантирует, что существует регулятор по полному вектору состояния, обеспечивающий сколь угодно высокую точность регулирования [1, 5]. Это позволит более выпукло охарактеризовать точность дискретных регуляторов по сравнению с непрерывными.

Замкнем объект (2.1) дискретным регулятором состояния

$$u(k) = Kx(k), \tag{2.3}$$

параметры которого получены на основе любых известных методов, обеспечивающих (при $w = 0$) асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.1), (2.3).

Установим связь между векторами регулируемых переменных и возмущающих воздействий в замкнутой системе (2.1), (2.3).

Поскольку передаточная матрица от u к z объекта управления $W_0(q) = C(qI - A)^{-1}B_2$ (q – оператор временно́го сдвига на один такт вперед) не зависит от параметров регулятора, то свойства замкнутой системы и, в частности, ее точностные характеристики целиком будут определяться частотными свойствами матрицы возвратной разности [5, 7]

$$V(q) = I_m + W_p(q). \tag{2.4}$$

Здесь $W_p = -K(qI - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица разомкнутой системы (2.1), (2.3) по входам объекта (переменной u); I_m – единичная матрица $(m \times m)$.

В выражение для операторной передаточной матрицы замкнутой системы (от w к z) входит обратная матрица от $V(q)$ [5, 7]:

$$T_{zw}(q) = W_0(q)[I_m + W_p(q)]^{-1}, \quad z(k) = T_{zw}(q)w(k). \tag{2.5}$$

Цель статьи – исследование частотных свойств матрицы возвратной разности (2.4) в системе (2.1), (2.2) с дискретным регулятором состояния (2.3) и получение оценок на предельно достижимые значения установившихся ошибок регулирования при действии на объект типовых ограниченных внешних возмущений: ступенчатых и гармонических.

Прежде чем рассматривать общий случай векторного управления и векторной регулируемой переменной, исследуем сначала скалярный случай.

Рассмотрим случай одного управляющего воздействия и одной регулируемой переменной $m = m_1 = \mu = 1$. В этом случае выражение для регулируемой переменной, как следует из (2.5), можно представить в виде

$$z(k) = \frac{w_0(q)}{1 + w_p(q)}\, w(k), \tag{2.6}$$

где w_0, w_p – передаточные функции объекта управления и разомкнутой системы соответственно; $w(k)$ и $z(k)$ – внешнее возмущение и регулируемая переменная в текущий k-й момент дискретного времени.

Предположим, что внешнее возмущение постоянно $w(k) = \mathrm{const} = w^*$, где $w^* > 0$ – амплитуда возмущения. Тогда в соответствии с теоремой о предельных значениях [12, 17, 24, 25] из соотношения (2.6) для установившегося значения регулируемой переменной (ошибки регулирования) получим:

$$\lim_{k\to\infty} z(k) = z(\infty) = \frac{w_0(1)}{1 + w_p(1)}\, w^* = \frac{k_0}{1 + k_p}\, w^*, \tag{2.7}$$

где величины

$$k_0 = w_0(q)_{|q=1} = w_0(1), \quad k_p = w_p(q)_{|q=1} = w_p(1), \tag{2.8}$$

как известно из [7, 12, 17, 24–26], называются соответственно коэффициентами передачи (усиления) объекта управления и разомкнутой дискретной системы. Из (2.7) видно, что чем выше коэффициент передачи разомкнутого контура k_p, тем меньше установившаяся ошибка регулирования, поскольку числитель (2.7) от коэффициентов регулятора не зависит, а определяется лишь свойствами объекта. Однако в дискретном случае данный коэффициент передачи принципиально ограничен сверху, что приводит к необходимости определения предельно достижимой ошибки регулирования в системах с дискретным регулятором. Это устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. Коэффициент передачи разомкнутой дискретной системы (2.1), (2.3) *со скалярным управлением и предельно достижимая ошибка регулирования при действии постоянного внешнего возмущения* $w(k) = \mathrm{const} = w^* > 0$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$|1 + k_p| < \frac{2^n}{|d(1)|}, \quad d(1) = d(q)\Big|_{q=1} \neq 0, \quad d(q) = \det(qI_n - A), \tag{2.9}$$

$$|z(\infty)| > \frac{|k_0|\ |d(1)|}{2^n}\, w^*. \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Неравенство (2.9) имеет смысл, если характеристический полином разомкнутой системы $d(q) = \det(qI_n - A)$ не имеет корней в точке $q = 1$ (объект не содержит интегрирующих звеньев). В противном случае этот полином можно представить в виде $d(q) = (q-1)^l d_1(q)$, где l – кратность корня $q = 1$, а полином $d_1(q)$ не имеет корней в точке $q = 1$. В этом случае коэффициент передачи объекта и коэффициент усиления разомкнутой системы определяются выражениями:

$$k_0 = [(q-1)^l w_0(q)]\Big|_{q=1}, \quad k_p = [(q-1)^l w_p(q)]\Big|_{q=1}. \tag{2.11}$$

Тогда, предварительно умножив числитель и знаменатель правой части (2.6) на $(q-1)^l$, для установившейся ошибки регулирования получим

$$z(\infty) = \frac{(q-1)^l w_0(q)}{(q-1)^l + (q-1)^l w_p(q)}\Bigg|_{q=1} w^* = \frac{k_0}{k_p}\, w^*. \tag{2.12}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать (предварительно умножив обе части тождества (П.1) на $(q-1)^l$), что коэффициент передачи разомкнутой системы и предельно достижимая ошибка регулирования будут удовлетворять неравенствам:

$$|k_p| < \frac{2^n}{|d_1(1)|}, \quad d_1(1) \neq 0, \quad |z(\infty)| > \frac{|k_0|\ |d_1(1)|}{2^n}\, w^*. \tag{2.13}$$

Теперь предположим, что внешнее возмущение является гармонической решетчатой функцией вида $w(k) = w^* \sin(\omega kT)$, где $w^* > 0$ – амплитуда возмущения; ω – круговая частота (как правило, неизвестная) и T – период дискретности (квантования) дискретного регулятора (2.3). Тогда в соответствии с результатами классической теории линейных дискретных систем [12, 17, 24, 25] амплитуда $a > 0$ выходных установившихся колебаний регулируемой переменной

$$\lim_{k\to\infty} z(k) = a\sin(\omega kT + \phi), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

(ϕ – фазовый сдвиг относительно входной гармоники) может быть найдена по формуле

$$a = |T_{zw}(e^{j\omega T})| w^* = \frac{|w_0(e^{j\omega T})|}{|1 + w_p(e^{j\omega T})|}\, w^*, \tag{2.15}$$

где $T_{zw}(q)$ – передаточная функция замкнутой системы из (2.6).

В знаменателе (2.15) стоит модуль возвратной разности, вычисляемый на частоте ω внешнего возмущения. Чем больше этот модуль, тем меньше амплитуда a вынужденных колебаний регулируемой переменной z. Однако в дискретном случае, как устанавливается далее в теореме 2, эта величина всегда ограничена сверху и, следовательно, существует предельно достижимая амплитуда колебаний регулируемой переменной, уменьшить которую принципиально невозможно с помощью регулятора состояния (2.3).

Т е о р е м а 2. *Возвратная разность дискретной системы* (2.1), (2.3) *со скалярным управлением и предельно достижимая амплитуда ошибки регулирования при действии гармонического внешнего возмущения* $w(k) = w^* \sin(\omega kT)$ *для всех вещественных частот* $\omega \in [0, \pi/T]$ *удовлетворяют*

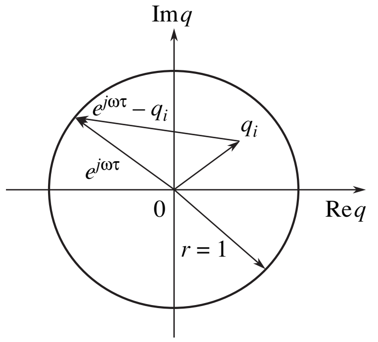

Рисунок.

неравенствам:

$$|1 + w_p(e^{j\omega T})| < \frac{2^n}{|d(e^{j\omega T})|}, \quad d(e^{j\omega T}) \neq 0, \tag{2.16}$$

$$a > \frac{|w_0(e^{j\omega T})|\ |d(e^{j\omega T})|}{2^n}\, w^*. \tag{2.17}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 2. При нулевой частоте внешнего возмущения $\omega = 0$ из теоремы 2 вытекает теорема 1. Из выражений (2.9), (2.16) также можно заключить, что предельный коэффициент передачи разомкнутой дискретной системы (возвратная разность на нулевой частоте) и возвратная разность, вычисленная на частоте внешнего возмущения, тем больше по абсолютной величине, чем выше порядок объекта n. Эти значения максимизируются (что приведет к минимизации установившейся ошибки регулирования), если корни характеристического полинома $D(q)$ замкнутой системы (2.1), (2.3) приближаются к границе единичного круга. В частности, если $q_i \to -1, \quad i = \overline{1, n}$, то максимизируется коэффициент передачи разомкнутой системы. Если же $q_i \to -e^{-j\omega T}, \quad i = \overline{1, n}$, то максимизируется модуль возвратной разности на частоте внешнего возмущения. В этом легко убедиться из геометрической интерпретации модуля i-го сомножителя $|e^{j\omega T} - q_i|$ разложения $|D(e^{j\omega T})|$, которая приведена на рисунке. Однако назначение таких корней полинома $D(q)$ (например, с помощью процедуры модального управления), очевидно, приведет к весьма затянутым и колебательным переходным процессам в замкнутой системе.

2.3. Векторное управление

Как и ранее будем полагать выполненным условие (2.2). Сначала рассмотрим случай постоянных внешних возмущений $w(k) = \text{const} = w^*$, где $w^* = [w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*]^{\mathrm{T}}$ – вектор амплитуд возмущений, а T – знак транспонирования матрицы. Тогда вектор установившихся ошибок регулирования определится из равенства [12, 17, 24, 25]

$$\lim_{k\to\infty} z(k) = z(\infty) = W_0(1)[I_m + W_p(1)]^{-1} w^*. \tag{2.18}$$

Полагая, что значение $q = 1$ не является корнем числителя $\det W_0(q)$ (т.е. нулем объекта и объект статически определим [14], так как в противном случае найдется бесконечное число векторов $w^* \neq 0$ таких, что $z(\infty) = 0$), выразим из (2.18) вектор w^* (при $m_1 = m = \mu,\ B_1 = B_2$)

$$[I_m + W_p(1)]\ {W_0}^{-1}(1) z(\infty) = w^*$$

и сформируем квадратичную форму

$$z^{\mathtt{T}}(\infty)\ [{W_0}^{-1}(1)]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(1)]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(1)]\ {W_0}^{-1}(1) z(\infty) = (w^*)^{\mathtt{T}}\, w^*. \tag{2.19}$$

Заметим, что закон управления (2.3) определяет матрицу возвратной разности $V(q) = I_m + W_p(q)$, которая фигурирует в левой части последнего равенства и вычисляется на нулевой частоте (при $q = 1,\ q = e^{j\omega T},\ \omega = 0$). Из (2.19) следует, что величины статических ошибок зависят от положительно определенной симметрической матрицы $V^{\mathtt{T}}(1)V(1)$, которую представим в виде [27]

$$V^{\mathtt{T}} V = U\ \mathrm{diag}({\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \ldots, {\sigma_m}^2)\, U^{\mathtt{T}},$$

где U – ортогональная матрица ($U^{\mathtt{T}} U = U U^{\mathtt{T}} = I_m$), а ${\sigma_i}^2 > 0 \quad (i = \overline{1, m})$ – собственные значения матрицы $V^{\mathtt{T}} V$ (квадраты сингулярных значений матрицы V).

Вводя обозначения:

$$\tilde{z} = {W_0}^{-1} z(\infty), \quad \tilde{y} = U^{\mathtt{T}}\, \tilde{z},$$

перепишем квадратичную форму (2.19) в виде

$$\tilde{y}^{\mathtt{T}}\ \mathrm{diag}\,({\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \ldots, {\sigma_m}^2)\, \tilde{y} = (w^*)^{\mathtt{T}}\, w^*. \tag{2.20}$$

Отметим, что в силу ортогональности матрицы U векторы $\tilde{z}$ и $\tilde{y}$ имеют одинаковую евклидову норму, поскольку равны их скалярные произведения [27]:

$$\|\tilde{y}\|^2 = \tilde{y}^{\mathtt{T}} \tilde{y} = [U^{\mathtt{T}} \tilde{z}]^{\mathtt{T}}\, U^{\mathtt{T}} \tilde{z} = \tilde{z}^{\mathtt{T}} U\ U^{\mathtt{T}} \tilde{z} = \tilde{z}^{\mathtt{T}} \tilde{z} = \|\tilde{z}\|^2.$$

При этом норма вектора $\tilde{z}$ тем больше, чем больше норма вектора статических ошибок $z(\infty)$, и наоборот, так как

$$\tilde{z}^{\mathtt{T}} \tilde{z} = z^{\mathtt{T}}(\infty)\ [{W_0}^{-1}(1)]^{\mathtt{T}}\, {W_0}^{-1}(1)\ z(\infty),$$

а матрица $[{W_0}^{-1}(1)]^{\mathtt{T}}\, {W_0}^{-1}(1)$ симметрична и положительно определена.

Перепишем (2.20) в скалярной форме

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{y}_i^2 {\sigma_i}^2 = \sum_{i=1}^{m} (w_i^*)^2. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что чем больше минимальное сингулярное значение матрицы возвратной разности $V(1)$, тем меньше норма вектора $\tilde{y}$, равная норме вектора $\tilde{z}$ и, следовательно, тем меньше норма статических ошибок $z(\infty)$. Это, в частности, соответствует известным качественным результатам для непрерывных многомерных систем [26, 28].

Однако, как будет установлено в теореме 3, для систем с дискретными регуляторами минимальное сингулярное значение $\sigma_{\min}$ матрицы возвратной разности $V(1)$ принципиально ограничено сверху. Поэтому как и в одномерном случае, можно говорить о предельно достижимой точности регулирования, оцениваемой нормой вектора установившихся ошибок регулирования. В многомерном случае этому факту можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Равенство (2.19) означает, что изображающая точка вектора статических ошибок регулирования $z(\infty) \in R^m$ находится на поверхности гиперэллипсоида, определяемого этим равенством. Объем V_m данного эллипсоида в m-мерном пространстве косвенно характеризует "величину" вектора $z(\infty)$. Факт ограниченной точности дискретных систем на всем множестве стабилизирующих регуляторов состояния (2.3) означает, что принципиально невозможно получить эллипсоид (2.19) меньшего объема, чем некоторый предельный объем, который определяется только свойствами объекта управления и нормой внешнего возмущения. Математическая формулировка этих соображений содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Минимальное сингулярное значение матрицы возвратной разности $V(q) = I_m + W_p(q)$ на нулевой частоте ($q = e^{j\omega T}$, $\omega = 0$, $q = 1$) и объем V_m гиперэллипсоида* (2.19), *поверхности которого принадлежит изображающая точка вектора статических ошибок регулирования $z(\infty) \in R^m$, дискретной многомерной системы* (2.1), (2.3) *при постоянном внешнем возмущении удовлетворяют неравенствам*

$$\sigma_{\min}[I_m + W_p(1)] < \left[\frac{2^n}{|d(1)|}\right]^{1/m}, \quad d(1) \neq 0, \tag{2.22}$$

$$V_m > \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)} \, \frac{|\det W_0(1)||d(1)|}{2^n} \, \|w^*\|^m, \tag{2.23}$$

где $\sigma_{\min}[V]$ – минимальное сингулярное значение матрицы V, $\Gamma(b)$ – гамма-функция переменной b.

Доказательство теоремы 3 приводится в Приложении.

Необходимо отметить, что теорема 3 не дает явных оценок на норму вектора установившихся ошибок. Получение таких оценок является предметом дальнейшего рассмотрения. С этой целью в силу (2.18) запишем, что

$$\|z(\infty)\|^2 = w^{*\mathsf{T}}([I_m + W_p(1)]^{-1})^{\mathsf{T}} \, W_0{}^{\mathsf{T}}(1) \; W_0(1) \; [I_m + W_p(1)]^{-1} w^*. \tag{2.24}$$

Преобразуем выражение в правой части (2.24). Поскольку матрица чисел $W_0{}^{\mathsf{T}}(1)\, W_0(1)$ положительно определенная и ее собственные значения являются квадратами сингулярных значений матрицы $W_0(1)$, то для всех отличных от нуля векторов $f \in R^m$ будут иметь место неравенства [27]

$$\sigma^2_{\min}[W_0(1)] \; f^{\mathsf{T}} f \leqslant f^{\mathsf{T}} W_0^{\mathsf{T}}(1) \; W_0(1) \; f \leqslant \sigma^2_{\max}[W_0(1)] \; f^{\mathsf{T}} f.$$

С учетом этих неравенств из (2.24) можно получить:

$$\|z(\infty)\|^2 \leqslant \sigma^2_{\max}[W_0(1)]\ f^{\mathrm{T}} f, \quad \|z(\infty)\|^2 \geqslant \sigma^2_{\min}[W_0(1)]\ f^{\mathrm{T}} f, \tag{2.25}$$

где $f = [I_m + W_p(1)]^{-1} w^*$, а $\sigma_{\max}[V]$ – максимальное сингулярное значение матрицы V.

Теперь рассмотрим квадратичную форму

$$f^{\mathrm{T}} f = w^{*\mathrm{T}}([I_m + W_p(1)]\ [I_m + W_p(1)]^{\mathrm{T}})^{-1} w^*.$$

Так как матрица $[I_m + W_p(1)]\ [I_m + W_p(1)]^{\mathrm{T}}$ положительно определенная, а ее собственные значения являются квадратами сингулярных значений матрицы $V(1) = [I_m + W_p(1)]$, то, учитывая факт, что при обращении матрицы ее собственные значения также обращаются [27], получим неравенства:

$$f^{\mathrm{T}} f \leqslant \frac{1}{\sigma^2_{\min}[I_m + W_p(1)]}\ w^{*\mathrm{T}} w^*, \quad f^{\mathrm{T}} f \geqslant \frac{1}{\sigma^2_{\max}[I_m + W_p(1)]}\ w^{*\mathrm{T}} w^*.$$

Подставляя эти неравенства в (2.25), окончательно получим, что установившиеся ошибки многомерной дискретной системы (2.1), (2.3) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\sigma_{\min}[W_0(1)]}{\sigma_{\max}[I_m + W_p(1)]}\ \|w^*\| \leqslant \|z(\infty)\| \leqslant \frac{\sigma_{\max}[W_0(1)]}{\sigma_{\min}[I_m + W_p(1)]}\ \|w^*\|. \tag{2.26}$$

Заметим, что в данных неравенствах слева и справа в знаменателе содержатся ограниченные числа (это следует из неравенств (П.7)), и, таким образом, нижняя граница нормы вектора статических ошибок регулирования в многомерных дискретных системах всегда конечна.

Рассмотрим теперь случай гармонических внешних возмущений

$$w(k) = w^* \sin(\omega k T), \tag{2.27}$$

где $w^* \in R^m$ – вектор амплитуд внешнего возмущения; ω – круговая частота (вообще говоря, неизвестная) и T – период дискретности (квантования) дискретного регулятора (2.3).

В соответствии с результатами теории многомерных линейных дискретных систем [12, 15, 25] выходные установившиеся колебания по каждой из регулируемых переменных (ошибок регулирования) можно описать выражениями

$$\lim_{k\to\infty} z_i(k) = a_i \sin(\omega k T + \phi_i), \quad i = \overline{1, m}, \tag{2.28}$$

где a_i и ϕ_i – соответственно амплитуда и фазовый сдвиг i-й выходной гармоники относительно входного возмущения (2.27).

Заметим, что амплитуды колебаний по каждой из регулируемых переменных являются модулями соответствующих компонент следующих комплексно–сопряженных векторов [29]:

$$z_+ = T_{zw}(e^{j\omega T}) w^* e^{j\omega k T}, \quad z_- = T_{zw}(e^{-j\omega T}) w^* e^{-j\omega k T},$$

где z_+ и z_- – частные решения системы разностных уравнений (2.1), (2.3) при $w(k) = w_+(k) = w^* e^{j\omega kT}$ и $w(k) = w_-(k) = w^* e^{-j\omega kT}$ соответственно [25], а $T_{zw}(e^{j\omega T})$ – частотная передаточная матрица замкнутой дискретной системы (2.5). Действительно, легко видеть, что входной вектор (2.27) может быть представлен в виде $w(k) = (w_+(k) - w_-(k))/(2j)$, а в силу принципа суперпозиции для выходного вектора z с компонентами из (2.28) можно записать $(z_+ - z_-)/(2j)$. Таким образом, заключаем, что $a_i^2 = z_{-i} z_{+i}$, где z_{-i} и z_{+i} – i-е компоненты векторов z_- и z_+ соответственно. Или если определить вектор $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]^{\mathtt{T}}$, координаты которого – амплитуды гармоник (2.28), то ясно, что $a^{\mathtt{T}} a = \|a\|^2 = {z_-}^{\mathtt{T}} z_+$.

Учитывая выражение (2.5), представим последнее равенство в виде

$$\|a\|^2 = \tag{2.29}$$
$$= {w^*}^{\mathtt{T}}([I_m + W_p(e^{-j\omega T})]^{\mathtt{T}})^{-1} {W_0}^{\mathtt{T}}(e^{-j\omega T})\ W_0(e^{j\omega T})\ [I_m + W_p(e^{j\omega T})]^{-1} w^*.$$

Это равенство – аналог равенства (2.24). Поэтому, проводя подобные рассуждения (с точностью до замены вещественных векторов на компле́ксные, а симметрических положительно определенных на соответствующие эрмитовы матрицы), придем к очевидному аналогу соотношения (2.26)

$$\frac{\sigma_{\min}[W_0(e^{j\omega T})]}{\sigma_{\max}[I_m + W_p(e^{j\omega T})]}\ \|w^*\| \leqslant \|a\| \leqslant \frac{\sigma_{\max}[W_0(e^{j\omega T})]}{\sigma_{\min}[I_m + W_p(e^{j\omega T})]}\ \|w^*\|, \tag{2.30}$$

которое дает ограничения на евклидову норму вектора амплитуд установившихся колебаний из (2.28).

Далее показано, что в этих неравенствах слева и справа в знаменателе содержатся ограниченные числа и, таким образом, нижняя граница нормы вектора амплитуд ошибок регулирования в многомерных дискретных системах всегда конечна. Этому факту, как и в теореме 3, также можно дать геометрическую интерпретацию.

Полагая, что значение $q = e^{j\omega T}$ не является корнем числителя $\det W_0(q)$ (т.е. нулем объекта, поскольку в противном случае найдется бесконечное число векторов $w^* \neq 0$ из (2.27) таких, что $a = 0$), сформируем эрмитову форму (аналог квадратичной формы (2.19))

$${z_-}^{\mathtt{T}}[{W_0}^{-1}(e^{-j\omega T})]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(e^{-j\omega T})]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(e^{j\omega T})]\ {W_0}^{-1}(e^{j\omega T}) z_+ = (w^*)^{\mathtt{T}} w^*.$$

Перепишем эту форму в эквивалентном виде

$$(x - jy)^{\mathtt{T}}\, Q(x + jy) = 1, \tag{2.31}$$

где $z_+ = x + jy$, $\quad z_- = x - jy$ ($x, y \in R^m$ – вещественные векторы), а Q – эрмитова матрица вида

$$Q = [{W_0}^{-1}(e^{-j\omega T})]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(e^{-j\omega T})]^{\mathtt{T}}\, [I_m + W_p(e^{j\omega T})]\ {W_0}^{-1}(e^{j\omega T})/\|w^*\|^2.$$

В левую часть эрмитовой формы (2.31) входят комплексные векторы и матрица. Тем не менее эта эрмитова форма, принимающая, как известно, вещественные значения, может быть переписана в виде вещественной квадратичной формы $2m$ переменных [27]:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{\mathtt{T}} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x^{\mathtt{T}} \quad y^{\mathtt{T}}] M [x^{\mathtt{T}} \quad y^{\mathtt{T}}]^{\mathtt{T}} = 1, \tag{2.32}$$

где A и B – вещественная и мнимая часть матрицы $Q = A + jB$, которые в силу эрмитовости Q являются вещественными симметрической $A^{\mathtt{T}} = A$ и кососимметрической $B^{\mathtt{T}} = -B$ матрицами. Это, в частности, означает что матрица M данной квадратичной формы является вещественной симметрической матрицей, а ее определитель $\det M = \det Q \det \overline{Q} = |\det Q|^2$ [27], где $\overline{Q} = A - jB$. Заметим, что норма составного вектора $[x^{\mathtt{T}} \quad y^{\mathtt{T}}]^{\mathtt{T}}$ равна норме вектора амплитуд колебаний a. Поэтому объем V_{2m} гиперэллипсоида (2.32) в $2m$-мерном пространстве косвенно характеризует "величину" вектора a. Факт ограниченной точности дискретных систем на всем множестве стабилизирующих регуляторов состояния (2.3) означает, что принципиально невозможно получить эллипсоид (2.32) меньшего объема, чем некоторый предельный объем, который определяется только свойствами объекта управления и нормой внешнего возмущения. Математическая формулировка этих соображений содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Минимальное сингулярное значение матрицы возвратной разности $V(q) = I_m + W_p(q)$, вычисляемое на частоте внешнего возмущения (при $q = e^{j\omega T}$), и объем V_{2m} гиперэллипсоида (2.32), косвенно характеризующего "величину" вектора амплитуд ошибок регулирования $a \in R^m$, дискретной многомерной системы (2.1), (2.3) при действии гармонических внешних возмущений (2.27) для всех вещественных частот $\omega \in [0, \pi/T]$ удовлетворяют неравенствам:*

$$\sigma_{\min}[I_m + W_p(e^{j\omega T})] < \left[\frac{2^n}{|d(e^{j\omega T})|}\right]^{1/m}, \quad d(e^{j\omega T}) \neq 0,$$

$$V_{2m} > \frac{\pi^m}{m!} \frac{|\det W_0(e^{j\omega T})|^2 \, |d(e^{j\omega T})|^2}{2^{2n}} \, \|w^*\|^{2m}. \tag{2.33}$$

Теорема 4 доказана в Приложении.

3. Регуляторы по выходу

Поскольку даже в случае полного измерения вектора состояния системы с дискретными регуляторами обладают ограниченной точностью, то интуитивно понятно, что этот эффект тем более возможен при управлении по выходу. Из результатов [1] следует, что для минимально-фазовых объектов, у которых измеряемые переменные совпадают с регулируемыми и их число равно размерности управления, заведомо существует непрерывный закон управления по выходу, обеспечивающий сколь угодно высокую точность регулирования (стабилизации). Поэтому в дальнейшем ограничимся именно этим классом объектов, что позволит более четко выделить отличия точностных характеристик непрерывных и дискретных систем управления и сравнить их. Кроме того, с целью упрощения ограничимся случаем скалярного управляющего воздействия и регулируемой переменной, поскольку многомерный случай, как показали исследования в разделе 2, принципиально новых фактов не вносит, но оказывается более громоздким. Многомерный случай легко может быть рассмотрен по аналогии с разделом 2 настоящей работы.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель непрерывного объекта управления, описываемого в форме “вход–выход” уравнениями

$$d(q)y(k) = b(q)u(k) + l(q)w(k), \quad y \in R^1, \quad u \in R^1, \quad w \in R^1, \tag{3.1}$$

с дискретным регулятором по выходу

$$g(q)u(k) = r(q)y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

где y – регулируемая и одновременно измеряемая переменная объекта; u – управляющее воздействие; w – внешнее возмущение; $d(q), b(q), l(q), g(q), r(q)$ – известные полиномы оператора q. Старшая степень полинома $d(q)$ на единицу превышает старшие степени полиномов $b(q)$ и $l(q)$, а старшая степень полинома $r(q)$ не превышает старшей степени полинома $g(q)$ (регулятор физически реализуем).

Относительно объекта управления будем полагать, что он полностью управляем и наблюдаем (полиномы $d(q)$ и $b(q)$ не имеют общих корней). Будем также полагать, что регулятор, полученный любым известным методом, таков, что замкнутая система (3.1), (3.2) (при $w = 0$) асимптотически устойчива.

Определим следующие передаточные функции:

$$w_0(q) = \frac{b(q)}{d(q)}, \quad w_f(q) = \frac{l(q)}{d(q)}, \quad w_r(q) = \frac{r(q)}{g(q)}, \quad w_p(q) = -w_0(q)w_r(q), \tag{3.3}$$

где w_0 – передаточная функция объекта по управляющему воздействию; w_f – передаточная функция объекта по возмущающему воздействию; w_r – передаточная функция регулятора; w_p – передаточная функция разомкнутой системы (3.1), (3.2) по физическому выходу (входу) объекта управления.

Рассматривая совместно (3.1), (3.2) и (3.3), получим связь регулируемой переменной с возмущающим воздействием

$$y(q) = \frac{w_f(q)}{1 + w_p(q)}\, w(q) = \frac{g(q)l(q)}{d(q)g(q) - r(q)b(q)}\, w(q), \tag{3.4}$$

где в знаменателе находится характеристический полином замкнутой системы (3.1), (3.2)

$$D(q) = d(q)g(q) - r(q)b(q),$$

все корни q_i которого, в силу асимптотической устойчивости, удовлетворяют условиям $|q_i| < 1$ (П.3). При этом без ограничения общности можно считать, что коэффициент при старшей степени q этого полинома равен единице.

Поскольку передаточная функция объекта управления по возмущению не зависит от параметров регулятора, то из (3.4) следует, что свойства замкнутой системы и, в частности, ее точностные характеристики целиком определяются частотными свойствами возвратной разности $v(q) = 1 + w_p(q)$, которая является знаменателем передаточной функции замкнутой системы (от w к y):

$$T_{yw}(q) = \frac{w_f(q)}{1 + w_p(q)} = \frac{g(q)l(q)}{d(q)g(q) - r(q)b(q)}.$$

Исследуем частотные свойства возвратной разности $v(q)$ в системе (3.1), (3.2) с дискретным регулятором по выходу и получим оценки на предельно достижимые значения установившихся ошибок регулирования при действии на объект типовых ограниченных внешних возмущений – ступенчатых и гармонических.

3.2. Ступенчатые возмущения

Предположим, что внешнее возмущение является постоянным $w(k) = \text{const} = w^*$, где $w^* > 0$ – амплитуда возмущения. Тогда в соответствии с теоремой о предельных значениях [24, 25] из (3.4) для установившегося значения регулируемой переменной (ошибки регулирования) получим:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = y(\infty) = \frac{w_f(1)}{1 + w_p(1)}\, w^* = \frac{k_f}{1 + k_p}\, w^* = \frac{g(1)l(1)}{D(1)}\, w^*, \tag{3.5}$$

где $k_f = w_f(1)$ и $k_p = w_p(1)$ являются коэффициентами передачи (усиления) объекта управления (по возмущению) и разомкнутой дискретной системы соответственно. Из (3.5) видно, что чем выше коэффициент передачи разомкнутого контура, тем меньше установившаяся ошибка регулирования. Однако, как и в случае дискретных регуляторов состояния, данный коэффициент передачи принципиально ограничен сверху, что приводит к необходимости указать на предельно достижимую ошибку регулирования в системах с дискретным регулятором по выходу. Наиболее естественно этот факт выглядит в минимально-фазовом случае, поскольку в противном случае точность даже непрерывных систем ограничена. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что полином числителя передаточной функции объекта по управляющему воздействию $b(q)$ имеет корни внутри единичного круга $|q| < 1$.

Заметим, что возвратная разность $v(q)$ удовлетворяет следующему легко проверяемому тождеству, которое является аналогом (П.1),

$$1 + w_p(q) = \frac{D(q)}{d_p(q)}, \tag{3.6}$$

где $d_p(q) = d(q)g(q)$ – характеристический полином разомкнутой системы. Полагая в (3.6) $q = 1$ и учитывая, что в силу устойчивости полинома $D(q)$ будет выполняться доказанное в Приложении неравенство (П.4), придем к неравенству

$$|1 + k_p| < \frac{2^n}{|d_p(1)|}, \quad d_p(1) = d(1)g(1) \neq 0, \tag{3.7}$$

где n – степень полинома $D(q)$.

Заметим, что поскольку в знаменателе (3.7) присутствует конечное число, то коэффициент передачи разомкнутой дискретной системы всегда ограничен сверху. Это, в свою очередь, приводит к тому, что предельно достижимая статическая ошибка регулирования будет удовлетворять неравенству, вытекающему из (3.5):

$$|y(\infty)| > \frac{|k_f|\,|d_p(1)|}{2^n}\, w^* = \frac{|g(1)|\,|l(1)|}{2^n}\, w^*, \quad d_p(1) = d(1)g(1) \neq 0. \tag{3.8}$$

Если объект и/или регулятор содержат интегрирующие звенья ($d_p(1) = = d(1)g(1) = 0$), то представленные неравенства можно видоизменить по аналогии с замечанием 1.

Подчеркнем, что полученные неравенства и сформулированные выводы справедливы независимо от устойчивости и/или минимальной фазовости объекта управления. Однако от аналогичных неравенств теоремы 1 их отличает весьма существенная черта. Правая часть данных неравенств содержит характеристический полиномом объекта $d(q)$ и характеристический полином $g(q)$ регулятора, вычисленные на нулевой частоте (при $q = 1$). Вместе с тем если объект управления минимально-фазовый, то многие методы синтеза дискретных регуляторов по выходу [7, 20] и, в частности, l_1-теория оптимального управления [21–23] приводят к регуляторам, у которых $g(q) = b(q)$. Это означает, что нули объекта (лежащие внутри единичного круга) компенсируются полюсами регулятора. В этом случае полином $b(q)$ будет множителем характеристического полинома замкнутой системы $D(q) = b(q)[d(q) - r(q)]$, а полученные выше неравенства (в результате сокращения на полином $b(q)$ в выражениях (3.4) и (3.6)) приобретут вид:

$$|1 + k_p| < \frac{2^\rho}{|d(1)|}, \quad |y(\infty)| > \frac{|l(1)|}{2^\rho}\, w^*, \quad d(1) \neq 0, \tag{3.9}$$

где ρ – степень полинома $d(q) - r(q)$. Данные неравенства уже не содержат параметров регулятора, а определяются лишь свойствами объекта управления.

3.3. Гармонические возмущения

Предположим теперь, что внешнее возмущение является гармонической функцией вида $w(k) = w^* \sin(\omega k T)$, где $w^* > 0$ — амплитуда возмущения; ω – круговая частота (вообще говоря, неизвестная) и T – период дискретности (квантования) регулятора (3.2). Тогда в соответствии с результатами классической теории линейных дискретных систем [12, 17, 24, 25] амплитуда $a > 0$ выходных установившихся колебаний регулируемой переменной

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = a \sin(\omega k T + \phi) \tag{3.10}$$

(где ϕ – фазовый сдвиг относительно входной гармоники) может быть найдена по формуле

$$a = |T_{yw}(e^{j\omega T})|\, w^* = \frac{|w_f(e^{j\omega T})|}{|1 + w_p(e^{j\omega T})|}\, w^*, \tag{3.11}$$

где $T_{yw}(q)$ – передаточная функция замкнутой системы (3.1), (3.2) из (3.4).

В знаменателе (3.11) стоит модуль возвратной разности, вычисляемый на частоте внешнего возмущения. Чем больше этот модуль, тем меньше амплитуда a вынужденных колебаний регулируемой переменной y. Однако в дискретном случае эта величина всегда ограничена сверху и, следовательно, существует предельно достижимая амплитуда колебаний регулируемой переменной, уменьшить которую принципиально невозможно с помощью регулятора по выходу (3.2).

Т е о р е м а 5. *Возвратная разность системы* (3.1), (3.2) *с дискретным регулятором по выходу и предельно достижимая амплитуда ошибки регулирования при действии гармонического внешнего возмущения* $w(k) = w^* \sin(\omega kT)$ *для всех вещественных частот* $\omega \in [0, \pi/T]$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$|1 + w_p(e^{j\omega T})| < \frac{2^n}{|d_p(e^{j\omega T})|}, \quad d_p(e^{j\omega T}) \neq 0, \tag{3.12}$$

$$a > \frac{|w_f(e^{j\omega T})|\,|d_p(e^{j\omega T})|}{2^n}\, w^*. \tag{3.13}$$

Теорема 5 доказана в Приложении.

Заметим, что при нулевой частоте внешнего возмущения $\omega = 0$ из теоремы 5 вытекают неравенства (3.7) и (3.8). Подчеркнем, что неравенства данной теоремы справедливы независимо от минимальной фазовости объекта управления. Вместе с тем если объект управления минимально-фазовый, то при $g(q) = b(q)$ и $D(q) = b(q)[d(q) - r(q)]$ эти неравенства (в результате сокращения на полином $b(q)$ в выражениях (3.4) и (3.6)) приобретут вид:

$$|1 + w_p(e^{j\omega T})| < \frac{2^\rho}{|d(e^{j\omega T})|}, \quad a > \frac{|l(e^{j\omega T})|}{2^\rho}\, w^*, \quad d(e^{j\omega T}) \neq 0, \tag{3.14}$$

где ρ – степень полинома $d(q) - r(q)$. Правые части данных неравенств не содержат параметров регулятора, а определяются лишь свойствами полиномов объекта управления.

4. Заключение

Показано, что в отличие от непрерывного случая в системах с дискретными регуляторами всегда существует конечный предел на достижимую точность регулирования. Вызвано это тем, что коэффициент передачи в разомкнутом состоянии для систем с одним управлением, а также сингулярные значения матрицы возвратной разности в многомерном случае, которые определяют установившиеся ошибки регулирования, являются принципиально ограниченными величинами в силу специфики модальной области устойчивости дискретных систем. Очевидно, что указанное принципиальное ограничение будет сказываться тем сильнее, чем ниже порядок системы и чем больше период квантования дискретного регулятора. Полученные результаты также легко объясняют невозможность обеспечения бесконечного запаса устойчивости по коэффициенту усиления в процедурах LQ-оптимизации дискретных систем [4, 7, 8, 30, 31].

В качестве внешних возмущений в работе рассматривались типовые ограниченные вектор-функции времени: ступенчатые и гармонические (неизвестной частоты). При этом единственное требование к регуляторам (помимо их физической реализуемости), которое использовалось при выводе основных результатов, это условие асимптотической устойчивости замкнутой системы. Поэтому выводы работы относятся ко всему множеству дискретных стабилизирующих регуляторов, каким бы методом они ни были построены. В этих условиях получены следующие основные результаты.

1. Доказано, что в системах с дискретными регуляторами всегда существует конечный предел на достижимую точность регулирования.

2. Для систем с одним управляющим воздействием получена достижимая оценка на величину модуля частотной передаточной функции разомкнутой системы (коэффициента усиления при ступенчатых возмущениях) и на уровень минимально возможных ошибок регулирования, которая не зависит от параметров дискретного регулятора, а определяется порядком системы, величиной периода квантования и свойствами объекта.

3. Для многомерных систем получена аналогичная достижимая оценка на величину сингулярных значений частотной передаточной матрицы возвратной разности, которые определяют предельные ошибки регулирования систем с несколькими управляющими воздействиями.

Представленные результаты легко обобщаются на более широкий класс полигармонических возмущений с неизвестными амплитудами и частотами, которые ограничены по мощности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Представим уравнения замкнутой системы в виде (при $m = m_1 = 1$, $w = 0$)

$$\begin{bmatrix} qI_n - A & -B_2 \\ -K & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = 0.$$

Тогда характеристический полином $D(q)$ замкнутой системы (2.1), (2.3) с учетом известного правила раскрытия определителя блочной матрицы [32, 33] можно записать так:

$$D(q) = \det \begin{bmatrix} qI_n - A & -B_2 \\ -K & 1 \end{bmatrix} = \det(qI_n - A)[1 - K(qI_n - A)^{-1}B_2],$$

где $\det(qI_n - A) = d(q)$ – характеристический полином разомкнутой системы, совпадающий в данном случае с характеристическим полиномом объекта. Отсюда получим тождество

$$1 + w_p(q) = \frac{D(q)}{d(q)}. \tag{П.1}$$

Выразив характеристический полином замкнутой системы

$$D(q) = (q - q_1)(q - q_2) \ \ldots \ (q - q_n)$$

через его корни q_i $(i = \overline{1,n})$, из последнего тождества при $q = 1$ с учетом (2.8) получим

$$|1 + k_p| = \frac{|(1-q_1)(1-q_2)\ \ldots\ (1-q_n)|}{|d(1)|}. \tag{П.2}$$

Поскольку замкнутая система (2.1), (2.3) асимптотически устойчива

$$|q_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{П.3}$$

то для каждого вещественного корня q_i полинома $D(q)$ будет выполнено неравенство $|(1 - q_i)| < 2$. Если же корень $q_i = \operatorname{Re} q_i + j \operatorname{Im} q_i$ полинома $D(q)$ компле́ксный, то в числителе (П.2) он присутствует вместе со своим комплексно-сопряженным значением $\overline{q}_i$. На основании этого имеем:

$$\begin{gathered}(1-q_i)(1-\overline{q}_i) = (1 - \operatorname{Re} q_i - j \operatorname{Im} q_i)(1 - \operatorname{Re} q_i + j \operatorname{Im} q_i) = \\ = (1 - \operatorname{Re} q_i)^2 + \operatorname{Im}^2 q_i = 1 + \operatorname{Re}^2 q_i + \operatorname{Im}^2 q_i - 2\operatorname{Re} q_i < 2 - 2\operatorname{Re} q_i = \\ = 2(1 - \operatorname{Re} q_i) < 2^2.\end{gathered}$$

Здесь знаки неравенства поставлены в силу (П.3). На основании изложенного для числителя правой части (П.2) будет иметь место неравенство

$$|D(1)| = |(1-q_1)(1-q_2)\ \ldots\ (1-q_n)| < 2^n, \tag{П.4}$$

откуда и следует доказываемое неравенство (2.9).

Второе из доказываемых неравенств – (2.10) – вытекает из (2.7) с учетом (2.9).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Оценим числитель правой части тождества (П.1) при $q = e^{j\omega T}$, предварительно выразив полином $D(q)$ через его корни

$$D(e^{j\omega T}) = (e^{j\omega T} - q_1)(e^{j\omega T} - q_2)\ \ldots\ (e^{j\omega T} - q_n).$$

Каждый из сомножителей последнего выражения, в силу условия (П.3) асимптотической устойчивости замкнутой системы, удовлетворяет неравенству

$$|e^{j\omega T} - q_i| < 2, \quad i = \overline{1,n}.$$

В этом легко убедиться из геометрической интерпретации выражения левой части последнего неравенства, которое представляет собой длину радиуса-вектора, проведенного из точки q_i (принадлежащей внутренности единичного круга) в точку $e^{j\omega T}$, находящуюся на единичной окружности с центром в начале координат, как показано на рисунке.

С учетом последнего неравенства получим оценку

$$|D(e^{j\omega T})| < 2^n, \tag{П.5}$$

на основе которой из тождества (П.1) придем к первому из доказываемых неравенств. Второе из них следует из (2.15) для амплитуды установившихся колебаний регулируемой переменной при учете (2.16).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Характеристический полином $D(q)$ замкнутой системы (2.1), (2.3) можно представить как в [7]:

$$D(q) = \det \begin{bmatrix} qI_n - A & -B_2 \\ -K & I_m \end{bmatrix} = \det(qI_n - A) \det[I_m - K(qI_n - A)^{-1}B_2].$$

Это выражение получено с использованием правила раскрытия определителя блочной матрицы из [34].

Отсюда получим тождество

$$\det[I_m + W_p(q)] = \frac{D(q)}{d(q)}, \quad d(q) = \det(qI_n - A). \tag{П.6}$$

Представим левую часть этого тождества в виде [33]:

$$\det[I_m + W_p(q)] = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i[I_m + W_p(q)],$$

где $\lambda_i[V]$ – i-е собственное значение матрицы V, и воспользуемся равенством из [33]:

$$\prod_{i=1}^{m} |\lambda_i(M)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i(M),$$

где $\sigma_i(M)$ – i-е сингулярное значение матрицы M.

Полагая в тождестве (П.6) $q = 1$, на основе последних равенств и доказанного ранее неравенства (П.4), справедливого в силу асимптотической устойчивости замкнутой системы (2.1), (2.3), запишем цепочку равенств и неравенств:

$$\begin{gathered} |\det[I_m + W_p(1)]| = \prod_{i=1}^{m} |\lambda_i[I_m + W_p(1)]| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(1)]; \\ |\det V(1)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(1)] = \frac{|D(1)|}{|d(1)|} < \frac{2^n}{|d(1)|}; \\ (\sigma_{\min}[I_m + W_p(1)])^m \leqslant \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(1)] < \frac{2^n}{|d(1)|}. \end{gathered} \tag{П.7}$$

Из последнего неравенства следует (2.22).

Переходя к доказательству неравенства (2.23), представим уравнение гиперэллипсоида (2.19) в эквивалентном виде $z^{\mathrm{T}}(\infty)Mz(\infty) = 1$, где M – симметрическая положительно определенная матрица $(m \times m)$:

$$M = [W_0{}^{-1}(1)]^{\mathrm{T}} \, [I_m + W_p(1)]^{\mathrm{T}} \, [I_m + W_p(1)] \, W_0{}^{-1}(1)/\|w^*\|^2.$$

Согласно [27] объем эллипсоида выражается формулой

$$V_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}(\det M)^{-1/2}, \tag{П.8}$$

где числовой коэффициент, содержащий гамма-функцию, при четных и нечетных значениях m определяется соответственно выражениями:

$$\frac{\pi^p}{p!}, \quad m = 2p; \quad 2\frac{(2\pi)^p}{(2p+1)!!}, \quad m = 2p+1.$$

Учитывая, что матрица M представляет собой произведение сомножителей и принимая во внимание известные свойства определителей [27] матриц, из (П.8) получим, что

$$V_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}\,\frac{|\det W_0(1)|}{|\det V(1)|}\,\|w^*\|^m.$$

Из последнего выражения с учетом соотношений (П.7) следует второе из доказываемых неравенств.

Очевидно, что неравенства (2.22) и (П.7) имеют смысл, если $d(1) \neq 0$. Если это не так, то можно использовать прием, аналогичный использованному в замечании 1.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Используя связь определителя матрицы с произведением собственных и сингулярных значений [27, 33] (см. доказательство теоремы 3), при $q = e^{j\omega T}$ придем к аналогу первого равенства (П.7):

$$|\det[I_m + W_p(e^{j\omega T})]| = \prod_{i=1}^{m} |\lambda_i[I_m + W_p(e^{j\omega T})]| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(e^{j\omega T})]. \tag{П.9}$$

Учитывая это равенство и полагая в тождестве (П.6) $q = e^{j\omega T}$, а также используя свойство асимптотической устойчивости замкнутой системы (2.1), (2.3), в силу которого справедливо неравенство (П.5), получим:

$$|\det V(e^{j\omega T})| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(e^{j\omega T})] = \frac{|D(e^{j\omega T})|}{|d(e^{j\omega T})|} < \frac{2^n}{|d(e^{j\omega T})|}. \tag{П.10}$$

Из (П.10) заключаем, что имеет место неравенство

$$(\sigma_{\min}[I_m + W_p(e^{j\omega T})])^m \leqslant \prod_{i=1}^{m} \sigma_i[I_m + W_p(e^{j\omega T})] < \frac{2^n}{|d(e^{j\omega T})|},$$

откуда и следует (2.33).

Переходя к доказательству неравенства (2.34) заметим, что объем гиперэллипсоида (2.32) выражается формулой (П.8), в которой необходимо заменить

m на $2m$. Тогда учитывая равенства $\Gamma(m+1) = m!$ и $\det M = |\det Q|^2$ и структуру матрицы Q из (2.31), получим, что

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}\,\frac{|\det W_0(e^{j\omega T})|^2}{|\det V(e^{j\omega T})|^2}\,\|w^*\|^{2m}.$$

Из этого выражения с учетом неравенства (П.10) придем ко второму из доказываемых неравенств данной теоремы.

Теорема 4 доказана.

Из доказанных выше соотношений (П.9), (П.10) следует, что в неравенствах (2.30) в знаменателе присутствуют ограниченные числа и, таким образом, нижняя граница нормы вектора амплитуд ошибок регулирования в многомерных дискретных системах с регуляторами состояния всегда конечна.

Доказательство теоремы 5. Первое неравенство теоремы 5 вытекает из тождества (3.6) в силу доказанного ранее неравенства (П.5), поскольку полином $D(q)$ устойчив. Второе следует из выражения (3.11) для амплитуды установившихся колебаний регулируемой переменной при учете первого.

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур LQ-оптимизации // АиТ. 1998. № 7. С. 83–95.

   Aleksandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems of Prescribed Accurancy. Part 1. Use of procedures of LQ-Optimization // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 7. P. 973–983.

2. *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности. II. Применение процедур H_∞-оптимизации // АиТ. 1998. № 8. С. 124–138.

   Aleksandrov A.G., Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems of Prescribed Accurancy. Part II. Use of procedures of H_∞-Optimization // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 8. P. 1153–1164.

3. *Александров А.Г.* Свойства аналитически сконструированных линейных систем // АиТ. 1975. № 10. С. 5–11.

   Aleksandrov A.G. Properties of Analytically Designed Linear Systems // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 10. P. 1573–1579.

4. *Safonov M.G.* Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. Cambridge. Massachusetts: MIT Press, 1980.

5. *Садомцев Ю.В.* Конструирование систем управления с обратной связью по критериям точности и грубости. Саратов: Изд-во СГТУ, 2003.

6. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.

7. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.

8. *Shaked U.* Guaranted Stability Margins for the Discrete-Time Linear-Quadratic Optimal Regulator // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 2. P. 162–165.

9. *Честнов В.Н.* О предельном коэффициенте передачи аналитически сконструированных систем с цифровыми регуляторами // Деп. в ЦНИИТЭИ приборостроения, 1985. № 3122. 8с.

10. *Честнов В.Н.* Предельно достижимая точность систем с цифровыми регуляторами // Тр. Моск. ин-та стали и сплавов "Частотное управление". М.: 1994. С. 40–55.

11. *Kwakernaak H., Sivan R.* The Maximally Achievable Accurancy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters // IEEE Trans. Autom. Control. 1972. V. AC-17. No. 1. P. 79–86.

12. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

13. *Пасуманский М.А., Первозванский А.А.* Предельная точность линейных систем и асимптотическое поведение H_2 и H_∞-норм // АиТ. 1995. № 7. С. 24–32.

    Pasumanskii M.A., Pervozvanskii A.A. Limiting Accuracy of Linear Feedback Systems and Asymptotic Behavior of the H_2-Norm and H_∞-Norm // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 7. P. 925–932.

14. *Садомцев Ю.В.* Статическая регулируемость выхода линейных стационарных управляемых систем // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1990. № 2. С. 15–22.

15. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.

16. *Sandberg I.W., Xu L.Y.* Steady-State Errors in Discret-Time Control Systems // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 523–526.

17. *Kuo B.C.* Automatic control systems. N.Y.: Prentice-Hall, 1991.

18. *Садомцев Ю.В., Торгашева О.Ю.* Предельная точность дискретных систем с линейно-квадратическим регулятором // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 6. С. 62–69.

19. *Садомцев Ю.В., Торгашева О.Ю.* Оценка предельной точности дискретных систем для одного класса динамических регуляторов по выходу // АиТ. 2005. № 9. С. 68–85.

    Sadomtsev Yu.V., Torgashova O.Yu. Estimation of the Limit Accuracy of Discrete Systems for a Class of Dynamic Controllers Relative to the Output // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 9. P. 1423–1439.

20. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.

21. *Якубович Е.Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.

    Yakubovich E.D. Solution of a Problem in the Optimal Control of a Discrete Linear System // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 9. Part 2. P. 1447–1453.

22. *Якубович Е.Д.* Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения // АиТ. 1977. № 4. С. 49–54.

    Yakubovich E.D. Optimal Control of Linear Discrete System in the Presence of a Nonmeasurable Perturbation // Autom. Remote Control. 1977. V. 38. No. 4. Part 1. P. 492–496.

23. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

24. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.

25. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.

26. *Maciejowski J.M.* Multivariable Feedback Design. Wokingham: Addison-Wesly Company Inc., 1989.

27. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

28. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 4–16.

29. *Честнов В.Н.* Синтез цифровых H_∞-регуляторов состояния многомерных систем заданной точности // АиТ. 2005. № 8. С. 46–51.

Chestnov V.N. Design of Digital State H_∞-Controllers of the MIMO Systems with Prescribed Precision // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 8. P. 1233–1238.

30. *Александров А.Г.* Построение дискретных систем управления с заданными свойствами // АиТ. 1973. № 9. С. 57–66.

Aleksandrov A.G. Construction of Discrete Control Systems with Given Properties // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 9. P. 1414–1423.

31. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control. Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice-Hall, 1990.

32. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.

33. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.

34. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 28.02.2013